

中学校数学科における曲線の性質を題材にした授業開発 — 曲線について関心を広げる —

荻無里 広造

千葉大学大学院教育学研究科修士課程

本研究は、中学校3年生を対象とした選択数学授業において、有用性や美しさに注目しつつ、中学生の曲線への関心を広げることを目標に発展的な学習の一部として行い、学習指導要領の範囲を超えた曲線の性質を題材に授業プランを開発、実践し、その成果と課題を明らかにする。本研究では「放物線」「懸垂曲線」「サイクロイド」の3つの曲線の性質を題材として授業プランを開発した。授業を行った結果、身の回りの曲線を探究したいという姿勢がうかがえるなど多様な効果がみられた。¹

キーワード：中学校、選択数学、曲線、コンピュータ、実験

1. 問題の所在

1.1. 曲線への関心を広げる必要性

(1) 理科との関連

曲線への関心を広げることにどのような意味があるだろうか。理科との関連で曲線のもつ性質を扱うことに意味がある。たとえば、関数 $y=ax^2$ に関わる具体的な事象として落体運動がある。落体運動を科学的に考察したのはガリレイである。ガリレイは実験によって「落下距離は落下時間の自乗に比例する」という法則を発見した。数学と理科との関わりについて、文部科学省(2008)には次の記述がある。

関数は、具体的な事象や場面とのかかわりの中で学習することが大切である。関数 $y=ax^2$ にかかわる具体的な事象として、例えば、理科で学習する斜面をころがる物の運動や、車の制動距離、また、噴水の水が作る形、パラボラアンテナなど、身近に感じたり目にしたりすることができるものがある。²

数学と理科とを関連させることに意味のあることが分かる。また、同様の指摘を長岡(2009)もしている。

「2次関数 $y=ax$ の2乗、 $a>0$ のときは下に凸の放物線」。だから何なんだ。それを知ってどういう嬉しいことがあったのか。質点の運動と結びつけるとか、線型でない関数との最初の出会いとか、2次関数だけで成り立つ性質とか、そういうことはあまり教わっていないようですね。他方、物理をはじめ、

理科でも、背景にある数学的演繹のすごさをあまり教えないようです。

数学には、たくさんの豊かな意味があるのですが、定型的な問題を素速く正確に解くことばかりに熱中して、その意味を見損なっているような気がします。

意味が分かれば数学ほど、子供心に楽しいものではありません。目に見えない世界が、研ぎ澄まされた精神には見えてくる、ということが体験できるのですから。³

長岡のいう「質点の運動」とは落体運動のことだと思われる。また、「線形でない関数」とは、すなわち直線でない曲線のグラフであろう。「2次関数だけで成り立つ性質」とは、平行に入ってきた波を焦点に集める性質のことであろう。長岡によると2次関数を質点の運動や2次関数だけで成り立つ性質と結びつけることで、数学がもつ意味が一段と豊かになるという。この理由から、数学を理科と関連させた指導には意味があると言える。

(2) 数学教育におけるコンピュータの活用

次に、数学教育におけるコンピュータの活用についてである。数学教育でコンピュータを活用することについて、以下の記述を紹介する。

(2) 各領域の指導に当たっては、必要に応じ、そろばん、電卓、コンピュータや情報通信ネットワークなどを適切に活用し、学習の効果を高めるよう配慮するものとする。特に、数値計算にかかわる内容の指導や、観察、操作や実験などの活動を通じた指導を行う際にはこのことに配慮するものとする。⁴

Kozo OGINASA : Development of a Teaching Program on Several Sorts of Curves for Junior High School Students — Spreading The Interest in Curve —
Graduate School of Education, Chiba University

上の記述から、観察、操作や実験などで、コンピュータなどの情報機器の利用が促されているといえる。

また、清水（1997）は、テクノロジーの発達と数学教育の関係について、次のように述べる。

近年のテクノロジーの発達により、従来時間がかかったり正確なデータが収集できなかった身近な自然・社会現象のデータ収集が容易に行え、しかも、得られたデータをグラフ的、数值的、代数的に多角的に解析することが可能になった。また、シミュレーションの発達により、これまで実際に実験できなかった現象が、シミュレートすることが可能になり、自然・社会現象を数学的に実験・観察することが容易に行えるようになった。⁵

テクノロジーの発達が数学教育にとって意味のあることが分かる。では、上記で清水が指摘する「これまで実際に体験できなかった現象」とは何か。たとえば、サイクロイドの軌跡を撮影することは、その一例であると思われる。

コンピュータなどのテクノロジーを活用することで、これまで中学校数学科で扱うことができなかった曲線を取り上げることができると思われる。

1.2. 曲線にある性質

(1) 形を表す要素

そもそも曲線にはどのような特徴があるのだろうか。杉本（2003）は、曲線について形を表現するさいに最も基本となる要素と指摘する。人は、物には輪郭があるように感じる。しかし、実際には輪郭にそって光の調子が急激に変化するだけで、そこには線などない。人は輪郭を線で表現することを考案したのである。

構造物をはじめとする人工物を一定の水準で間違いなくつくるために、人は設計図を考案した。これは人工物のつくり方を、線画でしめたものである。また、骨格として曲線を考えることもある。たとえば、手足と胴体を曲線だけで描く人物像を棒線画という。これは関節の曲がり具合などだけに着目して表現しようという意図の表れである。また、カーレースのコースにみられる急な曲がり角をヘアピンカーブと称するのも、その骨格部分の曲がり方に着目して、ヘアピンにたとえているのである⁶（図 1）。

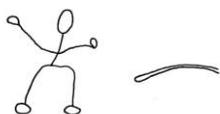


図 1 棒線画とヘアピン

（杉本（2003）を参考に筆者が描いた）

(2) 曲線の実用的な効果

曲線には効用とでもいえる性質はあるのか。たとえば、放物線には平行に入ってきた波を一点に集中させる性質がある。放物線の形に固有なこの性質は、光の波や音波などの信号を増幅するのに非常に便利である。加えて、パラボラ集音マイクは小声の会話を拾える。このマイクは、鳥の声を拾うといった自然界での録音にも役に立つ。また、パラボラアンテナを使うと、同じ原理で電波を増幅できる。

(3) 曲線の美術的な効果

曲線と美術との結びつきを指摘する者もいる。田村（1994）は「美しい図形とは、単純な規則によって作られた図形である」という。田村は美しさをもった図形として、アルキメデスの螺線と等角螺線をあげている。これら 2 つの図形は、単純な規則によって描ける。自然界にも螺線はさまざまところに現れる。たとえば、水の渦や台風の目、ヒマワリの花や巻き貝などの形にもみられる。

アルキメデスの螺線と等角螺線のほかにも、身近なところでは、飛行機や新幹線の流線形、スマートフォンのデザインなどの形にも機能とともに美しさを備えた曲線が存在する。

以上、素朴に曲線とは何かということを展望した。「曲線」は形を表現する言葉として使われるだけでなく、実用的な効果や美しさを備えているといえる。こうした曲線の性質を学習することで、曲線の理解が深まるのではないか。

2. 研究の目的と方法

2.1. 研究の目的

本研究の目的は、中学校 3 年生を対象とした選択教科において発展的な学習の一部として学習指導要領の範囲を超えて中学生に曲線を指導する。扱う視点としては、有用性や美しさに注目しつつ、生徒が曲線に関心を持つことに重点をおく。

2.2. 研究の方法

中学校 3 年生を対象に、作成した授業を実践する。授業実施には以下の制約がある。

- ① 希望者を対象とした選択授業の時間に行う。
- ② 通常の授業とは別の教室、学級とは異なるクラスで実施する。

授業中の生徒の実際の様子、ビデオによる録画の分析、生徒による授業プリントの記述、アンケートの感想から授業プランの有効性を明らかにしていく。

3. 本研究で取り上げる曲線

3.1. 本研究で取り上げる曲線

本研究で取り上げる曲線を検討するに当たり、3つの観点を設定した。

- ・ 理科との関連が可能な曲線である
- ・ コンピュータを活用した指導ができる
- ・ 日常生活と結びつけた指導ができる

上に示した3つの観点から、本研究において取り上げる曲線は「放物線」「懸垂曲線」「サイクロイド」の3つにした。それぞれの曲線について以下に説明する。

○放物線

放物線は運動から取り出すことができる。たとえば、投げられたボールの軌道は放物線という曲線になる。放物線という名の由来は、水平方向に放り出された物体が重力にひっぱられて落ちるときに描く軌跡である。

○サイクロイド

走る自転車の車輪のある一点に注目して動きを抽出することによって、特殊な曲線を見いだすことができる。自転車の車輪を単純化して一つの車輪に注目する。車輪の一点にシールを貼って、車輪を転がしシールの軌跡を抽出することで、サイクロイドという曲線になる。

○懸垂曲線

曲線が象徴的な橋がある。たとえば、半円の形に似ているアーチ橋である。

アーチ橋の曲線がどのようなものかは実験で容易にわかる。重さの様なひもや鎖といった、たるみやすい長い物を用意する。その両端を固定して持ったとき、重力の影響によってひもや鎖は自然に下にたるむ。このたるみの形は懸垂曲線と呼ばれている。この懸垂曲線を逆にした形が理想的なアーチの形である。この形状は、古代から建築や橋梁において使用されている。アーチ橋は、懸垂曲線がもつ力学的な性質をうまく利用している。

本研究ではこの3つの曲線を授業で取り上げることにする。

3.2. 本研究で取り扱う曲線に関する先行実践の検討

3つの曲線「放物線」「サイクロイド」「懸垂曲線」を扱った授業を開発するに当たり、それぞれの曲線を取り扱った先行実践を検討する。

(1) 「身の回りにおける曲線の形を探る—懸垂曲線と放物

線—」の実践

まずは、放物線と懸垂曲線を取り扱った先行実践である。実践の概要は以下である。

- ・ 授業名：「身の回りにおける曲線の形を探る—懸垂曲線と放物線—」
- ・ 対象：東京学芸大学附属竹早中学校 3年生、4クラス
- ・ 日時：2011年9月20日
- ・ 授業のねらい：身近にある曲線の形について、既習の数学を基にして考え、調べたことを説明する。また、身の回りの形に関心や興味をもち、数学的に探究しようとする姿勢をもつ。
- ・ 授業時間数：論文に記載なし。

○ 授業内容

この実践の授業内容を述べる。この実践は、鈴木ほか(2012)「中学生の科学リテラシー向上を目的としたICTの活用(2)」で述べられている実践の1つとして報告されている。この研究の目的は、「ICT活用の効果としての生徒の科学リテラシーの変容を明らかにすること」としている。

この授業は関数 $y=ax^2$ 学習を終えた後に実施された。関数グラフ作成ソフト GRAPES⁹を活用した授業である。授業の概要は以下である。

- ・ 放物線の身近な例として、ホースから水が噴水のように飛び出す写真を見せ、どんな形をしているかと生徒に質問する。
- ・ GRAPESの背景に噴水の写真を貼り付けて放物線であることを確認する。
- ・ チェーンの両端を持って垂らした形を実物と写真で見せる。
- ・ 生徒にこのチェーンの形は何だろうかと問いかける。
- ・ 「<本時の課題>チェーンの形が放物線であるかどうかを調べよう」を提示する。
- ・ 生徒から、軸を取りチェーン上の点の座標を求めて $y=ax^2$ の式に合うかどうかを調べるなどの考えがでたので、GRAPESの背景にチェーンの写真を貼り付けたときのプリントを生徒に配布し各自で調べさせる。
- ・ チェーンの形を分析すると、 x が2倍3倍となるときに、 y は4倍9倍とならない。
- ・ 誤差にも触れ、GRAPESで懸垂曲線と呼ばれる曲線になることを確認する。

○ 先行実践の到達点と課題

まず、先行研究の到達点を述べる。この実践は、チェーンの曲線の変化の割合に注目し、チェーンの曲線が放物線にならないことが理解できる内容になっている。「チェーンの曲線の変化率が、既習事項である放物線の変化率と等しくなるか」という点を取り上げることで中学校の教育課程にはない懸垂曲線を扱っている。

この実践の課題を述べる。この実践のねらいは「身近にある曲線の形について、既習の数学を基にして考え、調べたことを説明する。また、身の回りの形に関心や興味をもち、数学的に探究しようとする姿勢をもつ」である。実践のねらいには、身近にある曲線に関心を持たせようとする姿勢が窺える。しかし、この実践からは生徒の関心がどのように広がったのか述べられていない。また、身の回りの形への関心や興味はどのように変化したのかも不明である。

(2) 「高校生に対する最速降下曲線についての出張授業について」の実践¹⁰

次に、サイクロイドを取り扱った先行実践である。実践の概要は以下である。

- ・ 授業の題目：最速降下曲線について
- ・ 対象：和歌山県の公立高校、高校2年生の理系クラス
- ・ 日時：2009年9月
- ・ 授業時間数：50分×4

○ 先行実践の到達点

川上(2011)はサイエンスパートナーシッププログラム¹¹によって高校生を対象に、サイクロイドの出張授業を行った。出張授業をするに当たり、2点配慮したという。一つは「実習や作業や実験を取り入れた点」であり、もう一つは「高校の教科書には書かれていないが、生徒達が興味をもつであろう内容を授業した点」であるという。川上は、この2点を踏まえ、発泡スチロールを切ることで、最速降下曲線の模型を作る授業を行った。(最速降下曲線については4.3で述べる。)

この実践は、高校生が対象である。中学生向けにサイクロイドの授業を開発するならば、以下の2点が参考になる。

第一に、実験をすることで、最速降下曲線の理解を深めている点である。川上は、発泡スチロールを切って曲線を実際に作る課題を設定している。実験の手順は、まずスチロールカッターを使って発砲スチロールを加工する。次に、ビー玉を転がして実験をする。そして、最適な曲線に近いものを求める。

生徒の感想には「実験をすることでいつもは難しくわからなかったことを楽しく学んでわかりやすかった」

「発泡スチロールを使って実験して楽しかった。サイクロイドのすごさが分かっておもしろかった」など実験に対して、肯定的な意見が述べられている一方で、「予想していたより楽しくなかった」「考え方が難しかった」など否定的な意見も述べられている。最速降下曲線は、高校生が対象であっても容易に扱えないことが分かる。中学生を対象に扱う場合は、より丁寧な指導をする必要があると思われる。

第二に、媒介変数表示を未習の高校2年生に、関数電卓を用いる手立てを講じる点である。川上は次のように述べている。

高校2年生の9月時点では、微積分を未習であり、三角関数の一般角・弧度法が既習の状態である。媒介変数表示も未習であるので、このときの授業で説明した。実際に上向きサイクロイドを描いてもらうときも、点をプロットするときの角を $\frac{\pi}{6}$ 刻みとした。

角の刻みを細かくすると、きれいなサイクロイドが描けるのだが、三角関数の値の計算が複雑になるために、 $\frac{\pi}{6}$ 刻みを採用した。点をプロットしやすくするために、関数電卓を用いた。¹²

川上が対象とした高校2年生は、実践時において媒介変数表示を未習であった。しかし、川上が関数電卓という手立てを講じることで、生徒がグラフの概形を描けることが分かる。これは、コンピュータを使うことで高校生にとって発展的な課題を指導している一例だと思われる。

これらの先行実践から見出された点をふまえ、本研究で実施する「曲線」の授業を開発していく。

4. 授業プランの開発

4.1. 放物線の教材化

授業で取り上げる放物線の特徴は次の2点である。

第一に、変化率が一定となる点である。放物線とは、投げた物体が描く軌跡のことである。放物線の指導は、誤差の取り扱いが困難なこともあり、具体的な事象を生徒が学習する機会は少ない。そこで、投げたボールの軌跡を撮影し、分析する課題を設定する。

第二に、放物線のグラフは左右対称となる点である。放物線は紙を折った包絡線で作成できる。作図した曲線を折り合わせることで、曲線は重なる。したがって、放物線が左右対称になることが分かる。

以上、放物線を扱った授業は2時間展開で行う。

4.2. 懸垂曲線の教材化

懸垂曲線は鎖または太いワイヤーを両端に固定したときにできる曲線である。

授業開発の要点は、どのようにして中学生に懸垂曲線を指導するのかである。対象が中学生なので自然対数は未知である。したがって、関数を用いた指導は不可能である。そこで、そのような伝統的な取り扱いから全く離れた、独自の教材開発をする。

第一に、懸垂曲線の変化率についてである。4.1 節で述べた放物線の教材化では、放物線のグラフに関する対応表から階差をとることで、放物線の特徴を見つける指導をしている。懸垂曲線についても、放物線と同様に変化率の分析をする。懸垂曲線の階差をとると、懸垂曲線の階差は一定とならない。この点を授業で扱い、放物線と懸垂曲線とを比較する。

第二に、コンビーフ缶を使って橋を作る実験をする。これは理科の内容である。懸垂曲線は、その形を凍結して逆にすると力学的に理想的なアーチの形になる。このことは、1697年に数学者デイヴィット・グレゴリ (David Gregory) によって立証されている¹³。

授業では次のように実験をする。まず、生徒に懸垂曲線にある1つの性質として、その形を凍結して逆にすると力学的に理想的なアーチの形になることを示す。これは、スライドを用いて説明する。

次に、アーチの強さを体験する実験を行う。本授業では、コンビーフ缶を組み合わせることでアーチ橋のモデルを作って実験を行うことにする。これは、自然に垂らした鎖の形を、凍結して逆にすることは容易にできないと考えたからである。そこで、コンビーフ缶を組み合わせたアーチ橋のモデルを作って実験する。コンビーフ缶を組み合わせることで、アーチの橋を作ることができる。作成した橋に重りを置いたり、体重をかけたりして、橋の強さを体験することにする。

なお、本授業で作成するコンビーフ缶を組み合わせた橋の形は、懸垂曲線ではなく円に近い形になる。

授業では、理論的に正しいアーチの形は懸垂曲線であることが立証されていることを紹介する。

以上、懸垂曲線を扱った授業は1時間展開で行うことにした。

4.3. サイクロイドの教材化

高等学校では、媒介変数表示の有用さを理解させる際に、サイクロイドを用いた指導がなされている。サイクロイドとは「1つの円が定直線上をすべることなく転がるとき、その円周上の定点が描く曲線」のことである。

懸垂曲線と同様に、中学生にとってサイクロイドの方程式は未知である。三角関数も未知であるので、高校教材的な取り扱いはできない。ここでも独自のサイクロイ

ド教材を開発する。

第一に、サイクロイドの性質である最速降下曲線を取り上げる。(図2)のように地点Pから地点Qまでいろいろな坂道を想定して、Pからボールを転がすとする。このとき最も早くボールが地点Qに到達するのは、サイクロイドの坂道にしたときである。

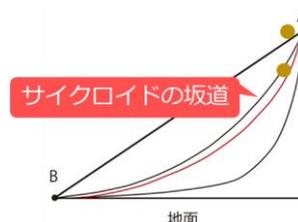


図2 サイクロイドの坂道

サイクロイドが最速であることは厳密には降下時間を求めて計算する必要がある。しかし、中学生では、その計算はできない。授業では、実験結果を示した映像教材を使用する。

第二に、サイクロイドの軌跡を実験で撮影する。回転する円の一点が描く軌跡を撮影する。4.1 節で述べた放物線の教材化ではスローシャッターを使ってボールの軌跡を撮影する。これを参考にし、サイクロイドの撮影を検討した。その結果、ガムテープを回転する円に見立て、それに光るライトを装着し、ライトの軌跡を撮影することにした。

以上の検討をもとに、中学生向けにサイクロイドを教材化することにした。サイクロイドを題材とした授業は2時間展開で行う。

5. 授業の実際とアンケートの考察

生徒のアンケートの記述、ビデオの記録、授業プリントの生徒の記述を分析し、生徒が課題解決をする場面を中心に授業を考察する。また、課題解決以外の場面であっても、筆者が考察をする上で必要だと思われることについては、状況に応じて記述していく。

授業の様子は、授業記録を引用して示す。以下の条件で記述する。

- (1) 授業者(筆者・荻無里)の発言を『 』で表記する。
- (2) 生徒・授業同行者の発言を「 」で表記する。生徒はA~P、授業同行者はT2、T3と表記する。
- (3) 実際の発言だけでは内容が伝わりにくい場合()で補足説明をする。

授業の概要は以下である。

実施校：千葉大学教育学部附属中学校

教室	： 視聴覚教室
教科	： 数学（選択数学）
1 単位時間	： 45 分
受講生徒数	： 16 名（男子 11 名 女子 5 名）
実施日時	： 1 時間目 平成 26 年 4 月 30 日（水）
	2 時間目 平成 26 年 5 月 7 日（水）
	3 時間目 平成 26 年 5 月 14 日（水）
	4 時間目 平成 26 年 5 月 21 日（水）
	5 時間目 平成 26 年 6 月 4 日（水）
	6 時間目 平成 26 年 6 月 18 日（水） ¹⁴
授業者	： 荻無里（筆者）

5.1.1 時間目

1 時間目について、授業の実際を記述し、考察をしていく。1 時間目において、生徒の課題は以下の 2 点である。

I	ボールが描く曲線を撮影する。
II	撮影した曲線を図示させ、気づいたことを記入する。

○ I について

課題 I 「ボールが描く曲線を撮影する」について考察する。

実験は班で行った。班員の構成は授業者が指示し、4 つの班ができた。それぞれの班の名称は 1 班、2 班、3 班、4 班とした。iPad は班に 1 台ずつ配布した。

実験する場面では、授業者が事前に予想していた通り、どの生徒も活発に活動していた¹⁵。実験を始めてしばらくの時間は、生徒はシャッターを切るタイミングが分からず、ボールの撮影に苦心していた。しかし、カメラアプリを使っているうちに慣れてきたようで、シャッターを切るタイミングも分かってくるようになっていった。

ボールの軌道を撮影した生徒からは「おお」「すげー」¹⁶といった声があがった。すべての生徒がボールの軌道を撮影できた。（図 3）



図 3 生徒が撮影した放物線

○ II について

課題 II 「撮影した曲線を図示させ、気づいたことを記

入する」について考察する。

生徒には撮影した曲線を、曲線の特徴（滑らかな曲線を描く）が分かるように図示させた。概ねすべての生徒が授業者の狙い通りの曲線を記述していた。

生徒が記述したプリントによると、曲線の特徴について生徒の気づきは、たとえば以下である¹⁷。

- ・ きれいな曲線になっている！
- ・ 曲線が左右対称に見える
- ・ 投げたときの高さでキャッチしたときの高さが同じ場合、ボールが手からはなれた場所から曲線の頂点までの長さ、曲線の頂点からボールをキャッチした場所の長さは等しい。

放物線の形に注目する生徒や放物線の数学的な特徴に気づくことができている生徒もいることが分かる。

5.2.2 時間目

2 時間目において、生徒の課題は以下の 2 点である。

I	折り紙で放物線を作図する。
II	階差を用いて曲線を分析する。

○ I について

まず、課題 I 「折り紙で放物線を作図する」について考察する。授業者の記憶によると、ほとんどの生徒は直線を多く引くと、その包絡線が曲線になると気づけていた¹⁸。生徒の様子を授業記録から引用する。

『今、皆にひたすら直線を引いてもらったんだけど、どう？直線しか引いてないのに、違うものが現れてないかな？』
授業者は数秒間、生徒の反応を待った。生徒 B が小さな声で次のようにつぶやいた。
B 「曲線」
授業者は生徒の呟きを拾っていない。
T2 「ほう」
B は、曲線を指でなぞりながらつぶやいた。T2 が大きな声で言うように促した。今度は大きな声で述べた。
B 「曲線？」
授業者は生徒の呟きを拾って、次のように述べた。
『おっそうそう、曲線が現れているね。今、皆が書いてくれたね』
ここで、H からも反応があった。
H 「曲線？」
『そうそう』

包絡線が曲線になることに、生徒が気づけていたこと

が分かる。次に、曲線が対称になることに注目させるために、授業者は曲線を半分に折るように指示をした。その時の様子を、授業記録から引用する。

『曲線を半分に折ってみてください。半分に折って透かして見て』
 生徒は、曲線を天井のライトに透かしてみる。
 『どう?』
 B「ずれてない」
 T2「ほほう」
 『曲線のところに注目してみると、重なっていない?』
 『はい、じゃあ元に戻してください。こういう時に、数学の言葉で言うのが、対称という言葉がありました』
 授業者は、授業時においては生徒Bの発言を拾うことができなかった。しかし、ビデオを見ると、次の言葉を呟いていた。
 B「線対称?」
 『で、今皆が引いた曲線は、さっきお待たせしていたものの、ある曲線になります。この秘密は授業の後で説明するので、今はこういう曲線が作れるんだっていうことで覚えといて下さい』

生徒Bは、曲線の対称性に気づいていたことが分かる。また、単元の最後に行った事後アンケート調査において、生徒Mは「最も印象に残った実験は何ですか?」という項目で「放物線の作図」をあげている。その理由として、「折り紙を折って放物線を作れるとしてびっくりしたから」と記述している。

○ IIについて

次に、課題II「階差を用いて曲線を分析する」について考察する。

まず、授業者がデモンストレーションを行った。授業者は、 $x = -1$ における y の値を読み取り、スクリーンに映した対応表に板書した¹⁹。生徒にはグラフから値を読み取り、対応表の空欄箇所をすべて埋めるように指示した。対応表に記入が終わった生徒には、対応表から気づくことをプリントに記入させた。

生徒の反応について述べる。授業者が事前に予想した通り、生徒は対応表の空欄を埋めることができていた。生徒はグラフから値を読み取り、対応表の空欄を埋めることは容易に取り組んでいた。授業記録には次のようにある。授業者が、生徒の記述についてコメントしている。

『皆が一番気づいてくれたことがありました。それは同じ値になっているということですね。全部、ここのところは0.5になっているとか、一定になっていると書いてくれていました。』

授業者が上記のように述べたことから、生徒は、階差が一定になるという点に気づいていたことが分かる。次

に、放物線単元のまとめをした。以下に、授業記録から引用する。

『で、そここのところが今日一番見て欲しかったところで、次の下のところのまとめに繋がる場所なんだけど、 y の差の差は一定になります。このようなときにできる曲線を、さっきポロって言っちゃったんだけど、放物線といいます。これは、どうしてこういう形になるかという、もう気づいてくれた人もいますけど、重力の影響でこのような曲線になります。』

生徒の様子について述べる。授業者がまとめを行う前に、授業プリントの空欄に「放物線」と記入している生徒が4, 5人いた。ボールを投げたときにできる軌跡が放物線であると事前に知っていたと考えられる²⁰。

以上で2時間目の授業が終了した。

5.3.3 時間目

3時間目について、授業の実際を記述し、考察をしていく。生徒の課題は以下の3点である。

- I 「身近なものの放物線クイズ」に回答する。
- II チェーンの曲線が放物線であるか分析する。

○ Iについて

まず、課題I「身近なものの放物線クイズ」について考察する。

授業者は現実世界で目にする曲線から放物線を選ぶクイズを出題した。授業者には、生徒の放物線に対する関心を広げるという狙いがあった。クイズの設問と生徒の回答結果は以下である。

- | | |
|------------------------|-----|
| (1) パラボラアンテナの形 | 3人 |
| (2) スケート選手がジャンプしたときの軌跡 | 14人 |
| (3) 噴水の軌跡 | 14人 |
| (4) 自動車のヘッドライトの形 | 4人 |
| (5) オリンピックの集光板 | 6人 |
| (6) 打ち上げ花火の飛び散る線 | 14人 |

上の設問は、放物線がもつ2つの特徴に即して設定した。以下の2つの特徴である。

- ① 地球上では、すべての物体が重力の影響を受ける点
- ② 放物線には軸に平行に進んだ物質を焦点に集める性質がある点。

①に該当するものが(2)(3)(6)であり、②に該当するものが(1)(4)(5)である。

②は授業で取り上げていない。したがって、生徒が分からないのは当然である。授業者は、クイズを出題した後に、スライドを使って②を理解させることにした。

しかし、スライドの説明では生徒が十分納得できなかった。後でビデオを見返すと、授業者自身が一方的に語っている。

生徒に放物線の関心を広げるために、6つの選択肢を用意した。しかし、事象を取り上げすぎてしまったため、授業者自身も十分に説明できなくなっている。②については、十分な時間をつかって、丁寧に指導する必要がある。また、放物線で構成された現物を持ち込み、焦点に集まる性質を実際に観察する方法も検討するべきであった。

○ IIについて

次に、課題II「チェーンの曲線が放物線であるか分析する」について考察する。

チェーンを自然に垂らした形は、放物線によく似ている。ここでは、チェーンの曲線が放物線かどうか分析した。放物線については「差を2階とると差が一定となる」と指導している。本時では、放物線のとおり同様に、階差をとってチェーンの曲線を分析した。生徒にはグラフから丁寧に値を読み取るように指導した。生徒の様子を授業記録から引用する。

Bはグラフ(図4)から値を読み取っている。一定の値にならずに、判断に苦しんでいる。以下である。
 『(グラフの値は)0.3になった?微妙に?』
 B「際どいですよ、これ全部。0.3か0.2かってところです」
 B「測り方の問題だな、きっと0.2だな」

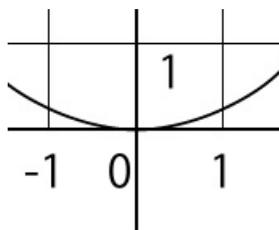


図4 チェーンの曲線のグラフ

次の場面は、授業者が生徒Pに質問したところである。

『(班の)意見が割れてるの?』
 P「放物線ではないです」
 T2『ざっくり取ってみてさ、取り方によってはできそうじゃない?そんなことない?』
 P「いや、もう俺の取り方的に、もう無理です」

これは、生徒Bが $x = 1$ における y の値を0.2でとるか0.3でとるかという場面である(図4)。生徒Bが述べている「測り方の問題」とはどのような意味か。生徒Bは「 y 値の測り方によっては、放物線と同じように階差が一定の値になると考えているのでは?」と考えている

と思われる。

また、生徒Pが述べている「取り方的に、もう無理です」というのはどういう意味か。これは、 y 値をとって階差を調べたところ、放物線の特徴を示していないという意味だと思われる。

授業者の記憶では、チェーンの曲線が放物線ではないことを、ほとんどの生徒が発見していたと思われる。

この曲線には、「懸垂曲線」という名前がついている点を指導した。

以上で3時間目の授業が終了した。

5.4.4 時間目

4時間目について、授業の実際を記述し、考察をしていく。生徒が取り組む課題は以下の2点である。

- I コンビーフ橋を制作する。
- II ビー玉を転がす実験をして、最短距離にすることが最短時間とならないことがわかる。

○ Iについて

まず、前回の続きである、コンビーフ橋の実験を行った。(図5)

コンビーフ橋に重りを乗せる実験は、無理なく行っていた。コンビーフ橋に重りを乗せた生徒は「え、すごくてねー」と述べるなど、コンビーフ橋の強さに驚いているようであった。



図5 コンビーフ橋の実験

授業者は、アーチ橋に関する一つ的话题を紹介した。昔は橋の形が円形だから強いと思われていた。しかし、懸垂曲線を逆にした形が理想的なアーチ形になるということを紹介した。そして、新しい単元に入った。

○ IIについて

動機付けは次に示すスライド(図6)を用いて行った。

点Aから点Bにウォーターライダーのコースを設定する。点Aから点Bを直線で結ぶとライダーのコースは最短距離になる。ライダーの距離を最短距離にすることが、到達時間を最も短くすることなのだろうか。点Aと点Bを結ぶいろいろなコースを作って、そこにビー

玉を流して確かめる課題を設定する。

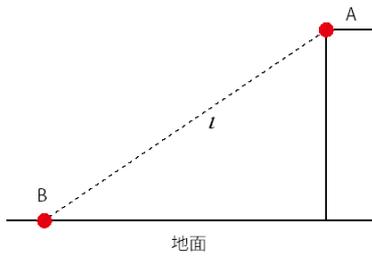


図 6 実験方法を示したスライド

ウォータースライダーのコースを考えるという動機付けは適切であったか考察する。

生徒にとって身近なウォータースライダーに見立てたことで、実験のイメージをもつことができたと考えている。生徒の反応を見ると、課題を提示したとき、生徒は口々にそれぞれの意見を言ったり、ジェスチャーをしてスライダーのコースを予想したりしていた。したがって、動機付けは適切であったと思われる。

次に実験について考察する。3 班の検討について、授業記録から引用し考察する。

3 班の検討について述べる。3 班はどのような曲線だと速くなるのか分かってきたようである。

以下に示す場面は、3 班が 3 番目の曲線の写真撮影が終了した場面である。T2 がどのパターンが一番速かったのか質問し、生徒が答えている。

A「最後のやつ ((図 7)) だよな?」

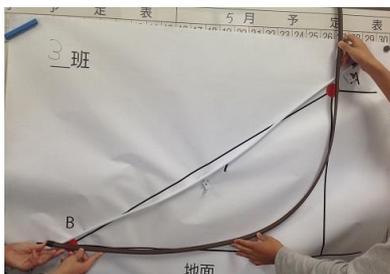


図 7 生徒が検討したコース

T2「最後のやつ、じゃあ (他の曲線と) その違いは?」

B「急」

「急? じゃあ急にすると (早い)?」

B「多分、(コースを) 急にしておかつ、(コースの) 最後の方でエネルギーを吸収する動き (働き) がないもの」

藤川教授「最初は急にすると。あとは勢いを殺さない。(勢いを) 殺しちゃうのはどうなの?」

A「まっすぐ行ってから急にすると」

B「なんか反対方向に押し戻す傾斜が付いていると、意味がない」

ここで B が述べている「エネルギーを吸収する動き (働

き)」とはどのような意味なのか。この場面について 3 班が述べているのは以下であると思われる。

「ほぼ真下に急降下するコースでは、点 B に向かうためにきついカーブを設定する必要が生じる。このコースでは、ビー玉の勢いが失われ、結果的に時間が掛かってしまう」という意味だと考えられる。3 班のように、大変鋭い考察をしている班もあった。

以上で 4 時間目の授業が終了した。

5.5.5 時間目

5 時間目について、授業の実際を記述し、考察をしていく。5 時間目は前回の授業で実験したコースの発表である。生徒の課題は以下の 2 点である。

- I 最短距離より速いルートが存在することを言葉で説明できる。
- II 最速降下曲線について学習する。

○ I について

「最短距離より速いルートが存在することを言葉で説明できる」について考察する。

班の発表から抜き出したキーワードは、「加速」「いきなり急降下」「最初に加速」「最初に傾き」の 4 つである。このキーワードから分かることは、まずはビー玉にスピードをつけることが大切だといえる。授業者は、「それぞれの班が、今発表してくれたことに共通していることを抜き出すと、「どうやら先にスピードをつけた方が速いんじゃないか、ということが言えそうですね²¹」と述べている。

録画したビデオによると、4 つの班すべてが、サイクロイド曲線に近づいたコースを見つけることができた。

○ II について

II 「最速降下曲線について学習する」の考察をする。ここでは、最速降下曲線の実験映像を見せた。

最速降下曲線についての実験映像を視聴した。映像には 3 つのコースにビー玉を流した。「加速不足のコース」「最速降下曲線のコース」「距離が長いコース」である (図 8)。この 3 つの中で、B に到着する時間が最も早いコースは「最速降下曲線のコース」である。実験映像を観ることで、最速降下曲線について深く理解する。授業記録から引用し、考察する。

『一瞬間なのでよく見てみてください。』 (図 8)



図 8 映像の抜粋①

T2 「一瞬だよ」



図 9 映像の抜粋②

生徒（不明）「はー」

ビー玉の落ちる速さに驚いている生徒の声。ビデオを見る限り、大部分の生徒が食い入るように画面を見つめている。T2 は生徒の反応を見て笑っている。

『見えた人？』

『ここ、ここ、ここ！』

授業がこのように生徒に述べ、ビー玉とビー玉の差が僅かであることを指摘した。(図 9)

『このホントにちょっとした差ね』

授業者はもう一度同じ映像を流した。2 回目の映像が流れる。

「は、は、は」

生徒はビー玉の速さに再び驚いている。

『これね、この黄色いやつ（最速降下曲線に流した）がここにちょっと見えるよね』

授業者はこのように述べ、ビー玉の僅かな差を指摘した。

動画を見せると、生徒はビー玉の速さに驚いていることが分かる。最短距離と最速降下曲線で転がしたビー玉の到達時間は僅かである。生徒は映像で納得していたようである。

5.6.6 時間目

6 時間目について、授業の実際を記述し、考察をしていく。生徒が取り組む課題は以下の 3 点である。

- I サイクロイドを撮影する。
- II 単元の復習をする。

○ I について

サイクロイドの定義は「円周上の一点が描く曲線」である。授業では、まずサイクロイドの定義を生徒に示した。次に、ガムテープに装着したライトの軌跡を撮影す

るとどの曲線になるかクイズで問うところから始めた。クイズの出題内容は次の通りである。生徒には 3 択から選ばせた (図 10)。生徒の予想は①10 人、②5 人、③0 人であった。事前に予想した通り、生徒の意見は①と②で分かれた。そして実験して確かめた。撮影には iPad を用いた。ガムテープに装着したライトの軌跡からサイクロイドを撮影した²²。

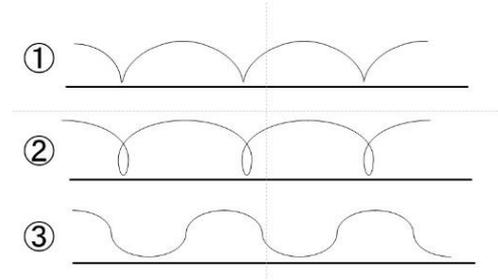


図 10 サイクロイドの選択肢

次に、サイクロイドの撮影を行った。撮影は班で行った。生徒 2 人に 1 台で iPad を配布した。2 人に 1 台にしたのは、実験では、ガムテープを転がす人、写真を撮影する人が必要なためである。授業の様子を授業記録から引用する。

B 「で、撮影ってどうやるの？問題は軌道をどう捉えるか、とりあえず転がしてみるか」

B 「転がしてみよう」

A 「ここ映る？」

B 「映ってないな」

A 「曲がるな」

B 「なるほど、動画みたいな感じなんだ。もう一回やってみよう。てっきりさ、押した瞬間に連射みたいなものになると思ってさ、2 回押したらすぐ止まっちゃって、ごめんごめん」

A 「はじめますよ」

生徒は、今度は撮影に成功した。撮影した軌跡を見て、次のように述べた。

B 「一番っぽいなこりゃー、一番だなこれは」(図 11)

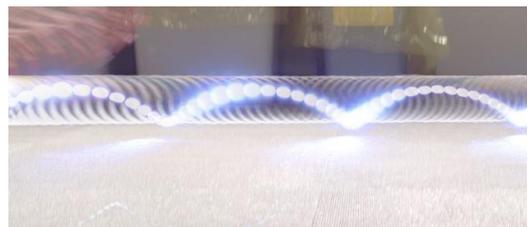


図 11 生徒が撮影したサイクロイド

サイクロイドの実験はどの生徒も軌跡を撮影することができていた (図 11)。放物線の実験では、ほかの選択肢の曲線を目指す生徒がいた。一方、サイクロイドの実

験では、ほかの選択肢を目指す生徒は見受けられなかった。

実験終了後、授業者は生徒にどの曲線になったか確認したところ、生徒全員が①に挙手をした。

○ IIについて

課題Ⅲは「単元の復習」である。本研究の単元「曲線」を復習した。本研究で扱った3つの曲線「放物線」「懸垂曲線」「サイクロイド」を復習した。それぞれの曲線がもつ、実用性と美しさを中心に授業者がまとめを行った。

5.7. アンケートの考察

中間アンケートと事後アンケートにおいて、「身の回りの曲線で調べてみたいもの」を生徒に回答させた。生徒の記述は以下の3つに大別できた。

- (1) 「物体がもつ曲線」
- (2) 「物体の運動が構成する曲線」
- (3) 「数学的な曲線図形」

それぞれの生徒の記述は以下である。

第一に、「物体がもつ曲線」である。これについては次の6つであった。「液体ガスタンク」「ドーム」「橋」「ラグビーボールの曲線」「山の曲線」「鉄道模型のレールの曲線」である。

第二に、「物体の運動が構成する曲線」である。これについては次の2つであり。「ブランコ」「バスケのシュートで一番入りやすい曲線」である。

第三に、「数学的な曲線図形」は「半円」「円」「球」「楕円」である。

それぞれの生徒の回答について、特徴的なものを挙げ、曲線の有用性と美しさについて生徒の記述から考察する。

「物体の形がもつ曲線」については「山の曲線」に注目する。山の曲線とは、山の稜線の形のことであろう。生徒Cは、曲線の美しさに注目したのでは、と思われる。また「空気抵抗を受けにくい飛行機の曲線」も注目したい。生徒Jは「空気抵抗を受けにくい」と記述している。曲線の実用性に注目したのではないと思われる。

「物体の運動が構成する曲線」は、「ブランコ」に注目したい。「ブランコ」とは、ブランコの台座が描く軌跡のことだと思われる。ブランコの台座が描く軌跡は、等距離の点の集合であり、ブランコの台座が描く軌跡は、円である。

「数学的な曲線図形」は「楕円」に注目したい。楕円は、中学校の教育課程では扱われていない。しかし、生徒Nには教育課程にない楕円について探究する姿勢がうかがえる。

生徒Cの記述には「食べ物に放物線はあるか？」というユニークな意見もあった。

以上より、本研究における曲線の授業によって、生徒

の曲線への関心は一定程度広がったといえる。

6. 課題

6.1. 研究の課題

研究の課題を3点述べる。

第一に、本研究で取り上げた曲線の妥当性である。本研究では、授業で取り上げる曲線の検討を十分にしていない。今後、曲線を題材として中学生に授業を行うならば、中学生にとって理解しやすい曲線は何か検討をする必要がある。

第二に、本研究は選択教科での実施であった。通常授業で実施するとすれば、関数単元の学習で曲線に関心を向けさせることが可能だと思われる。その際、本授業の内容をアレンジする必要があると思われる。

第三に、発展的な課題の教育課程上の位置づけである。本研究では学習指導要領の範囲を超えて、発展的な曲線を指導した。教育課程に馴染みにくい課題であっても、指導方法を工夫し、生徒が意欲をもって取り組む課題ならば、数学を勉強していく動機付けとして指導する意義はあると思われる。これについては今後の課題である。

¹ 本論文は、筆者の平成26年度千葉大学大学院教育学研究科修士論文「中学校数学科における曲線を題材にした授業開発—一曲線について関心を広げる—」の内容を抜粋し、再構成したものである。

² 文部科学省(2008)『中学校学習指導要領解説 数学編』、教育出版、p.137

³ 以下、朝日新聞GLOBEウェブサイトにおける長岡へのインタビュー記事「越境する数学」より引用した。https://globe.asahi.com/feature/100201/side/01_07.html (2015年3月16日最終閲覧)

⁴ 文部科学省ホームページ「現行学習指導要領・生きる力」より引用した。http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/you_uryou/chu/su.htm (2015年3月20日最終閲覧)

⁵ 佐伯昭彦、磯田正美、清水勝彦(1997)『テクノロジーを活用した新しい数学教育』、明治図書、p.23、引用部分の筆者は清水勝彦。

⁶ 高木隆司ほか(2003)『かたちの事典』、丸善株式会社、pp.158-159を参照した。参照部分の筆者は杉本剛。

⁷ 田村三郎(1994)『なぜ数学を学ぶのか』、大阪教育図書、pp.105

⁸ 鈴木一成ほか(2012)「中学生の科学リテラシー向上を目的としたICTの活用(2):教育理論と授業実践から導かれるICT活用の視点(プロジェクト研究)」、『東京学芸大学付属学校研究紀要』Vol.39、pp.35-51、http://ir.u-gakugei.ac.jp/bitstream/2309/130855/1/02854309_39_03.pdf (2015年3月16日最終確認)、参考部分の執筆者は小野田啓子。なお、授業は小野田が担当した東京学芸大学教育学部の教育実習生が行った。

⁹ 大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久が作成した関数グラフ作成ソフトのこと。<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/> (2015年3月16日最終確認)

¹⁰ 川上智博(2010)「高校生に対する最速降下曲線についての出張授業について」、『和歌山大学教育学部教育実践センター紀要』、No.20、pp.45-48、http://center.edu.wakayama-u.ac.jp/c/enterkiyou/kiyou_no20_pdf/045-048_KAWAKAMI.pdf (2015年3月16日最終確認)

¹¹ 「サイエンス・パートナーシップ・プログラム(SPP)」とは、学校・教育委員会等管理機関と、大学・科学館などの連携

により、児童生徒の科学技術、理科・数学に対する興味・関心と知的探究心などを育成する事業である。以上は文部科学省の公表資料「平成18年度文部科学白書」、http://www.mext.go.jp/b_menu/hakusho/html/hpab200601/002/002/036.htm (2015年3月16日最終確認)を参照した。

¹² 川上智博(2010)「高校生に対する最速降下曲線についての出張授業について」、『和歌山大学教育学部教育実践センター紀要』、No.20、p.47より引用した。

¹³ 完全にしなやかな状態で垂れ下がっている鎖は、アーチにおける支持力線とはまったく反対に、ただ引張応力に対してのみに対応することができる。その事実から数学者デイヴィット・グレゴリ(David Gregory)は一六九七年に、理論的に正しいアーチの形は懸垂線を逆にした形であるということを立証した。以上はベルト・ハインリッヒ(宮本裕、小林英信共訳)(1991)『橋の文化史』、鹿島出版社、p.42を引用した。

¹⁴ 本研究の授業時間は、授業プランを作成した段階で5時間を構想したが、5時間目が予定した時間で終わらなかったため、6時間で実施した。

¹⁵ 授業後に、授業を撮影したビデオを見て判断した。

¹⁶ 授業記録から引用した。

¹⁷ 生徒のプリントから引用した。

¹⁸ 包絡線という言葉は授業では使っていない。単に、折り目に沿って直線を引くと曲線になると指導した。

¹⁹ 対応表は、スクリーン上に上映されたスライドに授業者が記入した。

²⁰ 2時間目終了時に行ったアンケートによると、設問2「ボールを投げた曲線が放物線になることは知っていましたか？」の回答結果は、「①知っていた2人、②なんとなく知っていた9人、③まったく知らなかった4人」であった。11人の生徒が放物線を知っていたことが分かった。

²¹ 授業記録から引用した。

²² 使用したアプリはiOS用アプリケーション「Magic Shutter」。