千葉大学教育学部研究紀要　第66巻　第１号　409～413頁（2017）

確率を題材とする数学教材の開発に向けたPK戦の数学的考察†

白川　健[1)]*　　三崎　凌[2)]

[1)]千葉大学・教育学部　　[2)]千葉大学大学院・教育学研究科

Mathematical observation for the penalty-kick shootout motivated by the development of teaching material of probability

SHIRAKAWA Ken[1)]*　　MISAKI Ryo[2)]

[1)]Faculty of Education, Chiba University, [2)]Graduate School of Education, Chiba University

本論文では，サッカーのPK戦を確率論を用いて分析するアルゴリズムを，中学･高校数学の授業作りの基本素材（元ネタ）となり得る数学モデルとして提案する。また提案モデルの「目標プロファイル」を具体的に構成・検証することによって，モデルが有するPK戦の分析アルゴリズムとしての説得力を数学的に考察する。更に得られた考察を基に提案モデルの達成度を評価し，今後の活動継続に向けて必要となる課題等についても検討する。

キーワード：確率の数学教材（teaching material of probality）　数学モデル（mathematical model）
目標プロファイル（target profile）　達成度の評価（assessment of achievement）

１　導　　入

本研究における大きな目的は，中高生が数学的（科学的）な活動を実感を伴いながら学習できるような授業を創作することである。その際，目標としたいビジョンは：

(★)　日常的で身近な現象（事象）への数学の応用例を示し，有用性という切り口から数学の面白さを体験する；

というシナリオに基づく授業構成であり，更に授業実践までを視野に入るならば，その内容を導入やまとめの１コマ（45～50分）に収められるほどコンパクトにできることが理想といえる。

本論文は，この目的に向けた授業作りの基本素材（元ネタ）となり得る「数学モデル」の試作と，試作モデルの数学教育素材としての妥当性の評価活動を通し，現時点まででわかった事実を経過報告としてまとめたものである。

上記のビジョン（★）を前提にする場合，スポーツは誰にとっても身近で親しみ易い代表的な題材の一つといえ，試しにインターネットで検索してみると，関連する先行研究はすぐに何例か見つけることができる（cf.［1，2，3，4，5，6］)。加えて，野球･ソフトボール･サッカーなどは全く知らない人間を探すほうが難しいほど日常生活に浸透しており，またオリンピック等の社会全体が盛り上がりを見せる祭典も定期的に催されている。こうした背景を鑑みると，題材にスポーツを選べば第三者の共感を得やすい下地（雰囲気）を自然に作り出すことが可能で，この下地は授業実践等で受講生の興味・関心を引き出す際にもそのまま有利に働くと期待できる。

本論文でサッカーを題材に選んだ理由もこの点においては先行研究等と同じであり，その中でも特にルールが簡単なPK戦を素材化（モデル化）できれば，数学モデルを授業実践向けに加工する活動にもつながり易くなるのではないかと考えた。その上で，ここでは：

(★★)　キッカーにとって得点する確率や期待値が最も高くなるのはゴール枠内のどの領域か；

という所に焦点を当て，これに対する確率論を主力とした分析を目的とする数学モデルの提案を，現段階における到達目標とする。

PK戦をモデル化することにテーマを絞ったとしても，分析する対象や目的によって出来上がるモデルは異なる数式で表されることになる。見方を変えれば，モデル化では数式を導く仮定（法則）や数式表現を製作者の裁量で自由に設定してよく，この意味でモデルの製作者には「無から有を生み出す創作能力」が実質的に問われることになる。よって，本研究では自由な発想でのびのびとアイデアを創出する姿勢が基本となるが，他方でこれをやり過ぎると「授業時間」や「受講生の知識量」等の後の活動で対応を迫られる諸々の制約に対応できなくなり，最悪の場合で費やした努力をすべて無に帰すことになりかねない。

また考察したい状況を数式で表すことは実現しても，そこから得られる情報（答え）と実態とのギャップ（誤差）が大き過ぎるようであれば，中高生に数学の有用性を訴える材料としては説得力に欠けたものになってしまう。しかし，状況再現の緻密さにだけ気を取られている

---

†本研究は科学研究費補助金基盤研究（C)，No. 16K05224の助成の下で実施されたものである。
*連絡先著者：白川　健　sirakawa@faculty.chiba-u.jp

と今度は数学モデルの式表現がどんどん複雑になり，これもやり過ぎれば教材開発への発展性を自ら閉ざすことにもなりかねない。

本論文において挑戦を求められる部分は，こうした相反する状況に対していかに「両立に近い形」を実現する数学モデルを見つけることができるかという所にある。このことを鑑み，ここではモデル化の活動に臨む際の基本的心構えとして，以下の２点を設定する。

（C１）発想の自由さと教材化への発展性の両立：高校数学の知識範囲を外れても自由な発想でモデル化することは許容するが，同時に数学モデルの中高生向けの教材へのアレンジをも可能にする発展性を有することを要求する。

（C２）説得力と明快さの両立：数学の有用性を訴える上での要件を集約した「目標プロファイル」を構成し，目標プロファイルの検証までを活動内容に組み入れる。更に，数学モデルと目標プロファイルの数式表現がどこまで単純化できるかについても探究する。

これらを踏まえ，本論文ではPK戦に関する分析アルゴリズムを独自に考案する。また，考案した分析アルゴリズムを（AA）とし，これを今後の活動継続に有望な現段階での提案モデルとする。複雑な数式表現を避けるならば，本論文における提案モデルの概要は，以下のように要約することができる。

（AA）の概要：「キッカーの制球力（ボールコントロール能力）」と「キッカーの得点確率」との関係を数式で表すことで，１回のPKにおいてキッカーの成功確率が最も高くなるゴール枠内での領域を，キッカーの制球力に合わせて算出するためのアルゴリズム。

以下に本論文のおおまかな構成を示す。第２節では，数学モデル（AA）の詳しい設定と導出プロセスを示し，モデルの理解や考察に必要となる数学の知識範囲（単元）を明らかにする。その上で，第３節ではモデル（AA）の目標プロファイルを定め，その実現可能性を調べることで，PK戦の分析アルゴリズムとしての説得力を数学的に考察する。最後の第４節では，得られた考察を基に先述の（C１）～（C２）の観点からモデルの達成度を評価し，今後の活動継続に向けて必要となる課題等を検討する。

2　モデルの導出

FIFAや日本サッカー協会によれば，11人制のサッカーにおけるゴールの枠の標準サイズは

縦幅H=244（cm）×横幅３H=732（cm）

と定められている。これを基に，本論文ではこのゴール枠を，キッカー側からみた難易度別に図１のような①～⑦の７つの領域に分割する。更に各領域の縦幅・横幅についても，図１のようにx，y，u，vの文字を割り当てる。

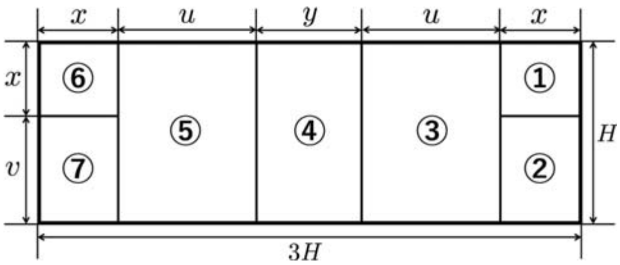

図１：サッカーゴールの分割と領域番号・文字の配置

次に，モデルの定式化で用いる仮説・主変数・定数・関数等を一覧にして示す。

変数p：本論文では，pを閉区間［０，１］を定義域とする変数として設定する。また，pの値はキッカーの狙う場所と実際にボールが届く場所が一致する確率を表すとする。よって特に，$p=1$はキッカーが狙った場所に確実にボールを当てられる選手であることを意味し，$p=0$はその逆（ノーコン）であることを意味する。また，各選手の制球力については，事前に調査を行うなどしてデータが完全に把握できている状態を前提とする。

左右対称の仮定：本論文では，モデルの単純化に対する工夫の一環として，サッカーゴールの枠内で設定される変数・定数・関数等の値はすべて，キッカー側からみて左右対称に分布すると仮定する。

定数$q_1, ..., q_7$：番号$k=1, ..., 7$に対し，キーパーが㉿番の領域をセーブする確率をq_kとする。提案モデル（AA）では，これら７つの確率$q_1, ..., q_7$を定数として扱い，更に先の左右対称の仮定と先行研究［６］で得られた統計資料を参考にした上で，値を以下のように設定する。

$$\begin{cases} q_1 = q_6 = 0, \\ q_2 = q_7 = \dfrac{1}{10} \\ q_3 = q_5 = \dfrac{3}{10} \\ q_4 = \dfrac{2}{10} \end{cases}$$

更に付け加えるならば，上記の$q_1=q_6=0$という条件には，［６］の統計資料以外にも「①番と⑥番の領域はキーパーによるセービングがまず不可能な領域である」という仮定（経験則）も取り入れられている。

領域の辺の長さx, y, u, v：本論文では，①～⑦の領域の辺の長さx，y，u，vはすべて定数として扱う。このとき図１の設定から直ちに，これらの定数に対して以下の制約条件が導かれる。

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0,\ u > 0,\ v > 0 \\ u = \dfrac{3H}{2} - \dfrac{y}{2} - x,\ v = H - x \end{cases} \tag{1}$$

これを踏まえ，提案モデルではxとyの２つをフリーパラメータとして扱い, 残りのuとvについては関係式 (1)を用いて値設定することで，数式表現の簡略化を図る。

ゴールの成否に関する仮定：ゴールの成否に関しては，

- ボールが届く領域とキーパーがセーブする領域が異なる場合はゴール成功,
- 上記２つの領域が一致する場合はゴール失敗,

と定め，その他の細かいセービングミス等は無視して考える。

ミスキックに対する仮定：「ⓚ番の領域を狙ったボールがⓛ番に逸れる事象」に対応する条件付確率を$r_\ell^{(k)}$とする。また，$r_\ell^{(k)}$の値は以下の比で与えられると仮定する。

$$r_\ell^{(k)} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{ⓚ番とⓛ番が共有する}\\ \text{辺の長さの総和}\end{array}\right)}{\left(\text{ⓚ番の周長}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{ⓚ番が地面と接地}\\ \text{する辺の長さ}\end{array}\right)}$$

ただし，上の式において長さを対応させる辺が存在しない場合は，値を０として計算する。

得点確率の関数 $f_1(p), ..., f_7(p)$：番号$k = 1, ..., 7$に対し，制球力pのキッカーがⓚ番の領域を狙ったボールが，キーパーを抜いてゴール枠内のどこかに入る確率を$f_k(p)$と表す。$f_1, ..., f_7$は制球力pの関数であり，先の設定によりこれらは以下のような１次関数で与えられる。

$$\begin{aligned} f_1(p) &= p(1-q_1) + r_2^{(1)}(1-p)(1-q_2) \\ &\quad + r_3^{(1)}(1-p)(1-q_3) \\ &= \frac{3}{5}p + \frac{2}{5} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f_2(p) &= p(1-q_2) + r_1^{(2)}(1-p)(1-q_1) \\ &\quad + r_3^{(2)}(1-p)(1-q_3) \\ &= \frac{-12x+11H}{10(-x+2H)}p + \frac{3x+7H}{10(-x+2H)} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f_3(p) &= p(1-q_3) + r_1^{(3)}(1-p)(1-q_1) \\ &\quad + r_2^{(3)}(1-p)(1-q_2) \\ &\quad + r_4^{(3)}(1-p)(1-q_4) \\ &= \frac{-16x-7y+15H}{10(-2x-y+7H)}p \\ &\quad + \frac{x+17H}{5(-2x-y+7H)} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f_4(p) &= p(1-q_4) + r_3^{(4)}(1-p)(1-q_3) \\ &\quad + r_5^{(4)}(1-p)(1-q_5) \\ &= \frac{4y+H}{5(y+2H)}p + \frac{7H}{5(y+2H)} \end{aligned} \tag{5}$$

$$f_5(p) = f_3(p),\quad f_6(p) = f_1(p),\quad f_7(p) = f_2(p) \tag{6}$$

すぐに確認できるように，これらの関数は以下の条件を満たす。

$$\begin{cases} f_1(1) = f_6(1) = 1 \\ f_2(1) = f_7(1) = \dfrac{9}{10} \\ f_3(1) = f_5(1) = \dfrac{7}{10} \\ f_4(1) = \dfrac{4}{5} \end{cases} \tag{7}$$

以上の記号および仮定を踏まえ，ここでは以下の分析アルゴリズム（AA）を, 本論文における提案モデルとする。

(AA) 制球力pのキッカーが達成可能な，最大の得点確率を与える関数を$f^*(p)$とする。即ち，関数$f^*(p)$を，

$$f^*(p) = \max_{1\le k\le 4} f_k(p) \ \left(= \max_{1\le k\le 7} f_k(p)\right)$$

と定義する。その上で，制球力pの値から$f^*(p) = f_{k^*}(p)$となる番号$1 \le k^* \le 4$を求め，k^*に関する以下の場合分けに従ってキッカーが狙うべき領域を提示する。

- $k^* = 1$ならば最難関の①，⑥（ゴールの上方隅）を狙うよう提示,
- $k^* = 2$ならば難易度の高い②，⑦（ゴールの下方隅）を狙うよう提示,
- $k^* = 3$ならば難易度の低い③，⑤（キーパーの左右脇）を狙うよう提示,
- $k^* = 4$ならば最も簡単な④（キーパー正面）を狙うよう提示。

本節を振り返ると，提案モデル（AA）の目的や計算手順等の理解には，中学校２年生から高校１年生までの学習内容である「場合の数と確率（数学A）」と「１次関数」の知識があれば十分ではないかと考察できる。

3　提案モデルに対する数学的考察

前節の提案モデルの分析アルゴリズム（AA）に従えば，Excel等のアプリを用いてキッカーの制球力から狙う領域を算出させるプログラムを作成することができる。しかし，プログラムが弾き出す結果がサッカー指導者やプレーヤーの経験則と適合しないようでは，モデルを提案する活動そのものに意義を見出せなくなる。

この点に関し，本節では提案モデルに対して導入の（C２）で述べた「目標プロファイル」を具体的に構成し，以下の項目（Q）を検証することで,（AA）が有するPKの分析アルゴリズムとしての説得力を考察する。

(Q) 目標プロファイルを満足するフリーパラメータx，yの値の組み合わせは存在するのか。

提案モデルの目標プロファイルについては，サッカー経験者（主に本論文の第２著者）の経験則を参考に，以下の３つの要件によって構成する。

(Ｐ１) ①～⑦の領域のサイズが「ゴールの上方隅」「ゴールの下方隅」「キーパーの左右脇」「キーパー正面」と呼べる許容範囲内に収まることを目標プロファイルにおける第１要件とし，この要件を以下の不等式によって与える。

$$\frac{H}{10} < x < \frac{2H}{5},\ \ 0 < y < H \tag{8}$$

ここに，$\frac{H}{10}=24.4$（cm）はサッカーボールの直径（22（cm））に近い数値をxの下限として選んだ値であり，$\frac{2H}{5}=97.6$（cm）と$H=244$（cm）はそれぞれ，「①⑥はゴールの上方隅」と「④はキーパー正面」という表現を違和感なく言える高さの上限として選んだ数値である。

(Ｐ２) 得点確率の関数のすべてが制球力pに関して単調増加となっていることを，目標プロファイルにおける第２要件とする。前節（2）～（6）により，この要件は以下の不等式で与えられる。

$$\begin{cases} \dfrac{-12x+11H}{10(-x+2H)} > 0, \\ \dfrac{-16x-7y+15H}{10(-2x-y+7H)} > 0 \\ \dfrac{4y+H}{5(y+2H)} > 0 \end{cases} \tag{9}$$

(Ｐ３) 図２に示すように，$f^*(p)$が制球力pの向上に合わせて，段階的に難易度の高い領域を提示する関数になることを，目標プロファイルにおける第３要件とする。ここではこの要件を，論理記号を用いて以下のように定式化する。

$(\star\star\star)\ \ 0 < \exists p_2^* < \exists p_1^* < 1,\ \text{s.t.}$

$$f^*(p) = \begin{cases} f_1(p) & (p_1^* \le p \le 1) \\ f_2(p) & (p_2^* \le p < p_1^*) \\ \max\{f_3(p), f_4(p)\} & (0 \le p < p_2^*) \end{cases} \tag{10}$$

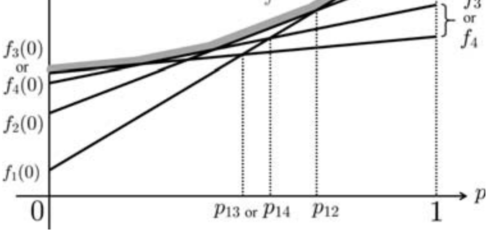

図２：関数f^*の理想のプロファイル

上記の要件（Ｐ１）～（Ｐ３）に基づき，以下では先述の検証項目（Q）について考察する。

簡単にわかるように，(8) は (9) となるための十分条件になっている。即ち，(8) を満たせば (9) は自動的に成り立つので，(9) は今後の議論の対象から外してよい。

次に，(10) となるための十分条件について考える。簡単のため，番号$1 \le k^* < \ell \le 4$に対する２つの関数$f_k(p)$，$f_\ell(p)$のグラフの交点のp座標を$p_{k\ell}$とおく。その上でこれらの交点を図２に書き込んで位置関係を条件（7）と照らし合わせながら考えると，(10) となるための十分条件として以下の不等式を導くことができる。

$$\begin{cases} 0 < \max\{p_{14}, p_{13}\} < p_{12}\ (= p_1^*) < 1 \\ \min\{f_3(0), f_4(0)\} > f_2(0) \end{cases} \tag{11}$$

また定義式（2）～（6）を手がかりにすれば，上で登場するp_{12}，p_{13}，p_{14}，$f_2(0)$，$f_3(0)$，$f_4(0)$等はすべて，以下のように求められる。

$$\begin{cases} p_{12} = \dfrac{7x-H}{6x+H} \\ p_{13} = \dfrac{10x+4y+6H}{4x+y+27H} \\ p_{14} = \dfrac{-2y+3H}{-y+5H} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} f_2(0) = \dfrac{3x+7H}{10(-x+2H)} \\ f_3(0) = \dfrac{x+17H}{5(-2x-y+7H)} \\ f_4(0) = \dfrac{7H}{5(y+2H)} \end{cases} \tag{13}$$

したがって，(12)～(13) を (11) へ代入して式整理することで，十分条件 (11) を以下の連立不等式の形に変形することができる。

$$\begin{cases} \dfrac{H}{7} < x < 2H, \\ y < \dfrac{-32x^2+139Hx-33H^2}{17x+5H} \\ y > \dfrac{H(-17x+8H)}{5x+3H} \\ y > \dfrac{-4x^2+37Hx-19H^2}{3x+7H} \\ y < \dfrac{2H(-10x+7H)}{3x+7H} \end{cases} \tag{14}$$

以上により，連立不等式 {(8), (14)} は要件（Ｐ１）～（Ｐ３）を満たすための十分条件となる。図３は連立不等式 {(8), (14)} の表す領域を図示したものであるが，この図により目標プロファイル（Ｐ１）～（Ｐ３）を満足する（x，y）の値の組み合わせは，少なくとも図３のグレーで色塗られた部分に無数に存在することがわかる。

これは検証項目（Q）に対して肯定的な考察が与えられたことを意味するとともに，提案モデル（AA）がPK戦の分析アルゴリズムとして確かな説得力を有することを，数学理論によって確認できたことを示唆してもいる。

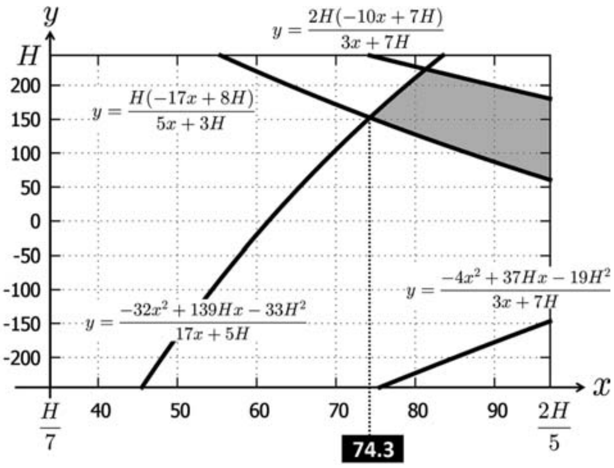

図３：目標プロファイルの実現可能領域

4　まとめ

本節では，導入で提示した（C１）～（C２）それぞれの観点から本論文の提案モデル（AA）の達成度を評価する。また，「モデルの教材化」という大目標を鑑みながら，今後の活動継続に向けた将来的見通しについても検討する。

（C１）の観点からの評価と見通し：提案モデルの導出に関しては，共著者同士で学校数学の範疇に縛られずに対等に意見を出し合いながら，自由な発想を基に数式やアルゴリズムを構築する創造的な活動であったと振り返ることができる。それにも関わらず，第２節でモデルの定式化が「場合の数と確率」と「１次関数」の知識範囲だけで実現した点は嬉しい偶然であり，こちらは同時に中高生向けの教材化への発展性を期待できる成果として，ポジティブに受け止めることができる。加えて，第３節の数学的考察が高校の数Ⅲまでの知識範囲で議論が組み立てられている点をも鑑みると，今回の提案モデルは工夫次第でより高度な内容を扱う数学教材の開発も狙える豊かな発展可能性を内包しているという見方も可能である。

（C２）の観点からの評価と見通し：目標プロファイルを独自に構成し，その実現可能性を示して見せた点は，教材開発の基礎的研究として及第点を与えてよい成果といえる。この成果は，提案モデルを基に中高生へ数学の有用性を訴えかける際にも，直接的に効力を発揮するはずである。しかしながら，図３に示された74.3（cm）というxの下限（の近似値）は，サッカー経験者の目から見れば「大き過ぎる」と映るようである。また，例え（x，y）の値の組み合わせを図３のグレーの範囲内で選んでも，図４の例のように，図２の理想形との間に印象のズレが生じることもままあるようである。他でも，「明快さ」という観点から見ればモデルの式表現にはまだ改良の余地が随所に見られる。限られた時間的制約の中での授業実践には現象の本質を今よりも単純かつ的確に数式で記述する必要があり，これに伴い数式の単純化が今後の研究活動における大きな課題となるであろうことは，現段階からも十分に予想することのできる点である。

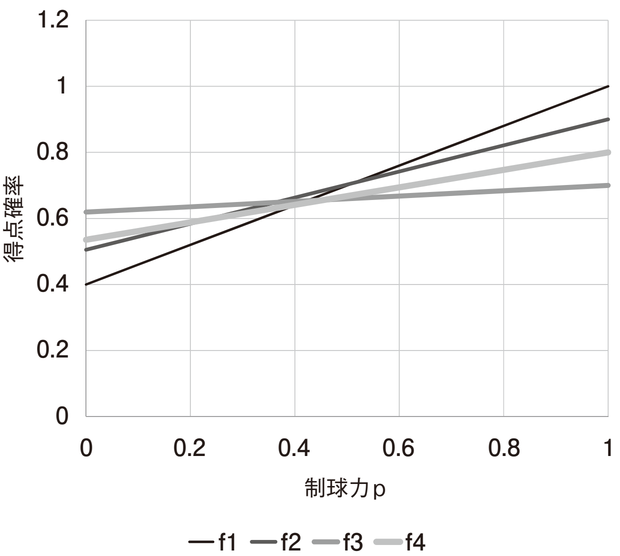

図４：（x，y）＝（90，150）としたときの再現例

参考文献

[1] 井上春奈，愛木豊彦　統計処理に関連した教材の開発とその実践，岐阜数学教育研究2004，3（2004），78～83

[2] 太田雄大，鈴木敦夫　サッカーのペナルティキックの最適戦略，オペレーションズ・リサーチ／日本オペレーションズ・リサーチ学会［編］，特集スポーツとモデリング，51(6)（2006），328～333

[3] 竹内洋平，愛木豊彦　円周角の定理の有用性を実感できる教材の開発，岐阜数学教育研究2008，7（2008），87～94

[4] 竹内洋平，愛木豊彦　統計領域に関する野球を題材とした教材開発と実践，岐阜数学教育研究2009，8（2009），82～88

[5] 鶴谷亮人，長坂建二　PK戦の解析―予備的考察―，法政大学大学院理工・工学研究科紀要，55（2014）

[6] 三崎凌　PK戦における確率を用いた数学的考察，千葉大学教育学部2016年度卒業論文，千葉大学教育学部（2017）