

数概念と計算の初期指導

島田和昭

千葉大学教育学部

Teaching Number Concept, Addition and Subtraction

SHIMADA Kazuaki

Faculty of Education, Chiba University, Japan

数字は数概念を表記する記号であり、加減の計算も数概念を記号変形の規約に従った操作である。1年次における数概念および計算の指導において、現行の指導では数は集合の要素を表す個数として指導される。また、児童が計算において困難を感じるのが、繰り上がりのある加法や繰り下がりのある減法である。これらは、十進位取り記数法という新たな記号表記における規約の学習と言ってよい。本稿ではこれらの計算における困難が、初期の数概念の指導、即ち、児童が数概念を既往経験として持っている『数える』という行動と数えた結果を数字で表すという際の扱い、が不十分であることを指摘した。また、繰り上がりのある加法と繰り下がりのある減法においては、それぞれ加数分解と減加法に偏した指導が行われている。しかし、結果を出すまでの過程の表記の追加を指導上加えることにより、子どもの困難を軽減できるという指導の基礎的な考え方を示した。

キーワード：数えること 記号表示 繰り下がりのある減法 繰り上がりのある加法 数概念

はじめに

平成10年の指導要領改訂では、算数の指導時間が以前と比べ大幅に減少した。多くの数学教育に携わる方々は児童の算数学力の低下を懸念し、また、実際、児童の学力低下が生じた。当然、時間数の減少は授業で使用される教科書の内容の減少となる。平成20年に指導要領が改訂され、算数の指導時間数は増えたが、過去10年にわたる指導要領の影響はとても大きかった。実際に、時間数が減少したときには各内容にかける指導時間数が少なくなり、各内容の指導が以前ほどいねいに扱えなくなった。新指導要領にもとづく教科書を見ると、既習事項との関連化をはかるといった工夫や、いくつかの新しい工夫がなされているが、過去10年間の負の遺産を引きずっている傾向がある。

特に、低学年の数と計算の指導においてはこの傾向が顕著である。例えば、繰り下がりのある二桁－一桁の減法においては、減加法での扱いが中心となり、数えるという子どもの誰でもできる活動が十分に反映された扱いとなっていない。加減に於ける『数える』という操作はかつて数学教育史上で議論が行われた内容である。しかし、算数的活動が今回の指導要領では、新たな領域として付け加えられ、子ども自身の活動を通して数学化を図る過程が指導要領の記述上でも明記されるようになってきている。

算数という教科名の初歩の数学の学習指導においては、数学の中で用いられている記号は子どもにとって日常用いられている記号とは異なっている。算数の学習は数学の学習であり、数学記号によって表現される数学世界の学習である。子どもの持つ数学世界を拡張し発展させる

働きかけである。このとき、記号で表現された意味を単に注目の的に子どもに伝えていくような指導も行われがちである。算数の指導は、子どもの持つ活動という記号を、数学記号に変換する営みとも言える。このような観点から、算数の指導において初期の数概念の形成と計算についての指導について、いくつかの内容をもとに考察を加えていく。

第1章 記号としての数と数概念の指導

小学校第1学年において中心的な指導内容は数概念と加減計算の初歩である。数概念の指導は数学教育上では古くから主張されている。大きな考え方としては直観主義と数え主義という二つの流れがあった¹⁾。

デューイは数概念は「測ること」および「比較すること」から発生すると主張し、数の割合的意味を強調している。フィリップスは、数概念は単位の時間的継起によって発生し、「数える」ことから発生すると主張している。デューイおよびマクレランは、抽象と一般化の合理的過程を重視し、数え方を軽視する。これに対しフィリップスは、自然的方面を重視し、数え方の過程を重視する。この両主張が算数教育上の二大潮流となり、前者は直観主義となり、後者は数え主義となった。

数の指導において数図がよく用いられる。数図はある個数の点の集まりを記した図である。この図が数を直観させるということで初期指導として使用される。数図に示された点の数を数字と結びつけるのであり、数を点の配列と対応させる指導である。あたかも犬の絵を見せて犬という文字と対応させるような指導である。数字を視覚と直接結びつける方法である。

連絡先著者：島田和昭 shimakmm@jcom.home.ne.jp

上記の四方の記述からすると、デューイはあたかも直観的な面だけを強調しているかのように思えるが、決してそうではない。そのことは以下のデューイとマクレランの共著をみるとよくわかる²⁾。

Number is not a property of the objects which can be realized through the mere use of the sense, or impressed upon the mind by so-called external energies or attributes. Objects (and measured things) aid the mind in its work of constructing numerical ideas, but the objects are not number. Nor does the bare perception of them constitute number. ...No such concepts, no clearly defined numerical ideas, can enter into consciousness till the mind orders the objects—that is, compares and relates them in a certain way.

単に、感覚的にものを見ただけでは数概念はできず、指導を行うときには何らかの働きかけによる認識が必要と記されている。単にものを見せるといった単純な知覚だけでは数概念が形成されないのである。さらに、教育の場では次のようにすべきと記されている³⁾。

Number is a product of the way in which the mind deal with objects in the operation of making a vague whole definite.

数概念の指導に当たっては、単なる感覚的な提示ではなく、測定という行為をもとに概念化を図るといった指導の手立てが示されている。このような手続きにより、ものの集まり、集合の要素の数、基数として数を指導していく方法が示されている。デューイとマクレランの示した指導過程がモデルとなり現在の数の指導にも取り入れられている。つまり、ある単位を元にして測定して数を構成するという考え方である。

しかし、彼らの示した指導は記号化という観点からすると不十分な点が見られる。つまり、数を測定もしくは構成していく過程で出てくる数についての記号化の過程が不十分ということである。測定結果の表示として記号すなわち数字が用いられるが、その過程で既知の数の表現、ある数に先立つ数の数字表現との関わりが少ないのである。

さらに、現在の指導では数えるという作業が、初期の数の指導においては用いられるが、数が大きくなるに従って省略される傾向がある。もちろん、例えば、万を超える数については、1つずつ数えることは労力に比して成果が少なそうであるが、千を超える数くらいについては、工夫をしながらも数えるという行動や作業を行う必要があると思える。

一つの記号の表す概念の形成に当たっては、その記号の意味に相当する多くの内容、イメージを経験させていく必要がある。感覚的なイメージには、視覚的な面、見た目によるものの集まりの多さ、聴覚的な面、音としてのいくつかの集まり、感覚的な面、ブロックなどの配列を作る際の経験、などがあり、多様な教材をもとにして数概念をものの集まりとしての指導がなされる。数の定義として、1が『はじめの数』ということと、『次の数』という概念を認めることにより、1の次の数は2と定義し、2の次の数は3と定義し、3の次の数は4と定義し、以下同様に数を定義していくことができる。この定義と併せて、数の

表示方法として10種類の数字の配列によって数を表す方法、すなわち十進位取り記数法が9を超える数について用いられる。つまり、ある規約に基づく記号の組み合わせにより新たな記号として認めていくという表記法がとられる。この表記法が、初期の数概念の表現として子どもに理解が難しい内容である。つまり、それまでの数は一つの記号として表示されていて、そのよみについても同様であり、ラベルとして数の記号が用いられる。それまでの数の理解は一つの系列として行われている⁴⁾。

その系列に新たな表示上の規約が加えられる。後述するが、そのことが繰り上がりのある加法や繰り下がりのある減法の指導と大いに関係してくる。それらの指導に当たっては記号表示という面から見て、系列の存在という面から見て子どもの理解が不十分な扱いが現在行われている。

これらのことは、繰り上がりのある加法と繰り下がりのある加法の指導を考察することとあわせて次章以下で示していくことにする。

数えるという行動は小学校入学前の経験で多くの子どもが持っている。この数えるという行動は、ある順序に従って数詞を発声すること、唱えることである。教科書において、数の指導の際には、単に唱えることだけではなく、個数に対応させて唱えるという行動が行われる。これは、集合の要素の個数を数として子どもに認識させるということである。しかし、最後の数の表記をするだけの傾向が強く、さらに、単に数えるという活動も取り上げられている教科書が少ない。一社のみが、大きい数から逆順に言う、ある数から大きい数へと言う、二つずつ順番に言う活動が記載されているだけである⁵⁾。

声に出して数を唱えるという活動は、数の指導の時に多くの教員が実際に行う手立てである。コミュニケー

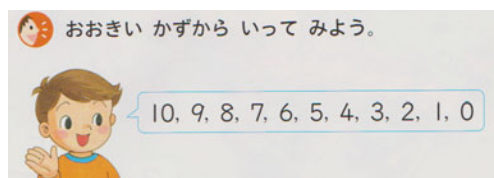


図1



図2



図3

ションが学習指導の中で重要と言われてきているが、概念獲得において音声で数を表現するという活動について教科書で明記されているものが6社中1社であるという事実は、数の指導では集合の要素という面の表記に偏していることを表している。

さらに、数えた結果を数字によって表記するという活動についてみると、最後の数の表記のみで、途中の数えた数については表記されていない。このことは、数は集合の要素の個数であり、集合の要素の数を数えたときの最後に数えた数をもって表すということが示されている。このことをもっと詳しく行動とその表記という面から考えてみよう。

集合の要素を数えるときにどのような行動がとられるであろうか。個物、例えばブロックやおはじきなど、を数えるときには数え終わった個物は数えていないものと区別するために取り去るなどして最初の位置と異なる位置におくようにする。最後に数えた数値を全部の数として数字で表す。その一方、教科書に図として示されている個物を数えるときにはどうするのであろうか。図に印刷されているためにそれらの配置を換えることはできない。数えたものと数えていないものの区別をするためには図の上にブロックなどを置くとかする工夫が必要になる。数えるというときには、数についての順序が子どもにとって明確になっていなくてはならない。入学前にある程度子どもは経験しているといっても、指導する際には丁寧にそれらについても再確認していくことが必要である。つまり、数えた個物に対しては数えた時に数字をその個物に表記するといった活動がより丁寧に数える過程に含まれてもよいのである。このような配慮が教科書の中にはなされていない。

数は集合数と順序数との二つが指導される。順序数とはある順序で個物を一列に並べたときに、一方の端から順に数えたときに、ある数に対応する個物を示すという数の使い方である。順序数についての理解が難しいということは低学年の数の指導において多く聞かれることである。その理由は数概念の指導が集合数に多く時間が費やされていることだけではなく、数える過程における数字の表示が少ないことにあると考えられる。このことは、何番目を表すときに、数えた結果だけを数で表示するという教科書の扱いにも現れている。最後の数に至るまでの数の表示についての記述、表記がなされないのである。このことは、数えるという活動と記号表示との関係を丁寧に取り扱っていないという現在の教科書の記述での問題である。この点についても、数える対象についての数字による表示が行われているのは1社のみである⁶⁾。

この教科書では、数字が個物に対応して記述されており、数の系列と個物とが対応するような表示になっている。ここで表されている内容は順序数の指導であり、集合数の指導ではこのような表示はない。

このような数の表示と集合を表す数の表示には記号の表す内容としてどのような違いがあるのだろうか。集合の要素の個数を表すという表し方は、一つの数字に対して多くの個物の集まりが意味されている。さらに、その数より小さい数すべての表記および概念についての読み手の理解を前提としている。その一方、一つの個物に



図4

して一つの数字を対応させるときには、その記号は個物に対するラベルとしての働きを持つ。つまり、記号と個物が一対一に対応する使い方である。それぞれの子どもに名前をつけるのと似た記号の使い方である。記号としては、多くの対象に対して一つの記号をあてるというような使用は高度な記号使用の仕方と言える。

かつて用いられた教科書において、数え上げること、数字で表記することが現在の教科書に見られるよりも丁寧に指導されてきた⁷⁾。

少なくとも表記の上で、個物へのラベルとの意味での表示、一つ一つの対象に数字をあてて行う指導をすることにより、よりきめ細かな指導が可能となる。もちろん、集合の個数を表すときには、すべてに数字を割り当てたときに一番大きな数字をとるということを学習するのであるが、最後の数字の表記だけではなくそれまでの数字を表記するというのがいいと言える。その過程なく、個物を見ただけで(直感的に)数を割り当てるといっただけの指導や、数える活動をしなくても一つ一つの対象を数えた結果を記号化しない指導よりも子どもの数に対する理解度は増すと考えられる。

第2章 繰り上がりのある一桁の数同士の加法

繰り上がりのある一桁の数同士の加法を行うためにはいくつかの先行して行われる内容がある。数の定義、繰り上がりのない一桁の数同士の加法は必須の内容である。さらに、繰り上がりのある数については十進位取り記数法の知識が必要になる。これについては20までの数の指導において導入されている。さらに、10と一位数の加法、一位数と10の加法、二項の和が10になるような三口の計算がある。

繰り上がりのある加法の難しさは、加えた結果が以前の繰り上がりのない場合と比べて大きな数になるということに加え、十進位取り記数法を用いて結果を表示しなければならないというところにある。そのために、先行して十と一桁の数の計算、および、三つの数の計算(三口の加法)が扱われる。この三つの数の計算は、最初の二つの数の和が10となる数が取り扱われている。もちろん先行する十と一桁の数の和とつなげるためである。その上で、繰り上がりのある二つの数の和について、加数を被加数の十の補数ともう一つの数に分解して計算を進めていくという展開がとられている。

本章では、上記の扱いについての不十分な点の指摘

とより丁寧なきめ細かな指導について記述する。繰り上がりのない1桁の数同士の加法は、数計算の基礎である。この指導においては、きめ細やかな丁寧な指導がなされているにもかかわらず、繰り上がりが生じる場合にはかなり型にはまった扱いとなっている。すなわち、加数分解により10とある数との和に導いている。ここで、子どもの数えるという活動が見過ごされがちになる。繰り上がりのない場合においても数字との対応がうまく付けられていないことがここでも大きく子どもの学習に影響を与える。まずそれらのことについて述べていくことにしよう。

1) 20までの数の指導

子どもの数えるという経験と数字とを結び付けるような学習経験をここで行うことができる。例えば、20までの数を指導する場合を例にとろう。20までの数は10進位取り記数法と結びつけていくまでの1つの段階である。当然のことながら、数えるという作業を行っている限り音声で発生したそれぞれの数に記号として数が表示されたとしても、十進位取り記数法による表示となっていることは子どもには意識されてはいない。これを意識の上に上げるためには、表示として区別をして指導することが必要になってくる。すなわち、10の後数える数が10未満の数を用いて表示されるということである。ここで注意すべき事は、10未満の数が繰り返し使われているということについて子ども自身に意識させることである。このことは、20までの数の指導において、数の合成及び分解ということに関わってくる。

しかしながら、数の合成と分解の指導については、10までの数について行われることが中心となり、それより大きい数については行われない事が教科書の記述を見てもわかるし多く見るところである。例えば13について、数の分解を行った場合、(0を含めた分解はしないことにして) 具体的に13の数の分解について示せば次のようになろう。12と1, 11と2, 10と3, 9と4, 8と5, 7と6, 6と7, 5と8, 4と9, 3と10, 2と11, 1と10とになる。数を数えるという活動からは、ある数の分解はその前の数と1という分解の仕方が数えるという経験と一致して児童が答える事は容易である。言葉で答えることをもとに、数で表すということは容易に指導できる。20までの数の指導において取り入れるべき内容といえる。

このことを教科書において実際に見てみると次のようである。

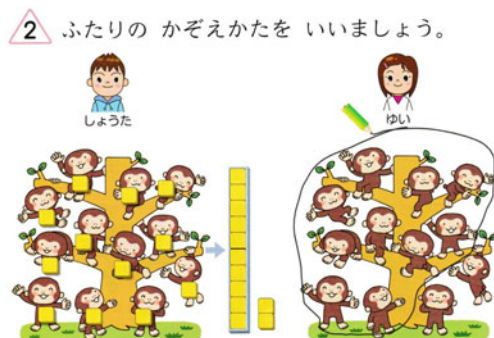


図5

木に登っている猿の総数とバナナの数とを数えるという場面が図5の前ページに載っている。それに引き続き、一つの数え方は、猿一匹ごとにそれぞれブロックをおいて数えていく作業が表されている。しかし、そのときに数字が表記されていないことは上記より明らかである。また、10と2という十進位取り記数法との関連化を行うところが右側の絵で示されている。この絵でも数字は記述されていない。

また、数えた結果を十進位取り記数法と結びつける過

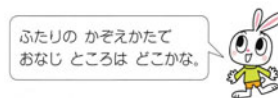


図6

程は図6の絵の吹き出し部分で示されている。数えた結果が、十といくつになっているということから十進位取り記数法につなげようとしている。

もちろん、絵をもとに数えるときに数字を記入すると、それぞれ数字の割り振り方は様々になる。しかし、どのように記入しても一つの対象に一つの数字を割り当てれば、最後の数は同じになる。このような経験を数えるときに数字の記入について行っていく必要がある。また、十といくつということについても、十の囲み方は何通りかあるのでそのことについても同様である。

また、数えた結果について図5では木に登っている猿は9匹で、地面に立っている猿は3匹である。このことから、12は分解すると9と3もしくは3と9とに分けられるということについての10を超える加法の素地としての経験をさせることも可能である。数直線への表記という表記上の工夫は1年から各社種々取り入れられて工夫されてきているが、このような数の分解と十進位取り記数法との関連化を工夫すべきである。当然ではあるが、数字をそれぞれ数えた対象と対応させる活動を扱えばほとんどの教科書で扱われているような、きわめて形式的な十進位取り記数法の指導よりもよりよい指導が可能となる。

2) 10と10未満の数の加法および三口の数の加法

20未満の数を数えるという作業を数の分解と結び付けた時に、上記に示したように、例えば、13という数は10と3もしくは3と10に分解することが容易にできるという経験をさせることが可能である。分解する仕方はたくさんあるが、この分解の仕方がもとの数が13であるということに結びつけやすいことも経験させることができる。この経験をしていれば(もちろん具体物などの操作を合わせて行うこととして)、この経験をそのまま加法に表現することができる。即ち、活動経験をラベル的に表記することが容易にできる。

教科書で表現されている指導内容では答えが10を超える数の加法の準備として三口の数の加法が取り上げられている。教科書の記述では、数えると言う作業および数えた結果を表記するという作業が取り上げられていないために、単なる形式的な操作として位置づけられている。そのために、要領の良い子どもはこのことに対応できるが、そうでない子どもにとっては今まで数えていた経験

が生かされないために、この辺から学習についていけない状況が生じてくる。数学的な面から見れば繰り上がりのある一桁同士の数の加法の前に10といくつという加法、さらに2つの数の和が10になる三口の加法を置いておくことが当然となろう。しかし小学校1年生という段階においては、当然のことながら学習進度の多様性が存在し、まだ数えるという事柄が子どもにとって大事な基礎的活動となっている場合が多い。その子どもの心理的な面についての配慮が極めて少ないのである。

このことを教科書について実際に見てみると次のようである⁹⁾。

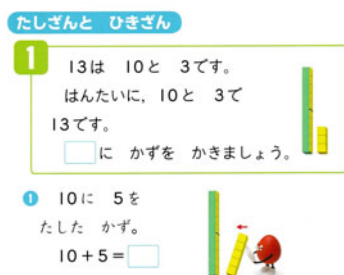


図7

教科書会社によって、また発行年度により取り扱いについてはいくつかの違いがある。取り上げた例は、10より大きい数のなかで十進位取り記数法により数の表記と10との加法とを一緒に取り扱っている例である。6社中4社が上記のように取り扱い、2社が20より大きい数で取り上げているという違いがある。数えるという活動およびその表記という扱いは教科書上ではすでに全くなっている。

三口の加法については、図7で取り上げた会社での表記は以下のようにになっている⁹⁾。



図8

この絵に先立ち、「バスに7人のっていました。3人のりました。つぎに4人のりました。みんなでなん人になったでしょうか。」という文章があり、図8に続けて次のページに三口の式 $7 + 3 + 4$ がしめされている。また、結果は大きな四角が示され記入させるようになっている。

二桁の数は、数えた結果で出せること、10といくつということから十進位取り記数法で示されること、十進位取り記数法で示された数は10と一桁の数の加法で示せること、などが取り上げられている。この一連の扱いは、

次の繰り上がりのある一位数同士の加法に必要な内容であり、欠くことはできない。

しかし、形式的な取り扱いになっている傾向があり、遅れた子どもなどのためにも、また、繰り返し学習という観点からも数える活動とその結果をうまく表示するために十進位取り記数法を使用するということを、上記の扱いと同時に繰り返すことがよりきめ細やかな指導になると考えられる。

3) 繰り上がりのある一桁+一桁の加法

繰り上がりのある一桁と一桁の加法の導入の問題を見てみよう。6社の教科書ではすべて9もしくは8にいくつかを足すという素材が取り入れられている。この素材では加法を行うために数え足しができるが、数え足しについて扱っているものは1社もない。すべて被加数分解をもとにしている。すなわち、加数と合わせて10となるような数に加数を分解する。このことを強調するために10の塊ということに着目させる。もちろん教具などで具体的な作業などが準備されているが、子どもが数えた結果を数表示するという作業はない。教科書の記述で数字を表記しているものは東京書籍ただ1社のみである¹⁰⁾。

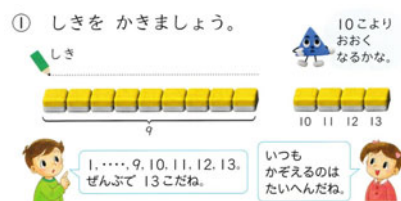


図9

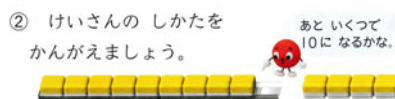


図10

図9では男の子が数えている図が示されている。ところが、女の子は「いつもかぞえるのはたいへんだね」とあたかも数える作業が不十分であるかのような印象を持たせる。むしろ数える作業をより効率的に行うには最初に数えた9から引き続き4を数えるよりも、その数える過程を振り返れば、10と数えたときに残りは3つであること、10から3つ数えると13になること、それを式で表すと以下である。

$$\begin{aligned} 9 + 4 &= 9 + (1 + 3) \\ &= (9 + 1) + 3 \\ &= 10 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

上記のように数えるという行動を式にそのまま変えていくことができる。そのように、行動を式表示に書き換えるという取り扱いを各社ともに行っていない。そのような扱いは見直すべきであろう。

数える行動を式化するという扱いをせずに形式的な式での扱いを中心に指導が行われる。特に、加数分解を行ったときに2つの数に分解する表示については、図に示したような書き方がよくされている¹¹⁾。

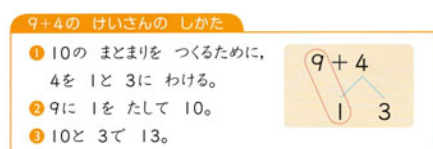


図11

この図は、「さくらんぼ計算」という言い方がされているようである。1年生での理解を求める指導は容易ではないかもしれないが、教材としての教科書がもっと子ども容易な活動結果を容易に記号表示するといった配慮がなされるべきであろう。

4) 加法の意味と数え足し

ここで加法の意味と数え足しについて補足しておこう。加法には増加と合併が意味づけられている。増加とはある集合に対して、その集合の要素と同等な要素がいくつか追加されると言う場面に対応している。合併とは2つの集合を一緒にして1つの集合にする場面に対応している。増加という場面は1つの集合の要素に対応する数に新たに数を増やすという場面である。このことは、数を1つずつ数えるということと結びつきやすい。またさらに、加法の決まりとも結びつきやすい。しかし、ある数にある数を加えるといったときに、加数をひとつ被加数に加え、被加数を1つ大きな数とし加数を1つ小さな数とする。このことは和を変えない足し算の決まりと等しい。この経験をすることによって、足し算の決まりの学習の素地とすることができる。逆に、このような素地のないところで足し算の決まりを学習するときには単に記憶に基づく学習になりがちとなる。逆に学習の効率化がはかれないということである。

数え足しは一つの集合に要素を一つずつ加えるという足し方であることから、集合を表す数字と加えられる数の個数の数字とを持って表すことができる。つまり、数えるという操作を行うときに、ある数から先の数を一つずつ唱えるという数え方になる。唱えた数に数字をあてるように対応させることができる。つまり以下のように図示できる活動をするように展開できる¹²⁾。



図12

上掲書では、被加数に相当する集合の要素の数8についてさらに詳しく、数字を充てる指導も示している。

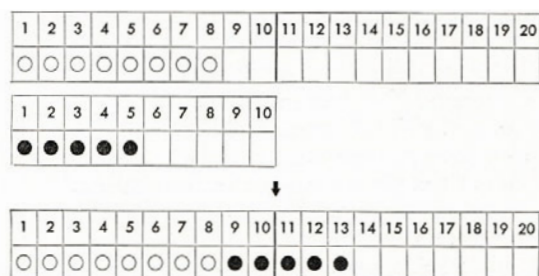


図13

図13において、被加数および加数を数え、被加数に加数を加えたときに、すなわち8に5を加えると13になることを数えるという活動を数字と対応させて行う学習展開である。

5) 繰り上がりのある加法についてのまとめ

繰り上がりのある加法の指導を、より丁寧にとどのような子どもでも活動ができ理解を深めるためには、数える活動と数えた結果の数字による表示との経験を豊富に持たせることが必要である。さらに、得られた結果をもとに数概念の確認も込めて、二桁の数の分解という経験をも併せて指導をしていきたい。さらに、逆操作としての活動を減法の素地として確認する場面、加法の式の決まりを暗示するいくつかの計算の経験、などを展開していくことが必要ということを、イメージ豊かな記号の獲得という観点から学習指導に導入していきたい。

第3章 繰り下がりのある二桁――桁の減法

繰り下がりのある二桁――桁の計算は、十進位取り記数法の考え方を計算の中で使用しているために、それまでに学習してきた繰り下がりのない減法と比べて行う作業が増えてくる。そのために、指導ではいっそう丁寧な扱いをするべきであるが、その点についての配慮が少ない。

1) 減法の場合の扱い

場面の違いによって行われる減法を大別して求残と求差とに分けることにする。求残とは、ある数あったものをいくつか取り去って残りの数を求めるという場面で用いる減法である。求差とは、二つのものの集まりがあるときに、それらの要素の数の違いを求める場面で用いる減法である。最初にそれらの場面において立式を考えた場合にどちらが考えやすいかについて記しておこう。

求残の場合、最初にあったものの集まりからいくつかの数を減らすというとき、ここに出てくる数は、最初にあったものの数、減らす数、減らした後に残った数である。これらの三つの数について減法という演算によって式表示できる。

数えるという作業を行うとき、この三つの数について数える作業が最初に行われる。数を数えるという作業と関連づけるときに、ひとつずつ減らして数えるという作業で結果を求めることができる。ひとつ減らしたとき、もともとあったものの集まりは数え直しをしなくとも、逆に数を数えるということができればすぐに結果を示すことができる。また、残った減らす数もひとつ減少する。ここでも逆に数えるという作業が必要になってくる。逆に数えるという作業を二種類同時に行って、それらの結果を記憶していなければならない。この過程を式表示すれば例えば、 $12 - 3 = 9$ と結果を出す場合以下の変形を行っていることに相当する。

$$\begin{aligned} 12 - 3 &= (12 - 1) - (3 - 1) \\ &= 11 - 2 \\ &= (11 - 1) - (2 - 1) \\ &= 10 - 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

指導を行う場合、この式変形はとり使わないが数えるという操作において実行していることになる。

数概念を育てるために数えるという操作を行うとき、逆に数えるという活動を加えることが必要である。ピアジェは操作の要件として、内面化、可逆化、構造化という考えを示しているが、逆に数えるということは、まさに操作における可逆性を獲得するという事に相当する¹³⁾。

その一方、求差という場面では考察対象が二つの集合の要素である。それらの要素を一对一に対応させて、対応のつかないものを数で表すという作業が必要となる。二つの集まりの違いを知るといったときに、対応づける活動を行えば、それぞれのものの集まりの持っている要素の総数を知らなくとも違いは求めることができる。しかし、二つの集合の要素の数をもとに違いを求めるというとき、対応づけて対応のつかない数は求残の操作で求めることができる。その点から、繰り下がりのない減法および繰り下がりのある減法の指導では、求残を先に学習してその後求差の学習をすることが指導上でも有効と考えられる。教科書会社での扱いは6社ともすべて求残、求差の順で学習が組まれている。

求残および求差の指導では、以上示してきたように数えるという活動と結びつけられる。また、数えるという活動の効率化をするためには、数の分解と結びつけられればよい。例えば、繰り下がりのない減法で引かれる数を引く数とあといくつという既習の分解と結びつけられればより効果的に学習が進められる。このときも、数の分解の結果をもとに減法の式表示という過程をとると記号獲得という点から考えると、容易であると言える。

求残は増加の逆であり、求差は合併の逆である。加法においても、減法の指導と対応させて扱うのであれば、増加を先に扱うのが当然と考えられる。しかしながら、繰り上がりのない加法において、増加を先に扱っているのは教育出版のみの1社である。繰り上がりのある加法について補足しておく、増加での扱いは3社になり合併での扱いは3社と同数となる。また、三口の加法および減法の計算では減法については6社ともに減少の扱いをしており、加法については増加の場面としながらもブロック操作では合併の扱いをしている。

さて、加法の場面と比較すると前述のように、加法では合併が先に取り扱われ、集合という面が意識されているにもかかわらず、減法においては合併と対応する求差が先に取り扱われないことから、加法でも増加を先に取り上げた方が数概念の認識には子どもにとってより容易になると考えられる。教科書の現行の扱いでは、数えるという活動、数えた結果を数字で表記するという活動がきわめて脆弱なために、展開上での矛盾が顕著に示されているところでもある。

2) 数えることと数字による表記

繰り上がりのある加法についてと同様、減法でも数えるという活動とその結果の数字表記ということがきわめて弱い。各教科書会社において数字の表記がなされているのは、東京書籍のみである¹⁴⁾。

① しきを かきましょう。

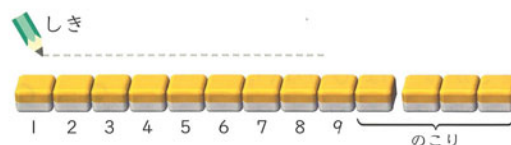


図14

使用されている問題は「どんぐりが13こあります。9こつかいました。どんぐりは、なんこのこっていますか。」である。上記の図表示で使用されている数字は答えになる9までのすべての数字であり、問題文の中に含まれているデータとしての数字13は図14の中には記述されていない。また、ブロックでの作業を表す図がどの教科書にも載っているが、それらには数字が一切記述されていない。操作と数字が切り離されていると言ってよい。示されている数字は、操作についての説明である子どもの吹き出しなどの中にある数字なのである。ましてや数えるといった活動は、すっかり姿を消して形式的な扱いへと向かっているのである。形式を作るにはどのようにして作るのかという過程がどの教科書にも記述されていないと言ってよい。

3) 減減法と減加法と数え引き

現行の教科書の記述における指導では、減加法のみの扱いが中心となっている。引かれる数の一の位の数が引く数よりも小さい場合、減加法では次のような三段階の作業を行う。すなわち、引かれる数を10と一の位の数に分解する。次に、10から減数を引く。その結果と一の位の数との和を出す、という三段階の作業を行う。このような作業は、数えるという経験と結びつけられないと新たなやり方を記憶していくというだけに終わってしまう。教科書の記述に忠実に進めると、そのような指導となりやすい。このような展開は子どもの活動を無理なく高度の数学的な内容をつなげていく上では不十分と言わざるを得ない。数える作業とその結果の数字による表記とバランスのよい指導を行うことにより、遅れている子どもでも無理なく学習を進めることができるような指導となる。かつては、減法においては数え引きなど数える活動と結びつけられた指導が行われていた¹⁵⁾。



図15

上記では、 $14 - 8$ の計算として、繰り上がりのある加法と同様、数え引くときに最初の数14から数詞14を含めて8つを取り去る。すると残った数字が6ということになる。ただし上記の表示では、6まで取り去るのか、取り去った結果が6なのかの区別がわかりづらい。同書で上記の表のすぐ下に示されている表示がこの点はより明確となっている。

ここでは、数字の下に置かれた具体物を8つ取り去るという作業の結果、残りが6ということがはっきりと明示されている。先の数え引きとの表示図15は多少不十分

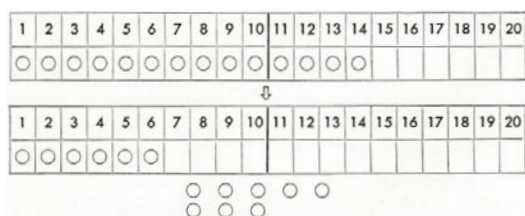


図16

なところが見られる。

ここで見るように、数える活動とひとつずつ数えた結果を数字で表示することにより減法での数え引きという行動と対応しており、式の意味が子どもにより明確となる。

4) 繰り下がりのある減法の導入素材について

減法で導入される数値は、例えば、 $13-9$ といった比較的大きな一位数を引く素材と $13-4$ といった比較的小さな一位数を引く素材での導入とがある。現行教科書では、いずれの導入素材であっても結果を減加法で求める展開となっている。これら二つの素材について、減加法のみならず数え引きや減減法を用いて結果を出すことは同様に可能である。減加法を行う場合、 $13-9$ は10から9を引いてその後1を加える。10の補数を求めるのに $13-4$ と比較して容易であることと後で行う加法が容易である。平成12年度の教科書では、引く数が8や7になっていたりいくつかの多少の違いはあるにしても、この種の導入素材が用いられていた。しかし、数え引きや減減法といった方法をとる場合には後者の $13-4$ の方が容易である。

数え引き、減減法、減加法のそれぞれについて特徴を記号獲得という立場から以下に述べておこう。

数え引きは、引かれる対象の個数を最初に数え、最後の数字を記憶しておく。次に、最後の数字から数字を逆に唱える。唱える個数は引く数である。このとき、逆になるという行動といくつまで唱えたかという個数について意識できなくてはならない。したがって、特に、逆に数えるという行動は意識を特に向けなくとも容易にできる必要がある。また、数字を引く数の個数だけ唱え終わったときに、答えとするのはその数よりも1小さい数である。このことは引き算の意味から明らかであるが、単に数えるという作業だけをしていると混同する可能性もある。数え引きは、数の定義にもとづく数系列を順に提示するということから、具体物とも対応が付きやすく、活動における経時的な面がよく現れている。

$14-8$ の図でもそのことがよく示されている。

減減法は、引く数の1の位の数を引かれる数の1の位の数だけ先に計算をしてしまう。 $14-8$ の場合、 $10-4$ と変形する。つまり、引かれる数の1の位の数を引く数から引いてしまうかのようにも見えるが、数え引きと結びつけると以下のような式変形を行っていることとなる(式1)。

$$\begin{aligned} 14-8 &= 14-(7+1) \\ &= 14-(1+7) \\ &= 14-1-7 \\ &= 13-7 \\ &= 13-(6+1) \\ &\dots \end{aligned}$$

上記の計算過程は具体的な場面における減少ということと式とが対応しやすく、記号と意味とが行動を媒介として結びつけやすい。

また、求差の場面を意識した式表示を考えると以下のように変形をしていると考えられる(式2)。

$$\begin{aligned} 14-8 &= (14-1)-(8-1) \\ &= 13-7 \\ &= (13-1)-(7-1) \\ &= 12-6 \\ &\dots \end{aligned}$$

また、上記の過程を要領よく行くと以下のような式変形となる(式3)。

$$\begin{aligned} 14-8 &= (10+4)-8 \\ &= (10+4)-(4+4) \\ &= 10+4-4-4 \\ &= 10-4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

減減法では、引く数の分解が使えると要領よく実行できる。仮にそれが不十分な場合でも式2に対応する行動および式1に対応する行動が可能である。そのことが先行経験として児童に十分実行可能な数えるという行動と結びつけやすいので、子どもにとって加減法よりも身につけやすい方法である。数え引き、減減法ともに引かれる数の逆順を意識することおよび引く数についての分解を意識することが多少難しい内容といってもよい。

それに対して減加法で行う式変形は以下の通りである(式4)。

$$\begin{aligned} 14-8 &= (10+4)-8 \\ &= 10+4-8 \\ &= 10-8+4 \\ &= 2+4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

減加法では引かれる数を10と一の位の数に分解して、10から減数を引く。十進位取り記数法の原理による数の表示をもとに引かれる数を分解して引き算を行い、その結果と引かれる数の一の位の数を加えるという手順をとる。

この式表示は、今まで学習してきた繰り下がりのない引き算における考え方と大きく異なる。そのために混乱を生じる子どもが出てくることは当然である。つまり新しい記号に対する規約が付け加えられ、既習の内容と異なる思考過程を要求されるのである。数学の表記として、十進位取り記数法はきわめて重要であるが、そこへの移行について取り上げ方が粗雑といってもよい。先にあげた花村の著書では、数え引きや減減法が最初に取り上げられている。この扱いの方がよりきめ細やかな指導を可能とすると思われる。

しかし、平成10年の指導要領の改訂において指導時間が大幅に減少し、それに伴い指導内容の大幅な削減が行われた。第1学年での減加法の指導が中心に行われるようになり、減減法が付加的に減加法の後に位置づけられた。平成20年の改訂により指導時間が多少増えるようになったが、過去の弊害が依然として残っているものと言わざるを得ない。繰り返し学習などが強調されているが、このような思考過程あるいは表記の上からの不自然な流

れをそのままにしておいては、子どもの理解や学習の進展が十分になされないのは当然であろう。

2015年用の教科書ではすべての会社で減加法が最初に取り上げられ、計算の仕方に強調点が置かれている。言語活動を意識したコミュニケーションの配慮や問題作りといった手立てを組み込んでいるが、1年生の時点における基礎的な内容についての確実な獲得と定着という観点からは不十分といわざるを得ない。このことを教科書で13-9の計算について見ると以下のような絵が示されている¹⁶⁾。

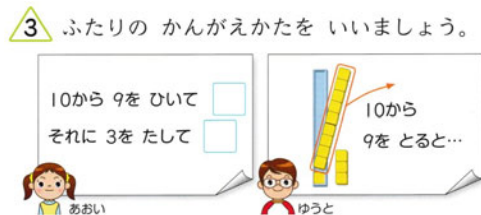


図17

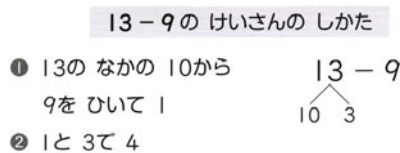


図18

他社の教科書においても、おおよそ同様な取り扱いがなされている。また、図18に見るように13を10と3に二つの線で分解する様子を示した書き方がなされている。これらの表現では、これまでに示してきたように、児童自身の可能な活動をもとに計算過程を構成していくような経験を十分に行なわずに結果だけを子どもに伝えがちな指導が行われることになりかねず、教科書の表現は不十分であると言わざるを得ない。

おわりに

数という新たな記号の獲得およびそれらを用いた操作である加法と減法は、記号として児童自身の持つ経験をもとに数学化の過程を経て教科書に記述されるような知識として定着するように指導を行う必要がある。児童の持つ基礎として定着している活動言語とも言える『数える』という行動をもとに表記を変更するという指導を行うことが算数指導で重要である。最近の児童は、日常生

活経験においてかつての児童よりも日常的な生活経験の質と量の違いが顕著である。その影響が学習においても現れている。学習指導において、教えるものがその状況を踏まえ、さらに、記号獲得という見地から活動をもとにした数学化を図る指導をいっそう行う必要がある。

本稿では、数と計算の指導において数概念の形成、繰り上がりのある加法、繰り下がりのある加法を中心に取り上げてきた。『数える』という活動は、単に一過的に取り上げられるべきではなく、新たな内容の導入展開に際しては、確実に可能な児童の活動として常に指導者は配慮しながら指導すべきであろう。本稿で示してきたとおり、取り扱いについては工夫改善を多く必要とするが、算数指導にあたるものは是非留意して指導を行ってほしいものである。

【注および引用参考文献】

- 1) 四方実一 算数の心理 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.8 吉野書房 1952.10
- 2) J. A. Mclellan and J. Dewey The Psychology of Number And Its Applications To Methods Of Teaching Arithmetic D. Appleton And Company 1906 p.24
- 3) 前掲書2) p.32
- 4) 前掲書1) pp.8-9
- 5) 藤井齊亮ほか あたらしいさんすう 1年上 東京書籍 2015年 p.25 図1～図3
- 6) 坪田耕三ほか しょうがくさんすう 1年 教育出版 2015年 p.22 図4
- 7) 花村郁雄 小学校算数科の授業計画 1年 国土社 1970年
- 8) 赤堀也ほか たのしいさんすう 1年 大日本図書 2015年 p.64 図5～図6
- 9) 一松信ほか さんすう 1年 学校図書 p.66 図7, p.76 図8
- 10) 藤井齊亮ほか あたらしいさんすう 1年下 東京書籍 2015年 p.3 図9～図10
- 11) 小山正孝ほか しょうがくさんすう 1年 日本文教出版 2015年 p.91 図11
- 12) 前掲書7) p.147 図12～13
- 13) Jean Piaget Logic and Psychology Manchester University Press 1953 p.8
- 14) 前掲書10) p.107 図14
- 15) 前掲書7) p.158 図15, 図16
- 16) 前掲書8) p.104 図17, 図18