研究ノート

非拡大写像および擬非拡大写像の不動点近似に関する最近の結果

青　山　耕　治

1　はじめに

本稿では, A. Moudafi (2008) で導入された不動点近似法[1)]に関する最近の結果[2)]の紹介とその解説を行う。

H を Hilbert 空間, f を H 上の縮小写像, T を H 上の非拡大写像, $\{\lambda_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, H の点列 $\{x_n\}$ を任意の $x_1 \in H$ および

$$x_{n+1} = \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n)Tx_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する。A. Moudafi (2008) は, T のある不動点を近似するために, この点列 $\{x_n\}$ の収束性を考察し, その応用例を示した。その後, A. Moudafi (2008) の結果の一般化や種々の非線形問題への応用などを含む多くの研究成果が発表され現在に至っている[3)]。

本稿では, A. Moudafi (2008) の一般化を扱うが, 特に点列 $\{x_n\}$ が

$$x_{n+1} = \lambda_n f_n(x_n) + (1-\lambda_n)T_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

1) viscosity approximation method
2) 主に K. Aoyama and Y. Kimura (2014) と K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) の内容
3) 本稿執筆時における A. Moudafi (2008) の引用数 (MathSciNet で示される数) は 230 を越えている。

で定義される場合の結果とその応用を扱う。ここで, $\{f_n\}$ および $\{T_n\}$ は, Hilbert 空間 H 上の写像列であるが, 第 3 節では $\{T_n\}$ が非拡大写像列の場合, 第 4 節では $\{T_n\}$ が擬非拡大写像列の場合の結果を述べる。なお, 第 3 節以降で必要な定義などをまとめて第 2 節に記す。

2　準備

本稿では, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。

T を H から H への写像とする。T の不動点 (fixed point) の集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す。つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in H : Tz = z\}$ である。T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in H$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。T が縮小写像 (contraction) であるとは, ある定数 $\theta \in [0, 1)$ が存在し, すべての $x, y \in H$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \theta \|x - y\|$ が成り立つときをいう。このとき, T を θ-縮小写像という。T が擬非拡大 (quasi-nonexpansive) であるとは, $\mathrm{F}(T)$ が空ではなく, すべての $x \in H$ と $z \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$ が成り立つときをいう。不動点を持つ非拡大写像は擬非拡大である。T が非拡大 (擬非拡大) のとき, $\mathrm{F}(T)$ は H の閉凸部分集合であることが知られている[4)]。

F を H の空でない閉凸部分集合とする。このとき, 各 $x \in H$ に対して, $\|z - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in F\}$ となる点 $z \in F$ がただ一つ存在する。x にその z を対応させる写像を P_F と表し, P_F を H から F の上への距離射影 (metric projection) という。距離射影 P_F は非拡大であることが知られている[5)]。

$\{T_n\}$ を H から H への写像列とする。$\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすと

4) 高橋渉 (2005) の定理 6.1.3
5) 高橋渉 (2005) の定理 5.2.3

は, 以下が成り立つときをいう。

> $\{x_n\}$ が H の有界点列で $\|x_n - T_n x_n\| \to 0$ ならば, $\{x_n\}$ の弱収積点 (weak cluster point) は $\{T_n\}$ の共通不動点である[6)]。

$\{T_n\}$ が H の部分集合 D で安定 (stable) であるとは, 任意の $z \in D$ に対して $\{T_n z : n \in \mathbb{N}\}$ が一点集合になるときをいう。

3　非拡大写像列の場合

本節では, (1.1) の T_n が非拡大写像の場合の結果を述べる。以下, H を実 Hilbert 空間, $\{T_n\}$ を H から H への非拡大写像の列, $\{\lambda_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\theta \in [0,1)$ とする。

T. Suzuki (2007) の手法を使うと, 次の定理[7)]が得られる。

定理 3.1. F を H の空でない閉凸部分集合とし, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ を仮定する。このとき, 以下は同値である。

(1) 任意の $y \in H$, $u \in H$ に対して, $y_1 = y$ および

$$y_{n+1} = \lambda_n u + (1-\lambda_n) T_n y_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.1}$$

で定義される点列 $\{y_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する。

(2) $x \in H$, $\{f_n\}$ が F で安定な H から H への θ-縮小写像列ならば, $x_1 = x$ および (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は $P_F \circ f_1$ の不動点へ強収束する。

定理 3.1 の (2) の仮定のもとで, $P_F \circ f_1$ は F 上の縮小写像であるから, Banach の不動点定理[8)]により, その不動点 $w \in F$ が一意に存

6) z が $\{x_n\}$ の弱収束する部分列の極限ならば, $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ となる。
7) K. Aoyama and Y. Kimura (2014) の Theorem 3.1
8) 高橋渉 (2005) の定理 2.4.7 (縮小写像の不動点定理)

在する。また, $\{f_n\}$ は F で安定だから, すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $(P_F \circ f_1)(w) = (P_F \circ f_m)(w)$ となる。

u を H の点とし, $f_n \equiv u$ とすれば, 明らかに f_n は縮小写像で, $\{f_n\}$ は F で安定である。よって, (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ の収束性を知るには, その特殊な場合 ($f_n \equiv u$ となる場合) が収束する条件を調べればよいことが定理 3.1 よりわかる。

定理 3.1 の点列 $\{y_n\}$ は, しばしば Halpern 型点列[9]と呼ばれる。定理 3.1 の $\{T_n\}$ と $\{\lambda_n\}$ にいくつかの条件を仮定し, F を $\{T_n\}$ の共通不動点とすれば[10], Halpern 型点列は強収束する, つまり, 定理 3.1 の (1) が成り立つことが知られている。次の定理[11]はその一例である。

定理 3.2. $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n) \neq \emptyset$ とし, $\{\lambda_n\}$ は,

$$\lambda_n \to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たし, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たすと仮定する。また, 任意の有界な H の部分集合 D に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\|T_{n+1}z - T_n z\| : z \in D\} < \infty \tag{3.2}$$

が成り立つと仮定する。このとき, 定理 3.1 の (1) が成り立つ。

定理 3.1 と 3.2 より, 直ちに次の結果[12]が得られる。

定理 3.3. $\{T_n\}$, F および $\{\lambda_n\}$ は定理 3.2 と同じとし, $\{f_n\}$ を F で安定な H から H への θ-縮小写像列とする。点列 $\{x_n\}$ を任意の $x_1 \in H$

9) B. Halpern (1967)
10) $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$
11) K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda (2007), K. Aoyama (2010), K. Aoyama (2011) の成果を合わせることにより得られる。
12) K. Aoyama and Y. Kimura (2014) の Theorem 3.4

および (1.1) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F \circ f_1$ の不動点に強収束する。

定理 3.2 および 3.3 は, 一般の非拡大写像列の共通不動点近似問題へ適用できる。例えば, $\{S_n\}$ を共通不動点をもつ H から H への非拡大写像の列とするとき, $\{T_n\}$ を $T_1 = S_1$ および

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S_k + \frac{1}{2^n} S_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義すると, $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の共通不動点集合が一致し, $\{T_n\}$ は定理 3.2 の仮定をすべて満たす[13)]。

4　擬非拡大写像列の場合

本節では, (1.1) の T_n が擬非拡大写像の場合の結果を述べるが, その前に少し準備が必要である。以下, H を実 Hilbert 空間, F を H の空でない部分集合, $\theta \in [0, 1)$ とする。

H から H への写像 f が F に関して θ-縮小写像であるとは, すべての $x \in H$ と $z \in F$ に対して, $\|f(x) - f(z)\| \leq \theta \|x - z\|$ が成り立つときをいう。明らかに, f が θ-縮小写像ならば, f は F に関して θ-縮小写像である。

$\{T_n\}$ を H から H への共通不動点をもつ写像列とし, $\{T_n\}$ の共通不動点の集合を F とする。$\{T_n\}$ が強擬非拡大型 (strongly quasi-nonexpansive type) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう。

- 各 T_n が擬非拡大である。
- $\{x_n\}$ が H の有界点列で, ある $p \in F$ に対して $\|x_n - p\| -$

---

13) K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda (2007) および K. Aoyama (2009)

$$\|T_n x_n - p\| \to 0 \text{ ならば}, \|x_n - T_n x_n\| \to 0 \text{ となる。}$$

以上の準備を踏まえて, 本節の主結果[14)]を記す。

定理 4.1. $\{\lambda_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{f_n\}$ と $\{T_n\}$ を H から H への写像列, F を $\{T_n\}$ の共通不動点の集合とする。$\lambda_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$, 各 f_n は F に関して θ-縮小写像であり, $\{f_n\}$ は F で安定とし, $\{T_n\}$ は強擬非拡大型であり, 条件 (Z) を満たすと仮定する。H の点列 $\{x_n\}$ を任意の $x_1 \in H$ および (1.1) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F \circ f_1$ の不動点に強収束する。

定理 4.1 の仮定のもとで, $P_F \circ f_1$ は F 上の縮小写像となるので, その不動点 $w \in F$ が一意に存在する。また, すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $(P_F \circ f_1)(w) = (P_F \circ f_m)(w)$ となる。

K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) の第 4 節で扱った劣勾配射影 (subgradient projection) は擬非拡大であるが, 一般に非拡大にならないことが知られている。よって, 定理 4.1 は, このような写像の不動点近似問題にも適用できる。詳しくは, K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) の Example 4.5 を参照されたい。

5 変分不等式問題への応用

本節では, 前節までに述べた収束定理をの結果の応用例を述べる。

次の変分不等式問題を考える。

問題 5.1. κ と η を $\eta^2 < 2\kappa$ となる正の実数, H を実 Hilbert 空間, F を H の空でない閉凸部分集合, $A\colon H \to H$ を κ-強単調 (strongly monotone) かつ η-Lipschitz 連続写像とする。つまり, $x, y \in H$ に対し

14) K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) の Theorem 3.1

て, $\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq \kappa \|x-y\|^2$ および $\|Ax-Ay\| \leq \eta \|x-y\|$ が成り立つとする。このとき, すべての $y \in F$ に対して,

$$\langle y-z, Az\rangle \geq 0$$

となる $z \in F$ を求めよ。

問題 5.1 の仮定のもとで, 以下が成り立つ[15)]。

- $\kappa \leq \eta$, $0 \leq 1-2\kappa+\eta^2 < 1$ であり, $I-A$ は θ-縮小写像である。ここで, I は H 上の恒等写像, $\theta = \sqrt{1-2\kappa+\eta^2}$ である。
- 問題 5.1 は唯一の解をもち, それは $P_F(I-A)$ の不動点である。つまり, 問題 5.1 の解は, $w = P_F(I-A)w$ を満たす点である。
- $\eta^2 < 2\kappa$ は自然に満たされる仮定である。実際, 問題 5.1 と問題 5.1 からこの仮定をはずした問題は同値になる。

問題 5.1 の F が有限個 (N 個) の非拡大写像の共通不動点集合のとき, その解の近似に関する次の定理[16)]が知られている。ここでは, 定理 3.1 を使ってこの定理を示してみよう。簡単のため $N=2$ の場合を扱うが, 一般の N の場合も同様である。

定理 5.2. H, κ, η および A を問題 5.1 と同じとする。また, F を H から H への非拡大写像 T_1 と T_2 の共通不動点の集合とし,

$$F = \mathrm{F}(T_1T_2) = \mathrm{F}(T_2T_1) \neq \emptyset$$

を仮定する。さらに, $\{\lambda_n\}$ を

$$\lambda_n \to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+2} - \lambda_n| < \infty$$

15) K. Aoyama and Y. Kimura (2014) の Lemma 2.4 および Remark 4.2
16) I. Yamada (2001) の Theorem 3.3

を満たす $[0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を任意の $x_1 \in H$ および

$$x_{n+1} = T_{[n]}x_n - \lambda_n A T_{[n]} x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.1}$$

で定義する。ただし, n が奇数のとき $T_{[n]} = T_1$, n が偶数のとき $T_{[n]} = T_2$ とする。このとき, $\{x_n\}$ は問題 5.1 の解に強収束する。

証明. $f_n = (I-A)T_{[n]}$, $\theta = \sqrt{1-2\kappa+\eta^2}$ とおく。$I-A$ は θ-縮小写像であり, $T_{[n]}$ は非拡大なので, 各 f_n は θ-縮小写像である。また, $z \in F$ のとき, $z = T_1 z = T_2 z$ であるから, $\{f_n\}$ は F で安定である。さらに, (5.1) より,

$$x_{n+1} = \lambda_n f_n(x_n) + (1-\lambda_n)T_{[n]}x_n$$

となる。一方, $y, u \in H$ を任意にとり, 点列 $\{y_n\}$ を, $y_1 = y$ および

$$y_{n+1} = \lambda_n u + (1-\lambda_n)T_{[n]}y_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する。ここで, H. H. Bauschke (1996) の Theorem 3.1 を使うと $\{y_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束することがわかる。したがって, 定理 3.1 より, 点列 $\{x_n\}$ は, $P_F \circ f_1$ の不動点 w に強収束する。ここで,

$$w = (P_F \circ f_1)(w) = P_F(I-A)T_1 w = P_F(I-A)w$$

であるから, w は問題 5.1 の解である。以上で結論が得られた。 □

次に, 問題 5.1 の F が擬非拡大写像列の共通不動点の場合を考える。このとき, 定理 4.1 を使うと, 次の定理[17)]が得られる。

定理 5.3. H, κ, η および A を問題 5.1 と同じとし, F, $\{T_n\}$ および $\{\lambda_n\}$ を定理 4.1 と同じとする。点列 $\{x_n\}$ を任意の $x_1 \in H$ および

$$x_{n+1} = T_n x_n - \lambda_n A T_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.2}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は問題 5.1 の解に強収束する。

17) K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) の Theorem 4.3

証明. $f_n = (I - A)T_n$, $\theta = \sqrt{1 - 2\kappa + \eta^2}$ とおく。$I - A$ は θ-縮小写像であり, T_n は擬非拡大なので, K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) の Lemma 2.2 より各 f_n は F に関して θ-縮小写像であることがわかる。また, $\{f_n\}$ が F で安定であることは容易に確認できる。さらに, (5.2) より

$$x_{n+1} = \lambda_n f_n(x_n) + (1 - \lambda_n)T_n x_n$$

となる。したがって, 定理 4.1 より $\{x_n\}$ は $w = (P_F \circ f_1)(w)$ に強収束する。ここで, $w = P_F(I - A)w$ であるから, w は問題 5.1 の解である。以上で結論が得られた。 □

6　おわりに

擬非拡大写像列について定理 3.1 のような結果が示せるかという問題は未解決のままである。もし, それが肯定的に解かれた場合, 定理 4.1 は既存の結果[18)]から直ちに得られることになる。

参考文献

K. Aoyama (2009), “An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings,” *Proceedings of The 9th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications*, 1–7.

K. Aoyama (2010), “An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings,” *Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, Yokohama Publ., Yokohama, 21–28.

K. Aoyama (2011), “Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings,” Proceedings of the 3rd International Symposium on Banach and Function Spaces, Yokohama Publ., Yokohama, 343–350.

18) 例えば, K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka (2012) の Theorem 4.1

K. Aoyama and Y. Kimura (2014), "Viscosity approximation methods with a sequence of contractions," *Cubo* 16, 9–20.

K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka (2012), "Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications," *J. Nonlinear Anal. Optim.* 3, 67–77.

K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda (2007), "Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space," *Nonlinear Anal.* 67, 2350–2360.

K. Aoyama and F. Kohsaka (2014) "Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings," *Fixed Point Theory Appl.* 2014:17, 11pp.

H. H. Bauschke (1996), "The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space," *J. Math. Anal. Appl.*, 202, 150–159.

B. Halpern (1967), "Fixed points of nonexpanding maps," *Bulletin of the American Mathematical Society* 73, 957–961.

A. Moudafi (2000), "Viscosity approximation methods for fixed-points problems," *J. Math. Anal. Appl.* 241, 46–55.

T. Suzuki (2007), "Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions," *J. Math. Anal. Appl.* 325, 342–352.

I. Yamada (2001), "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings," *Stud. Comput. Math.* 8, North-Holland, Amsterdam, 473–504.

高橋渉 (2005)「非線形・凸解析学入門」横浜図書.

(2015 年 12 月 2 日受理)