

平面幾何における非等方的等周問題の 劣微分作用素を用いた考察

白川 健^{1)*} 高橋克仁²⁾

¹⁾千葉大学・教育学部

²⁾千葉大学大学院・教育学研究科

Subdifferential approaches to planar isoperimetric problems with anisotropies

SHIRAKAWA Ken¹⁾

TAKAHASHI Katsuhito²⁾

¹⁾Faculty of Education, Chiba University

²⁾Graduate School of Education, Chiba University

数学解析の分野において、計量の非等方性は結晶構造等にみられる異方性の数学的表現として有力視されている。これら一連の先行研究のモデルケースとして、本論文では、平面幾何における非等方的等周問題に注目し、曲線の滑らかさを前提としない数学解析を研究テーマとする。その際、滑らかさの欠如に伴って現れる微分不可能な状況に対しては、劣微分作用素と呼ばれる多価作用素を用いて数学的厳密な解析法を構築する。その上で、非等方的等周問題の「解の存在」と「解に対する必要条件」の2つの課題に関して現在までに得られた結果を報告し、証明のアウトラインを適宜文献等を引用しながら概説する。

キーワード：等周問題 (isoperimetric problem) 非等方性 (anisotropy) 劣微分作用素 (subdifferential)
解の存在 (existence) 解に対する必要条件 (necessary condition for solution)

1 導 入

本論文では、変分問題の基本的例題である等周問題を、曲線の弧長の計量が非等方的であるという設定で考える。

等周問題とは本来、「弧長（周長）が一定という条件の下で、囲む平面図形の面積を最大とする閉曲線の形状は何か」を問う問題で、今日ではその解が円周であることはよく知られた事実となっている (cf. [1])。

通常、閉曲線の弧長の計算には三平方の定理に基づいたEuclid ノルムが計量として使われるが、このEuclid ノルムには単位閉球が円板となる特性がある。円は中心からの方位に関して均等な、すなわち等方的な形をしているが、実はこの形の等方性が上記の「解が円周となる」事実と深く関わっている。

本研究における「非等方的」というキーワードは、弧長を測る計量に、円板以外の凸図形 C を単位閉球とする非Euclid ノルムを用いることを意味する。この非等方的な状況下では、図形 C と等周問題の解との間に、以下の命題 (★) が成り立つといわれる。

命題 (★) 非等方的等周問題の解は、 C の双対図形 C° の境界 ∂C° と相似な閉曲線になる。

C を単位円とする古典的等周問題では、 C とその双対 C° が一致するため、境界 $\partial C = \partial C^\circ$ と相似な円周が解となる。命題 (★) では、非等方的な状況ではこのような一致は一般に成立せず、 C と C° の形状の差異が解の姿に色濃く表れることが示唆されている。実は、こうし

た双対の不一致は、結晶構造にみられる異方性の数学的表現を与える際にも直面する状況で、実は非等方性を伴う数学解析に共通した「難しさ」である。したがって、非等方的等周問題は、非等方性に内在する困難とその解決法の本質を理解するための、良いモデルケースとなっている。

命題 (★) に対しては、 C の境界 ∂C に滑らかさを仮定すれば、通常の微分幾何学の方法に則った証明が構成可能である。しかしながら、多角形のような境界が滑らかでない設定を積極的に扱おうという試みにはあまり前例がなく、少なくとも今回行った事前調査では、このような設定で命題 (★) の数学的厳密な証明を与えた報告例を見つけることができなかった。

このような背景を踏まえ、本論文では非等方的等周問題に対する、曲線の滑らかさを前提としない数学解析を研究テーマとする。その際、滑らかさの欠如に伴って現れる微分不可能な状況に対しては、劣微分作用素と呼ばれる多価作用素を用いて数学的厳密な解析法を構築する。その上で、非等方的等周問題の「解の存在」と「解に対する必要条件」の2つの課題に関して現在までに得られた結果を報告し、証明のアウトラインを適宜文献等を引用しながら概説する。

2 問題の設定と解の定義

本節では、非等方的等周問題の数学的厳密な設定と解の定義を与え、さらに主定理の議論で必要となる記号等についても適宜準備する。

本論文を通し、 $0 < L < \infty$ を与えられた定数とし、平面曲線をベクトル関数

*連絡先著者：白川 健 sirakawa@faculty.chiba-u.jp

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)], \quad 0 \leq t \leq L$$

のグラフとして定義する。また、曲線と曲線を表すベクトル関数とを同一視して考える。

その上で、以下の関数空間 $\mathbf{V}_0$ を、2次元閉曲線の全体空間として設定する。

$$\mathbf{V}_0 := \left\{ \mathbf{r} = [x, y] \left| \begin{array}{l} x, y \in L^2(0, L), \\ x', y' \in L^2(0, L), \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(L) = \mathbf{0} \text{ in } \mathbf{R}^2 \end{array} \right. \right\}.$$

ここに、“ $'$ ” は関数の微分を表し、 $L^2(0, L)$ は2乗可積分な関数の全体集合を表す。すなわち、

$$L^2(0, L) := \left\{ z : (0, L) \mapsto \mathbf{R} \left| \int_0^L |z(t)|^2 dt < \infty \right. \right\}$$

である。

また、この設定に伴い、以下の記号を用意する。

記号 2.1

- $\mathbf{H} := L^2(0, L) \times L^2(0, L)$.
- $L^2(0, L)_0 := \left\{ z \in L^2(0, L) \left| \int_0^L z(t) dt = 0 \right. \right\}$.
- $\mathbf{H}_0 := L^2(0, L)_0 \times L^2(0, L)_0$.
- $\Pi_0 : \mathbf{r} = [x, y] \in \mathbf{H} \mapsto \Pi_0 \mathbf{r}$
 $:= \left[x - \int_0^L x(t) dt, y - \int_0^L y(t) dt \right] \in \mathbf{H}_0$.

補足 2.1 (cf. [4]) よく知られるように、空間 $\mathbf{H}$ は、内積 $(\cdot, \cdot)$ とノルム $\|\cdot\|$ を

$$\begin{cases} (p, q) := \int_0^L p(t) \cdot q(t) dt, & \forall p, q \in \mathbf{H}, \\ \|p\| := \sqrt{(p, p)}, \end{cases} \quad (1)$$

と定めることによって一つのHilbert空間を作る。同様に、空間 $\mathbf{H}_0$ に対して (1) と同じ位相を導入すれば、 $\mathbf{H}_0$ もHilbert空間となる。

また空間 $\mathbf{V}_0$ は、内積 $(\cdot, \cdot)_0$ とノルム $\|\cdot\|_0$ を

$$\begin{cases} (p, q)_0 := \int_0^L p'(t) \cdot q'(t) dt, & \forall p, q \in \mathbf{V}_0, \\ \|p\|_0 := \sqrt{(p, p)_0}, \end{cases}$$

と定めることによって、一つのHilbert空間を作る。

次に、平面図形の「面積」や「弧長」等の計量を設定する。閉曲線が囲む図形の面積については、以下の面積汎関数の絶対値を対応させる設定がよく用いられる。

定義 2.1 (面積汎関数) 本論文では、以下の汎関数 $\mathcal{A} : \mathbf{V}_0 \mapsto \mathbf{R}$ を面積汎関数とよぶ。

$$\mathbf{r} = [x, y] \in \mathbf{V}_0 \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{r})$$

$$:= \frac{1}{2} \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \in \mathbf{R}.$$

これに対して曲線の弧長については、「接線ベクトルのノルムの積分」として定義する方法が一般的である。通常このノルムにはEuclidノルム $|\cdot|$ が使われるが、この設定で弧長の定義を与えて等周問題を考察すると、解が円周となることがよく知られる (cf. [1])。実はこの解が円周となる事実は、Euclidノルムの単位閉球が円板になることと深く関係している。本研究のキーワードである「非等方的」とは、円のように中心からの方位に関して均等な状況、すなわち等方的な状況から離れて問題の設定・考察を行うことを意味する。よって、非等方的な状況下で弧長を定義する際には、その前段階としてEuclidでない、いわゆる非Euclidノルムを設定する必要がある。

非Euclidノルムの設定方法は色々あるが、今回のような幾何学をテーマとする研究では、単位閉球となる閉凸図形をはじめに指定する方法が適している。本論文では、この凸図形を $C \subset \mathbf{R}^2$ と表し、常に以下の条件を仮定して問題を考える。

(A1) $C \subset \mathbf{R}^2$ は原点 $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$ を内点に持つ、原点对称なコンパクト凸集合である。

ここで、 C のゲージ関数を γ_C で表すと、すなわち

$$\gamma_C : \mathbf{r} \in \mathbf{R}^2 \mapsto \gamma_C(\mathbf{r}) := \inf\{\mu \geq 0 \mid \mathbf{r} \in \mu C\}$$

と定めると、この γ_C は C を単位閉球とする一つの2次元ノルムとなる (cf. [5, §15])。加えて、 γ_C の極 (polar) を γ_C° と表すと、すなわち

$$\gamma_C^\circ : \rho \in \mathbf{R}^2 \mapsto \gamma_C^\circ(\rho) := \sup_{\gamma_C(\mathbf{r})=1} \rho \cdot \mathbf{r}$$

と定めると、 γ_C° は γ_C と双対な2次元ノルムとなり、 γ_C° の単位閉球 C° も C と凸図形として双対になる (cf. [5, §15])。特に C が単位閉円板、すなわち C が等方的なならば、 γ_C と γ_C° はどちらもEuclidノルムとなり、 C° も C と同じ円板となって一致する。しかし C が非等方的なならば、一般にこのような一致はみられない。したがって C とその双対 C° には形状の差異が色濃く現れ、それらの境界 ∂C と ∂C° をそれぞれ「Frank図形」と「Wulff図形」とよび分けて区別しなくてはならなくなる。こうした双対の不一致は、本研究に限らずあらゆる非等方的な状況への数学解析を難しくする主要因となっている。

上記を踏まえ、これ以降は C が円板以外の場合を主に扱い、非Euclidノルムを用いて定義される以下の汎関数を、弧長汎関数として設定する。

定義 2.2 (弧長汎関数) 条件 (A1) を満たす任意の凸図形 $C \subset \mathbf{R}^2$ に対し、以下の汎関数 $\mathcal{L}_C : \mathbf{V}_0 \mapsto [0, \infty)$ を弧長汎関数とよぶ。

$$\mathbf{r} \in \mathbf{V}_0 \mapsto \mathcal{L}_C(\mathbf{r}) = \int_0^L \gamma_C(\mathbf{r}'(t)) dt \in [0, \infty).$$

これらの準備を基にし、本論文では非等方的等周問題を改めて $(\text{AIP})_C^L$ と表し、問題の数学的厳密な設定と解の定義を以下のように定める。

非等方的等周問題 $(\text{AIP})_C^L$

$0 < L < \infty$ は定数, $C \subset \mathbf{R}^2$ は条件 (A1) を満たす凸図形という設定で、弧長の制約条件 $\mathcal{L}_C(\mathbf{r}) = L$ を満たす閉曲線 $\mathbf{r} \in \mathbf{V}_0$ の中から、面積汎関数 $\mathcal{A}$ の値を最大とする曲線 $\mathbf{r}_C \in \mathbf{V}_0$ を求める問題。

定義 2.3 (解の定義) 非等方的等周問題 $(\text{AIP})_C^L$ において、弧長の制約条件を満たす曲線全体のクラスを $\mathcal{W}_C^L$ とおく。すなわち、

$$\mathcal{W}_C^L := \{\mathbf{r} \in \mathbf{V}_0 \mid \mathcal{L}_C(\mathbf{r}) = L\}$$

とする。このとき、条件

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_C) = \max_{\mathbf{r} \in \mathcal{W}_C^L} \mathcal{A}(\mathbf{r})$$

を満たす曲線 $\mathbf{r}_C \in \mathcal{W}_C^L$ を、問題 $(\text{AIP})_C^L$ の解とする。

本節の残りの部分では、問題 $(\text{AIP})_C^L$ の数学解析に必要な記号や概念を用意する。

記号 2.2

- $F_C : \mathbf{r} \in \mathbf{H}_0 \mapsto F_C(\mathbf{r})$

$$:= \int_0^L \gamma_C(\mathbf{r}(t)) dt \in [0, \infty].$$
- $\mathcal{C} := \{\mathbf{r} \in \mathbf{H}_0 \mid F_C(\mathbf{r}) \leq 1\}.$
- $F_C^\circ : \mathbf{r}^\circ \in \mathbf{H}_0 \mapsto F_C^\circ(\mathbf{r}^\circ)$

$$:= \sup_{F_C(\mathbf{r})=1} (\mathbf{r}^\circ, \mathbf{r}) \in [0, \infty].$$
- $\mathcal{C}^\circ := \{\mathbf{r}^\circ \in \mathbf{H}_0 \mid F_C^\circ(\mathbf{r}^\circ) \leq 1\}.$

補足 2.2 (cf. [2]) F_C と F_C° の2つの汎関数は、空間 $\mathbf{H}_0$ 内で互いに双対なノルムとなる。よって、2つの集合 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^\circ$ はそれぞれノルム F_C と F_C° が作る空間 $\mathbf{H}_0$ 内の単位閉球となる。

最後に、凸関数の劣微分作用素の概念について説明する。

定義 2.4 (劣微分作用素) X を Hilbert 空間, $(\cdot, \cdot)_X$ を X の内積とし、 $\Phi : X \mapsto (-\infty, \infty]$ を X 上の適正下半連続凸関数とする。このとき、以下で定義される多価作用素 $\partial\Phi : X \rightarrow 2^X$ を、 Φ の劣微分作用素という。

$$\begin{aligned} u \in X &\mapsto \partial\Phi(u) \\ &:= \left\{ u^* \in X \mid \begin{array}{l} (u^*, z - u)_X \\ \leq \Phi(z) - \Phi(u), \forall z \in X \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

大雑把な言い方をすれば、劣微分とは通常の導関数(微分)を広義に拡張した概念である。この概念を用いれば

接線が確定しない(微分不可能な)状況を「微係数が集合になる状況」と捉え直して考察が進められるようになり、結果として問題 $(\text{AIP})_C^L$ に対して曲線や汎関数の滑らかさを前提としない数学解析が可能となる。

3 主定理の概要

本論文では、問題 $(\text{AIP})_C^L$ の数学解析で得られた2つの結果を、主定理として報告する。

一つめの主定理は、 $(\text{AIP})_C^L$ の解の存在に関する結果である。

主定理 1 (解の存在) 問題 $(\text{AIP})_C^L$ における凸集合 $C \subset \mathbf{R}^2$ に対し、その境界 ∂C の外向き単位法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = [n_x(\mathbf{r}), n_y(\mathbf{r})] \text{ a.e. } \mathbf{r} = [x, y] \in \partial C,$$

と表し、 C に対して以下の条件を仮定する。

$$\begin{cases} xn_x(\mathbf{r}) \geq 0, \\ yn_y(\mathbf{r}) \geq 0, \end{cases} \text{ a.e. } \mathbf{r} = [x, y] \in \partial C. \quad (2)$$

また、クラス $\mathcal{W}_C^L$ の部分集合 $\mathcal{U}_C^L$ を以下で定義する。

$$\mathcal{U}_C^L := \left\{ \mathbf{r} \in \mathcal{W}_C^L \mid \begin{array}{l} \gamma_C(\mathbf{r}'(t)) = 1, \\ \text{a.e. } t \in (0, L) \end{array} \right\}. \quad (3)$$

このとき、条件

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_C) = \max_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}_C^L} \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

を満たす曲線 $\mathbf{r}_C$ が存在し、さらにこの $\mathbf{r}_C \in \mathcal{U}_C^L$ は問題 $(\text{AIP})_C^L$ の解になる。

式(3)で定義されるクラス $\mathcal{U}_C^L$ は、 $\mathcal{W}_C^L$ に属する曲線の中でも接線ベクトルが正規化された特別な曲線群であり、主定理 1 の結論は非等方的等周問題をこの特別なクラス $\mathcal{U}_C^L$ に限定して考察してよいことを意味している。一般に、接線ベクトルを正規化すると曲線の数学的扱いが容易になるため、主定理 1 には問題 $(\text{AIP})_C^L$ の解の存在だけでなく、問題の幾何学的考察に有用な情報も、主張の中に含まれている。

補足 3.1 主定理 1 の仮定(2)における“a.e.”という文言は、図1のひし形をした C の頂点のような、法線が確定しない箇所を考察対象から外してよいことを意味する。また、条件(2)を直感的に理解するには、位置ベクトル $\mathbf{r} = [x, y] \in \partial C$ を x 成分 $\mathbf{e}_x = [x, 0]$ と y 成分 $\mathbf{e}_y = [0, y]$ に分解して、 $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{n}$ のなす角 θ_x と $\mathbf{e}_y$ と $\mathbf{n}$ のなす角 θ_y に着目するとよい。例えば、図形 C が図1のようなひし形で与えられた場合は、 $\mathbf{r} = [x, y] \in \partial C$ をどこにとっても θ_x と θ_y はどちらも鈍角にならないので、この場合の C は条件(2)を満たすことが確認できる。対して C が図2のような形をしているときは、図2に示された点 P において、 θ_y が鈍角になる。即ち図2には仮定(2)を満たさない C の例が示されている。

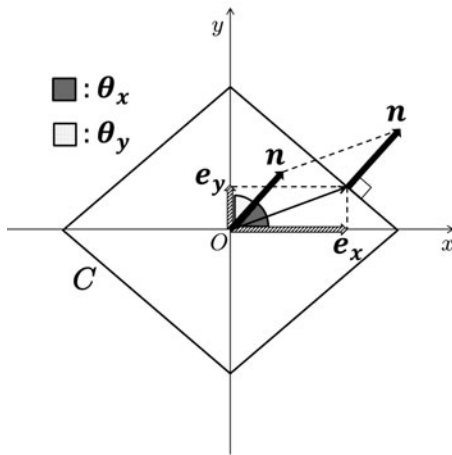


図 1

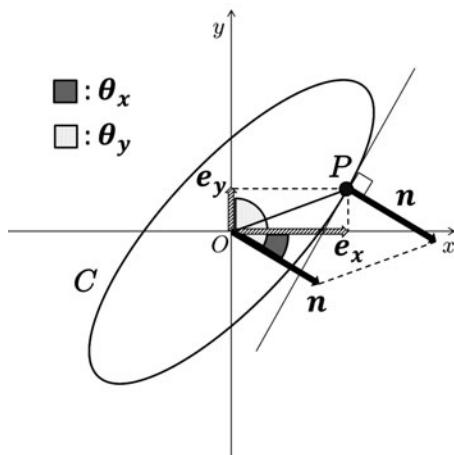


図 2

次に二つめの主定理について述べる前に、定理の仮定の中核を担う以下の多価作用素を準備する。

定義 3.1 (多価作用素 A_C) 問題 $(AIP)_C^L$ において、多価作用素 $A_C : \mathbf{H}_0 \mapsto \mathbf{H}$ を以下で定義する。

$$r \in \mathbf{H}_0 \mapsto A_C r := \left\{ r^* \in \mathbf{H}_0 \left| \begin{array}{l} \exists c_r \in \mathbf{R}^2 \text{ s.t.} \\ r^*(t) + c_r \in \partial \gamma_C(r(t)) \\ \text{a.e. } t \in (0, L) \end{array} \right. \right\}.$$

このとき、問題 $(AIP)_C^L$ の解が満たすべき必要条件として、以下の主定理 2 が得られる。

主定理 2 (解に対する必要条件) 曲線 $r_C \in \mathcal{U}_C^L$ を主定理 1 で得られた問題 $(AIP)_C^L$ の解とする。このとき、もし作用素 A_C と ∂F_C が一致するならば、すなわち

$$A_C r = \partial F_C(r) \text{ in } \mathbf{H}_0, \forall r \in \mathbf{H}_0, \quad (4)$$

が成り立つならば、解 r_C が等式

$$\gamma_C^\circ(\Theta_0(r_C(t) - c_0)) = \lambda_C \text{ a.e. } t \in (0, L), \quad (5)$$

を満たすような定ベクトル $c_0 \in \mathbf{R}^2$ と定数 $\lambda_C > 0$ が存在する。ここに、 Θ_0 は回転角 90° の回転行列、すなわち

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ である。}$$

補足 3.2 主定理 2 の仮定 (4) は、図形 C の境界 ∂C が C^1 級ならば、問題なく成立する。境界 ∂C が滑らかでなくとも、例えば C が図 1 のようなひし形の形状をしていれば、条件 (2) は満たされる。

補足 3.3 主定理 2 の結論からは、解 r_C のグラフが、図形 $\lambda_C \Theta_0^{-1} \partial C^\circ + c_0$ の部分集合となっていることが読み取れる。よりかみくだいた言い方をすると、曲線 r_C は曲線 ∂C の双対 ∂C° と相似な曲線の中に埋め込まれていることになる。このことから、主定理 2 の結論は導入で述べた命題 (*) を裏付けるための状況証拠となることがわかる。

4 主定理の証明

本節では、主定理 1 及び主定理 2 の証明のアウトラインを、適宜文献等を引用して概説する。

4.1 主定理 1 の証明

仮定 (2) は、先行研究 [3, 定理 5.1(I)] の証明法を適用可能とするための十分条件となっている。従って、本論文の主定理 1 の証明は [3, 定理 5.1(I)] とほぼ同様となるので、紙面の都合上ここでの詳述を割愛する。

4.2 主定理 2 の証明

主定理 2 の証明には、以下の 3 つの補題を用いる。

補題 4.1 (劣微分作用素の性質) 2 つのベクトル $r, r^* \in \mathbf{R}^2$ が条件

$$r \neq 0 \text{ and } r^* \in \partial \gamma_C(r) \text{ in } \mathbf{R}^2$$

を満たすならば、等式

$$\gamma_C^\circ(r^*) = 1,$$

が成立する。

本補題は、[5, §13, §23] にある凸解析の手法を適用することによって、容易に示すことができる (cf. [2])。□

補題 4.2 (劣微分作用素の関係) 以下 2 つの条件は互いに同値である。

(I) $r^* \in \partial \mathcal{L}_C(r)$ in $\mathbf{V}_0$.

(II) $(r^*)' \in \partial F_C(r')$ in $\mathbf{H}_0$.

証明 定義 2.2 及び記号 2.2 により、2 つの汎関数 $\mathcal{L}_C$ と F_C との間には以下の関係が成り立つことがわかる。

$$\mathcal{L}_C(r) = F_C(r'), \forall r \in \mathbf{V}_0.$$

条件 (II) は、条件 (I) に上の関係式を適用して書き直したのとなっており、これは条件 (I) についても同様である。□

補題 4.3 (多価作用素に対する Lagrange 乗数)

$r_C = [x_C, y_C] \in \mathcal{U}_C^L$ を問題 $(AIP)_C^L$ の解とする。また、

$$\begin{cases} \mathbf{q}_C(t) := \int_0^t \Pi_0 \Theta_0 \mathbf{r}_C(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, L], \\ \lambda_C := F_C^\circ(\mathbf{q}_C), \end{cases}$$

とおく。このとき、以下が成り立つ。

$$\lambda_C > 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{q}_C \in \lambda_C \partial \mathcal{L}_C(\mathbf{r}_C) \text{ in } \mathbf{V}_0. \quad (6)$$

証明 本補題の証明には凸解析学と劣微分作用素論の技巧的な知識を必要とするが、紙面の都合上そのすべてを紹介することは困難であることに加え、話題が平面幾何から逸れ過ぎてしまう恐れもある。論文[2]に同じ内容の命題に対する数学的厳密な証明が与えられているため、本論文では補題 4.3 の証明については論文[2]を引用するに止め、詳述を割愛する。 $\square$

これら3つの補題を用いて、主定理 2 は以下のように示される。

主定理 2 の証明 補題 4.2, 補題 4.3 及び仮定 (4) より、

$$\frac{1}{\lambda_C} \mathbf{q}'_C \in \partial F_C(\mathbf{r}'_C) = A_C \mathbf{r}'_C \text{ in } \mathbf{H}_0,$$

が成り立つ。よって A_C の定義から、以下を満たす $\mathbf{r}_C^* \in \mathbf{H}_0$ と $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^2$ が存在する。

$$\mathbf{r}_C^*(t) + \mathbf{c} \in \partial \gamma_C(\mathbf{r}'_C(t)) \text{ in } \mathbf{R}^2 \text{ a.e. } t \in (0, L), \quad (7)$$

$$(\mathbf{r}_C^*, \boldsymbol{\varpi}) = \left(\frac{1}{\lambda_C} \mathbf{q}'_C, \boldsymbol{\varpi} \right), \quad \forall \boldsymbol{\varpi} \in \mathbf{H}_0. \quad (8)$$

(8) の変分形式から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_C} \mathbf{q}'_C - \mathbf{r}_C^* &= \frac{1}{\lambda_C} \Pi_0 \Theta_0 \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_C^* \\ &= \Pi_0 \left(\frac{1}{\lambda_C} \Theta_0 \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_C^* \right) = 0 \text{ in } \mathbf{H}_0, \end{aligned}$$

となることがわかるので、

$$\bar{\mathbf{c}} := \int_0^L \left(\frac{1}{\lambda_C} \Theta_0 \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_C^* \right) dt \text{ in } \mathbf{R}^2,$$

とおけば、

$$\frac{1}{\lambda_C} \Theta_0 \mathbf{r}_C(t) - \mathbf{r}_C^*(t) = \bar{\mathbf{c}} \text{ a.e. } t \in (0, L),$$

が成り立つ。さらに、

$$\mathbf{c}_0 := \lambda_C \Theta_0^{-1}(\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c}) \text{ in } \mathbf{R}^2,$$

とおくと、式(7)により以下の計算が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_C} \Theta_0(\mathbf{r}_C(t) - \mathbf{c}_0) \\ &= \frac{1}{\lambda_C} \Theta_0 \mathbf{r}_C(t) - (\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{\lambda_C} \Theta_0 \mathbf{r}_C(t) - \left(\frac{1}{\lambda_C} \Theta_0 \mathbf{r}_C(t) - \mathbf{r}_C^*(t) \right) + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{r}_C^*(t) + \mathbf{c} \\ &\in \partial \gamma_C(\mathbf{r}'_C(t)) \text{ a.e. } t \in (0, L). \end{aligned}$$

ここで補題 4.1 を適用すれば、以下の等式が得られる。

$$\gamma_C^\circ \left(\frac{1}{\lambda_C} \Theta_0(\mathbf{r}_C(t) - \mathbf{c}_0) \right) = 1, \text{ a.e. } t \in (0, L).$$

主定理 2 の結論(5)は、上の等式の両辺を λ_C 倍したものである。 $\square$

5 今後の課題

本研究の課題として以下の3つが考えられる。

[課題 I] より一般的な設定での解の存在の証明

本論文の主定理 1 では、2つの条件(A1)と(2)が仮定されている。しかしながら、条件(2)は先行研究[3, 定理 5.1(I)]の方法を適用するための十分条件としてしか用いられない。したがって、先行研究とは別のアプローチで証明を作り直せば、条件(2)を仮定せずに $(\text{AIP})_C^L$ の解の存在が示せると予想している。

[課題 II] 命題 (*) の証明

主定理 2 の結論は、解 $\mathbf{r}_C$ のグラフ $\mathbf{r}_C([0, L])$ が、 ∂C° と相似な図形 $G := \lambda_C \Theta_0 \partial C^\circ + \mathbf{c}_0$ に埋め込まれる、すなわち包含関係 $\mathbf{r}_C([0, L]) \subset G$ が成り立つことを意味している。しかし、命題(*)は両者が一致することまでを主張しているので、逆の包含関係が未検証課題として残されている。

[課題 III] 図形 C に対する制約条件の解除

主定理 2 の証明では、条件(4)は解の姿を絞り込むための十分条件として用いられる。しかしながら、この条件は図形 C に制約を与える条件であり、事実境界 ∂C が滑らかでない場合で条件(4)との適合性が確認できているのは、補足 3.1 で示されたひし形のケースのみである。また、補足 3.1 から読み取れるように、主定理 1 の条件(2)も、やはり図形 C の形状を制約する条件となっている。

このように、本論文では図形 C に対していくつかの制約を課して結論を得ている。しかし実際には、これらの制約は結論を得るために後付けで仮定した条件であり、問題の設定に不可欠な(A1)と比較すると、本質的に必要な条件というほどではない。すなわち、条件(A1)以外の制約に頼らずに命題(*)を証明することが本研究の最終的な達成目標であり、これが実現しないうちは十分な成果が得られたとは言いがたい。

謝 辞

本研究は科学研究費補助金 若手研究 (B) (課題番号: 24740099) の助成を一部に受け、実施されたものである。

参考文献

- [1] 小磯憲史：変分問題。共立出版〈共立講座21世紀の数学12〉(1998)。
- [2] 高橋克仁：平面幾何に現れる双対性の研究とその

- 教材化. 千葉大学大学院教育学研究科 2015年度修士論文, 教科教育科学専攻 (2016).
- [3] 福原由久: 科学的な考察力を養成するための数学理論の研究. 千葉大学大学院教育学研究科 2013年度修士論文, 教科教育科学専攻 (2014).
- [4] プレジス ハイム: 関数解析—その理論と応用に向けて—. 産業図書 (2011).
- [5] Rockafellar, R.T.: Convex Analysis. Princeton University Press (1970).