

# 数学モデルを用いた地域経済の統計データに対する 逆問題的観点からの考察<sup>†</sup>

白川 健<sup>‡</sup> 大岩壮史

千葉大学・教育学部

## Inverse problem approaches for mathematical models implementing municipal statistical data

SHIRAKAWA Ken<sup>‡</sup> OIWA Takeshi

Faculty of Education, Chiba University

本論文では、外力項付きの連立微分方程式によって記述される地域経済動向の数学モデルを考え、経済の統計データ（実測データ）の動きに最も近い状況再現を実現する「最適な外力」に焦点を当てた数値実験を実施する。数値実験では、最適な外力による精度向上の定量的評価を目的とする「実験Ⅰ」と最適な外力と実経済との関連性の定性的考察を目的とする「実験Ⅱ」の2つの課題を設定する。数値計算の主力は「オイラー法」と「最急降下法による直接探索」の2つであり、数値計算には全国の政令都市が公開している実際の統計データを用いる。その上で、得られた数値実験データを統計的手法で分析し、それぞれの課題に対して分析結果に基づいた考察を与える。

キーワード：経済動向 (economic trend) 逆問題的アプローチ (inverse problem approach)  
外力 (forcing term) 最適性 (optimality) 統計データ (statistical data)

### 1 導 入

本論文では、以下の連立方程式 (S) を考える。

(S):

$$P(t) = c + \alpha_0 U(t) + \alpha W(t), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$\begin{cases} U'(t) = \nu_0 P'(t) + F(t), & t \in (0, T], \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} W'(t) = s e^{(P-W)(t)} - \delta + G(t), \\ W(0) = W_0. \end{cases} \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

上記 (S) は、地域経済動向を再現する数学モデルとして論文<sup>[5, 14]</sup>において提案されたものであり、 $[P, U, W] = [P(t), U(t), W(t)]$ の3組が(S)の未知関数(解)である。数学モデル (S) は、R. M. Solow<sup>[13]</sup>の経済動向モデル (Solowモデル) および関連する先行研究<sup>[1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 14]</sup>が基になっている。Solowモデルでは生産  $p = p(t)$ ・労働  $u = u(t)$ ・資本  $w = w(t)$ の3つを未知関数とするが、これに対して数学モデル (S) では

$$\begin{cases} P(t) = \log p(t), \\ U(t) = \log u(t), \\ W(t) = \log w(t), \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

という設定で、方程式 (1)～(3) が導出される。ここに、

$T > 0$  は時間の定数であり、 $c > 0$  は生産と労働・資本とを関係付ける定数である。 $0 < \alpha_0 < 1$  と  $0 < \alpha < 1$  はそれぞれ労働と資本の生産への寄与率を表しており、等式  $\alpha_0 + \alpha = 1$  を常に満たすとされる。 $0 < \nu_0 < 1$  は労働と生産の成長率を関連付ける定数、 $s > 0$  は生産の資本への貯蓄率、 $\delta > 0$  は資本の償却率を表す。また、 $F = F(t)$  と  $G = G(t)$  はそれぞれ労働と資本にかかる外力を表す項であり、 $U_0$  と  $W_0$  のそれぞれは未知関数  $U = U(t)$  と  $W = W(t)$  の初期値である。

本論文において考察の中心となるのは、2つの外力の組  $[F, G] = [F(t), G(t)]$  である。Solowモデルでは自然な状態での経済動向メカニズムの説明に主眼が置かれているため、オリジナルモデルでは外力による作用は重要視されていない。しかしながら、実際の経済は「政府による規制」や「資本の投入・削減」等の外的要因に大きく左右されるため、外力のなしの設定で数値実験を実施しても、統計データによる実測と数値実験データが合致する事は、あまり期待できない。この傾向は、震災やリーマンショック等の災害・事件のある年度が実験期間の中に含まれると、より顕著に表れる。従って、Solowモデルを実際の経済動向分析に役立てようとするならば、例えば先述の外力の組  $[F, G]$  の様な、外的要因に対応する項を付加して数学モデルを再構成する必要が生じる。

外力付の数学モデルを用いれば、当然ながら数値実験の精度向上が見込まれ、より実測に近い状況再現が可能になる事が期待される。そうすると、自然な興味として以下2つの疑問に思い当たる。

(Q1) 外力の導入によって、実際にどの程度の精度向上が望めるのか。

<sup>†</sup>本研究は科学研究費補助金 基盤研究 (C), No. 16K05224 の助成の下で実施されたものである。

<sup>‡</sup>連絡先著者：白川 健 sirakawa@faculty.chiba-u.jp

(Q2) 外力の数値計算データと実際の経済における外的要因との間に、何らかの関連性を見出す事は可能か。

上記の疑問に対する科学的な解答を得るには、様々な外力を与えて数値実験データを算出する「順問題的アプローチ」よりも、外力に対する何らかの最適性を追及する「逆問題的アプローチ」を選択する方が理に適っている。その際、「最適性」を「数値実験と実測との誤差の最小性」と対応させれば、最適な外力による数値実験データを統計分析するという流れで、研究のビジョンを構想する事ができる。

本研究の主目的は、上記の構想に基づいた数値実験を通し、上記(Q1)～(Q2)の解答に迫る事である。その際、実測との誤差を数値化する方法としては、

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ 生産の統計データ } p^*(t), \\ \bullet \text{ 労働の統計データ } u^*(t), \quad t \in [0, T], \\ \bullet \text{ 資本の統計データ } w^*(t), \end{array} \right.$$

を直接用いる方法と、設定(4)に則ってそれらの対数

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet P^*(t) = \log p^*(t), \\ \bullet U^*(t) = \log u^*(t), \quad t \in [0, T], \\ \bullet W^*(t) = \log w^*(t), \end{array} \right. \quad (5)$$

を用いる方法の2通りが考えられる。ここでは後者を採用し、外力の最適性を以下の様に定義する。

**定義(外力の最適対)** 以下の汎関数  $J = J(F, G)$  の値を最小とする外力の組  $[F^*, G^*]$  を数学モデル(S)における外力の最適対と呼ぶ。

$$\begin{aligned} J(F, G) &:= \frac{1}{2} \int_0^T |(P - P^*)(t)|^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T |(U - U^*)(t)|^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T |(W - W^*)(t)|^2 dt \\ &\forall [F, G] \in L^2(0, T)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $[P, U, W] = [P(t), U(t), W(t)]$  は外力の組  $[F, G] = [F(t), G(t)]$  が与えられたときの(S)の解である。

一般に、上記  $J = J(F, G)$  の様な最適性の基準を与える汎関数をコスト関数(もしくは単にコスト)と呼ぶ。式(6)は、数値実験データ  $[P, U, W]$  と実測データ  $[P^*, U^*, W^*]$  との誤差を二乗積分によって測った値を、コスト  $J$  の値として対応させる事を意味する。従って、 $J$  の値を最小とする最適対  $[F^*, G^*]$  を用いれば、実測データの動きに対して「式(6)の基準で最も近い」数値実験結果が得られる事になる。

本研究では、先述の(Q1)を対象とする[実験Ⅰ]と(Q2)を対象とする[実験Ⅱ]の2つの課題を設定する。数値計算の主力はオイラー法<sup>[9]</sup>と最急降下法<sup>[2]</sup>による直接探索の2つであり、数値計算には全国の政令都市が公開している実際の統計データを用いる。その上で、得られた

数値実験データを統計的手法で分析し、それぞれの課題に対して分析結果に基づいた考察を与える。

## 2 数値実験課題

本研究では、以下に挙げる[実験Ⅰ]と[実験Ⅱ]を、数値実験の課題として設定する。

**[実験Ⅰ] 外力による精度向上の評価** 最適対  $[F^*, G^*]$  に対応するコストの値  $J_A = J(F^*, G^*)$  と、外力なしの設定でのコストの値  $J_B = J(0, 0)$  の2つを用い、各数値実験における精度の改善率  $\theta$  を以下の百分率によって定義する。

$$\theta = \frac{J_B - J_A}{J_B} \times 100.$$

更に、様々な数値実験結果から集計した改善率のデータに統計的な処理を施し、前節(Q1)に関する定量的観点からの考察を与える。

**[実験Ⅱ] 最適対の持つ経済学的意味の追求** 最適対  $[F^*, G^*]$  だけでなく、最適対の変動速度  $[(F^*)', (G^*)']$  と最適対の変動加速度  $[(F^*)'', (G^*)'']$  にも着目し、これら3つの量が持つ経済学的意味に関して以下の仮説(★)をたてる。

(★)  $[F^*, G^*], [(F^*)', (G^*)'], [(F^*)'', (G^*)'']$  の3つは、実際の経済が変動する際にかかる「ストレス」の様な量と密接に関わっている。

この仮説に基づき、西暦  $k$  年度の1年区間  $[k, k+1]$  で蓄積されたストレスを  $\sigma(k)$  と表し、その値を以下の積分量によって定義する。

$$\begin{aligned} \sigma(k) &:= \int_k^{k+1} (|F^*(t)|^2 + |G^*(t)|^2) dt \\ &+ \int_k^{k+1} (|(F^*)'(t)|^2 + |(G^*)'(t)|^2) dt \\ &+ \int_k^{k+1} (|(F^*)''(t)|^2 + |(G^*)''(t)|^2) dt, \end{aligned} \quad (7)$$

更に、最適対を用いる数値実験を多数実施し、各実験期間内でストレス  $\sigma(k)$  が最大となる年度  $k$  をチェックする。その上で、チェックのカウント回数が多い年度の近辺で大きな災害や経済的なイベントがなかったどうか調べ、仮説(★)の妥当性の検証を介して前節(Q2)に対する定性的観点からの考察を与える。

## 3 数値実験の方法と設定

本節では、数値実験で用いる変数・定数等の設定方法について説明する。

**統計データ** 本研究では、全国13の政令指定都市\*の、

\*今回は、札幌市、仙台市、さいたま市、千葉市、横浜市、川崎市、名古屋市、京都市、大阪市、神戸市、広島市、北九州市、福岡市、以上13の政令指定都市が公開している経済計算の統計データを使用した。

2001年度～2013年度の統計データを用いて数値実験を実施する。また各数値実験の計算期間については、一律に5年間と設定する。従って、今回の数値実験で使用可能な計算期間は、以下8通りの有界閉区間となる。

$$[2001 + i, 2006 + i], i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \quad (8)$$

上記の設定により、考えられ得るすべての政令都市と計算期間の組み合わせの総数は104 (= 8 × 13) 通りとなるが、未公開のデータが2件あったため、今回実施した数値実験の総数は102件となった。

他方で、2001年度～2013年度までの間に含まれる1年区間は

$$[k, k + 1], k = 2001, 2002, 2003, \dots, 2012$$

の12通りなので、式(7)によってストレスが計算可能な期間は2001年度～2012年度までの12年間という事になる。

**時間スケール** 時間変数  $t$  については、 $t = 1$  を実験開始 ( $t = 0$ ) から1年後を表すとして、計算機内部と現実世界の時間スケールを対応付ける。よって、ここでは  $T = 5$  として数学モデル (S) や式 (6) のコストの値を数値計算する。また、(8) に示された計算期間はすべて、計算機内部では長さ5の閉区間  $[0, 5]$  としてプログラムする。

**連続量の離散化** 本研究では、時間の刻み幅  $\Delta t$  を  $\Delta t = 0.01$  と設定し、数学モデル (S) をオイラー法による陽的スキーム<sup>[9]</sup>に従って数値計算する。これにより、数値実験における計算期間  $[0, 5]$  は501個の分点よって500等分され、連続量として表される  $P(t), U(t), W(t), F(t), G(t)$  といった関数はすべて、計算機内では501次元のベクトル (配列) として扱われる事になる。

**離散量の補間** 実際の統計データは元来1年毎の値しか存在しない。つまり式 (6) 中の  $P^*(t), U^*(t), W^*(t)$  のデータについては、計算区間  $[0, 5]$  内では  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  における6点分の値しか手に入らないため、このままではコスト  $J = J(F, G)$  の算出において齟齬が生じる。本研究では、 $P^*, U^*, W^*$  の計算区間  $[0, 5]$  上での離散データに3次のスプライン補間を適用し、補間して得られた連続関数を用いてコストの値を計算する。

他でも、どの数値実験でも得られた時間離散データを出力する際には、対象データの線形補間を用いてグラフ表示する。

**最適対の数値計算法** 外力の最適対に対しては、コスト  $J = J(F, G)$  に最急降下法による直接探索法<sup>[2]</sup>を適用して実験データを算出する。その際、最急降下法に用いる外力の初期データ  $[F_0, G_0]$  については、一律にゼロ、即ち  $[F_0(t), G_0(t)] = [0, 0], \forall t \in [0, 5]$ , とする。

**未知関数の統計データとの対応付け** 数学モデル (S) の未知関数  $P = P(t) \cdot U = U(t) \cdot W = W(t)$  は設定 (4) に則って計算されるが、その際、生産  $p = p(t) \cdot$  労働  $u = u(t) \cdot$  資本  $w = w(t)$  の3項目については、それぞれ以下の様に統計データと対応付けて数値を与える。

$$\begin{cases} p = (\text{生産}) = (\text{市内総生産}), \\ u = (\text{労働}) = (\text{雇用者報酬}), \\ w = (\text{資本}) = (\text{総固定資本形成}). \end{cases}$$

**係数の決定方法** 数学モデル (S) に現れる定数に関しては、数値実験の開始年度 (初年度) とその次の年度 (次年度) の統計データを用いて、以下の様に設定する。

**労働の寄与率  $\alpha_0$  と資本の寄与率  $\alpha$ :**

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{(\text{初年度の雇用者報酬})}{(\text{初年度の市民所得})}, \\ \alpha = 1 - \alpha_0. \end{cases}$$

**貯蓄率  $s$  と償却率  $\delta$ :**

$$\begin{cases} s = \frac{(\text{初年度の資本})}{(\text{初年度の生産})}, \\ \delta = \frac{s \times (\text{初年度の生産})}{(\text{初年度の資本}) - \frac{(\text{次年度と初年度の資本の差分})}{(\text{初年度の資本})}}. \end{cases}$$

**定数  $c$  と定数  $\nu_0$ :**

$$\begin{cases} c = \frac{(\text{初年度の生産})}{(\text{初年度の労働})^{\alpha_0} (\text{初年度の資本})^{\alpha}}, \\ \nu_0 = \frac{(\text{初年度の労働})}{(\text{初年度の市民所得})}. \end{cases}$$

## 4 数値実験結果

本節では今回得られた102件の数値実験データを、それぞれの実験課題における目的に沿って分析した結果を示す。

### 4.1 [実験 I] に対する結果

以下の表は、各数値実験で算出された改善率のデータに対する統計を取り、得られた結果を示したものである。

表 1. 改善率の統計

最大値	最小値	平均値	変動係数
99.50%	36.89%	86.82%	14.70%

この表を基に、以下に改善率が最大となったケース (例 1) と最小となったケース (例 2) の実験結果と、更に平均的な改善率が示された代表的なケース (例 3) の実験結果をグラフにして示す。どのケースにおいても、横軸には時間が西暦年で表示されており、縦軸には金額が1兆円単位で表示されている。また、上段・中段・下段

のそれぞれに生産・労働・資本のグラフが示されており、太いグレーの実線で示されているのが統計データで、細い黒の実線で示されているのが最適対  $[F^*, G^*]$  を与えたときの数値計算結果である。

例 1. 改善率が最大となったケース (99.50%)

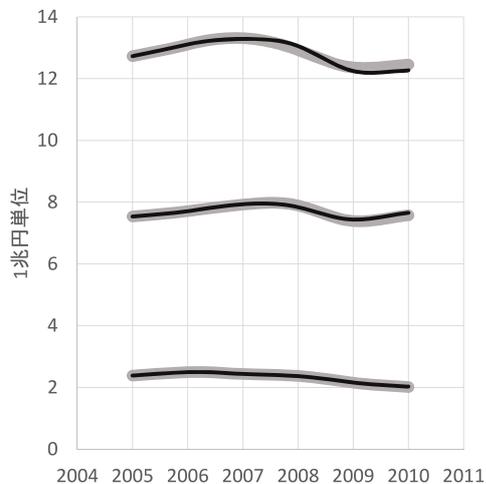


図 1：横浜市2005年度～2010年度の数値実験

例 2. 改善率が最小となったケース (36.89%)

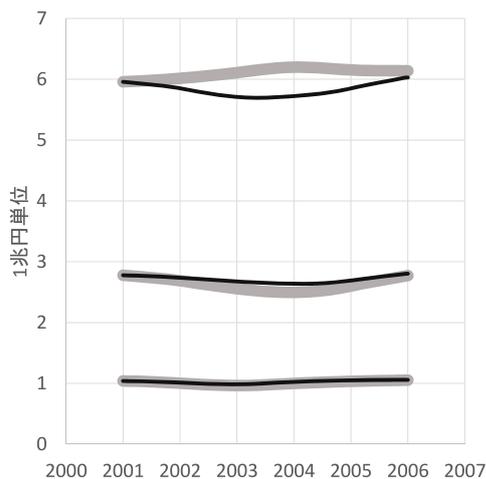


図 2：京都市2001年度～2006年度の数値実験

例 3. 平均的なケース (85.80%)

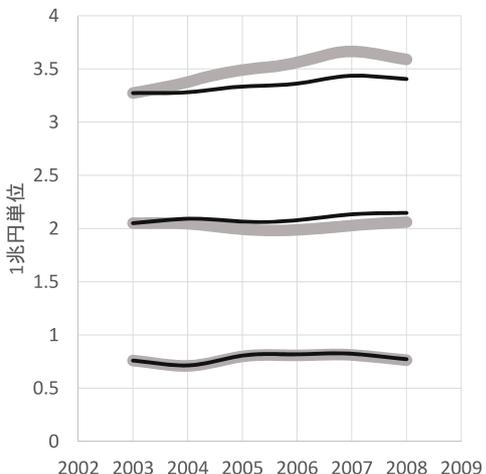


図 3：千葉市2003年度～2008年度の数値実験

4.2 [実験Ⅱ] に対する結果

以下の図は、ストレスが計算可能な2001年度～2012年度の考察期間において、各年度毎にストレスが最大とカウントされた回数を集計し、結果を棒グラフにして表したものである。

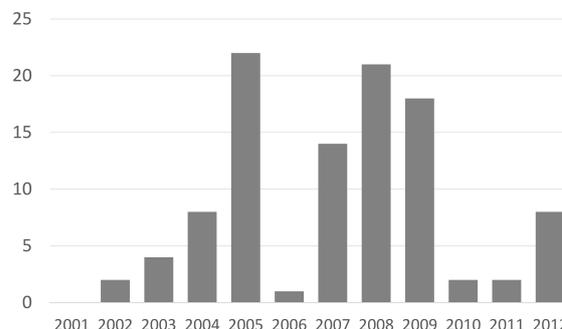


図 4：ストレス最大のカウント数の分布

グラフからは、年度によってストレス最大のカウント数には偏りがあり、カウントのされ易さに関する何らかの傾向が存在するであろう事が読み取れる。

これを踏まえ、ストレス最大のカウント数と考察期間中に起こった主な出来事(時事)とを併記して年表にしたものが、以下の表である。

表 2. ストレス最大のカウント数と時事の年表

年度	カウント数	主な出来事
2001	0	
2002	2	
2003	4	
2004	8	新潟県中越地震, スマトラ島沖地震
2005	22	スマトラ島沖地震
2006	1	
2007	14	
2008	21	リーマンショック
2009	18	
2010	2	
2011	2	東日本大震災
2012	8	

年表からは、ストレス最大のカウント数が多い年度の近辺ではかなりの頻度で震災や経済的の事件が起こっており、更にこうした災害・事件の直後の年度は高いカウント数が記録され易い事が、傾向としてははっきりと読み取れる。

5 結論および今後の課題

最後に、今回実施した数値実験で得られた結論を課題ごとにまとめ、その上で今後の研究の見通しを示す。

### 5.1 [実験 I] における結論

まず、改善率の平均値が86.82%となった点と最大値が99.50%を記録した点は、外力による精度向上の確実性を定量的に裏付ける結果として、率直に評価できる。しかしながら、安定した改善率の実現までを要求するならば、改善率の最小値が36.89%となった点や、変動係数が14.70%という点には、大いに改良の余地が残っている。

また、図1～図3に示されたグラフからは資本（下段）・労働（中段）・生産（上段）の順番で誤差が大きくなる傾向が読み取れるが、実のところ同様の傾向はすべての実験データに共通してみられる。原因としては、数学モデル（S）に生産に関する外力が組み込まれていない点がまず挙げられるが、その他でも式（6）で対数を用いて誤差（コストの値）を定義した点も考えられる。実際、対数関数  $y = \log x$  のグラフには  $x$  座標の値が大きいくほど接線の傾きが小さくなる（緩やかになる）特性があるが、この特性によって式（6）中の  $|W - W^*| = |\log w - \log w^*|$  と比べて値の大きな  $|U - U^*| = |\log u - \log u^*|$ 、 $|P - P^*| = |\log p - \log p^*|$  の方が絶対値が小さく算出され易くなり、これが誤差評価を甘くする要因になっている事は大いに考えられる。またこの特性を勘案すれば、先述の下段から順に誤差が大きくなる傾向に関して、一応筋の通った説明がつけられる。

以上の考察により、式（6）による誤差評価の方法そのものに対して疑問符が投げかけられた事になるため、例えば純粋な誤差を対応させる以下のコスト関数

$$\begin{aligned}
 J_0(F, G) &:= \frac{1}{2} \int_0^T |(p - p^*)(t)|^2 dt \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^T |(u - u^*)(t)|^2 dt \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^T |(w - w^*)(t)|^2 dt \\
 &\forall [F, G] \in L^2(0, T)^2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

を用いた追実験を行うなどして、コストの設定法の妥当性を改めて検証する必要が発生したと考えている。

### 5.2 [実験 II] における結論

[実験 II] の課題において、ストレス最大のカウンタ数と実際の時事とが互いに関連し合う傾向が読み取れた点は、今回の数値実験で得られた最も興味深い成果であると評価している。実は、論文<sup>[1]</sup>では式（9）を単純化して設定したコストを用いて同様の数値実験を行っており、結論部では表2と全く同様の傾向が読み取れる事が報告されている。この事は、本論文と先行研究での成果によって先述の仮説（★）を裏付ける複数の科学的根拠が得られた事を意味し、更には（★）の検証結果から着想した以下の（★★）が、新たな仮説として主張可能となった事も意味する。

（★★）表2にみられる定性的な傾向は、誤差の測定基準に依存しない普遍的な性質である。

以上の考察を踏まえ、今後の展開・課題として以下の2点が挙げられる。

**(F1) 仮説の創出・検証を繰り返すサイクルの継続** 今回の様に、実験結果から新しい仮説（予想）を導き出して、そこから次の研究展望が開かれる流れは、科学の方法に則った活動の理想的な姿である。本研究の場合、次の展望は仮説（★★）の検証という事になるが、そのためには式（9）を含めた様々な設定でのコストによる数値実験を多数実施し、表2と同様な傾向が読み取れるかどうか調べる事になる。そうなれば、[実験 I] の結論部で指摘された追実験は、次の研究活動の一環として組み入れられる事にもなる。その際、結果的に本論文のコストの設定（6）が不適切と判断されてもそれはあまり深刻な失敗ではなく、むしろ経済の様に実測データ（統計データ）の量産が難しい状況下では、この種の失敗は仮説を創出する直観力を磨くための「歓迎されるべき経験」となり得るのではないかと考えている。更にこうして磨かれた直観力に従って新たに仮説を創出して検証するサイクルが継続できれば、導入の（Q2）で漠然と主張されていた「外力と実経済での外的要因の関連性」をより具体的な形に彫り起こす事が可能となり、ひいては経済動向のメカニズムに対する科学的理解が深まる事につながるのではという期待を、現時点から強く抱いている。

**(F2) 最適対の効率的な数値計算法の構築** 現行の最急降下法による方法では、数値計算1件あたり平均で約3時間程度かかっており、今回行った102件の数値実験が終了するまでには単純計算で306時間（13日弱）かかっている。これは、数値実験データの効率的な量産を実現するには十分な速度とはいえず、迅速な改善が求められる部分である。

計算効率を向上させる手だてとしては、例えば数学モデル（S）の数値計算法をルンゲ・クッタ法に変更するという方策が有効であると考えられる。ルンゲ・クッタ法はオイラー法と比較して「手間の割に高速で精度が良い方法」として知られるため<sup>[9]</sup>、時間の刻み幅  $\Delta t$  を現行より大きく設定しても、オイラー法とそれほど変わらない時間で同等の精度を持つ数値計算データを算出できる。これにより、例えば刻み幅を現行の2倍（ $\Delta t = 0.02$ ）に設定しても問題ないという事になれば、扱う離散データの量を半減させる事ができ、単純計算で倍速に近い計算速度が実現する事が期待できる。

他でも、最急降下法による直接探索をより効率の良い計算法に置き換えるという方策も考えられる。その際には本論文と類似のアプローチを行う「最適制御問題」の研究手法が、本研究でも有効に働くのではないかと期待できる。数学モデル（S）に対する最適制御問題に関しては[5, 10, 14]等の先行研究があり、（S）に随伴する共役な方程式を活用した極めて効率の良い最適解の算出法が提示されている。しかしながら、これらの先行研究と本研究とは用いるコストに根本的な相違点があり、この相違点が既存の最適制御理論の適用を困難にしている。従って、最急降下法に代わる数値計算法を構築するには「最適制御問題」や「逆問題」に関するより深い知

識理解と、これに裏付けされた高度な数学解析のスキルが必要になると考えている。

### 参考文献

- [1] 石橋伸一郎：外力項の付いた常微分方程式による地域経済モデル. 神戸大学工学部情報知能工学科 2009 年度卒業論文, 神戸大学工学部 (2010).
- [2] 茨木俊秀：最適化の数学. 共立出版〈共立講座21世紀の数学13〉(2011).
- [3] Ito, A., Kadoya, A., Shirakawa, K.: Numerical simulations of ordinary differential equations describing the regional economic trends (investigation). Annual Report, Kinki University, School of Engineering, **34** (2004), 87-111 (Japanese).
- [4] Kadoya, A., Ito, A., Shirakawa, K.: Numerical simulations of the behavior of the mathematical model describing the Regional Economic Trend. *Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation, Mathematical Analysis, Modeling and Simulation*, pp. 227-241, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **29** (2008).
- [5] Kadoya, A., Ito, A., Shirakawa, K.: Optimal control problems for regional economic trends, In: *Current Advances in Applied Nonlinear Analysis and Related Topics*, pp. 341-364, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **32** (2010).
- [6] Kadoya, A., Shirakawa, K., Ito, A.: Mathematical models for describing the regional economic trend. In: *Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena: Modelling, Analysis and Simulations*, pp. 147-162, GAKUTO Internat. Ser. Math. Appl., **23** (2006).
- [7] Mankiw, N.G., Romer, D., Weil, D.N.: A contribution to the empirics of economic growth. *Quart. J. Econom.*, **107** (1992), no. 2, 407-437.
- [8] 水野 元：市町村レベルの経済動向に対する数値シミュレーション. 神戸大学工学部情報知能工学科 2005年度卒業論文, 神戸大学工学部 (2006).
- [9] 森 正武：数値解析 第2版. 共立数学講座 12, 共立出版 (2005).
- [10] 白川 健：地域経済モデルに対する最適制御問題と市町村統計データを実装した数値シミュレーション. 千葉大学教育学部研究紀要, **64** (2016), 419-424.
- [11] Shirakawa, K., Ito, A., Kadoya, A.: Solvability for a PDE Model of Regional Economic Trend. In: *International Series of Numerical Mathematics*, **154**, pp. 403-412, Proceeding of Free Boundary Problems; Theory and Applications, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland (2006).
- [12] Shirakawa, K., Kadoya, A., Ito, A.: Mathematical analysis for systems of partial differential equations motivated by regional economic trends. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **17** (2007), no. 2, 687-712.
- [13] Solow, R. M.: A contribution to the theory of economic growth. *Quart. J. Econom.*, **70** (1956), 65-94.
- [14] 田邑知也：地域経済動向に対する最適制御問題. 神戸大学大学院工学研究科 2010年度修士論文, 情報知能学専攻 (2011).