

幾何学の思考の特徴に関する考察

松尾七重

千葉大学・教育学部

Consideration about the characteristic of the thinking methods of geometry

MATSUO Nanae

Faculty of Education, Chiba University, Japan

本研究では、幾何学で用いられる思考の特徴を明らかにすることである。そのために、幾何学の歴史を振り返りつつ、ユークリッド幾何学、射影幾何学、位相幾何学、非ユークリッド幾何学、微分幾何学について概観し、それぞれの思考について比較し、それぞれの特徴を導き出す。その結果を基に、ユークリッド幾何学、解析幾何学及びベクトルを使って、三角形の垂心についての証明方法を例示する。結果として、以下のことが分かった。ユークリッド幾何学が全ての基本にあり、それを、解析学を通じて解決したのが、解析幾何学であった。ユークリッド幾何学の公理の問題点の解決のために、非ユークリッド幾何学がつけられた。その発展として、微分幾何学が位置付けられている。射影幾何学や位相幾何学では、研究の対象が限定されている。幾何学の共通点としては、ある条件で不変な性質を調べることがその手法として採られている。

The purpose of this study is to clarify the characteristics of the methods of thinking about geometry. I provide an overview of Euclidean geometry, projective geometry, topology, non-Euclidean geometry and differential geometry while looking back on the history of the geometry and comparing thinking methods and derive characteristics of each of them. Based on the result, I exemplify the proof method for a triangular orthocenter using Euclidean geometry, analytic geometry and a vector. As a result, I clarified the following things: Euclidean geometry is the basic of problem solving. By using analytic geometry we can solve problems related to geometric figures through analytic methods. In order to improve the problem for one axiom of the Euclidean geometry, non-Euclidean geometry was founded. As the development system, differential geometry is placed. In contrast, the research objects are much focused in projective geometry and topology. However, the common characteristic of the above geometry is to be adopted as the method that we investigate an invariable property on a certain condition.

キーワード：幾何学 (geometry), 思考 (methods of thinking)

1. はじめに

数学の歴史は古いが、とりわけ幾何学はユークリッド原論が世界最古の数学の教科書とされているように最も古い歴史をもっている。この幾何学についてはユークリッドの初等幾何学から多くの様々な分野が派生し、今に至っている。本稿では、幾何学の歴史を振り返りつつ、ユークリッド幾何学、射影幾何学、解析幾何学、位相幾何学、非ユークリッド幾何学及び微分幾何学について概観し、それぞれの幾何学で用いられる思考の特徴を明らかにすることを目的とする。その結果を基に、複数の幾何学を使って、三角形の垂心についての証明方法を例示する。なお、ベクトルは幾何学ではないが、参考として、併せて記載する。

2. 幾何学のおこり

幾何学のおこりはエジプトのナイル河のほとりで始まった土地の測量技術にあると言われている。ナイル河が定期的に氾濫を起し、その後、田の区画を引き直すための土地測量の必要性から、その技術が進展した。幾何学は英語で、geometryであるが、これは、geoとmetryに分けられ、前者は土地、後者は測量を意味していることから、この事実の根拠がよく分かるだろう。また、当時土地の測量をするのに、縄を使っていたが、それを行う専門家は縄張師と呼ばれ、彼らは縄をピンと張って直線をかき、縄の一端を固定して、他の端を一回りさせて円をかく、これらを組み合わせる様々なことを行っていた。これが幾何学における作図の起源である。例えば、3、4、5の辺の長さをもつ三角形を基にして、5の長さの辺に対する角が直角になることを利用して直角を作図していた。

ギリシャはエジプトの地中海を隔てた対岸に位置するが、北方から移り住んだギリシャ人たちは、エジプト、そして、バビロニアとの交通によって、それらの地方の

連絡先著者：松尾七重 matsuo@faculty.chiba-u.jp
Corresponding Authors :
Matsuo Nanae matsuo@faculty.chiba-u.jp

文化を受け継ぎ、それを自分たちなりに発展させていった。ギリシャの人たちは、エジプトやバビロニアで得られた経験的知識に対して、理論的視点から反省を加えて、知識を確立し、それを再び実用的な問題に当てはめていくようにした。これを最初に行ったのが世界で最初の数学者と言われるタレスである。タレスは「対頂角は等しい」「三角形の合同条件」「直径の上に立つ円周角は直角である」「一つの円において、同じ弦の上に立つ円周角は等しい（円周角の定理）」「円に内接する四角形においては、その一つの内角と、それに対する頂点における外角とは等しい」「三角形の相似条件」等の定理を証明していった。また、ピタゴラスやその学派の人たちはピタゴラスの定理をはじめ、三角形の内角の和が180度であること、正五角形の作図方法、黄金分割の方法等を発見していった。さらに、タイル張り、敷き詰めと言われる問題にも取り組み、敷き詰め可能な正多角形、存在可能な正多面体についても見つけたと言われている。

ギリシャはその後栄え、アテネの人たちは生活に関わる仕事は全て奴隷に任せ、自分たちは政治と学問にエネルギーを注いでいた。そのような状況の中で、ソフィストと呼ばれる、職業的教師が現れ、三大難問と呼ばれる、角の三等分問題、律法倍積問題、円積問題に取り組んでいた。その後、プトレマイオス王の招きに応じて、アレキサンドリアへ来たと言われるユークリッドは、これまでに挙げられてきた様々な定理等に、彼が見つけた研究結果を加えて、幾何の教科書を執筆した。これがユークリッド原論である。次節では、ユークリッド幾何学について概観する。

2. ユークリッド幾何学

ユークリッド幾何学はユークリッド原論を起源とする幾何学である。ここでは、ユークリッド原論を概説することで、ユークリッド幾何学で用いられる思考の特徴を明らかにしていこう。

ユークリッド原論では、点、直線、平面等の定義を述べた後で、5つの公理と5つの公準が挙げられている。それは以下の通りである。

定義（約束）

1. 点とは、部分をもたないものである。
2. 線とは、幅のない長さである。
3. 線の端は点である。
4. 直線とは、その上にある点について、一様に横たわる線である。
5. 面とは、長さのみをもつものである。
6. 面の端は線である。
7. 平面とは、その上にある直線について、一様に横たわる面である。
8. 平面角とは、平面上にあって互いに交わり、かつ1直線をなすことのない2つの線相互の傾きである。
9. 角を挟（はさ）む線が直線であるとき、その角は直線角と呼ばれる。
10. 直線が直線の上にたてられて接角を互いに等しくするとき、等しい角の双方は直角であり、上にたつ直線は、その下の直線に対して垂線と呼ばれる。

11. 鈍角とは、直角より大きい角である。
12. 鋭角とは、直角より小さい角である。
13. 境界とは、あるものの端である。
14. 図形とは、1つまたは2つ以上の境界に囲まれたものである。
15. 円とは、1つの線に囲まれた平面図形で、その図形の内部にある1点から、それへ引かれたすべての線分が互いに等しいものである。
16. この点は、円の中心と呼ばれる。
17. 円の直径とは、円の中心を通り、両方向で円周によって限られた任意の線分であり、それはまた円を2等分する。
18. 半円とは、直径とそれによって切りとられた弧とによって囲まれた図形である。半円の中心は、円のそれと同じである。
19. 直線図形とは、線分に囲まれた図形であり、三辺形とは3つの、四辺形とは4つの、多辺形とは4つより多くの線分に囲まれた図形である。
20. 三辺形のうち、等辺三角形とは3つの等しい辺をもつもの、二等辺三角形とは2つだけ等しい辺をもつもの、不等辺三角形とは3つの不等な辺をもつものである。
21. さらに三辺形のうち、直角三角形とは直角をもつもの、鈍角三角形とは鈍角をもつもの、鋭角三角形とは3つの鋭角をもつものである。
22. 四辺形のうち、正方形とは等辺でかつ角が直角のもの、矩形（くけい）とは角が直角で等辺でないもの、菱形（ひしがた）とは等辺で角が直角でないもの、長斜方形とは対辺と対角が等しいが等辺でなく、角が直角でないものである。これら以外の四辺形はトラペジオンと呼ばれるとせよ。
23. 平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても互いに交わらない直線である。

公理（共通概念）（資料参照）

1. 同じものに等しいものは互いに等しい。
2. 等しいものに等しいものを加えれば、また等しい。
3. 等しいものから、等しいものを引けば、残りは等しい。
4. 互いに重なり合うものは互いに等しい。
5. 全体は部分より大きい。

公準（要請されていること）

1. 任意の点から任意の点へ直線を引くこと。
2. 有限な直線を連続的に直線に延長すること。
3. 任意の点を中心とする任意の半径の円を描くこと。
4. すべての直角は互いに等しい。
5. 直線が2直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さいなら、この2直線は限りなく延長されたとき、内角の和が2直角より小さい側において交わる。

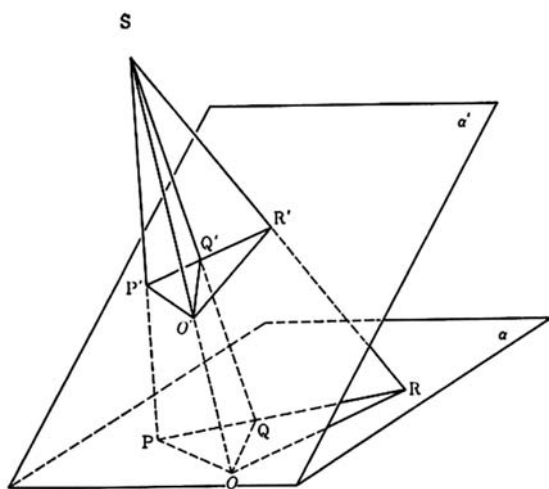
この最後の第5公準を認めることは、「一直線以外の一点を通して、この直線と交わらない直線、すなわち平行線は一本あって一本に限る」ということを認めることになる。これは平行線の公理と呼ばれ、この第5公準は非ユークリッド幾何学を生み出すきっかけとなったのである。

このように、ユークリッド幾何学では、定義、公理、公準を前提として、それらを根拠に様々な図形の性質を研究し、それが成り立つことを明らかにしていく方法を取っていく。この中では、図形について言えば、現在使われている幾何学の用語とは異なる用語が使われている場合もあり、また、図形間の関係は階層分類にはなっていない。このほか、以下のような定理が取り上げられ、それらが証明されている。例えば、三角形の合同条件(資料参照)、中点連結定理、円周角の定理等。

3. 射影幾何学

ユークリッドに続いて、アルキメデス、アポロニウスなどの手によって目を見張る幾何学の発展が示されてきたが、その後は、残念ながら、長い暗黒時代に入り、イタリアの文芸復興期になって、やっと新しい幾何学の時代が来ることになる。文芸復興期には、造形美術が発達したが、この時期になって初めて、遠近法、すなわち、透視法が研究されるようになった。これは我々が物体を見ている時、それを見える通りに紙の上に再現する方法である。この場合、2つの平行な直線は実は無限に遠いところで交わっており、その像が一点(消失点)として現れたと考えることができる。この透視法が研究され、ドイツへ紹介された。

一般に、一つの平面 a 上に、一つの図形 F (例えば、三角形 OPR と辺 PR 上の一点 Q) が与えられているとき、この平面 a 上にない一点 S と、図形 F を構成している全ての点とを結ぶ直線を作ることを、平面 a 上の図形 F を、点 S から射影するという。また、こうしてできた、一点 S に集まる図形と、 S を通らぬ一つの平面 a' との全ての交点を求めることを、 S に集まる図形を平面 a' で切断するという。さらに、平面 a 上に一つの図形 F が与えられた場合、これを平面 a 上にない一点 S から射影し、それをさらに S を通らぬ平面 a' で切断して図形 F' を得たとき、平面 a 上の図形 F を、点 S から平面 a' 上へ射影して図形 F' を得たという。



射影幾何学の図

このように考えると、射影によって、点、直線、一直線上の点、一点に集まる直線はそれぞれ点、直線、一直線

上の点、一点に集まる直線にうつることになる。図形の性質の中には、この射影によって保たれているものとそうでないものがある。いくつかの点が一直線上に並んでいるという性質、またいくつかの直線がすべて同一の点で交わっているという性質は、この射影という操作で普遍に保たれている性質である。この射影という操作で普遍に保たれている性質を取り扱うのが射影幾何学である。

この考え方を使って、例えば、デザルグの定理「2つの三角形において、もしその対応する頂点を結ぶ3つの直線が一点に会するならば、その対応する辺(の延長)の交点は一直線上にある。」を証明することができる。このように、射影幾何学では、デザルグの定理のような、射影という操作で普遍に保たれている性質に限定して、その性質を証明していく。

4. 解析幾何学

前章で述べた射影幾何学の基礎が築かれた後に、解析幾何学が発見され、それが微分幾何学へと繋がっていくことになる。解析幾何学は、点の位置を座標で表わし、図形をその上の点の座標の満足すべき方程式で表し、図形の性質についての研究を、方程式についての研究に置き換えて行うものである。そのため、直線上の点の位置は、一つの数 x で表され、平面上の点の位置は、二つの数 x, y の組で表される。さらに空間の点の位置は、順序をもった三つの数 x, y, z の組で表される。これらの数に関する方程式を対象として図形の性質を研究することになる。このように、解析幾何学では、その研究の対象はユークリッド幾何学で扱ってきた図形と同様であるが、その手法は方程式を使った計算等であることが分かる。

5. 位相幾何学

位相幾何学はこれまで述べてきた幾何学とはかなり異なっている。ユークリッド幾何学では、日常生活で現れてくる図形として、直線でできている平面図形、また直線と平面でできている立体図形、円柱や円錐、球等の分類整理された限定的な図形の性質を調べている。これに対して、位相幾何学では、多種多様な図形を取り扱い、図形に勝手な一対一連続な変換を施しても変わらない性質を調べている。具体的には、一筆書きができる図形の条件を調べたり、多面体を分類整理するための多面体定理を考えたりする。その中には、正多面体であるための条件を調べることも含まれている。取り扱う対象はユークリッド幾何学で扱ったものと同様であり、それをかなり大雑把な分類という視点から研究することになる。射影幾何学と同様に、変換しても不変な性質について証明していくという方法を採用している。

6. 非ユークリッド幾何学

ユークリッド幾何学では、まず定義を述べて、次にこれから議論の根拠となるべき公理と公準を述べて、可能な限りその議論を厳密にしている。これに対して、平行

線の公理についての取り扱いを別にして考えることで、非ユークリッド幾何学が発見されることになる。別の仮定に立って、矛盾なく考えていけることを明らかにしたことで、非ユークリッド幾何学が発見されたのである。この発見は今日の抽象的な数学を生む原動力になっていると言えよう。

この公準5「直線が2直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さいなら、この2直線は限りなく延長されたとき、内角の和が2直角より小さい側において交わる。」は平行線の公理「一直線外の一点を通過して、この直線と交わらない直線、すなわち平行線は(1本あって)1本に限る。」と同じことであることが分かる。他の公理や公準と比べると異質であることから、多くの方々が、この第5公準または平行線の公理を証明しようと試みたが、残念ながらうまくはいかなかった。これらについてはサッケーリ、ランベルト、ルジャンドルが研究を続けていた。平行線の問題に深い関心のあったガウスは、ユークリッド幾何学以外の幾何学が成り立つ可能性があることを初めて認めたとされている。その頃、ソ連のロバチェフスキーも平行線の公理について強い関心を示しており、imaginary geometryでは、一直線外の一点を通過して、この直線と交わらない直線を無数に引けば、三角形の内角の和はいつでも二直角より小さくなることを発見した。また、J・ボリアイも既に非ユークリッド幾何学の発見をしていたと言われている。

ここで、クラインによるエルランゲンの目録を紹介し、変換との関係性について概観してみよう。ユークリッド幾何学では、運動と相似変換を組み合わせた変換で変わらない、図形の性質を調べている。運動と相似変換を組み合わせた変換をユークリッド変換と呼ぶと、この変換の集まりは次の性質を持っていると言える。

1. ユークリッド変換に引き続いてユークリッド変換を行った結果はまたユークリッド変換である。
2. すべての図形を動かさない恒等変換は一つのユークリッド変換である。
3. 一つのユークリッド変換の逆変換はまたユークリッド変換である。

これら3つの性質をもった変換の集まりは、変換群を作ることから、ユークリッド幾何学はユークリッド変換群に属する変換で変わらない、図形の性質を調べるものである。同様の意味で、射影変換の集まりも群を作り、これを射影変換群と呼ぶと、射影幾何学は、射影変換群に属する変換で変わらない、図形の性質を調べるものと言える。さらに、射影変換のうち、特定の円錐曲線を不変にするものの集まりも群を作るので、これを非ユークリッド変換群と呼ぶと、非ユークリッド幾何学は、非ユークリッド変換群に属する変換で変わらない、図形の性質を調べるものと言えよう。これについては、次章で触れることにする。

7. 微分幾何学

17世紀には、デカルトとフェルマーによって、解析幾何学が、また、ニュートンとライブニッツによって、微分幾何学が発見された。その直後から、一般の曲線や曲

面の性質を、解析幾何学的手法と微分積分学の考えを使って研究するということが始められた。これを今日では微分幾何学と呼んでいる。

ガウスによって始められた、曲面上の幾何学は、リーマンによってn次元の曲率をもった空間の幾何学に拡張され、リッチとレビ・チビタによって、このリーマン幾何学研究のための道具として、絶対微分学が確立された。加えて、リーマン幾何学とこれを研究するためのテンソル解析学がアインシュタインによって一般相対性理論の構築に利用された。

このように、微分幾何学では、対象自体がユークリッド幾何学で扱っていたものではなく、非ユークリッド幾何学における独自のものが研究対象となっており、幾何学的前提がユークリッド幾何学とは異なっている。しかしながら、非ユークリッド変換群に属する変換で不変な図形の性質を調べるという手法を採っている。

8. 幾何学の思考の特徴のまとめ

ユークリッド幾何学は我々の身の回りのものの形から抽象された図形を対象として、その性質や関係性を、定義、公準、公理などの前提のもとに明らかにしていく思考方法を採っている。この同様な対象を、座標上の方程式に置き換えて研究する手法を採るのが解析幾何学である。そのため、ユークリッド幾何学と同様な対象を解析的に明らかにすることができる。また、位相幾何学も研究する対象はユークリッド幾何学で扱った図形であるが、それを大雑把な分類によって整理することで行う研究である。従って、必ずしも同様な対象を扱うことにはならない。

一方、射影幾何学は、透視法で見たときに見える図形間の関係を研究するものである。これは美術の影響を受けていることがわかる。そのため、研究の対象はかなり限定されている。また、非ユークリッド幾何学はユークリッド幾何学の1つの公理を変えることで別の前提のもとに成り立つ一つの公理系の中で様々な図形やその関係性を明らかにするものである。さらに、微分幾何学は非ユークリッド幾何学を突き詰めることによって生まれたもので、これは物理学等へ応用されている。

幾何学については、必ずしも思考方法が全て異なるわけではなく、対象が限定されていることによる違いもある。また、幾何学は条件下で不変な性質を調べることについては共通している。そこで、次章では、対象が同じ場合の異なる幾何学による証明を紹介し、その思考の違いについて明らかにしよう。

9. 例示

以下では、三角形の垂心についての証明を例示しよう。ベクトルは幾何学ではないが、手法としての違いを明らかにするために取り上げよう。

問題：三角形の各頂点からその対辺に下ろした垂線は1点(垂心)で交わることを証明せよ。

ユークリッド幾何学による方法①

$\angle AEB = \angle CDB = 90^\circ$ を仮定し、 $\angle BFA = 90^\circ$ となることを示す。仮定より、四角形DBEHは、向かい合う角の和が 180° で、円に内接する。……………①

また、 $\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ$ で、四角形DECAは円周角が等しいので、円に内接する。……………②

①、②より、円周角が等しいので、
 $\angle DBH = \angle DEH = \angle DCA$ ……………③

①より、 $\angle DBE = \angle DHA$ ……………④

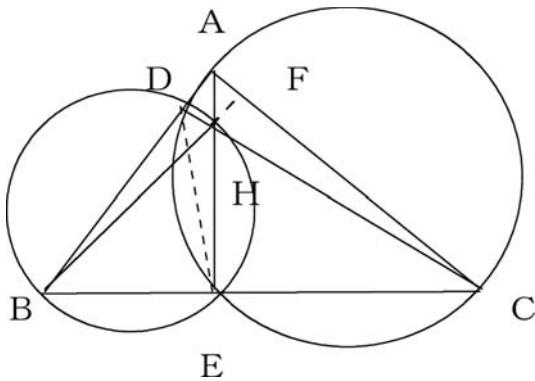
一方、 $\triangle AHC$ において $\angle DHA = \angle DCA + \angle HAC$ ……………⑤

また、 $\angle DBE = \angle DBH + \angle HBE$ ……………⑥

③、④、⑤、⑥より、 $\angle HAC = \angle HBE$ ……………⑦

さらに、対頂角が等しいので $\angle AHF = \angle BHE$ …⑧
 $\triangle HAF$ と $\triangle HBE$ について、⑦、⑧より、二角が等しいので、 $\triangle HAF \cong \triangle HBE$

よって、 $\angle HEB = \angle HFA = 90^\circ$ つまり、 $\angle BFA = 90^\circ$



ユークリッド幾何学による方法①の証明における図

ユークリッド幾何学による方法②

三角形ABCの頂点A, B, Cから対辺へそれぞれおろした垂線と対辺との交点を, D, E, Fとする。

$\triangle ABD$ と $\triangle CBF$ において、
仮定より、 $\angle ADB = \angle CFB = \angle R$ ……………①

$\angle B$ は共通 ……………②

①、②より、 $\triangle ABD \cong \triangle CBF$

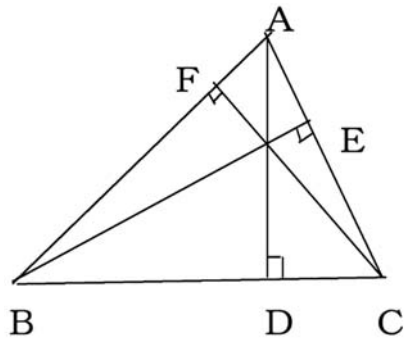
よって、 $\frac{BD}{BF} = \frac{AB}{CB}$ ……………③

同様にして、 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$, $\triangle CAF \cong \triangle BAE$
Eより $\frac{CE}{CD} = \frac{BC}{AC}$ ……………④

$\frac{AF}{AE} = \frac{CA}{BA}$ ……………⑤

③、④、⑤より
 $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} \cdot \frac{AF}{AE} = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{CA}{BA} = 1$

$\triangle ABC$ において、チェバの定理の逆より、AD, BE, CFは1点で交わる。



ユークリッド幾何学による方法②の証明における図

ユークリッド幾何学による方法③

三角形ABCの頂点A, B, Cから、その対辺BC, CA, ABにそれぞれおろした垂線と対辺との交点をD, E, Fとする。

また、頂点A, B, Cを通して、それぞれ対辺に平行線を引き、それらの交点をL, M, Nとする。

四角形ABCLは2組の対辺が平行となり、平行四辺形であるから、

$AL = BC$ ……………①

同様に、四角形MBCAも平行四辺形となるから、

$MA = BC$ ……………②

①、②より、 $AL = MA$ ……………③

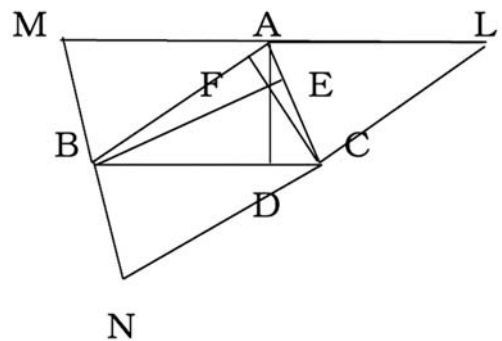
仮定より、 $AD \perp BC$, $ML \parallel BC$ だから、

$AD \perp ML$ ……………④

③、④より、ADはMLの垂直二等分線となる。

同様にして、BEはMN, CFはNLの垂直二等分線となる。

よって、AD, BE, CFは各辺ML, MN, NLの垂直二等分線であり、三角形MNLの外心となり、1点で交わる。



ユークリッド幾何学による方法③の証明における図

解析幾何学による方法

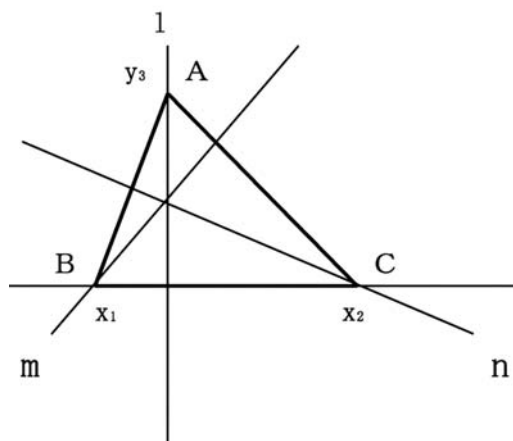
座標平面上に、 $\triangle ABC$ を、BCがx軸上にくるように置き、直線nとABが直交することを示す。

$l : x = 0$

ACは、 $y = -\frac{y_3}{x_2}x + y_3$ より、AC直交するmの

式は次のようになる。

$$y = \frac{x_2}{y_3}x + b$$



解析幾何学の証明における図

$(x_1, 0)$ を通ることから, $b = -\frac{x_1 x_2}{y_3}$
 したがって, $m: y = \frac{x_2}{y_3}x - \frac{x_1 x_2}{y_3}$
 m と l の交点は, $(0, -\frac{x_1 x_2}{y_3})$

よって, n は, $(0, -\frac{x_1 x_2}{y_3})$ と $(x_2, 0)$ を通る直線より,

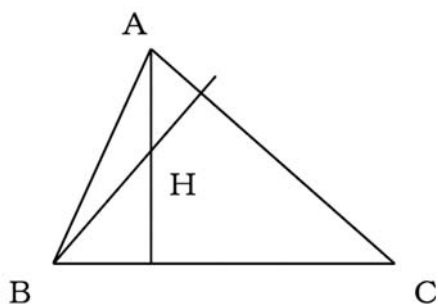
$$n: y = \frac{x_1}{y_3}x - \frac{x_1 x_2}{y_3}$$

一方, AB , つまり, $(x_1, 0)(0, y_3)$ を通る直線を考える。

$$y = -\frac{y_3}{x_1}x + y_3$$

n と AB の傾きの積が -1 になることから, n と AB は直交すると言える。

ベクトルによる方法



ベクトルによる証明における図

\vec{AH} と \vec{BC} , \vec{BH} と \vec{AC} の内積が 0 になることを仮定して, ベクトルが直交するときは内積が 0 になることから, $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$ を示す。

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OH} = \vec{h}$ とする。

$\vec{AH} \perp \vec{BC}$ より

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= (\vec{h} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{h} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{h} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \vec{BH} \cdot \vec{AC} &= (\vec{h} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{h} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{h} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{h} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{h} \cdot \vec{a}$

$$\begin{aligned} \vec{CH} \cdot \vec{AB} &= (\vec{h} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{h} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{h} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

垂心の証明であっても, ユークリッド幾何学によるものは定理や性質を用いて示している。一方, 解析幾何学については, 座標平面上の図形を, 方程式としておき, その方程式の関係から, 図形の性質を調べて示している。また, ベクトルは特有の計算方法を用いて, 直行条件により示している。このように, 一つの定理の証明でも選択する幾何学により手法がかなり異なっている。

10. おわりに

本研究では, 幾何学の思考の特徴を明らかにした。そのために, 幾何学の歴史を振り返りつつ, ユークリッド幾何学, 射影幾何学, 位相幾何学, 非ユークリッド幾何学及び微分幾何学について概観し, それぞれの幾何学で用いられる思考について比較し, その特徴を導き出した。その結果を基に, ユークリッド幾何学, 解析幾何学, ベクトルを使って, 三角形の垂心についての証明方法を例示した。結果として, 以下のことが分かった。ユークリッド幾何学が全ての基本にあり, それを, 解析学を用いて解決したのが解析幾何学であった。ユークリッド幾何学の一公理の問題状況の解決過程で, 非ユークリッド幾何学がつけられた。その発展として, 微分幾何学が位置付けられている。そのための大前提はユークリッド幾何学とは異なるものである。一方, 射影幾何学は透視法の原理を使って, また, 引き延しても変わらない性質のみを考える位相幾何学があるように, これらは考える対象が限定されている幾何学である。しかしながら, 共通点としては, すべての幾何学では, ある条件で不変な性質を調べることがその手法として採られている。

引用・参考文献

中村幸四郎, 寺阪英孝, 伊東俊太郎, 池田美恵訳・解説 (1971). ユークリッド原論. 東京: 共立出版.
 斎藤 憲 (1997). ユークリッド『原論』の成立: 古代の伝承と現代の神話. 東京: 東京大学出版会.
 矢野健太郎 (1976). 幾何の発想. 東京: 朝日出版社.
 矢野健太郎 (1977). 幾何学の歴史. 東京: 日本放送出版協会.
 矢野健太郎 (1978). 現代幾何の発想. 東京: 朝日出版社.

資料

公理 (共通概念)

1. 同じものに等しいものはまた互いに等しい。
2. また等しいものに等しいものが加えられれば、全体は等しい。
3. また等しいものから等しいものがひかれれば、残りは等しい。
- [4. また不等なものに等しいものが加えられれば全体は不等である。
5. また同じものの2倍は互いに等しい。
6. また同じものの半分は互いに等しい。]
7. また互いに重なり合うものは互いに等しい。
8. また全体は部分より大きい。
- [9. また2線分は面積をかこまない。]

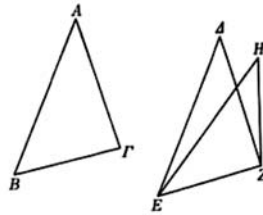
公準 (要請)

次のことが要請されているとせよ。

1. 任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
2. および有限直線を連続して一直線に延長すること。
3. および任意の点と距離(半径)とをもって円を描くこと。
4. およびすべての直角は互いに等しいこと。
5. および1直線が2直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば、この2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。

もし二つの三角形において2辺が2辺にそれぞれ等しく、底辺も底辺に等しければ、等しい辺にはさまれた角もまた等しいであろう。

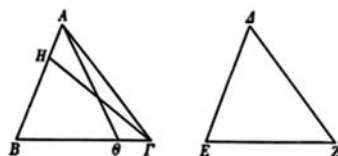
$AB\Gamma$, JEZ を2辺 AB , $A\Gamma$ が2辺 JE , JZ に、すなわち AB が JE に、 $A\Gamma$ が JZ にそれぞれ等しい二つの三角形とせよ。そして底辺 $B\Gamma$ も底辺 EZ に等しいとせよ。角 $BA\Gamma$ も角 EJZ に等しいと主張する。



三角形 $AB\Gamma$ が三角形 JEZ に重ねられ、点 B が点 E の上に、線分 $B\Gamma$ が EZ の上におかれるならば、 $B\Gamma$ は EZ に等しいから、点 Γ も Z に重なるであろう。すると $B\Gamma$ が EZ に重なるから、 BA , $A\Gamma$ も EJ , JZ に重なるであろう。なぜならもし底辺 $B\Gamma$ が底辺 EZ に重なり、辺 BA , $A\Gamma$ が EJ , JZ に重ならず EH , HZ のようにずれるならば、同一の線分上に1点において交わる2線分が与えられ、それとそれぞれ等しく同じ側に異なった点で交わり同じ端をもつ他の2線分がつくられることになるであろう。ところがそれはつくられない。それゆえ底辺 $B\Gamma$ が底辺 EZ に重ねられると、辺 BA , $A\Gamma$ が EJ , JZ に重ならないことはありえない。ゆえに重なるであろう。したがって角 $BA\Gamma$ も角 EJZ に重なりそれに等しいであろう。

よってもし二つの三角形において2辺が2辺にそれぞれ等しく底辺も底辺に等しければ、等しい辺にはさまれた角もまた等しいであろう。これが証明すべきことであった。もし二つの三角形において2角が2角にそれぞれ等しく、1辺が1辺に、すなわち等しい2角にはさまれる辺かまたは等しい角の一つに対する辺が等しければ、残りの2辺も残りの2辺に等しく、残りの角も残りの角に等しいであろう。

$AB\Gamma$, JEZ を2角 $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ が2角 JEZ , EZJ に等しい、すなわち角 $AB\Gamma$ が角 JEZ に、角 $B\Gamma A$ が角 EZJ にそれぞれ等しい二つの三角形とせよ。そして1辺が1辺に、まず等しい角にはさまれる辺、すなわち $B\Gamma$ が EZ に等しいとせよ。残りの2辺もそれぞれ残りの2辺に、すなわち AB は JE に、 $A\Gamma$ は JZ に等しく、また残りの角も残りの角に、すなわち角 $BA\Gamma$ は角 EDZ に等しいと主張する。



もし AB が JE に等しくなければ、それらの一方は大きい。 AB を大きいとし、 BH が JE に等しくされ、 HI が結ばれたとせよ。

そうすれば BH は JE に等しく、 BI は EZ に等しいから、2辺 BH, BI は2辺 JE, EZ にそれぞれ等しい。そして角 HBI は角 JEZ に等しい。それゆえ底辺 HI は底辺 JZ に等しく、三角形 HBI は三角形 JEZ に等しく、残りの角は残りの角に等しい、すなわち等しい辺が対する角は等しいであろう。ゆえに角 HIB は角 JZE に等しい。ところが角 JZE は角 BIA に等しいと仮定されている。したがって角 BHI は角 BIA に等しく、小さいものが大きいものに等しい、これは不可能である。それゆえ AB は JE に不等でない。ゆえに等しい。しかも BI は EZ に等しい。よって2辺 AB, BI は2辺 JE, EZ にそれぞれ等しい。しかも角 ABI は角 JEZ に等しい。したがって底辺 AI は底辺 JZ に等しく、残りの角 BAI は残りの角 EJZ に等しい。

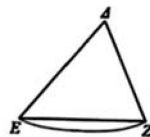
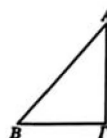
さてまた等しい角に対する辺、たとえば AB が JE に等しいとせよ。このときも残りの辺は残りの辺に、すなわち AI は JZ に、 BI は EZ に等しく、また残りの角 BAI は残りの角 EJZ に等しいと主張する。

もし BI が EZ に不等であれば、それらの一方は大きい。もし可能ならば、 BI が大きいとし、 $B\theta$ が EZ に等しくされ、 $A\theta$ が結ばれたとせよ。 $B\theta$ は EZ に、 AB は JE に等しいから、2辺 $AB, B\theta$ は2辺 JE, EZ にそれぞれ等しい。そして等しい角をはさむ。それゆえ底辺 $A\theta$ は底辺 JZ に等しく、三角形 $AB\theta$ は三角形 JEZ に等しく、残りの角は残りの角に、すなわち等しい辺が対する角は等しいであろう。ゆえに角 $B\theta A$ は角 EZA に等しい。ところが角 EZA は角 BIA に等しい。かくて三角形 $AB\theta$ の外角 $B\theta A$ は内対角 BIA に等しい。これは不可能である。それゆえ BI は EZ に不等ではない。ゆえに等しい。しかも AB は JE に等しい。このとき2辺 AB, BI は2辺 JE, EZ にそれぞれ等しい。そして等しい角をはさむ。したがって底辺 AI は底辺 JZ に等しく、三角形 ABI は三角形 JEZ に等しく、残りの角 BAI は残りの角 EJZ に等しい。

よってもし二つの三角形において二つの角が二つの角にそれぞれ等しく、1辺が1辺に、すなわち等しい2角にはさまれる辺かまたは等しい角の一つに対する辺が等しければ、残りの2辺も残りの2辺に等しく、残りの角も残りの角に等しいであろう。これが証明すべきことであった。

もし二つの三角形が2辺が2辺にそれぞれ等しく、その等しい2辺にはさまれる角が等しいならば、底辺は底辺に等しく、三角形は三角形に等しく、残りの2角は残りの2角に、すなわち等しい辺が対する角はそれぞれ等しいであろう。

ABI, JEZ を2辺 AB, AI が2辺 JE, JZ に、すなわち AB が JE に、 AI が JZ にそれぞれ等しく、かつ角 BAI が角 EJZ に等しい二つの三角形とせよ。底辺 BI は底辺 EZ に等しく、三角形 ABI は三角形 JEZ に等しく、残りの角は残りの角に、等しい辺が対する角はそれぞれ等しい、すなわち角 ABI は角 JEZ に、角 AIB は角 JZE に等しいであろうと主張する。

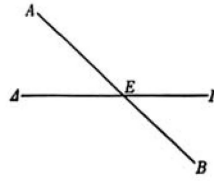


三角形 ABI が三角形 JEZ に重ねられ、点 A が点 J の上に、線分 AB が JE の上におかれれば、 AB は JE に等しいから、点 B も E に重なるであろう。また AB が JE に重なるとき、角 BAI が角 EJZ に等しいから、線分 AI も JZ に重なるであろう。それゆえ、 AI がまた JZ に等しいから、点 I も点 Z に重なるであろう。ところが点 B もすでに E と重なっている。したがって底辺 BI は底辺 EZ に重なるであろう。なぜならもし B が E に、 I が Z に重なっているのに、底辺 BI が EZ に重ならないならば、2線分が面積をかこむことになるであろう。これは不可能である。それゆえ底辺 BI は EZ に重なりそれに等しくなるであろう。したがって三角形 ABI 全体も三角形 JEZ 全体に重なりそれと等しくなるであろう。そして残りの角も残りの角に重なりそれと等しくなるであろう。すなわち角 ABI は角 JEZ に、角 AIB は角 JZE に等しくなるであろう。

よってもし二つの三角形が2辺が2辺にそれぞれ等しくその等しい2辺にはさまれる角が等しいならば、底辺は底辺に等しく、三角形は三角形に等しく、残りの2角は残りの2角に、すなわち等しい辺が対する角はそれぞれ等しいであろう。これが証明すべきことであった。

もし2直線が互いに交わるならば、対頂角を互いに等しくする。

2直線 AB , ΓJ が点 E において互いに交わるとせよ。角 AEJ は角 JEB に、角 ΓEB は角 AEJ に等しいと主張する。



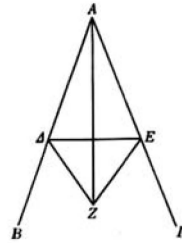
直線 AE は直線 ΓJ の上に立ち、角 ΓEA , AEJ をつくるから、角 ΓEA , AEJ の和は2直角に等しい。また直線 JE は直線 AB の上に立ち角 AEJ , JEB をつくるから、角 AEJ , JEB の和は2直角に等しい。そして角 ΓEA , AEJ の和が2直角に等しいことも先に証明された。それゆえ角 ΓEA , AEJ の和は角 AEJ , JEB の和に等しい。双方から角 AEJ が引き去られたとせよ。そうすれば残りの角 ΓEA は残りの角 JEB に等しい。同様にして角 ΓEB , JEA が等しいことも証明される。

よってもし2直線が互いに交わるならば、対頂角を互いに等しくする。これが証明すべきことであった。

与えられた直線角を2等分すること。

与えられた直線角を角 $BA\Gamma$ とせよ。このときそれを2等分しなければならぬ。

AB 上に任意の点 J がとられ、 $A\Gamma$ から AJ に等しく AE が切り取られ、 JE が結ばれ、 JE 上に等辺三角形 JEZ がつくられ、 AZ が結ばれたとせよ。角 $BA\Gamma$ は線分 AZ によって2等分されていると主張する。



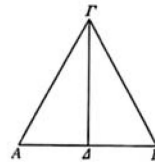
AJ は AE に等しく、 AZ は共通であるから、2辺 JA , AZ は2辺 EA , AZ にそれぞれ等しい。そして底辺 JZ は底辺 EZ に等しい。ゆえに角 JAZ は角 EAZ に等しい。

よって与えられた直線角 $BA\Gamma$ は線分 AZ によって2等分されている。これが作図すべきものであった。

与えられた線分を2等分すること。

与えられた線分を AB とせよ。このとき線分 AB を2等分しなければならぬ。

その上に等辺三角形 $AB\Gamma$ がつくられ、角 $A\Gamma B$ が線分によって2等分されたとせよ。線分 AB は点 J において2等分されていると主張する。



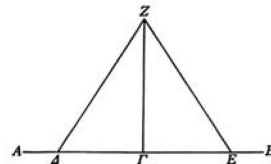
$A\Gamma$ は ΓB に等しく、 ΓJ は共通であるから、2辺 $A\Gamma$, ΓJ は2辺 $B\Gamma$, ΓJ にそれぞれ等しい。そして角 $A\Gamma J$ は角 $B\Gamma J$ に等しい。ゆえに底辺 AJ は底辺 BJ に等しい。

よって与えられた線分 AB は J において2等分されている。これが作図すべきものであった。

与えられた直線にその上の与えられた点から直角に直線をひくこと。

与えられた直線を AB , その上の与えられた点を Γ とせよ。このとき点 Γ から直線 AB に直角に直線をひかなければならぬ。

$A\Gamma$ 上に任意の点 J がとられ、 ΓE が ΓJ に等しくされ、 AE 上に等辺三角形 ZJE がつくられ、 $Z\Gamma$ が結ばれたとせよ。与えられた直線 AB にその上の与えられた点 Γ から直角に直線 $Z\Gamma$ がひかれていくと主張する。



$A\Gamma$ は ΓE に等しく、 ΓZ は共通であるから、2辺 $A\Gamma$, ΓZ はそれぞれ2辺 $E\Gamma$, ΓZ に等しい。そして底辺 JZ は底辺 ZE に等しい。したがって角 $A\Gamma Z$ は角 $E\Gamma Z$ に等しい。しかも接角である。ところが直線が直線の上にたてられて接角を互いに等しくするとき、等しい

よってもし任意の直線に対してその上の点において同じ側でない2直線が接角の和を2直角に等しくするならば、この2直線は互いに一直線をなすであろう。これが証明すべきことであった。

定 義

1. 相似な直線図形とは角がそれぞれ等しくかつ等しい角をはさむ辺が比例するものである。
- [2. 二つの図形の双方に前項と後項の比があるとき、二つの図形は逆比例する。]
3. 線分は、不等な部分に分けられ、全体が大きい部分に対するように、大きい部分が小さい部分に対するとき、外中比に分けられたといわれる。
4. すべての図形において高さとは頂点から底辺にひかれた垂線である。
- [5. 比の大きさがかけあわされてある比をつくる時、この比は比から合成されるといわれる。]

定 義

1. 内接する図形のおのおのの角が、内接される図形のおのおのの辺の上にあるとき、直線図形は直線図形に内接するといわれる。
2. 同様に、外接する図形のおのおのの辺が、外接される図形のおのおのの角に接するとき、図形は図形に外接するといわれる。
3. 内接する図形のおのおのの角が円周上にあるとき、直線図形は円に内接するといわれる。
4. 外接する図形のおのおのの辺が円周に接するとき、直線図形は円に外接するといわれる。
5. 同様に、円周が、内接される図形のおのおのの辺に接するとき、円は図形に内接するといわれる。
6. 円周が外接される図形のおのおのの角に接するとき、円は図形に外接するといわれる。
7. 線分はその両端が円周上にあるとき、円に挿入されるといわれる。

定 義

1. 等しい2円とはその直径が等しいかまたはその半径が等しいものである。
2. 円と会し延長されて円を切らない直線は円に接するといわれる。
3. 相会し相交わらない円は相接するといわれる。
4. 円において弦は、中心からそれらに下す垂線が等しいとき、中心から等距離にあるといわれる。
5. 大きい垂線が下される弦は大きい距離にあるといわれる。
6. 円の切片とは弦と弧とにかこまれた図形である。
7. 切片の角とは弦と弧とにはさまれた角である。
8. 切片内の角とは切片の弧の上に1点がとられ、それから切片の底辺をなす弦の両端に線分が結ばれるとき、結ばれた2線分にはさまれた角である。
9. この切片内の角をはさむ2線分が弧を切り取る時、角は弧の上に立つといわれる。
10. 円の扇形とは円の中心において角がつくられるとき、角をはさむ2線分とそれによって切り取られる弧とにかこまれた図形である。
11. 2円の相似な切片とは等しい角を含むか、または切片内の角が互いに等しいものである。