論　説

写像度の理論とその応用Ⅷ

松　田　忠　三

本稿では写像度の応用例としてJ. Geanakoplos等[1)]の議論を紹介する。また，補論において前稿の未証明命題の証明を与える。C^∞写像のみならずC^∞多様体上の固有連続写像にも写像度が定義できることは既に示した。実は位相多様体(C^0多様体)上の固有連続写像にも写像度が定義できることが知られている（従って，もちろんC^0多様体にも向きの概念が存在しなければならない)。本稿においてはC^0多様体に関して使用される結果の証明は省く。微分位相的な手法では証明できない（あるいはできても非常に難しい)ことと，成立する結果はC^∞多様体をC^0多様体に置き換えただけなので，これまでの議論から容易に理解にできるからである。

12.1

$L^{l-1}{}_{++}=\{p\in R^l{}_{++}\,|\,\Sigma p_i=1\}$。Aを位相空間とし，$N\subseteqq L^{l-1}{}_{++}\times A$とする。財の数は$\ell$である。

定義12.1.1：$z：L^{l-1}{}_{++}\times A\to R^l$がNで$C^kW$　($k\geqq 0$)とは，

1．AはC^k多様体であり，zはC^k。

2′．$(p,\ a)\in N\to pz(p,\ a)=0$（ワルラス法則)

3′．$(p^n,\ a^n)\in N$，$p^n\to p\in\partial L^{l-1}{}_{++}$ならば，

$$\max\quad \limsup\ z_i(p^n,\ a^n)>0$$

ここでmaxは$\{i：p_i<1/\ell\}$となるiについて$\limsup\ z_i(p^n,\ a^n)$の

maxである，（境界条件）

が成立する時を言う。以下C^kと書いたときは$k \geqq 0$を前提にする。

注意12.1.2：$p \in \partial L^{l-1}{}_{++}$だから，少なくとも一つの$p_i = 0$。従って，$p_i <$ 1／1となるものが必ず存在する。3はそのようなp_iをもつiの中に，limsup　$z_i(p^n, a^n) > 0$となるものが存在することを意味する。limsupは集積点集合のsupだから，supに収束する集積点の点列を考えれば，ある番号以上は正。点列の要素はある点列Zn_jの収束点だから，Zn_jのある番号以上は正。すなわち，(p^n, a^n)の部分点列Zn_jを取れば，z_iは十分大きな番号N以上では> 0。すなわち，3は$p^n \to p \in \partial L^{l-1}{}_{++}$のとき$z_i > 0$となるiが存在することを保証する。

定義12.1.3：$z : L^{l-1}{}_{++} \times A \to R^l$が強$C^kW$とは，

1．AはC^k多様体であり，zはC^k

2．$(p, a) \in L^{l-1}{}_{++} \times A \to pz(p, a) = 0$

3．$(p^n, a^n) \in L^{l-1}{}_{++} \times A$，$p^n \to p \in \partial L^{l-1}{}_{++}$ならば，$\exists i$，$p_i = 0$，$z_i(p^n, a^n) \to \infty$

が成立する時を言う。

注意12.1.4：強C^kWではC^kWの条件3が変わる他に，条件2がNではなく$L^{l-1}{}_{++} \times A$上で成立することを要求している。

定義12.1.5：NがC^k正則とはNが$l-1$次C^k多様体であり，$k \geqq 1$ならば，$L^{l-1}{}_{++} \times A$の部分多様体のときをいう。

定義12.1.6：Nが固有とは射影$proj_1 : N \to L^{l-1}{}_{++}$が固有であることを言う。これは$K \subseteqq L^{l-1}{}_{++}$がコンパクトならば，$proj_1{}^{-1}(K) = \{(p, a) \in N \mid p \in K\}$がコンパクトということである。

定義12.1.7：（z，A，N）がC^k許容とは

1．zがNでC^kW

2．NがC^k正則かつ固有

であることををいう。

注意12.1.8：Φ：$L^{l-1}{}_{++}\to A$が対応（＝点対集合写像）で，$N=\mathrm{graph}\Phi$とする。このとき，proj_1が固有であることはΦが上部半連続であることと同値である。特に，Aがコンパクトならば，proj_1が固有であることはNが$L^{l-1}{}_{++}\times A$の閉集合であることと同値である。

《証明》$K\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$をコンパクト集合とする。$\mathrm{proj}_1$が固有より，$T=\mathrm{proj}_1{}^{-1}(K)=\{(p,\ a)\in N\,|\,p\in K\}$はコンパクト。$(p,\ a)\in N$は$a\in\Phi(p)$と同値であり，$(p,\ a)\in T$は$a\in\Phi(p)$，$p\in K$と同値。$(p^n,\ a^n)\in L$，$p^n\to p$，$a^n\to a$とするとTがコンパクトより，$(p,\ a)\in T$。従って，$a\in\Phi(p)$。故に$\Phi$は上部半連続。逆に，$\Phi$が上部半連続で，Kをコンパクトとすると，上部半連続性より$\Phi(K)$はコンパクト。$(p^n,\ a^n)\in T$とすると，$a^n\in\Phi(p^n)$であり，$p^n\in K$より，部分列$p^{nj}\to p\in K$である。$a^n\in\Phi(K)$であり，$\Phi(K)$はコンパクトだから，a^{nj}の部分列$a^{njk}\to a$。Φが上部半連続より，$a\in\Phi(p)$。従って，$(p^{njk},\ a^{njk})\to(p,\ a)$，$a\in\Phi(p)$である。よって，$(p,\ a)\in T$。すなわち，Tの任意の点列は収束部分列を持つからTはコンパクトである。

Aがコンパクトで，Φが閉（＝Nは$L^{l-1}{}_{++}\times A$の閉集合）であれば，上部半連続写像の性質よりΦは上部半連続。従って，上よりproj_1は固有。逆にproj_1が固有ならば，上よりΦは上部半連続。Aがコンパクトで$\Phi(x)$が閉集合ならばΦは閉。proj_1は固有だから，$\mathrm{proj}_1{}^{-1}(x)=x\times\Phi(x)$はコンパクト。従って，$\Phi(x)$は閉集合である。

《証了》

注意12.1.9：上で使用した上部半連続写像の性質については，例えば文献[2)]pp. 257—276等を参照せよ。

例12.1.10：A^rをコンパクトなr次元C^k多様体とする。$f:L^{l-1}{}_{++}\times A^r\to R^r$。fは$C^k(k\geqq1)$で，0と⫪とする（すなわち，$f(p,\ a)=0$なら，$df_{(p,a)}$の階数はr）。$N=f^{-1}(0)$が$l-1$次元$C^k$多様体であることは明かである。このとき，$\mathrm{proj}_1:N\to L^{l-1}{}_{++}$は固有になる（証明：$K\subseteqq$

L^{l-1}_{++}をコンパクトとする。$T=\mathrm{proj}_1^{-1}(K)=\{(p,a)\in L^{l-1}_{++}\times A\mid f(p,a)=0,\ p\in K\}$とする。点列$(p^n,a^n)\in T$に対し，$f(p^n,a^n)=0$。$p^n\in K$，Kはコンパクトだから$p^{nj}\to p\in K$。$a^{nj}\in A$もAのコンパクト性より$a^{njk}\to a\in A$。従って，$(p,a)\in K\times A$であり，連続性より$f(p,a)=0$だから，$(p,a)\in T$。従って，Tは任意の点列$(p^n,a^n)$に対し収束部分列を持つからコンパクトである)。

例12.1.11：$Y\subseteqq R^l$をコンパクトなC^∞ l 次元境界付き多様体とする（コンパクトで∂Yが l − 1 次元C^k多様体である)。$y\in\partial Y$に外向き法線ベクトル$D(y)\in S^{l-1}$を対応させる写像D（ガウス写像）を考える。ここで$S^{l-1}=\{y\in R^l\mid\Sigma y_i^2=1\}$である。$f:S^{l-1}\times\partial Y\to R^{l-1}$を$f(p,y)=\mathrm{proj}_1(p-D(y))$で定義する。ここで$\mathrm{proj}_1$は最初の l − 1 要素の射影である。Dが$C^k$ならば，$f\mp 0$である（証明：$f(p,y)=\mathrm{proj}_1(p-D(y))$より，$p=(p_1,\cdots\cdots,p_l)$，$D(y)=(d_1(y),\cdots\cdots,d_l(y))$とすると，$f(p,y)=(p_1-d_1,\cdots\cdots,p_{l-1}-d_{l-1})$。
$df_{(p,y)}=[\mathrm{Id}_{l-1}\quad -dD^{l-1}]$であるから，fはsubmersionである)。従って，$N=f^{-1}(0)$は空でなければ l − 1 次元多様体である。$\max\ py(y\in\partial Y)$は解を持ち，$\mathrm{proj}_1N=S^{l-1}_{++}$である(py，$y\in\partial Y$の最大点は$\partial Y$がコンパクトより必ず存在する。このようなyに対し，$pz=0$，$\forall z\in T_y\partial Y$である。従って，$T_y\partial Y\subseteqq T_pS^{l-1}=\{x\in R^l\mid px=0\}$であり，次元より，$T_y\partial Y=T_pS^{l-1}$である。$D(y)z=0$，$\forall z\in T_y\partial Y$より，$D(y)$とpは平行であり，$\|D(y)\|=\|p\|=1$より，$D(y)=\pm p$。外向きより$D(y)=p$である。すなわち，pに対応するpyの最大点yでは$D(y)=p$である。従って，$f(p,y)=0$であり，$(p,y)\in N$。よって，任意のpに対し，最大点は必ず存在するから，$\mathrm{proj}_1N=S^{l-1}_{++}$である)。

Yが凸ならNは利潤最大の選択に対応する。そうでないときも，Nは限界費用価格付けに対応する。

12.1.12：N，Yを同次元の位相多様体とし，Yは連結向き付け可能で，$0 \in Y$とする。連続写像を$z*：N \rightarrow Y$とし，$z*^{-1}(0)$はコンパクトとする。Nが向き付けられていれば，deg（z＊，0）が定義できる。Nが向き付け不能であってもmod2deg（z＊，0）が定義できる。C^{∞}写像度の性質から類推できるように，いずれの場合もdegまたはmod2deg$\neq 0$なら$z*^{-1}(0) \neq \phi$である。

Nを向き付け可能な$l-1$次元多様体，$proj_1：N \rightarrow L^{l-1}{}_{++}$は固有とする。$L^{l-1}{}_{++}$は連結向き付け多様体だから，$degproj_1$が定義できる。以下でみるように，$degproj_1 \neq 0$が重要になる。

Nについての条件をもう一つあげておく。ただしこれは以下では使用しない。

定義12.1.13：Nが大域的グラフ性を持つとは，関数$\psi：L^{l-1}{}_{++} \rightarrow A$が存在し，$N = grapf\psi = \{(p, \psi(p)) \mid p \in L^{l-1}{}_{++}\}$のときをいう。すなわち，Nが$L^{l-1}{}_{++} \rightarrow A$のある関数のグラフになるときである。

補題2.1.14.Nが$l-1$次元多様体であり，固有かつ，大域的グラフ性を持つなら，$mod2degproj_1 = 1$である。

《証明》$proj_1：N \rightarrow L^{l-1}{}_{++}$は$(p, \psi(p)) \rightarrow p$である。従って，$proj_1$は全単射である。

《証了》

注意：12.1.15：上の補題で，同相$\Psi(p) = (p, \psi(p))$，$\Psi：L^{l-1}{}_{++} \rightarrow N$により，Nを向き付ければ，$degproj_1 = 1$である。

定義12.1.16：Nが局所的グラフ性を持つとは，$U \subsetneqq L^{l-1}{}_{++}$（Uは空でない開集合）と連続関数$\psi：U \rightarrow A$が存在し，$N \cap (U \times A) = grapf\psi$となることをいう。

Nが局所的グラフ性を持つなら，グラフの性質より$N \cap (U \times A)$とUは同相である。従って，$proj_1 \mid (U \times A) \cap N = U$は同相であるから，写像$proj_1 \mid (U \times A) \cap N$は固有になり，同相より$(U \times A) \cap N$は$l-1$次元

多様体となるから，mod2degが定義でき，mod2deg$proj_1|(U\times A)\cap N$＝１。Nが$l-1$次元多様体であり，また固有であれば，mod2deg$proj_1$も定義でき，mod2deg$proj_1$＝deg($proj_1$, p)，$\forall p\in L^{l-1}{}_{++}$。mod2deg($proj_1$, p)＝mod2deg($proj_1|(U\times A)\cap N$, p)，$p\in U$は明らかだから，mod2deg$proj_1$＝１である。従って，$proj_1: N\to L^{l-1}{}_{++}$は全射になる。A，Nが向き付きのときは，degが定義でき，deg$proj_1=\pm 1$になる。

このことから，次のことが分かる。

補題12.1.17：Nが$l-1$次元位相多様体であり，局所グラフ性を満たし，かつ$proj_1: N\to L^{l-1}{}_{++}$が固有であれば，$proj_1: N\to L^{l-1}{}_{++}$は全射である。

補題12.1.18：deg$proj_1$が定義できるとき，ある特定の$p\in L^{l-1}{}_{++}$でdeg($proj_1$, p)$\neq 0$ならば，$proj_1$は全射である。mod2degについても同様のことが成立する（証明：deg($proj_1$, p)，$p\in L^{l-1}{}_{++}$が定義できるとき，値域が連結であれば，この値はpによらず一定であり，これがdeg$proj_1$である。従って，ある特定の$p\in L^{l-1}{}_{++}$でdeg($proj_1$, p)$\neq 0$ならば，deg$proj_1\neq 0$となり，III6.1.4(2)の結果の類推により，$proj_1$は全射になる)。

定義12.1.19：Nが稠密グラフ性を持つとは，$\exists U\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$（Uは空でない稠密開集合)，$\exists\psi: U\to A$，$N\cap(U\times A)$＝grapf$\psi$。即ち，局所グラフ性の定義でUを稠密に取れるときである。

例12.1.20：A^rを向きつけられたコンパクトなr次元多様体とする。$f: L^{l-1}{}_{++}\times A^r\to R^r$が０と$\pitchfork$で$C^\infty$とする。$N=f^{-1}(0)$とおくと，Nは$l-1$次元多様体である。横断性定理より，$L^{l-1}{}_{++}$の稠密開集合Uが存在し，$\forall p\in U$，$N\cap(\{p\}\times A^r)$は有限集合である（注意：横断性定理は$F: M\times P\to W$，$Z\subseteqq W$が$F\pitchfork Z$ならば，$F_p(x)=F(x, p)$で定義される$F_p: M\to W$はほとんどすべての$p\in P$について，$F_p\pitchfork Z$であること

を示している。上で$Z=0$，$M=A^r$，$P=L^{l-1}{}_{++}$，$W=R^r$とおくと，$U \subseteq P$が存在し，$F_p \pitchfork 0$，$\forall p \in U$。A^rはコンパクトでr次元であり，$F_p \pitchfork 0$だから，0次元多様体$F_p{}^{-1}(0)$は有限集合である。$\{p\} \times F_p{}^{-1}(0) = N \cap (\{p\} \times A^r)$であることは明かである)。従って，任意の$p \in U$に対し$\deg proj_1 = \deg(proj_1,\ p)$を計算できる。$N = f^{-1}(0)$について稠密グラフ性が成立するためには，任意の$p \in U$に対し，$N \cap (\{p\} \times A^r)$が1点からなる集合となるようにUが選べることが必要である。

例12.1.21：$A=R^r$とし，$f : L^{l-1}{}_{++} \times R^r \to R^r$が$f \pitchfork 0$とする。$N=f^{-1}(0)$が固有で全射とする（すなわち，$proj_1 : N \to L^{l-1}{}_{++}$が固有で全射)。任意の$p \in L^{l-1}{}_{++}$に対し，$f_p : R^r \to R^r$, $f_p(a) = f(p,\ a)$がaについてアフィンとする，すなわち，$C=C(p) \in R^r$と$B=B(p) \in R^{r2}$が存在し，$f_p(a) = C + Ba$。横断性と固有性から，稠密開集合$U \subseteq L^{l-1}{}_{++}$が存在し，$\forall p \in U$，$N \cap (\{p\} \times A)$は有限集合である($proj_1{}^{-1}(p)$は固有性よりコンパクトである。$proj_1{}^{-1}(p) = N \cap (\{p\} \times A) = \{p\} \times f_p{}^{-1}(0)$であり，右辺は0次元多様体であるから，コンパクト性より有限集合。稠密性は明かである)。f_pのアフィン性より，この集合は一点からなるか，連続体の濃度を持つか，あるいは空集合である。Nが全射だから，空集合ではない。従って，有限性より1点であり，上より稠密グラフ性がNについて成立する。

例12.1.22：Aを向き付きの$l-1$次元多様体とし，$F : A \to L^{l-1}{}_{++}$を固有連続写像とする。$N=\{(p,\ a) \mid p = F(a)\}$とし，$\rho : A \to N$を$\rho(a) = (F(a),\ a)$で定義される同相とする（$\rho$はFのグラフ$(a,\ F(a))$の座標を入れ換えたもので本質的にはFのグラフと考えてよい)。Nは同相により$l-1$次元位相多様体である。このとき，Nは固有（すなわち$proj_1 : N \to L^{l-1}{}_{++}$が固有)である。なぜなら，$K \subseteq L^{l-1}{}_{++}$をコンパクトとすると，$proj_1{}^{-1}(K) = \{(p,\ a) \mid p = F(a),\ p \in K\} \subseteq K \times F^{-1}(K)$であり，$F^{-1}(K) = \{a \mid p = F(a),\ p \in K\}$はFの固有性よりコ

ンパクトだから，$proj_1^{-1}(K)$はコンパクト集合内の閉集合となりコンパクトである。$F=proj_1 \cdot \rho$であり，Nに同相ρから向き付け多様体の構造を与えると，$\deg\rho$が定義でき，$\deg\rho=1$。従って，合成関数のdegの定理（III6.1.4の(5)）より，$\deg F=\deg proj_1 \cdot \deg\rho=\deg proj_1$。

注意12.1.23：$proj_1: N\to L^{l-1}{}_{++}$が全射であれば，対応$\Phi: L^{l-1}{}_{++}\to A$を$\Phi(p)=\{a\in A \mid (p, a)\in N\}$で定義できる。局所グラフ性を仮定すれば，ある開集合$U\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$が存在し，Uに制限すると$\Phi$は対応ではなく，関数$\psi$である。また，$\Phi$を用いて，対応$Z: L^{l-1}{}_{++}\to R^l$を$Z(p)=\{z(p, a) \mid a\in\Phi(p)\}$で定義できる。この対応は上部半連続である。ただし，凸値とは限らない。この点がワルラス対応と異なる。凸値上部半連続写像は連続関数により好きなだけ近似できることが知られているが，NまたはZが，正則，固有，局所グラフ性をみたしても，$L^{l-1}{}_{++}$上の連続関数により近似できるとは限らない。

12.2

記号：$H^n{}_b=\{x\in R^{n+1} \mid \Sigma x_i=b\}$とする。$H^n{}_b$は$R^{n+1}$のn次元超平面である。$H^n{}_b$は地図として$\{(H^n{}_b), (\psi_b)\}$，$\psi_b: H^n{}_b\to R^n$，$\psi_b(x_1, \cdots\cdots x_n, x_{n+1})=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$を取ることにより，n次元向き付き多様体と考える。$L^{l-1}{}_{++}$は$H^{l-1}{}_1=\{x\in R^l \mid \Sigma x_i=1\}$の開集合であるから自然に向き付け多様体になる。$p''=(1/\ell, \cdots\cdots, 1/\ell)$，$p''\in R^l$とする。

(z, A, N)をC^k許容とする。$z: L^{l-1}{}_{++}\times A\to R^l$から，$z'': N\to H^{l-1}{}_0\subseteqq R^l$を，$z''(p, a)=(p_1z_1(p, a), \cdots\cdots, p_lz_l(p, a))$で定義する。実際，$H^{l-1}{}_0=\{x\in R^l \mid \Sigma x_i=0\}$であり，$C^kW$の条件2より，Nでは$pz(p, a)=0$であるから，$z''(N)\subseteqq H^{l-1}{}_0$である。さらに$z''^{-1}(0)=z^{-1}(0)\cap N$である（すべての$p_l>0$であるから，$(p, a)\in z''^{-1}(0)$ならば，$z_i(p, a)=0$，$\forall i$。従って，$(p, a)\in z^{-1}(0)\cap N$。逆は明かである）。

定理12.2.1：（z，A，N）がC^0許容とする。
1．Nが向き付きならば，$\deg(z'', 0)=(-1)^{l-1}\mathrm{degproj}_1$
2．Nが向き付きでないか，あるいは向き付け不可能の時，$\mathrm{mod2deg}(z'', 0)=\mathrm{mod2degproj}_1$
まず次の補題を示す。
補題12.2.2：(z，A，N)がある$k\geqq 0$に対しC^k許容とする。このとき，凸開集合$L^{l-1}\varepsilon\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$が存在し，$\partial L^{l-1}\varepsilon\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$は滑らかであり，$p\in L^{l-1}{}_{++}-L^{l-1}\varepsilon$，$(p, a)\in N$なら，$z''(p, a)=\lambda(p-p'')$は$\lambda\geqq 0$となる解を持たない。とくに，$h:[0, 1]\times N\to H^{l-1}{}_0$を$h(\lambda, (p, a))=\lambda z''(p, a)+(1-\lambda)(p''-p)$で定義すると，hは$C^k$で$h^{-1}(0)$はコンパクトである。
《証明》$(p^n, a^n)\in N$，$p^n\to p\in\partial L^{l-1}{}_{++}$とし，$z''(p^n, a^n)=\lambda^n(p^n-p'')$，$\lambda^n\geqq 0$となる点列$\{\lambda^n\}$が存在すると仮定する。$p_i<p''_i=1/\ell$となるすべてのiに対し，nが十分大ならば，$p^n{}_i-p''_i<0$である。従って，$z''_i(p^n, a^n)=\lambda^n(p^n{}_i-p''_i)\leqq 0$。従って，$z''_i(p^n, a^n)=p^n{}_i z_i(p^n, a^n)\leqq 0$より，$z_i(p^n, a^n)\leqq 0$。故に，$\limsup_n z_i(p^n, a^n)\leqq 0$となり，境界条件に矛盾する。従って，$z''(p, a)=\lambda(p-p'')$，$\lambda\geqq 0$，$(p, a)\in N$，$\exists a$となるすべてのpの集合をPとし，その凸包をC（P）とすると，$C(P)^*\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$である($C(P)^*$はC(P)の閉包)。実際，$q\in C(P)^*$とすると，qに収束する$q^n\in C(P)$と，凸包の性質より，$q^n=\alpha_1{}^n p_1{}^n+\cdots\cdots+\alpha_{l+1}{}^n p_{l+1}{}^n$，$p_j{}^n\in P$，$\alpha_j{}^n\in R_+$，$\Sigma\alpha_j{}^n=1$，$(p_j{}^n, a_j{}^n)\in N$，$z''(p_j{}^n, a_j{}^n)=\lambda_j{}^n(p_j{}^n-p'')$，$\lambda_j{}^n\geqq 0$となる，$p_j{}^n$，$\alpha_j{}^n$，$a_j{}^n$，$\lambda_j{}^n$が存在する。必要なら$p_j{}^n$の部分列をり，$p_j{}^n\to p_j$とすると，$p\in\partial L^{l-1}{}_{++}$なら上と同様に矛盾であるから，すべてのjについて，$p_j\in L^{l-1}{}_{++}$。従って，p_jの凸結合$q=\Sigma\alpha_j p_j\in L^{l-1}{}_{++}$である($\alpha_j$は$\alpha_j{}^n$の集積点)。C（P）*は開凸集合$L^{l-1}{}_{++}$に含まれるコンパクト凸集合であり，補題の条件を満たす$L^{l-1}\varepsilon$を$L^{l-1}\varepsilon\supseteqq C(P)^*$のように取れることは明かである。$L^{l-1}\varepsilon^*\subseteqq L^{l-1}{}_{++}$で

あり，$\mathrm{proj}_1{}^{-1}$（$L^{l-1}\varepsilon*$）はproj_1が固有で，$L^{l-1}\varepsilon*$がコンパクトだからコンパクト。$h^{-1}(0)$は連続性により閉集合であるから，$[0, 1]\times\mathrm{proj}_1{}^{-1}(L^{l-1}\varepsilon*)\supseteqq h^{-1}(0)$であることが示されれば，$h^{-1}$（0）はコンパクト集合内の閉集合となり，それ自体コンパクトである。$(\lambda, p, a)\in h^{-1}(0)$とすると，$0\leqq\lambda\leqq 1$が存在し，$\lambda z*^{-1}(0)\subseteqq[0, 1]\times\mathrm{proj}_1{}^{-1}(L^{l-1}\varepsilon*)$。$\lambda=0$ならば，$p=p''\in L^{l-1}\varepsilon*$よりこれは明かである。
《証了》
注意12.2.3：凸包の性質については［3］pp. 23―26を参照せよ。この補題はzを超過需要と解するとき，価値超過需要z''が写像（p，a）→（$p''-p$）とホモトピックであり，さらにホモトピー写像hの0点がコンパクト集合であることを示している。
定理の証明：$\phi: L^{l-1}{}_{++}\to H^{l-1}{}_0$を$\phi(p)=p''-p$で定義する。$\phi$は同次元の向き付き多様体間の写像である。$H^{l-1}{}_0$の接空間を$R^{l-1}$と同一視すれば，微分写像$d\phi_p$は$R^{l-1}$の恒等写像に$-1$を掛けたものである。従って，degの定義より，$\deg(\phi, 0)=(-1)^{l-1}$（この点は詳しく言えば次のようになる。$\psi_1: H^{l-1}{}_1\to R^{l-1}$，$\psi_0: H^{l-1}{}_0\to R^{l-1}$，$\psi_b(x_1, \cdots\cdots x_n, x_{n+1})=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$が$H^{l-1}{}_1$，$H^{l-1}{}_0$の向きに属する地図である。$\phi$の表現写像$f=\psi_0\phi\psi_1{}^{-1}: L\to R^{l-1}$の微分写像が向き保存か否かにより，$\phi$が向き保存か否かが定まる。ここで開集合Lは$\psi: R^l\to R^{l-1}$，$\psi(x_1, \cdots\cdots x_l)=(x_1, \cdots\cdots, x_{l-1})$による$L^{l-1}{}_{++}$の像$L=\psi(L^{l-1}{}_{++})$である。従って，$f$：$(p_1, \cdots\cdots, p_{l-1})\to(1/\ell-p_1, \cdots\cdots, 1/\ell-p_{l-1})$となり，微分写像$df_p$は$R^{l-1}$の恒等写像に$-1$を掛けたものである)。$\mathrm{proj}_1: N\to L^{l-1}{}_{++}$に対し，degの積法則より，$\deg(\phi\mathrm{proj}_1, 0)=\deg(\phi, 0)\deg\mathrm{proj}_1=(-1)^{l-1}\deg\mathrm{proj}_1$。h：$[0, 1]\times N\to H^{l-1}{}_0$を$L(t, (p, a))=tz*^{-1}(0)$とすると，$tz*^{-1}(0)\subseteqq h^{-1}(0)$である。従って，$L^{-1}(0)$はコンパクト集合内の閉集合となり，それ自体コンパクトである。従って，$\deg(z'', 0)=\deg(\phi\mathrm{proj}_1, 0)=(-1)^{l-1}\deg\mathrm{proj}_1$。Nが向き付けでなけれ

ば，mod2deg(ϕ，0）＝1だから，mod2deg(z''，0）＝mod2degproj$_1$。

《証了》

命題12.2.4：（z，A，N）がC^0許容とする。mod2degproj$_1 \neq 0$か，degproj$_1 \neq 0$ならば，z(p，a)＝0，(p，a)∈Nは解を持つ。

《証明》mod2degproj$_1 \neq 0$か，degproj$_1 \neq 0$ならば，定理よりdeg(z''，0)またはmod2deg(z''，0)がいずれも$\neq 0$となり，$z''^{-1}(0)$は空集合ではないことがわかる。$z''^{-1}(0) = z^{-1}(0) \cap N$であるから，z(p，a)＝0，(p，a)∈Nが存在する。

《証了》

注意12.2.5：Nが大域グラフ性を持つなら。Nは$L^{l-1}{}_{++}$と同相であり，$z' : L^{l-1}{}_{++} \to R^l$を$z'(p) = z(p, \psi(p))$で定義すると，定理はワルラス体系の存在問題に帰着する（下の例12.2.7を参照せよ)。

上の命題はzが点対集合写像である場合にも拡張できる。またzが$L^{l-1}{}_{+} \times A$で定義されていると仮定すると境界条件は不要になる。次の命題がそれを示している。

命題12.2.5：Aが距離付け可能とする。$Z : L^{l-1}{}_{+} \times A \to R^l$を上部半連続，凸・コンパクト値の対応（点対集合写像）とし，$N \subseteqq L^{l-1}{}_{+} \times A$をコンパクトとする。任意の(p，a)∈Nに対し，pz＝0，$\forall z \in Z(p, a)$が成立し，さらに$(L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N$は$l-1$次元位相多様体であると仮定する。このとき，proj$_1$：$(L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N \to L^{l-1}{}_{++}$の，degproj$_1 \neq 0$，またはmod2degproj$_1 \neq 0$であれば，$\exists (p*, a*) \in N$，$z* \in Z(p*, a*)$，$z* \leqq 0$である。

《証明》まず，Zが単値と仮定すると，Zは連続関数と考えることができる。各正整数nに対し，$z^n : L^{l-1}{}_{++} \times A \to R^l$を$z^n{}_i(p, a) = Z_i(p, a) + (1/\ell p_i - 1)/n$，i＝1，2，……，$\ell$で定義する。以下1～10に分けて証明に必要な事実を与えていく。

1．（z^n，A，$(L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N$）は$C^0$許容であり，$z^n(p^n, a^n) = 0$とな

る$(p^n, a^n) \in (L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N$が存在する。

証明：Nがコンパクトであるから，$proj_1$は固有である。仮定より，$(L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N)$ は $l-1$ 次元多様体である。よって，C^0許容であるためにはz^nがC^0Wを示せばよい。z^nのC^0性は明かである。$(p, a) \in (L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N$とすると，$\Sigma p_i z^n{}_i(p, a) = \Sigma p_i Z_i(p, a) + \Sigma(1/\ell - p_i)/n = \Sigma p_i Z_i(p, a) = 0$となり，ワルラス条件も成立する。$(p^m, a^m) \in (L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N$, $p^m \to p \in \partial L^{l-1}{}_{++}$とすると，$p_i = 0$ならば，$z^n{}_i \to \infty$ $(m \to \infty)$である。従って，境界条件も成立するから，$(z^n, A, (L^{l-1}{}_{++} \times A) \cap N)$は$C^0$許容である。従って，$proj_1$のdegまたはmod2degが$\neq 0$ならば，命題12．2より$z^n(p, a) = 0$となる$(p, a) \in N$が存在する。これを (p^n, a^n) とすればよい。

証了

2．Nがコンパクトであるから，$(p^n, a^n) \to (p*, a*) \in N$と仮定してよい。$z^n(p^n, a^n) = 0$であるから，$Z_i(p^n, a^n) = (1 - 1/\ell p_{ni})/n$, $\forall n$。だから，$p_i* > 0$なら$Z_i(p*, a*) = 0$, $p_i* = 0$なら$Z_i(p*, a*) \leqq 0$である。以上がZが単値の場合である。

3．dを$L^{l-1}{}_{+} \times A$上の距離とする。$\{U\alpha\varepsilon\}$を$L^{l-1}{}_{+} \times A$の局所有限な開被覆とし，それに従属する1の分割$\{q\alpha\varepsilon\}$を，$suppq\alpha\varepsilon$はコンパクトで，$diam(suppq\alpha\varepsilon) < \varepsilon$, $\forall\alpha$のように取る。$suppq\alpha\varepsilon \subsetneqq U\alpha\varepsilon$とできる（$suppq\alpha\varepsilon$は$\{(p, a) \in L^{l-1}{}_{++} \times A \mid q\alpha\varepsilon(p, a) \neq 0\}$の閉包）。$(p\alpha\varepsilon, a\alpha\varepsilon) \in suppq\alpha\varepsilon$, $z\alpha\varepsilon \in Z(p\alpha\varepsilon, a\alpha\varepsilon)$を選び，$z\varepsilon : L^{l-1}{}_{+} \times A \to R^l$を$z\varepsilon(p, a) = \Sigma q\alpha\varepsilon(p, a)(z\alpha\varepsilon - (pz\alpha\varepsilon)v)$, $v = (1, 1, \cdots\cdots, 1) \in R^l$で定義する。

4．$z\varepsilon$は連続であり，$pz\varepsilon(p, a) = 0$, $\forall(p, a) \in L^{l-1}{}_{+} \times A$。

証明：特定の点 $(p*, a*)$ の近傍Vを十分小さく取ると，$V \cap U\alpha\varepsilon \neq \phi$となる$U\alpha\varepsilon$は有限個である。これを$U_1\varepsilon$, ……, $U_n\varepsilon$とする。これ以外の$U\beta\varepsilon$では$suppq\beta\varepsilon \cap V \subseteqq U\beta\varepsilon \cap V = \phi$であるから，V上では$q\beta\varepsilon = 0$で

ある。従って，$z\varepsilon(p, a)=\Sigma q_i\varepsilon(p, a)(z_i\varepsilon-(pz_i\varepsilon)v)$，$(p, a)\in V$。$pz\varepsilon(p, a)=\Sigma q_i\varepsilon(p, a)(pz_i\varepsilon-(pz_i\varepsilon)pv)$であり，$pv=\Sigma p_i=1$であるから，$pz\varepsilon(p, a)=0$である。V内で$(p, a)\to(p*, a*)$とすると，$z_i\varepsilon$は定値であるから$z\varepsilon$は連続である。

証了

5．$z\varepsilon:L^{l-1}{}_{+}\times A\to R^l$は連続で，$pz\varepsilon(p, a)=0$であるから，1，2と同様にして，$z\varepsilon(p\varepsilon, a\varepsilon)\leqq 0$となる$(p\varepsilon, a\varepsilon)\in N$が存在する。

すべての$\varepsilon_j>0$，$\varepsilon_j\to 0$についてこのような$(p\varepsilon_j, a\varepsilon_j)=c_j$をとり，その集合をLとすると，$L\subseteqq N$であり，Nはコンパクトであるから，$\lim(p\varepsilon_j, a\varepsilon_j)=(p*, a*)=c*(j\to\infty)$と仮定してよい。

任意のε_1に対し，$c*$を含む$U\alpha\varepsilon_1$は有限個である。従って，$c*$を含む$\mathrm{supp}q\alpha\varepsilon_1$も有限個である。これらの$\mathrm{supp}q\alpha\varepsilon_1$は従って，$W_1=\{c\in L^{l-1}{}_{+}\times A\mid d(c*, c)\leqq 2\varepsilon_1\}$に含まれる。$\varepsilon_2<\varepsilon_1$に対しても同様に，$c*$を含む有限個の$\mathrm{supp}q\alpha\varepsilon_2$は$W_2=\{c\in L^{l-1}{}_{+}\times A\mid d(c*, c)\leqq 2\varepsilon_2\}$に含まれる。以下同様にして，$W_1\supseteqq W_2\supseteqq W_3\cdots\cdots$，$\mathrm{diam}(W_n)\to 0$を構成できる。従って，すべての$\varepsilon_j$に対し，$z\varepsilon_j$の定義において$q\alpha\varepsilon_j\neq 0$とする$(p, a)$はコンパクト集合$W_1$に含まれる。$W_1$の凸包$C(W_1)$はコンパクトである。

6．$E_i=\{z-pzv\mid z\in Z(W_i), (p, a)\in W_i\}$はコンパクト集合である。$E_i\supseteqq E_j$，$i<j$である。

証明：$q^j\in E_i$とする。$q^j=z^j-p^jz^jv$，$z^j\in Z(W_i)$，$(p^j, a^j)\in W_i$となる，z^j，p^jが存在する。$Z(W_i)$，W_iのコンパクト性より，q^jは収束部分列を持つから，コンパクトである。$E_i\supseteqq E_j$，$i<j$は明かである。

証了

7．$Q_i=\{\Sigma q\alpha\varepsilon(p, a)(z\alpha\varepsilon-(pz\alpha\varepsilon)v)\mid(p, a)\in W_i, z\alpha\varepsilon\in Z(W_i)\}$はコンパクトである。

証明：$q^j\in Q_i$とすると，$(p^j, a^j)\in W_i$，$z\alpha\varepsilon^j\in Z(W_i)$が存在し，$q^j=\Sigma q\alpha\varepsilon$

$(p^j, a^j)(z\alpha\varepsilon^j-(p^jz\alpha\varepsilon^j)v$である。$W_i$, $Z(W_i)$ のコンパクト性より, $(p^j, a^j, z\alpha\varepsilon^j)$ は収束部分列を持つ。従って, $q\alpha\varepsilon$の連続性より, q^jも収束部分列を持つからQ_iはコンパクトである。

証了

8．E_iの凸包を$D_i=C(E_i)$とする。$D_i \supseteqq Q_i$である。

証明：$q \in Q_i$とすると, $(p, a) \in W_i$, $z\alpha\varepsilon \in Z(W_i)$が存在し, $q=\Sigma q\alpha\varepsilon(p, a)(z\alpha\varepsilon-(pz\alpha\varepsilon)v)$。右辺は有限個の$z\alpha\varepsilon-(pz\alpha\varepsilon)v \in E_i$の凸結合である。従って, $q \in D_i$。

証了

9．$T=\{z-p*zv \mid z \in Z(p*, a*)\}$は凸集合であり, $\cap D_i=T$である。

証明：m, $n \in T$とする。$m=z'-p*z'v$, $n=z''-p*z''v$, z', $z'' \in Z(p*, a*)$である。$\alpha m+\beta n=\alpha z'+\beta z''-p*(\alpha z'+\beta z'')v$であり, $Z(p*, a*)$の凸性より, $\alpha z'+\beta z'' \in Z(p*, a*)$, $\alpha+\beta=1$, α, $\beta \geqq 0$であるから, $\alpha m+\beta n \in T$。従ってTは凸集合。$(p*, a*) \in W_i$, $\forall i$より, $Z(p*, a*) \subseteqq Z(W_i)$, $\forall i$である。従って, 任意の$z \in Z(p*, a*)$について, $z-p*zv \in E_i$であるから, $E_i \supseteqq T$, $\forall i$。故に$\cap E_i \supseteqq T$。$D_i \supseteqq E_i$より, $\cap D_i \supseteqq T$。

$y \in \cap D_i$とする。$y \in D_i$より, $1+\ell$個の$x^i_j \in E_i$と$\lambda^i_j \geqq 0$, $\Sigma\lambda^i_j=1$が存在し, $y=\Sigma_j\lambda^i_jx^i_j$。$x^i_j \in E_i$より, $z^i_j \in Z(W_i)$, $(p^i_j, a^i_j) \in W_i$が存在し, $x^i_j=z^i_j-p^i_jz^i_jv$。従って, $y=\Sigma_j\lambda^i_j(z^i_j-p^i_jz^i_jv)$。$z^i_j \in Z(W_i)$より, $(p'^i_j, a'^i_j) \in W_i$が存在し$z^i_j \in Z(p'^i_j, a'^i_j)$。$i \to \infty$とすると, $W_i \to (p*, a*)$であるから, $(p^i_j, a^i_j) \to (p*, a*)$, $(p'^i_j, a'^i_j) \to (p*, a*)$, $\forall j$である。Zは上部半連続であるから, $z^i_j \in Z(p'^i_j, a'^i_j)$は収束部分列を持ち, また$\lambda^i_j$もコンパクト性より収束部分列を持つ。これらの集積点を$z*_j$, $\lambda*_j$とすると, $z*j \in Z(p*, a*)$, $\Sigma\lambda*_j=1$であり, $y=\Sigma_j\lambda*_j(z*_j-p*z*_jv)$。右辺はTの元の凸結合である。Tは凸集合

であるから，$y \in T$。

証了

10．$\cap Q_i \supseteqq T$である。従って，$\cap Q_i = T$である。

証明：$z\alpha\varepsilon = z \in Z(p*, a*)$，$\forall\alpha$とすると，$\Sigma q\alpha\varepsilon(p*, a*)(z\alpha\varepsilon - p*z\alpha\varepsilon v) = z - p*zv \in Q_i$。$Z(p*, a*) \subseteqq Z(W_i)$，$(p*, a*) \in W_i$，$\forall i$であるから，$\cap Q_i \supseteqq T$。従って，$T = \cap D_i \supseteqq \cap Q_i$とあわせて，$T = \cap Q_i$。

証了

$E_i \supseteqq E_j$，$i < j$より，$D_1 \supseteqq D_i \supseteqq Q_i$，$1 < i$である。$z\varepsilon_j \in Q_j$であるから，$d\varepsilon^j \equiv z\varepsilon^j(p\varepsilon^j, a\varepsilon^j) \in D_1$，$\forall j$である。$D_1$はコンパクトであるから，$d\varepsilon^j \leqq 0$は集積点$d \leqq 0$を持つ。明らかに，$d \in \cap D_i$である。$\cap D_i = T$より，$d = z - p*zv$，$z \in Z(p*, a*)$となる$z$が存在する。$p*z = 0$であるから，$d = z \leqq 0$。

《証了》

注意12.2.6：上では次の性質を用いた。

1．$f: X \to Y$がコンパクト値上部半連続対応で，$T \subseteqq X$がコンパクトならば$f(T)$はコンパクトである。

2．$W \subseteqq R^l$が有界ならばWの凸包$C(W)$も有界である。Wがコンパクトならば，$C(W)$もコンパクトである。

例12.2.7：$N = L^{l-1}{}_{++}$とし，$z' : L^{l-1}{}_{++} \to R^l$をワルラス体系の超過需要とする。Aとして形式的に1点からなる集合（0次元多様体）を取ると，$z: L^{l-1}{}_{++} \times A \to R^l$，$z(p, a) = z'(p)$は$C^0W$である。$proj_1 : L^{l-1}{}_{++} \to L^{l-1}{}_{++}$はIdであり，$\mathrm{degproj}_1 = 1$。$z'$が滑らかであり（この時$z$も滑らかである），0が$z*(p, a) = (p_1z_1(p, a), \cdots\cdots, p_lz_l(p, a)) = (p_1z'_1(p), \cdots\cdots, p_lz'_l(p))$の正則値とする。$z*: L^{l-1}{}_{++} \to H^{l-1}{}_0$が$p \in z*^{-1}(0)$で向き保存であることは，$z*$の表現写像の符号$\mathrm{signdet}\,D(\psi_0 z*\psi_1{}^{-1})_x$，$x = \psi_1(p)$が1であることと同値である。$z'$は0次同次関数の

$L^{l-1}{}_{++}$への制限であると仮定すれば，signdet $D(\psi_0 z*\psi_1{}^{-1})_x$=signdet $[D_j z_i(p)]$，i，j＝1，……，$\ell-1$が成り立つ（注意12.2.8参照)。従って，$(-1)^{l-1}=\deg(z*, 0)=\Sigma\mathrm{signdet}[D_j z_i(p)]$（Σは$p\in z*^{-1}(0)$について)。これはindex公式に他ならない

注意12.2.8：$p\in L^{l-1}{}_{++}$の接空間を求めると，$F:R^l\to R$を$p\to\Sigma p_i$とすれば，$F^{-1}(1)=H^{l-1}{}_1$である。$dF_p=(1, 1, \cdots\cdots, 1)=a$であり，I 定理６より，$\mathrm{ker}dF_p=T_pL^{l-1}{}_{++}$，$p\in L^{l-1}{}_{++}$である。従って，$T_pL^{l-1}{}_{++}=\{x\in R^l \mid a\cdot x=0\}=\{x\in R^l \mid \Sigma x_i=0\}=H^{l-1}{}_0$。すなわち，$T_pL^{l-1}{}_{++}$は定ベクトル$a$の直交補空間である。$z:L^{l-1}{}_{++}\to R^l$を$R^l$で定義された０次同次関数の$L^{l-1}{}_{++}$への制限とすると，$dz*_p$は行列表示が可能で，均衡$p$では

$$\begin{bmatrix} p_1z_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots p_1z_{11} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p_1z_{11}\ \cdots\cdots\cdots\ p_1z_{11}\end{bmatrix}=[dz*_p]$$ となる。

$z*:L^{l-1}{}_{++}\to H^{l-1}{}_0$であり，均衡$p$では$dz*_p:T_pL^{l-1}{}_{++}\to H^{l-1}{}_0$は０写像である。上の考察より，$T_pL^{l-1}{}_{++}$は均衡では$H^{l-1}{}_0$である。$H^{l-1}{}_0$の０での接空間は$H^{l-1}{}_0$と考えてよいから（実際$F:R^l\to R$を$x\to\Sigma x_i$で定義すると，$F^{-1}(0)=H^{l-1}{}_0$である。$dF_x=(1, \cdots\cdots, 1)$であるから，$\mathrm{ker}dF_x=\{x\in R^l \mid \Sigma x_i=0\}=H^{l-1}{}_0$である)，$dz*_p$は均衡では$H^{l-1}{}_0\to H^{l-1}{}_0$への写像である。

これから，均衡では$dz*_p$の表現行列式の値は定理11.2.9より，

$$\left|\begin{matrix} \begin{bmatrix} dz*_p \end{bmatrix} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ -1\cdots\cdots-1 & 0\end{matrix}\right| \Big/ \ell。$$

ワルラス法則より，均衡では$\Sigma_j p_j\partial z_j/\partial p_i=0$だから，分子の行列の$1\sim\ell-1$行を$\ell$行に加えると，$\ell$行は$(0, \cdots\cdots 0, \ell)$になる。従って，$\ell$行で展開すると，分子の行列式は$\ell(-1)^{2l+1}|B|$になる。Bの$1\sim\ell-1$行にそれぞれ$1/p_i$を掛け，さ

$$B=\begin{bmatrix} p_1 z_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & p_1 z_{11} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ p_{l-1} z_{l-11} & \cdots\cdots & p_{l-1} z_{l-11} \\ -1 & \cdots\cdots & -1 \end{bmatrix}$$

らに，1〜ℓ列にそれぞれp_iを掛け，ℓ列に加えると，ℓ列の$i \geqq \ell-1$行は0次同次性より0となり，行列Cを得る。

$$C=\begin{bmatrix} p_1 z_{11}\cdots\cdots & p_{l-1} z_{11-1}\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ p_1 z_{l-11}\cdots\cdots & p_{l-1} z_{l-11-1} & 0 \\ -p_1 \quad \cdots\cdots & -p_{l-1} & -1 \end{bmatrix}$$

$|C| = -p_1\cdots\cdots p_{l-1}|z_{ij}|$，$1 \leqq i$，$j \leqq l-1$。

これから，$dz*_p$の均衡での表現行列式の値は$p_1\cdots\cdots p_{l-1}|z_{ij}|/p_l$になる。従って，その符号は$|z_{ij}|$の符号と等しい。

例12.2.9：生産を含む場合

F_h：$R^l_{++}\times R_+ \to R^l_+$を個人hの需要関数，$w_h$を初期保有，$\theta_h$を利潤分配率，Yを生産集合とする。$F_h$は連続な0次同次関数で，$pF_h(p, m)=m$，$\lim\|F_h(p, 1)\| = +\infty (p \to \partial R^l_+ - 0)$と仮定する。更に，$w_h \in R^l_+$，$\Sigma_h w_h \in R^l_{++}$，$\Sigma_h \theta_h = 1$，$\theta_h \geqq 0$，Yは凸閉集合，$Y \cap R^l_+ = \{0\}$。$Y = Y - R^l_+$と仮定する。$A = R^l$とし，$z$：$L^{l-1}_{++}\times R^l \to R^l$を$z(p, y) = \Sigma_h F_h(p, \max(0, pw_h + \theta_h py)) - \Sigma_h w_h - y$で定義する。$N = \{(p, y) \in L^{l-1}_{++}\times R^l | y \in \mathrm{argmax}\quad py'(y' \in Y)\}$とおく。Nはpとpの時の利潤最大ベクトルyの組である。deg（$z*$，0）が定義でき，$(-1)^{l-1}$に等しいことを証明する。ここで$z*$：$N \to H^{l-1}_0$，$(p, a) \to (p_1 z_1, \cdots\cdots, p_l z_l)$である。通常のように実行可能生産集合はコンパクトであることが容易に証明できる。従って、$z*^{-1}(0)$に影響することなくYを修正できる。$Y = K - R^l_-$，Kは凸コンパクトとする。

次の補題が成立する。

補題12.2.10：

1．zはN上でC^0Wであり，proj_1：$N \to L^{l-1}_{++}$は固有である。

2．Nは$l-1$次元多様体である。

《証明》$N* = \{(p,\ y) \in L^{l-1}_{+} \times R^l : y \in \mathrm{argmax}\ \ py',\ y' \in Y\}$とする。次のa，bが成り立つ。

a．NはN＊の開集合である。

証明：$N \subseteqq N*$は明かである。$(p^n,\ y^n) \in N*$，$(p^n,\ y^n) \not\in N$とする。$p^n \in L^l_{++}$で，$(p^n,\ y^n) \in N*$ならば$(p^n,\ y^n) \in N$であるから，$p^n \in L^l_{+}$である。$(p^n,\ y^n) \to (p,\ y*)$とすると，$p^n \in L^l_{+}$より，$p \in L^l_{+}$。$p^n y^n \geqq p^n y$, $\forall y \in Y$であり，yを固定し，$n \to \infty$とすると$py* \geqq py$。任意の$y \in Y$についてこれは成立するから$y* \in \mathrm{argmax} py'$, $y' \in Y$。従って$(p,\ y*) \in N*$。よって，$N* - N$はN＊の閉集合であるからNはN＊の開集合である。

証了

$v = (1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1) \in R^l$とする。一般性を失うことなく，$vy = \Sigma y_i < 1$, $\forall y \in Y$と仮定する。$\phi : N* \to H^{l-1}_1$を$\phi(p,\ y) = (1 - vy)p + y$で定義する($\Sigma \phi_i(p,\ y) = (1 - vy)\Sigma p_i + \Sigma y_i = 1$であるから，$\phi(p,\ y) \in H^{l-1}_1$)。

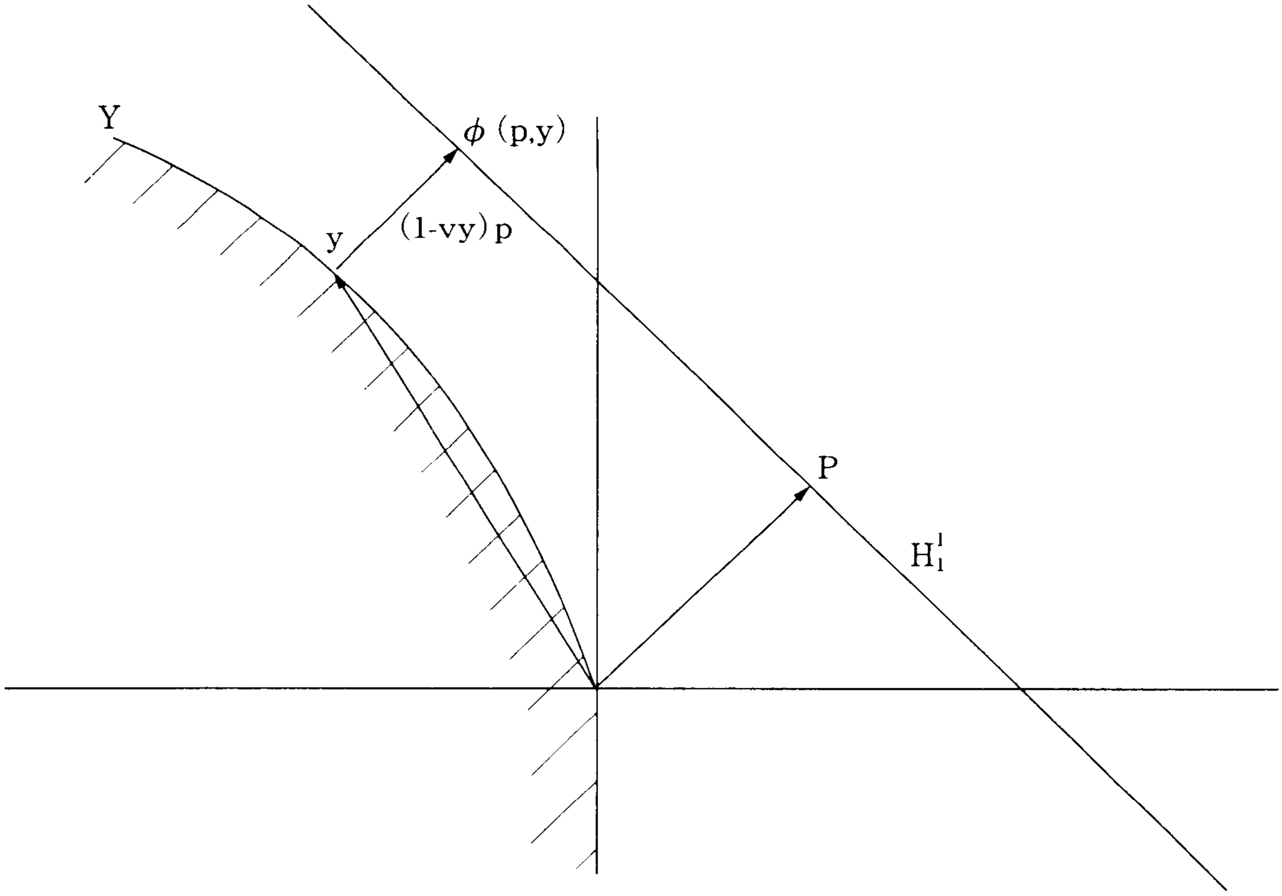
b．ϕは全単射同相である。

証明：$\phi(p,\ y) = \phi(q,\ w)$とすると，$(1 - vy)p + y = (1 - vw)q + w$。$(1 - vy) = a$，$(1 - vw) = b$とおくと，$ap - bq = w - y$。

$0 \geqq -(ap - bq) \cdot (ap - bq) = -(ap - bq)(w - y) = ap(y - w) + bq(w - y)$であり，$y$，$w$はそれぞれ$p$，$q$に対応する利潤最大ベクトルであるから，最後の2項は共に$\geqq 0$である。従って，$y = w$であり，$a = b$であるから，$p = q$。よってϕは単射である。

$\pi : R^l \to Y$を$z \in R^l$に$(z - y) \cdot (z - y)$，$y \in Y$を最小にする点yを対応させる写像とする(注意：πはzに対し，zとYの距離を最小にする点

図1



を対応させるものであり，凸集合の性質よりzに対して唯一の点$y \in Y$が定まるから写像として意味を持つ。またπは連続であることも証明できる)。任意の$z \in H^{1-1}{}_1$に対し，$(z-\pi(z))/v\cdot(z-\pi(z))=q$を考える。$vz=\Sigma z_i=1$であり，$1>vY$より，qの分母は$>0$。$\Sigma q_i=1$であり，また$q=(z-\pi(z))/(1-v\pi(z))$。$z \geqq \pi(z)$であるから$q \in L^{1-1}{}_+$(注意:$Y=K-R^1{}_+$であるから，$y \in Y$なら，$y' \leqq y$となる$y' \in Y$である。もし，$z_i < \pi_i(z)$となるiがあれば，$\pi(z)$のi要素を$z_i$に置き換えた$w=(\pi_1(z),\ \cdots\cdots,\ z_i,\ \cdots\cdots\pi_1(z)) \in Y$の方が$\pi(z)$よりzとの距離が小さくなり矛盾)。$q\pi(z) \geqq qy,\ \forall y \in Y$を示せば，$(q,\ \pi(z)) \in N*$であり，$\phi(q,\ \pi(z))=(1-v\pi(z))q+\pi(z)=(1-v\pi(z))(z-\pi(z))/(1-v\pi(z))+\pi(z)=z$となり，$\phi$は全射である。$\pi$

(z)を通るYの支持超平面$(z-\pi(z))y=(z-\pi(z))\pi(z)$が存在することが証明できる。$(z-\pi(z))y \leqq (z-\pi(z))\pi(z), \forall y \in Y$であるから，$qy \leqq q\pi(z)$，$\forall y \in Y$。$\phi^{-1}(z)=((z-\pi(z))/(1-\pi(z)), \pi(z))$であるから$\phi^{-1}$も連続であり，$\phi$は同相である。

証了

$N*$にϕの同相から向き付け$1-1$次元多様体の構造を与える。Nは$N*$の開多様体構造を持つ。

《証了》

補題12.2.11：$\mathrm{degproj}_1=1$である。

《証明》$\mathrm{Proj1}: N* \to L^{1-1}{}_{+} \subseteqq H^{1-1}{}_1$を$N*$からの射影とする。任意の$q \in L^{1-1}{}_{++}$に対し，$\mathrm{Proj}_1{}^{-1}(q) \subseteqq N$であり，$\deg(\mathrm{Proj}_1, q)=\deg(\mathrm{Proj}_1|N, q)=\deg\mathrm{Proj}_1|N$，$\forall q \in L^{1-1}{}_{++}$。$\mathrm{Proj}_1|N=\mathrm{proj}_1$であるから，$\deg(\mathrm{Proj}_1, q)=1$を示せばよい。

$h: N* \times [0, 1] \to H^{1-1}{}_1$を$h(p, y, t)=t\mathrm{Proj}_1(p, y)+(1-t)\phi(p, y)$で定義する($\Sigma_h(p, y, t)=t+1-t=1$より，$h(p, y, t) \in H^{1-1}{}_1$)。$h$は$\mathrm{Proj}_1$と$\phi$のホモトピーであり，$h^{-1}(q)$は任意の$q \in L^{1-1}{}_{++}$に対しコンパクトである($h^{-1}(q)$は$tp+(1-t)\phi(p, y)=q>0$となる，$(p, y, t) \in N* \times [0, 1]$の集合である。この条件を満たす$y$の集合は有界である。実際，$y$は仮定より上には有界であるから，有界でないとすれば，$h(p, y, t)=t^n p^n+(1-t^n)(1-vy^n)p^n+y^n=q$を満たし，$y^n{}_i \to -\infty$となる，$(p^n, y^n, t^n)$が存在する。$1-vy^n \to -\infty$である。$y$は上に有界であるから，利潤＝売上－費用において売上は上に有界である。p^n，t^nは有界であるから部分列は$p*$，$t*$に収束する。$p*_i>0$なら，$p^n{}_i y^n{}_i \to -\infty$となり，$n$を十分大きくすれば，$y^n$が$p^n$のときの利潤最大ベクトルであるという条件に反する。従って，$p*_i=0$。このとき，$t^n p^n+(1-t^n)(1-vy^n)p^n+y^n=q$の$i$要素は$n \to \infty$とすると，$y^n{}_i$となり右辺は$q_i$であるから矛盾。従って，条件を満たす$y$は有界であ

る。よって，を$t_n p^n+(1-t^n)(1-vy^n)p^n+y^n=q$を満たす$(p^n, y^n, t^n)$は集積点$(p*, y*, t*)$を持ち，$t*p*+(1-t*)(1-vy*)p*+y*=q$。$p^n y^n \geqq p^n y$，$y \in Y$であるから，$y$を固定し部分列を取ると，$p*y* \geqq p*y$。従って，$(p*, y*) \in N*$。よって，$h^{-1}(q)$，$q \in L^{l-1}{}_{++}$はコンパクトである（なおこれは$q \in L^{l-1}{}_{+}$でも成り立つ）。

よって，$\deg(Proj_1, q)=\deg(\phi, q)=1$。

《証了》

上の補題と定理12.2.1より，次の命題が成立することが分かる。

命題12.2.12：$\deg(z*, 0)=(-1)^{l-1}$。従って，均衡が存在する。

例12.2.13：収穫逓増の場合。

ここでは最も簡単な収穫逓増の場合の写像度の応用例を考えてみる。収穫逓増についてはいずれより詳しく論じる予定なので，ここでの議論は不完全なものであることをお断りしておく。$Y' \subsetneqq R^l$を生産集合，$w \in R^l$を初期保有とし$Y=Y'+w$とおく。以下，Yについて次のような仮定をおく。これらはいずれも本来の生産集合Y'についての仮定に対応づけることが可能であるが，ここではY'の仮定は明示しない。$p=f(y)$を価格付け関数とする。∂Yが滑らかならば，fは限界費用価格付けにもなり得る。$F(p, y)$を価格p，生産yの時の総需要とする。このモデルでは消費者個人は明示せず，総需要関数Fのみを与える。関数Fの中に生産部門で生じた利潤の任意の分配シエーマが含まているものと解釈する。

仮定：

(1)　$Y \cap R^l{}_{++} \neq \phi$。すべての$w \in R^l$に対し，集合$\{y \geqq w\} \cap Y$はコンパクト。$Y=Y-R^l{}_{+}$。

注意：$Y \cap R^l{}_{++} \neq \phi$は$0 \in Y'$，$w>0$なら満たされる。

(2)　$Y_E=\{y \in Y : \nexists y' \in Y, y'>y\}$。$f : Y_E \to L^{l-1}{}_{+}$は連続，$yf(y)>0$，$\forall y \in YE \cap R^l{}_{-}$。

注意：Y_Eは効率的な生産ベクトルを表す。

(3)　$F: R^l_{++} \times R^l \to R^l$は連続で，$py > 0$なら$pF(p,\ y) = py$。

$p^n \to p \in \partial R^l_+$，$py > 0$なら$\| F(p^n,\ y) \| \to +\infty$。

基本的な考え方：（z，A，N）を次のように取る。

$A = R^l$, $z(p,\ y) = F(p,\ y) - y$, $N = \{(p,\ y) \in L^{l-1}_{++} \times Y_E : p = f(y)\}$。

Nは固有とは限らず，zもC^0Wとは限らない。よって，定理12.2.1が直接適用できない。そのために証明は複雑になるが次の命題が成立する。

命題12.2.14：Nの向きを選んで，その向きのもとで$\deg(z*,\ 0) = (-1)^{l-1}$となるようにできる。従って，均衡$z(p,\ y) = 0$が存在する。

《証明》任意の$\varepsilon \in R$に対し，$V(\varepsilon) = \{y \in R^l : y_i \geqq \varepsilon,\ \forall i\}$とする。$\varepsilon > 0$に対し，$Y^1 = [Y \cap V(-\varepsilon)] - R^l_+$と定義する。$\varepsilon > 0$と$f^1 : Y^1_E \to L^{l-1}_+$で，次の1～4を満たすものが存在する。

1．$Y^1_E \cap V(-\varepsilon) = Y_E \cap V(-\varepsilon)$

2．$f^1(y) = f(y)$，$\forall y \in Y_E \cap V(-\varepsilon/2)$

3．$y \in Y^1_E$で$y_i \leqq -\varepsilon$ならば，$f^1_i(y) = 0$

4．$\exists \tau > 0$，$yf^1(y) \geqq \tau$，$\forall y \in Y^1_E$。

1の証明：$\varepsilon > 0$を任意にとり，$V(-\varepsilon) = V$とかく。$x \in Y^1_E \cap V$なら，定義より，$y \in Y \cap V$，$z \in R^l_+$が存在し，$x = y - z$，$x \in V$であり，さらに$w > x$，となる$w \in Y^1$は存在しない。これはY^1の定義より，$a \in Y \cap V$, $a > x$となるaは存在しないことを意味する(注意：定義に即して言えば，$w > x$となる$w \in Y^1$が存在しないことは，$a \in Y \cap V$，$b \in R^l_+$，$a - b > x$となるa，bは存在しないことである。$0 \in R^l_+$であるから，これは$a > x$となる$a \in Y \cap V$が存在しないことと同値である)。$y \in Y$，$z \in R^l_+$ならば，$y - z \in Y$より$x \in Y$。もし$p \in Y$，$p > x$，$p \in V$が存在すれば，$p \in Y \cap V$，$0 \in R^l_+$により，$p \in Y^1$となるから矛盾。従って$x \in Y_E \cap V$。逆に，$x \in Y_E \cap V$とする。$x \in Y \cap V$であり，

$w > x$，となる$w \in Y$は存在しない。明らかに$x \in Y^1$。$x \in Y^1_E$であるためには$p \in Y \cap V$，$z \in R^l_+$で$p - z > x$となるものが存在しないことが必要である。もし存在すれば，$p \in Y$，$p > x$となり$x \in Y_E$に矛盾。従って，$x \in Y^1_E \cap V$。

証了

2～4の証明：Y^1_E上の関数F_i：$Y^1_E \to R$（$i = 1$，$2 \cdots\cdots$，ℓ）を$F_i(y_1, \cdots\cdots, y_l) = \max(0, y_i + \varepsilon) \cdot (\Sigma_j \max(0, y_j))$で定義する。$F_i \geqq 0$であり，$y_i \leqq -\varepsilon$なら$F_i = 0$である。さらに，すべての$F_i$が同時に0となることはない。実際，任意の$y = (y_1, \cdots\cdots, y_l) \in Y^1_E$において，すくなくともひとつの$y_i > 0$である（証明：$Y^1_E \supseteqq Y_E \cap R^l_+$であり，$\exists a \in Y_E \cap R^l_+$，$a > 0$であるから，$y_i \leqq 0$，$\forall i$とすれば$y \in Y^1_E$の定義に矛盾）。従って，常に$(\Sigma_j \max(0, y_j)) > 0$であり，$y_i > -\varepsilon$なら$F_i(y) > 0$。$h_i = F_i / \Sigma_j F_j$（$i = 1$，$2 \cdots\cdots$，$\ell$）とする。$h_i(y) \geqq 0$，$\Sigma h_i(y) = 1$であるから，$h = (h_1, \cdots\cdots, h_l)$とすると，$h : Y^1_E \to L^l_+$である。$y_i > (\leqq) -\varepsilon$なら$h_i(y) > (=) 0$である。ウリーゾンの定理により（Willard, General Topology, 15.7），R^lの交わらない閉集合$V(-\varepsilon/2) = V$と$W = \{y \in R^l | y_i \leqq -\varepsilon, \exists i\}$に対し，連続関数$g : R^l \to [0, 1]$が存在し，$g(V) = 1$，$g(W) = 0$である。$W^c = V(-\varepsilon)^\circ$ である。$f^1 : Y^1_E \to L^l_+$を

$f^1(y) = f(y)$，$y \in V \cap Y^1_E = V \cap Y_E = K$，

$f^1(y) = g(y) f(y) + (1 - g(y)) h(y)$，$y \in Y^1_E \cap V(-\varepsilon/2)^{c*} \cap W^{c*} = L$，

$f^1(y) = h(y)$，$y \in W \cap Y^1_E = J$，

で定義する（$Y^1_E \cap W^{c*} = Y^1_E \cap V(-\varepsilon) = Y_E \cap V(-\varepsilon)$だからLはfの定義域に含まれる）。K，LおよびL，Jの共通部分ではf^1の値はそれぞれ$f(y)$，$h(y)$だから，この定義は意味をもち，$f^1 : Y^1_E \to L^l_+$は連続関数である。f^1は$Y^1_E \cap V(-\varepsilon/2)$ではfに等しく，また$y_i \leqq -\varepsilon$ならば，$y \in W$だから$f^1 = h$であり，$f^1_i = 0$である。

$yf(y)>0$，$\forall Y_E \cap R^l_+$であるから，十分小さな$\varepsilon=d$で，$yf(y)\geqq\beta(d)>0$，$\forall y\in Y_E\cap V(-d)=Y^1_E\cap V(-d)$。従って$\varepsilon=d$とすると，$y\in K$では$yf^1(y)\geqq\beta(d)$。また，任意の$0<\varepsilon<d$に対し，$yf^1(y)\geqq\beta(\varepsilon)>0$となる$\beta(\varepsilon)$が存在することは明かである。$a>0$，$a\in Y_E\cap R^l_+$に対し，任意の$y\in Y^1_E$は$y_i\geqq a_i$となる$i$を少なくとも一つは持つことに注意し，$\alpha=\min(a_i)$とおくと，$(\Sigma_j\max(0,y_j))\geqq\alpha$。$y\in J$で$-\varepsilon<y_i<0$となる$i$について，$y_ih_i(y)=y_i(y_i+\varepsilon)(\Sigma_j\max(0,y_j))\leqq y_i(y_i+\varepsilon)\alpha<0$。$\varepsilon\to0$，$y_i\to0$であるから，このような$y_ih_i(y)\to0$。一方，$y_j\geqq\alpha$となる$j$については，$y_jh_j(y)\geqq\alpha^2(\alpha+\varepsilon)\geqq\alpha^3$。従って，$\varepsilon$を小さくすれば$yh(y)\geqq\gamma(\varepsilon)>0$，$\forall y\in J$。$y\in L$とすると，$y\in W^c=Y_E\cap V(-\varepsilon)$だから$yf(y)\geqq\beta(\varepsilon)$。$y_j\geqq\alpha$に対し，$y_jh_j(y)\geqq\alpha^3$。$-\varepsilon<y_i<0$となる$i$について，$y_ih_i(y)\leqq y_i(y_i+\varepsilon)\alpha<0$。従って，上と同様に$\varepsilon$を小さくすれば$yh(y)\geqq\delta(\varepsilon)>0$，$\forall y\in L$。$yf^1(y)=g(y)yf(y)+(1-g(y))yh(y)$であり，適当な$\varepsilon$に対し$yf^1(y)\geqq g(y)\beta(\varepsilon)+(1-g(y))\delta(\varepsilon)\geqq\min(\beta(\varepsilon),\delta(\varepsilon))$。

従って，共通のεに対$\eta=\min(\beta(\varepsilon),\delta(\varepsilon),\gamma(\varepsilon))$とおけば，$yf^1(y)>\eta$，$\forall y\in Y^1_E$。

証了

$z(p,y)=0$，$(p,y)\in N$とする。前者より，$(p,y)\in R^l_{++}\times R^l_+$，後者より$p\in L^{l-1}_{++}$，$y\in Y_E$。従って，$F(p,y)=y$，$p=f(y)$，$p\in L^{l-1}_{++}$，$y\in Y_E\cap R^l_+$であり，$(p,y)$は均衡になる。均衡では$y\in Y_E\cap R^l_+$だから，$y\in Y^1_E\cap R^l_+$，$f^1(y)=f(y)$となるから，$Y$と$f$を$Y^1$，$f^1$で置き換えても，均衡には影響しない。また，均衡の周囲では$z*=(p_1z_1,\cdots\cdots,p_lz_l)$にも影響しないことがわかる。

$N^1=\{(p,y)\in L^{l-1}_{++}\times Y^1_E : p=f^1(y)\}$と定義する。

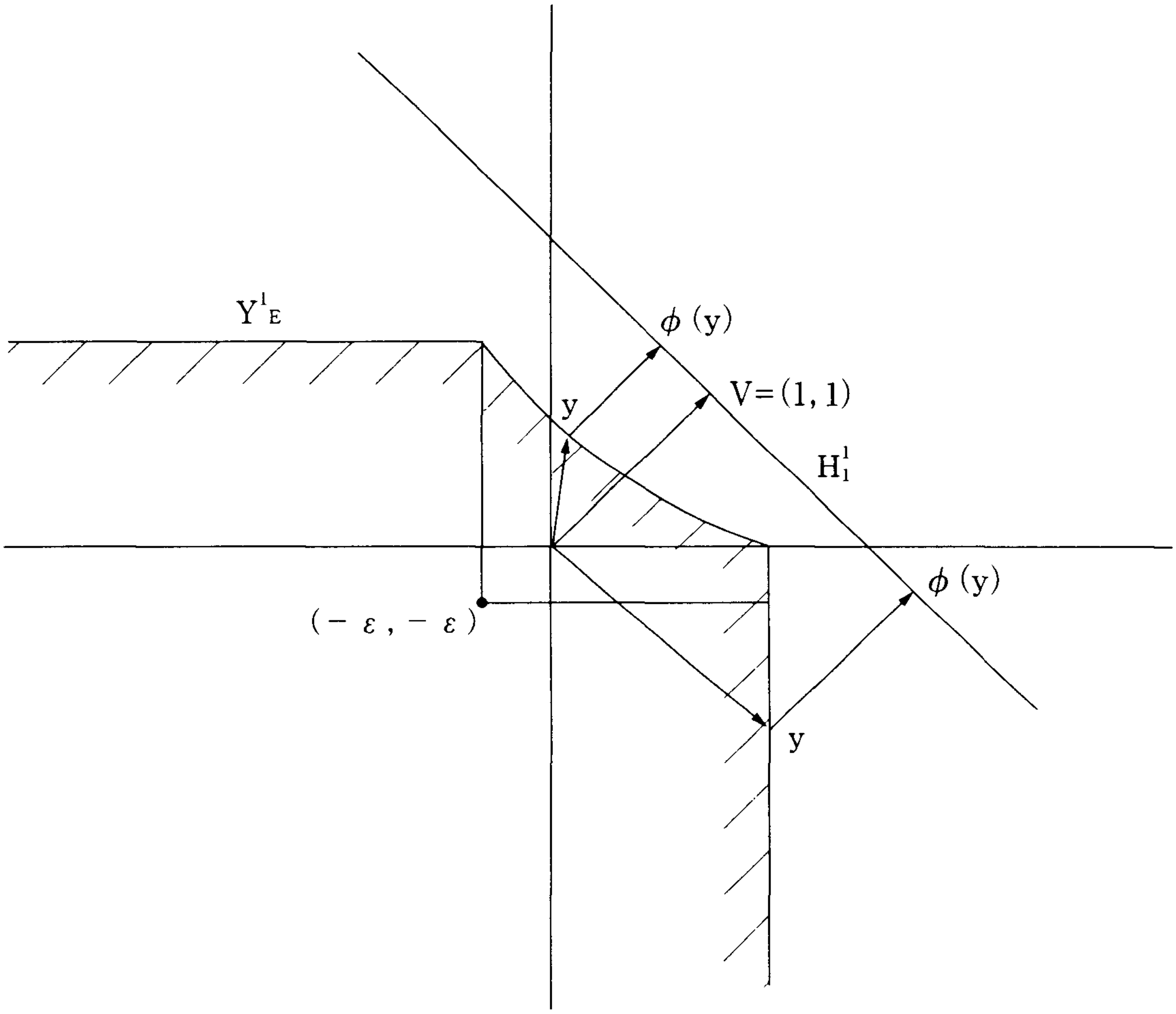
a．N^1はC^0正則で，固有である。

証明：$\phi:Y^1_E\to H^{l-1}_1$を$\phi(y)=y+(1-vy)v/\ell$，$v=(1,1,$

……，　1）$\in R^l$で定義する。$\Sigma_i \phi_i(y)=1$に注意する。

ϕはyに対し，yからv方向へ向かうベクトル$\phi(y)\in H^{l-1}{}_1$を対応させるものであり，$\phi(y)$は$y\in Y^l{}_E$から超平面$H^{l-1}{}_1$に下ろした垂線の足である。実際，足zを通る超平面の垂線は，x＝z＋tvとパラメーター表示できる。y＝z＋tvとなるtに対し，vy＝vz＋tvv＝1＋tℓだから，t＝(vy－1)／ℓ。従って，z＝y＋(1－vy)v／ℓである。ϕが単射でないとすると，$\phi(x)=\phi(y)$となる$x\neq y$がある。vx＝xyならば，x＝yとなるから，vx≠vyである。一般性を失うことなくvx＞vyと仮定すると，x－y＝(vx－xy)v／ℓ＞0よりx＞y。これはx，$y\in Y^l{}_E$に反する。ϕが全射であり，さらに同相であることも証明できる（厳密な証明

図2



は省く。図２参照。)。同相ϕ^{-1}：$H^{l-1}{}_1 \to Y^1{}_E$により$Y^1{}_E$に向き付け多様体の構造を入れる。従って，$\deg\phi = 1$。ρ：$Y^1{}_E \to L^1{}_+ \times Y^1{}_E$を $y \to (f^1(y), y)$で定義する。ρはf^1の「グラフ」であり，中への同相であるから，$\rho(Y^1{}_E)$は$Y^1{}_E$から $l-1$ 次元向き付け多様体の構造をもらう。ρ：$Y^1{}_E \to Gf^1(Y^1{}_E)$と考えると，$\rho$は向き保存同相であり，$\deg\rho = 1$。

$N^1 = \{(p, y) \in L^{l-1}{}_{++} \times Y^1{}_E : p = f^1(y)\}$は$\rho(Y^1{}_E)$の開集合であり，$N^1$に$\rho(Y^1{}_E)$の開集合として向き付け多様体の構造を与える。従って，N^1はC^0正則である。$K \subseteqq L^{l-1}{}_{++}$がコンパクトならば$\mathrm{proj}_1{}^{-1}(K) \subseteqq K \times [V(-\varepsilon) \cap Y_E]$であり，右辺は有界。連続性より左辺は閉だから，従って左辺はコンパクトになり，N^1は固有。

b．z はN^1上でC^0Wである。

証明：$N^1 = \{(p, y) \in L^{l-1}{}_{++} \times Y^1{}_E : p = f^1(y)\}$上で，$pz(p, y) = 0$を示す。$z(p, y) = F(p, y) - y$より，$pz(p, y) = pF(p, y) - py$。仮定より，$pF(p, y) = py$が任意の$py > 0$について成立するが，$(p, y) \in N^1$ならば，$p = f^1(y)$より，$py = yf^1(y) > 0$。従って，$pz(p, y) = 0$，$\forall (p, y) \in N^1$。次に，$(p^n, y^n) \in N^1$として，$p^n \to p \in \partial L^1{}_{++}$とする。$z(p^n, y^n) = F(p^n, y^n) - y^n$, $p^n = f^1(y^n)$。$p^n y^n = y^n f^1(y^n) \geqq \eta > 0$。$y^n$は有界としてよいから，$y^n \to y$とする。$py > 0$である。$z(p^n, y) = F(p^n, y) - y$において$p^n \to p$とすると，$\| z(p^n, y) \| = \| z(p^n, y^n) \| \to \infty$。

証了

proj_1：$N^1 \to L^{l-1}{}_{++}$の$\deg$の計算。任意の$p| \subseteqq L^{l-1}{}_{++}$に対し，連続性より$f^{1-1}(p|)$の開近傍$U$で$f^1(U) \subseteqq L^{l-1}{}_{++}$となるものが存在する。$U$上では$f^1 = \mathrm{proj}_1 \cdot \rho$であり，$\deg(f^1, p|) = \deg(\mathrm{proj}_1, p|)\deg\rho$。$\deg\rho = 1$であり，$\deg(\mathrm{proj}_1, p|) = \deg\mathrm{proj}_1$であるから，$\deg(f^1, p|)$の値が分かればよい。

c：$Y^1{}_E \times [0, 1] \to H^{l-1}{}_1$を

$c(y, t)=tf^1(y)+(1-t)\phi(y)$で定義する。

cはf^1とϕのホモトピーである。$\forall p| \in L^{l-1}{}_{++}$，$c^{-1}(p|)$がコンパクトであることを示す。$c^{-1}(p|)$は連続性より閉だから有界のみを示せばよい。有界が示されれば，$\deg(f^1, p|)=\deg(\phi, p|)=\deg\phi=1$。$(y, t)\in c^{-1}(p|) \Longleftrightarrow tf^1(y)+(1-t)[y+((1-vy)v/\ell)]=p|$，$(y, t)\in Y_E\times[0, 1]$。

$c^{-1}(p|)$の有界性の証明：$c^{-1}(p|)$が有界でないとする。

$Y_E\cap V(-\varepsilon)$はコンパクトであるから，各i（$i=1, 2, \cdots\cdots, \ell$）について，$Y_E\cap V(-\varepsilon)$の中に$y_i$を最大にするベクトル$y^i$が存在する。$y^i{}_i=a_i$とし，$a=(a^1, \cdots\cdots, a_l)$とすると，任意の$y\in Y^1{}_E$について，$y\leqq a$である。実際，$\exists y\in Y^1{}_E$，$y_j>a^j$とすると，$z\in Y\cap V(-\varepsilon)$が存在し$z_j>a_j$。$z\in Y_E$なら$a_j$の定義に矛盾する。$z\not\in Y_E$としても，$q>z$，$q\in Y\cap V(-\varepsilon)$が存在し，$\{y\geqq q\}\cap Y=Z$がコンパクトだから，$Z$の中に$y_j$を最大にするベクトル$s$が存在し，$s\in Y_E\cap V(-\varepsilon)$，$s_j>a_j$となり矛盾。従って$Y^1{}_E$は上に有界であるから，$c^{-1}(p|)$が有界でないとすると$y^n{}_j\to-\infty$となる$(y^n, t^n)\in c^{-1}(p|)$が存在する。$y^n{}_j\to-\infty$であるから，$y^n\in W$であり，$f^1(y^n)=h(y^n)$，$h_j(y^n)=0$。$y^n{}_j\to-\infty$となる$j$の集合を$J$とする。$J$の要素数を$b$とすると，$1\leqq b\leqq \ell-1$である。$vy^n=\Sigma_{j\in J}y^n{}_j+\Sigma_{j\not\in J}y^n{}_j$とかく。$p|j=c_j(y^n, t^n)=(1-t^n)[y^n{}_j+(1-\Sigma_{j\in J}y^n{}_j-\Sigma_{j\not\in J}y^n{}_j)/\ell)]$だから，$\Sigma_{j\in J}p|_j=(1-t^n)(\Sigma_{j\in J}y^n{}_j+b/\ell-b\Sigma_{j\in J}y^n j/1-b\Sigma_{j\not\in J}y^n{}_j/\ell)=(1-t^n)[(1-b/\ell)\cdot\Sigma_{j\in J}y^n{}_j+b/\ell-b\Sigma_{j\not\in J}y^n{}_j/\ell]$。[　]内の第1項は$\to-\infty$であり，他の項は有界であるから[　]$\to-\infty$。従って，$(1-t^n)$ [　] $\to\leqq 0$。これは$\Sigma_{j\in J}p|_j>0$に矛盾する。

《証了》

VIIの捕捉

前回に未証明としておいたいくつかの命題の証明をあたえておく。

＊＊VII．p244　Sと$S^{n-1}{}_{+}$の同相

$R_{+}\times R_{+}$の点$(x,\ y)\neq 0$は$r\in R_{++}$，$\theta\in[0,\ \pi/2]$により，一意的に$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$と表せる。同様に，$R\times R_{+}$の点$(x,\ y)\neq 0$は，$r\in R_{++}$，$\theta\in[0,\ \pi/2]$により，$x=r\cos 2\theta$，$y=r\sin 2\theta$と一意的に表せる。$0\neq(x,\ y)\in R\times R_{+}\rightarrow(r,\ 2\theta)\rightarrow(X=r\cos\theta,\ Y=r\sin\theta)$，$(x,\ y)=0\rightarrow(X=0,\ Y=0)$の対応により，$g:R\times R_{+}\rightarrow R_{+}\times R_{+}$，$(x,\ y)\rightarrow(X,\ Y)$が定義できる。gは次のような性質を持つ。

1．gは連続である。

《証明》すべての$(x,\ y)\neq 0$において，$r^2=x^2+y^2=X^2+Y^2$が成立する。従って，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$である。$\cos\theta=\sqrt{(1+\cos 2\theta)/2}$，$\sin\theta=\sqrt{(1-\cos 2\theta)/2}$より，$(x,\ y)\neq 0$では，従って，$X=r\cos\theta=\sqrt{r}\sqrt{(r+r\cos 2\theta)/2}=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}+x)/2}$，$Y=r\sin\theta=\sqrt{r}\sqrt{(r-r\cos 2\theta)/2}=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-x)/2}$である。これは明かに，$(x,\ y)\neq 0$で連続である。$(x,\ y)\rightarrow 0$とすると，$(X,\ Y)\rightarrow 0$であるから，$(x,\ y)=0$でも連続である。

《証了》

2．gは全単射である。

《証明》$(x,\ y)\neq 0$なら，$r>0$であり，$x=r\cos 2\theta$，$y=r\sin 2\theta$となる$\theta\in[0,\ \pi/2]$が唯一定まる。もし$r\cos\theta=X=r'\cos\theta'$，$r\sin\theta=Y=r'\sin\theta'$となる$r'$，$\theta'$があるとすると，$r^2=r'^2$より，$r=r'$。$[0,\ \pi/2]$の範囲では$\cos\theta\neq\cos\theta'$，$\theta\neq\theta'$であるから，$\cos\theta=\cos\theta'$なら$\theta=\theta'$。従って，$(x,\ y)\neq 0$では単射。また，$(x,\ y)\neq 0$なら，$(X,\ Y)\neq 0$で

あるから，$(X, Y)=0$ となるのは $(x, y)=0$ の場合のみである。よって，単射である。全射は明かである。

《証了》

3．g は同相である。

《証明》 $r>0$ とする。$r\cos 2\theta=(r^2\cos_2\theta-r^2\sin_2\theta)/r$，$r\sin 2\theta=2(r^2\cos\theta\sin\theta)/r$ であるから，$x=(X^2-Y^2)/\sqrt{X^2+Y^2}$，$y=2XY/\sqrt{(X^2+Y^2)}$ より，$(X, Y)\neq 0$ なら g の逆像は連続である。$(X, Y)\to 0$ とすると，$(x, y)\to 0$ は明かであるから（分子は分母より高位の無限小），$(X, Y)=0$ でも連続である。

《証了》

従って，g は $\|g(x, y)\|=\|(x, y)\|$ となる同相写像である。

$g_1: R^{n-1}\times R_+\to R^{n-2}\times(R_+)^2$ を $g_1(x, y, z)=(x, g(y, z))$ で定義する。ここで $x\in R^{n-2}$，$y\in R$，$z\in R_+$。$\|g_1(x, y, z)\|^2=\|(x, g(y, z))\|^2=\|x\|^2+\|g(y, z)\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2$ である。以下，

$g_2: R^{n-2}\times(R_+)^2\to R^{n-3}\times(R_+)^3$,

……………

$g_i: R^{n-i}\times(R_+)^i\to R^{n-i-1}\times(R_+)^{i+1}$,

……………

$g_{n-1}: R\times(R_+)^{n-1}\to(R_+)^n$ を

$g_i(x, y, z, w)=(x, g(y, z), w)$，$(x, y)\in R^{n-i-1}\times R$，$(z, w)\in R\times R^{i-1}$，$2\leqq i\leqq n-2$，

$g_{n-1}(x, y, z)=(g(x, y), z))$，$(x, y)\in R\times R_+$，$z\in(R_+)^{n-2}$

で定義する。g が同相であるから，明らかに g_i，$1\leqq i\leqq n-1$ も同相である。

4．$\|g_i(s)\|^2=\|s\|^2$，$1\leqq i\leqq n-1$。すなわち g_i は等長変換である。

《証明》 $i=1$ については明かである。$2\leqq i\leqq n-2$ については，$\|$

$(x, g(y, z), w)\|^2=\|x\|^2+\|g(y, z)\|^2+\|w\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\|w\|^2$。$i=n-1$の場合も同様である。

《証了》

$G_k: R^{n-1}\times R_+\to R^{n-k-1}\times(R_+)^{k+1}$, $1\leqq k\leqq n-1$を合成写像$G_k=g_k g_{k-1}\cdots\cdots g_1$で定義する。各$g_i$が同相，等長変換であるから，$G_i$も同相，等長変換である。特に，$G_{n-1}=g_{n-1}g_{n-2}\cdots\cdots g_1: R^{n-1}\times R_+\to(R_+)^n$は同相である。

$S^{n-1}{}_+=\{x\in R^n|\ \Sigma x_i{}^2=1, x_n\geqq 0\}\subseteqq R^{n-1}\times R_+$。$G=G_{n-1}$とし，$G(S^{n-1}{}_+)$を考えると，Gは等長変換であり，値域は$(R_+)^n$であるから，$G(S^{n-1}{}_+)\subseteqq S=\{x\in R^n|\Sigma x_i{}^2=1, x\geqq 0\}$。任意の$x\in S$, $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$は$g_{n-1}{}^{-1}$により，長さを変えずに$(y_1, y_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$, $(y_1, y_2)\in R\times R_+$に写り，以下$g_{n-2}{}^{-1}$, $\cdots\cdots g_1{}^{-1}$により，$z=(z_1, \cdots\cdots z_n)\in R^{n-1}\times R_+$に写るから，$\|z\|=1$より，$z\in S^{n-1}{}_+$。従って，$G(S^{n-1}{}_+)=S$である。Gは同相であるから，$S^{n-1}{}_+$とSは同相である。

＊＊p. 253　TP関数の性質

1．hが$x\in X$でTPあることは地図の取り方によらない。すなわち，ある地図でTPならば別の地図でもTPである。

《証明》ψを別の地図とする。$h\phi^{-1}\phi\psi^{-1}=h\psi^{-1}$であり，$\psi\phi^{-1}$は0を0に移す微分同相であるから，補題11．3．1．19より，$h\psi^{-1}$は0でTPである。

《証了》

2．hがxでTPならば，xの近傍でもTPである。

《証明》定義より，$x\in X^k$でTPとはxの周りの地図(ϕ, U)が存在し，$\phi(x)=0$, $h(\phi^{-1}(z))=f(z)z_1\cdots\cdots z_k$, $z\in\phi(U)$が成り立つことである。$y\in U\cap X^\circ$ ならば，$\phi_1(y)=y_1>0$, $\cdots\cdots$, $\phi_k(y)=y_k>0$であるから，$h(\phi^{-1}(y_1, \cdots\cdots, y_n))=f(y_1, \cdots\cdots, y_n)y_1\cdots\cdots y_k>0$とな

りhはyでTPである（注意：$y \in X^{\circ}$ のときはyの周りで $h(y) > 0$ となることがTPの条件であり，yの周りの地図で $\phi(y) = 0$ となるものが存在するという条件は課されていない）。$y \in U \cap X^{s}(1 \leqq s \leqq k)$ の時は，$g : \phi(U) \rightarrow R^{n}$ を $z \rightarrow z - \phi(y)$ で定義する。gはC^{∞}同相である。$V = (\phi(U) - \phi(y)) \cap L^{n}{}_{k}$ とおく。ここで $\phi(U) - \phi(y) = \{\phi(z) - \phi(y) \mid z \in U\}$ であり，$\phi(U)$ を平行移動して得られた集合である。$0 \in V$ である。R^{n} の開集合Sにより，$\phi(U) = S \cap L^{n}{}_{k}$ と表せるから，$V = S \cap L^{n}{}_{k} - \phi(y) = (S - \phi(y)) \cap L^{n}{}_{k}$ であり，$S - \phi(y)$ は R^{n} の開集合だから，Vは$L^{n}{}_{k}$の開集合である。$\phi(y) \in g^{-1}(V) = W$，$g\phi = \psi$ とおくと，$(\psi, \phi^{-1}(W))$ はyの近傍の地図であり，$\psi(y) = g\phi(y) = 0$。一般性を失うことなく $\phi_{1}(y) = \phi_{2}(y) = \cdots\cdots = \phi_{s}(y) = 0$，$1 \leqq s \leqq k$ とおく。ϕ_{s+1}，……，$\phi_{k}(y) > 0$ である。V上の関数Fを $F(v) = f(g^{-1}(v)) g_{s+1}{}^{-1}(v) \cdots\cdots g_{k}{}^{-1}(v)$，$v \in V$ で定義する。必要ならVをとりなおすことにより，$F(v) > 0$，$v \in V$ とできる。$g^{-1}(v) = v + \phi(y)$ であるから，$g_{1}{}^{-1}(v) = v_{1}$，……，$g_{s}{}^{-1}(v) = v_{s}$。$h\psi^{-1}(v) = h\phi^{-1}g^{-1}(v) = F(v) g_{1}{}^{-1}(v) \cdots\cdots g_{s}{}^{-1}(v) = F(v) v_{1} \cdots\cdots v_{s}$。

《証了》

4．．hがxでTPでxが指数 $k \geqq 1$ ならば，xの周りの地図ϕで，$\phi(x) = 0$，$h(\phi^{-1}(x_{1}, \cdots\cdots, x_{n})) = x_{1} \cdots\cdots x_{k}$ となるものが存在する。

《証明》指数の定義（中心xの地図の値域が$L^{n}{}_{k}$の開集合である）より，地図(U，F)が存在し，F(U)は$L^{n}{}_{k}$の開であり，$hF^{-1}(x_{1}, \cdots\cdots, x_{n}) = f(x_{1}, \cdots\cdots, x_{n}) x_{1} \cdots\cdots x_{k}$，$f(x_{1}, \cdots\cdots, x_{n}) > 0$ が0の近傍で成立する。$y_{1} = f(x_{1}, \cdots\cdots, x_{n}) x_{1}$，$y_{i} = x_{i} (i \geqq 2)$ と定義し，$g : x \rightarrow y$ を作る。$g(0) = 0$ である。Jgは

$$\begin{bmatrix} f_1x_1+f, & f_2x_1 & \cdots & f_nx_1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

となる。f_1x_1+f は $0\in L^n{}_k$ では $f(0)>0$ であるから，Jgは0で可逆である。従って，$(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n)$ は座標になる。$y_1\cdots\cdots y_k=f(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)x_1\cdots\cdots x_k$ である。$g(0)=0$ であり，g は0の近傍の微分同相であるから，$(U',\ gF)$ は中心 x の地図である。$hF^{-1}g^{-1}(y_1,\ \cdots\cdots y_n)=hF^{-1}(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)=f(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)x_1\cdots\cdots x_k=y_1\cdots\cdots y_k$。従って，gFは条件を満たす地図である。

《証了》

5．h，mが x でTPなら凸結合関数 $t=\alpha h+\beta m$，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$ も x でTPである。

《証明》 x の地図 $\phi(x)=0$ に対し，$h\phi^{-1}(z)=f(z)z_1\cdots\cdots z_k$，$m\phi^{-1}(z)=g(z)z_1\cdots\cdots z_k$ である。従って，$t\phi^{-1}(z)=\alpha\phi^{-1}(z)+\beta g^{-1}(z)=\alpha f(z)z_1\cdots\cdots z_k+\beta g(z)z_1\cdots\cdots z_k=(\alpha f(z)+\beta g(z))z_1\cdots\cdots z_k$。$f$，$g>0$ より，$\alpha f+\beta g>0$ である。

《証了》

6．$x\in X$ の近傍で定義されたTP関数は必ず存在する。実際，$x\in X^k$ の周りの地図$(\phi,\ U)$，$\phi(x)=0$ をとり，$\phi(U)$上で正となるC^∞関数 $f>0$ を任意に指定し，U上の関数 $h(y)=f(\phi(y))\phi_1(y)\cdots\cdots\phi_k(y)$ を作り，$\phi(y)=z$ とすれば，$h\phi^{-1}(z)=f(\phi(\phi^{-1}(z))\phi_1(\phi^{-1}(z))\cdots\cdots\phi_k(\phi^{-1}(z))$。$\phi(y)=(\phi_1(y),\ \cdots\cdots,\ \phi_n(y))=(z_1,\ \cdots\cdots,\ z_n)$ であるから，$z_i=\phi_i(y)=\phi_i(\phi^{-1}(y))$。従って，$h\phi^{-1}(z)=f(z)z_1\cdots\cdots z_k$ で

ある。

Xがパラコンパクトであるから，C^{∞}の１の分割$\{q\alpha\}$を取り，$U\alpha$ではTP関数$h\alpha$が定義されているものとする。$\Sigma q\alpha h\alpha$を作れば，これがTP関数であることは明かである。

《証了》

＊注意11．3．1．15　M／RRは境界のないｎ－１次元多様体である。

この証明にはいくらかの準備が必要である。まずそれを述べる。

ＶをR^nの開集合とする。Ｖ上の関係LLを$xLy \Longleftrightarrow x(n)=y(n)$で定義する。ここで，$x(n)$，$y(n)$はｘ，ｙの第ｎ要素$x_n$，$y_n$を除いたｎ－１ベクトルを表す。従って，この関係はｘ，ｙの第ｎ要素以外は等しいという関係である。$x \in V$に対し，$C_x=\{(x(n), r) \mid r \in R\}$とおくと，$C_x \cap V=[x]$であることは明かである。$C_x$は$R^n$の直線の集合であるから，この関係はＶを直線の集まりと考えることに他ならない。

LLが同値関係の条件，１・xLx，２・xLy→yLx，３・xLy，yLz→xLzを満たすことは明かである。$pr: x \to x(n)$と定義する。

補題Ｓ1．Ｖ／LLとpr(Ｖ)には全単射Ｆ：pr(Ｖ)→Ｖ／LLが存在し，Ｐ：Ｖ→Ｖ／LLを商射影とすると，Ｆpｒ＝Ｐである。

《証明》$y \in pr(V)$とすると，集合$\{(y, s) \mid (y, s) \in V\}=Cy \cap V$が定まり，ｙはＶ／LLの１点に対応する。この対応Ｆにより，Ｆ：pr(Ｖ)→Ｖ／RRが定まる。Ｆが全単射であることは明かである。$Fpr(x)=F(x(n))=[x]=P(x)$であるから，Ｆpｒ＝Ｐ。

《証了》

補題Ｓ２：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

ｆ＝hgとする。
ｆが連続，ｇが全射・開写像ならば，ｈは連続である。

《証明》Ｚの開集合Ｗに対し，$h^{-1}(W)$がＹの開集合であることを言えばよい。$f^{-1}(W)=g^{-1}h^{-1}(W)$である。左辺はｆの連続性よりＸの開集合である。注意S3より，$h^{-1}(W)$は開集合である。
《証了》

注意Ｓ３：ｇ：Ｘ→Ｙが全射開写像とする。$g^{-1}(K)$が開集合ならＫは開集合である（証明：ｇは全射であるから，$g^{-1}(K)$は空でなく，$gg^{-1}(K)=K$である。ｇは開写像であるから$g^{-1}(K)$が開集合なら，ｋは開集合である）。

補題Ｓ４：Ｆは同相であり，従ってＶ／LLはハウスドルフ空間になる。
《証明》

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "P"] \arrow[d, "pr"'] & V/LL \\ pr(V) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

左図は可換である。
$F^{-1}P(x)$は$x\to[x]\to x(n)$
prは$x\to x(n)$である。

従って，ｆ＝P，ｇ＝prとすれば，Ｐが連続であり，prは全射開写像であるから，Ｆは連続である。同様に，$F^{-1}P=pr$から，prが連続で，Ｐが全射開写像であれば，F^{-1}も連続であり，Ｆは同相になる。prの連続性と，

Pが全射であることは明らかだから，Pが開写像であることを示せば，Fは同相である。
OをVの開集合とすると，商位相の定義より$P^{-1}(P(O))=W$が開集合であることを言えば，P(O)は開集合になり，Pは開写像である。$W \supseteqq O$である。$x \in W$とすると，$P(x) \in P(O)$である。$x \in O$ならば，xの近傍$V(x) \subseteqq O \subseteqq V$が存在する。$x \notin O$とする。$P(x)=P(y)$となる$y \in O$がある。$x(n)=y(n)$である。$x \in W$であるから，xの十分小さな近傍$A \subseteqq W$をとると，$y-x+A=(0_{n-1}, y_n-x_n)+A=B$はyを含む開集合であり，Oに含まれる。BはAの平行移動であるから，Aの元とBの元は1対1に対応し，$z \in A$に対し，$(z(n), y_n-x_n+z_n) \in B$が対応する。従って，$P(A)=P(B) \subseteqq P(O)$である。よって，$W=P^{-1}(P(O)) \supseteqq A$であり，Wの元はWに含まれる近傍を持つからWは開集合である。従って，V／LLはpr(V)と同相であり，後者はR^{n-1}の開集合である。
《証了》
この同相によりV／LLにpr(V)の微分構造を移植すれば，次の命題が成立する。
命題S５：V／LLはn－１次元多様体になる。
注意S６：微分構造の移植で注意すべきは，Yが微分多様体Zの部分集合である場合である。このとき，中への同相$F: X \to Y \subseteqq Z$によりXの構造を移植してもYがZの部分多様体になるとは限らない。実際，Sを円周とし$T \subseteqq R^2$を正方形とすると明らかにSとTは同相である。TにSの構造を移植してTを微分多様体にしても，その構造はR^2の部分多様体構造にはならないことは明かである。
命題S７：(ベクトル場の直線化)θを多様体の開集合上のベクトル場とする。$\theta(x) \neq 0$ならば，xの近傍でθの解曲線群の座標表現が直線群となるように座標を選ぶことができる。

《証明》θをW$\subsetneqq R^n$のベクトル場とする。$x \in W$で$\theta(x) \neq 0_n$とする。$\theta(x)$はR^nの0_nでないベクトルだから，$R\theta(x)+L=R^n$となる$N-1$次元平面Lがある。

簡単のため$x=0_n$，$\theta(0_n)=(0_{n-1},\ 1)$とする。$L=R^{n-1}\times 0$である。微分方程式の定理より，$0_n$を含む開集合$U\subsetneqq W$，0を含む開区間$I_b$，及び写像$F: U\times I_b \to R^n$が存在し，$F_t: U\to R^n$は$F_t(U)$への微分同相であり，$F(v,\ t)$はvを原点とする$\theta$の解曲線となる。$0_{n-1}$を含む開集合$V\subsetneqq R^{n-1}$と$\varepsilon>0$を取り，$U=V\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)$と仮定してよい。

$(y,\ 0)\in U=V\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)$，$(y,\ t)\in V\times I_b$として，$f_0: V\times I_b\to R^n$を$f_0(y,\ t)=F_t(y,\ 0)$で定義する。

従って，$f_0: (y,\ t)\to F_t(y,\ 0)=F(y,\ 0,\ t)$。$f_0$の微分行列は$dF_y$，$dF_t$をFのy，tによる偏微分行列とすると，

$[dF_y \quad dF_t]$

$dF_t(y,\ 0,\ t)=\theta(F(y,\ 0,\ t))$。

$t=0$では，$F_0=Id$より，$t=0$，$y=0$において，$dF_t(0_{n-1},\ 0,\ 0)=\theta(F(0_{n-1},\ 0,\ 0))=\theta(0_{n-1},\ 0))=(0_{n-1},\ 1)'$。$F(y,\ 0,\ t)$はtを固定すると可逆。$F(y,\ 0,\ 0)=(y,\ 0)$だから，

$dF_y=\begin{bmatrix} Id_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$，　　従って，$[dF_y \quad dF_t]=Id_n$。

よって，f_0は$(0_{n-1},\ 0)$で可逆。$(0_{n-1},\ 0)$の近傍$V_0\times I_a\subsetneqq V\times I_b$が存在し，$f_0$は$V_0\times I_a$から$f_0(V_0\times I_a)$への微分同相である。$y\in V_0$に対し，$f_0(y,\ t)=F(y,\ 0,\ t)$であるから，$(y,\ t)=f_0^{-1}F(y,\ 0,\ t)$。yを固定しtを動かすと，左辺は直線であり，右辺は$(y,\ 0)$を原点とするベクトル場の解曲線の座標変換f_0^{-1}による像である。従って，ベクトル場の解曲線はf_0^{-1}により直線に移る。

　$x\in W\subsetneqq M$の場合。Mの地図$(W,\ \phi)$により，$\phi(x)=0$とできる。$\theta(x)\neq 0$であるから，$d\phi_x\theta(x)=b\neq 0_n$。$R^n$の基底$(a_1,\ \cdots\cdots a_{n-1},\ b)$

を作り，写像Aを$Aa_i=e_i$，$Ab=e_n$で定義する。Aは全単射である。$A\phi$は地図であり，$A\phi(x)=0$。$d(A\phi)_x\theta(x)=(0_{n-1},\ 1)$。$Ad\phi_y\theta(y)=T'(y)$，$\phi(y)=z$とし，$d\phi^{-1}{}_zT'(y)=\theta'(y)$とする。$\theta'$はW上のベクトル場であり，$T'(x)=(0_{n-1},\ 1)$。$\theta'$の局所表現は$T'(\phi^{-1}(z))$であり、$T'(\phi^{-1}(0))=(0_{n-1},\ 1)$。従って，$T'\phi^{-1}$に上の議論を適用すればよい。

《証了》

$\theta\neq 0$であるから（注意11．3．1．12），$x\in M$の近傍U内の解曲線は地図ϕにより，R^nのV内の直線に写る。Vを直線で分類した商集合は命題S5により$n-1$次元多様体である。従って，$[x]\in U/RR$，$x\in U\rightarrow[\phi(x)]$に対し，$f:[x]\rightarrow[\phi(x)]$を考える。$f\pi=P\phi$である。

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "P"] \\
U/RR \arrow[r, "f"] & V/LL = n-1\text{次元多様体}
\end{tikzcd}
$$

補題S8．fは連続全単射である。

《証明》$[x]\neq[y]$，$x,\ y\in U$とする。$\phi(x)\neq\phi(y)$である。もし，$[\phi(x)]=[\phi(y)]$ならば，$\phi(x)$と$\phi(y)$は同一直線上にあり，従って，x，yも同一曲線上にある。これはRRの定義より$[x]=[y]$となり矛盾。従って，fは単射である。任意の$z\in V/LL$に対し，$y\in V$が存在し，$[y]=\pi(y)=z$ $[y]$である。$\phi^{-1}(y)=x$とおくと，$f\pi(x)=f([x])$であり，$P\phi(x)=\pi(y)=[y]=z$であるから，$f([x])=z$である。従って，fは全射である。$f\pi\phi^{-1}=P$であり，πは連続，$\pi\phi^{-1}$は連続開写像であるから，fは連続である。$\pi=f^{-1}P\phi$であり，πは連続，$P\phi$は連続開写像であるから，f^{-1}は連続である。

《証了》

注意S 9：$\pi\phi^{-1}$は連続開写像である。連続性は明かである。WをVの開集合とすると，ϕ^{-1}(W)はUの開集合であり，πは開写像であるから$\pi\phi^{-1}$(W)は開集合である。同様にWをUの開集合とするとϕ(W)はVの開集合であり，Pは開写像であるからP(ϕ(W))はV／LLの開集合である。従って，f^{-1}により，V／LLのC^{∞}構造を移すことにより，U／RRはn－1次元多様体になる。U／RRは自然にM／RRの部分集合とみなせるから，M／RRがU／RRを開部分多様体として持つようなM／RRの多様体構造が存在するためには，定理11．4．4の条件が満たされればよい。しかし，これは明かであろう。よって，M／RRはn－1次元の多様体になる。

＊定理11．4．6 (p. 260)。これもかなりの準備が必要である。

補題S10：Uを多様体Mの開集合とし，Uは境界なしの多様体とする。$x \in U$の周りの地図(V，ϕ)，$V \subseteqq U$，$\phi(x)=0$をとり，$W=\{z \in V \mid \phi_n(z) \geqq 0\}$とすれば，Wは境界付きの多様体である。

《証明》$\phi|W$は$H^n_+=\{x \in R^n \mid x_n \geqq 0\}$への微分同相である。

《証了》

境界付き多様体M上の内向きベクトル場をθとする。$x \in M$を$t=0$で通るθの解曲線$g(t, x)$が定義される。$g(0, x)=x$, $dg/dt=\theta(g(t, x))$である。$x \in \partial M$なら，$g(t, x)$は$t \in [0, a(x))$で定義され，$x \in M^\circ$ なら，$t=0$を含むRの開集合で定義されている。$g_t(x)=g(t, x)$とすると，次の性質が成り立つ。

1．g_0：M→MはIdである。

2．$g_tg_s=g_{t+s}$である。従って，g_t：M→Mは(中への)微分同相である。

θは内向きだから，$x \in \partial M$に対して，$0<b(x) \leqq a(x)$が存在し，$0 \leqq t<b(x)$では$\theta(g(t, x)) \neq 0$である。

$A=\{(t, x) \mid R_+ \times \partial M \mid 0 \leqq t<b(x)\}$とする。

補題S11：$f:M\to N$が微分同相で，$x\in\partial M$で$\theta(x)$が内向き（外向き）ならば$df_x\theta(x)$は，$y=f(x)\in\partial N$で内向き（外向き）である。

《証明》xの地図をϕとし，$d\phi_x(x)=v$，$v\in R^n{}_+$とする。ϕf^{-1}はyの地図だから，$d(\phi f^{-1})_y df_x\theta(x)=w$，$w\in R^n$。左辺は$d\phi_x\theta(x)$だから，$w=v$。従って，$df_x\theta(x)$の内向き（外向き）と$\theta(x)$の内向き（外向き）は一致する。

《証了》

補題S12：$x\in\partial M$とし，内向きベクトル場θの原点xの解曲線を$g(t, x)$とする。$g(t, x)=y$とすると，$d(g_t)_x\theta(x)=\theta(y)$である。

《証明》$g(s, g(-s, y))=y$が$s=t>0$の近傍で恒等的に成立する。従って，$s=t$で微分すると，$g_1(t, x)-g_2(t, x)g_1(-t, y)=0$。$g_1(t, x)=dg/dt(t, x)=\theta(g(t, x))=\theta(y)$，$g_1(-t, y)=dg/dt(-t, y)=\theta(g(-t, y))=\theta(x)$である。$g_2(t, x)=dg_x(t, x)=d(g_t)_x$であるから，$d(g_t)_x\theta(x)=\theta(y)$である。

《証了》

補題S13：Mをコンパクトな境界付き多様体とし，θをM上の内向きベクトル場とする。εを十分小さく取ると，Mのε同相$M\varepsilon=\{g(\varepsilon, x)\mid x\in M\}=g_\varepsilon(M)$の境界において，$\theta$は内向きである。

《証明》∂Mは$\partial M\varepsilon$に写るから，任意の$y\in\partial M\varepsilon$に対し，$x\in\partial M$が存在し，$g(\varepsilon, x)=y$である。補題S12より，$dg_{\varepsilon x}\theta(y)=\theta(y)$である。$g_\varepsilon:M\to M$は微分同相であるから，補題S11より，$\theta(x)$が内向きなら$\theta(y)$も内向きである。

《証了》

補題S14：境界付き多様体M上のベクトル場の解曲線を$g(t, x)$とする。$x\in\partial M$であれば，$g(0, x)=x$である。$g(t, x)\in M^\circ$，$t>0$であり，かつ，$dg_t(0, x)\notin Tx\partial M$ならば，$dg_t(0, x)$は内向きべ

クトルである。

《証明》$x\in\partial M$の地図(U, ϕ)をとると，$\phi_n(x)=0$，$\phi_n(U)\geqq 0$である。$g(t, x)\in M^\circ\cap U$, $t>0$とすると，$\phi_n(g(t, x))>0$。$\phi_n(g(0, x))=0$であるから，$\phi_n(g(t, x))$を$t=0$で微分すると，$d\phi_{nx}dg_t(0, x)\geqq 0$。$d\phi_x dg_t(0, x)$はベクトル$dg_t(0, x)$の座標で，n座標は$d\phi_{nx}dg_t(0, x)$である。これが$=0$ならば，$dg_t(0, x)\in T_x\partial M$となり仮定に反する。よって，$d\phi_{nx}dg_t(0, x)>0$だから，$dg_t(0, x)$は内向きである。

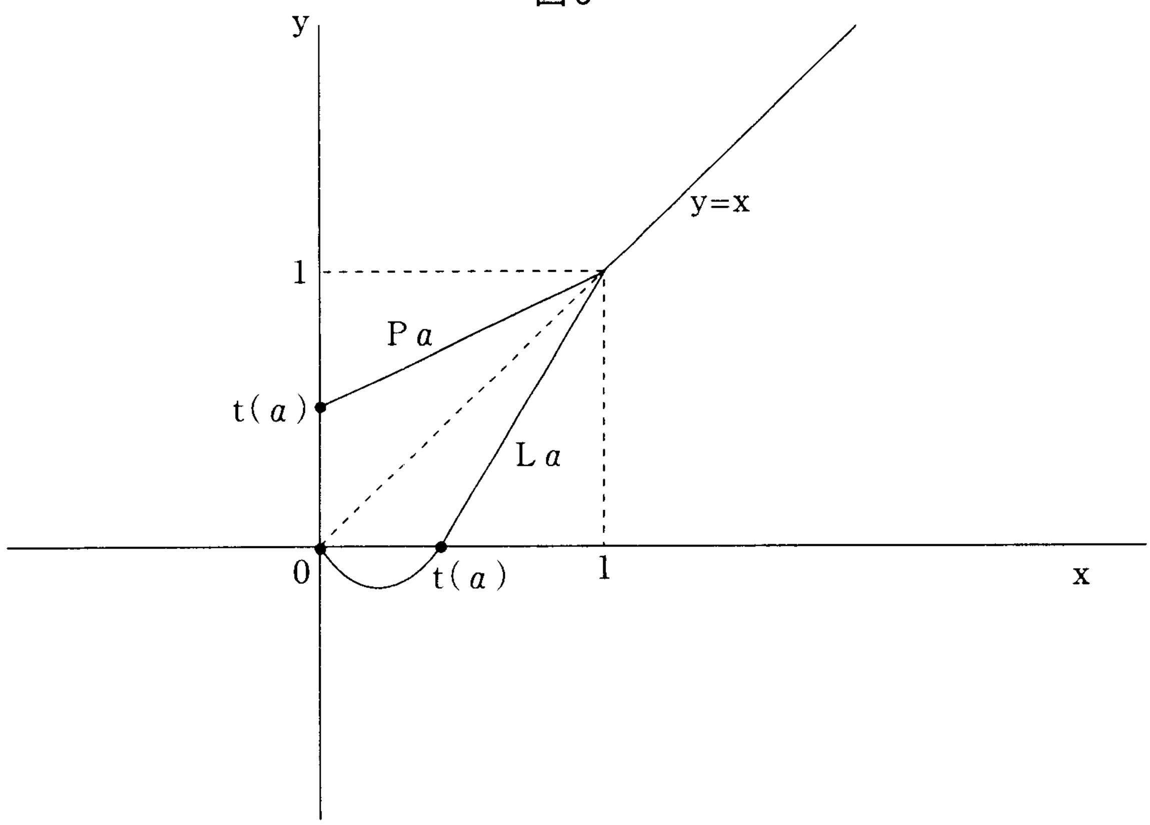
《証了》

$g:\partial M\times I\to M$をカラーとする。$I=[0, 2]$。$\phi$を$[1, 2]$で$=1$，$\phi(0)=0$の$C^\infty$隆起関数とする。$\alpha>1$の正数に対し，関数$L\alpha$を$L\alpha(t)=t(\alpha\phi(t)-1)/(\alpha-1)$で定義する。$2\geqq t\geqq 1$に対し，$\phi(t)=1$から，$L\alpha(t)=t$，$t\in[1, 2]$。$L\alpha(0)=0$，$L\alpha'(0)=-1/(\alpha-1)<0$だから，$L\alpha(t*)=0$となる$0<t*<1$が存在する。$\alpha\phi(t*)=1$であり，$\phi(t)>\phi(t*)$，$t>t*$であるから，このような$t*$は唯一である。$\alpha$に応じて決まる$t*$を$t(\alpha)$と書くと，$t(\alpha)$は$\alpha$の減少関数であり，$t(\alpha)\to 0\ (\alpha\to\infty)$，$t(\alpha)\to 1\ (\alpha\to 1)$であることは明かである。従って，$0<\varepsilon<1$に対し，$\varepsilon=t(\alpha)$となる$\alpha>1$が存在する。$L\alpha$の$y=x$に関する対称関数を$P\alpha$とする。$L\alpha'(t)=(\alpha\phi(t)-1+\alpha t\phi'(t))/(\alpha-1)>0$，$t>t*$であるから，$P\alpha$は$t\geqq 0$において$C^\infty$強増加関数であり，$P\alpha(0)=t(\alpha)$，$P\alpha(t)=t$，$t\geqq 1$である。

補題S15：$0<\varepsilon<1$に対し，$\{g(\varepsilon, x)\mid x\in\partial M\}$はMの部分多様体で，$g(I\times x)$と横断的である。

《証明》$\varepsilon\times\partial M$は境界のない$n-1$次元多様体である。$g:I\times\partial M\to M$は埋め込みであるから，$g(\varepsilon\times\partial M)=\{g(\varepsilon, x)\mid x\in\partial M\}$も$n-1$次元の部分多様体である。$\varepsilon$を固定し$x$が$\partial M$上を動くときの$dg_{(\varepsilon,x)}0\times$

図3



$T_x\partial M$とxを固定しtが動くときの，$dg_{(\varepsilon,x)}(R\times 0)$の和がn次元空間を構成すれば，$g(\varepsilon\times\partial M)$と$g(I\times x)$は横断的である。しかし，gは中への微分同相であるから，$dg_{(\varepsilon,x)}(R\times T_x\partial M)=T_yM$，$y=g(\varepsilon, x)$であり，$R\times T_x\partial M=(0, T_x\partial M)+(R, 0)$であるから，$T_yM=dg_{(\varepsilon,x)}(R\times T_x\partial M)=dg_{(\varepsilon,x)}(0\times T_x\partial M)+dg_{(\varepsilon,x)}(R\times 0)$である。

《証了》

写像$h:M\to M-\{g(t, x)\mid 0\leqq t<t(\alpha), x\in\partial M\}$を次のように定義する。

$M-g(I\times\partial M)$では$h=Id$，$y\in g(I\times\partial M)$では$y=g(t, x)$に対し，$h(y)=g(P\alpha(t), x)$。$t\geqq 1$では$P\alpha(t)=t$だから，$gh(y)=g(t, x)=y$より，hは$C^\infty$である。

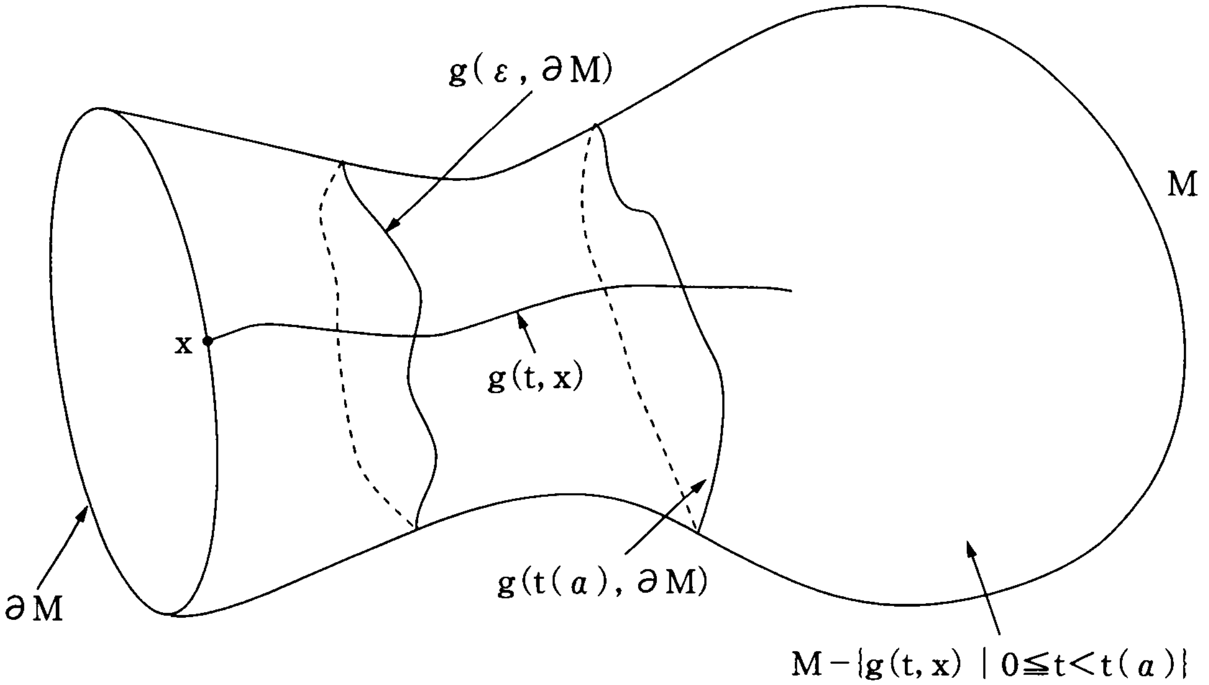
図4

補題S16：hはC^∞同相である。従って，$M-\{g(t, x)\mid 0\leqq t<t(\alpha), x\in\partial M\}$はMと微分同相な境界付き多様体である。境界は$\{g(t$

(α), $x) \mid x \in \partial M\}$であり，$dg_t(t(\alpha),\ x)$は内向きベクトルである。

《証明》hが単射であることを示す。$M - g(I \times \partial M)$ではIdであるから明かである。$y,\ z \in g(I \times \partial M)$, $y = g(t,\ x)$, $z = g(t',\ x')$と

図4



する。$h(y) = g(P\alpha(t),\ x)$, $h(z) = g(P\alpha(t'),\ x')$。$x \neq x'$なら，$h(y) \neq h(z)$は明かである（$g(t,\ x)$は境界で内向きなあるベクトル場のxを通る解曲線であるから）。$x = x'$で，$h(y) = h(z)$なら，$P\alpha$は増加関数だから，$t = t'$となり，$y = z$。従って，$g(I \times \partial M)$では単射である。もし，$y \in M - g(I \times \partial M)$と$z \in g(I \times \partial M)$で，$h(y) = h(z)$ならば，$y = h(z) = g(P\alpha(t'), x') \in g(I \times \partial M)$となり矛盾。従って，hは単射である。

hは単射であるから，局所可逆であれば微分同相になることが分かる。$M - g(I \times \partial M)$では可逆は明かである。$y \in g(I \times \partial M)$, $y = g$

(t, x)とする。$h(y) = h(g(t, x)) = g(P\alpha(t), x)$である。$f$：$(t, x) \to (P\alpha'(t), x)$とすると，$df_{(t,x)}$の行列は

$$\begin{bmatrix} P\alpha' & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$ となり，$P\alpha' > 0$だから，fは局所可逆である。

gは可逆だから結局hも局所可逆であることが分かる。$M - \{g(t, x) \mid 0 \leqq t < t(\alpha), x \in \partial M\} = B$の境界は$\partial B = \{g(t(\alpha), x) \mid x \in \partial M\}$であることは明かである。

xを固定し，tが$t(\alpha)$から増加すると，$g(t, x) \in B^\circ$である。補題S15より，$dg_{(t(\alpha),x)}(R \times 0) + dg_{(t(\alpha),x)}(0 \times T_x\partial M) = T_yB$，$y = g(t(\alpha), x)$。$dg_t(t(\alpha), x)R = dg_{(t(\alpha),x)}(R \times 0)$である。$g(t(\alpha), \partial M) = \partial B$であり，$dg_{(t(\alpha),x)}(0 \times T_x\partial M) = d(g_{t(\alpha)})_x T_x\partial M = T_y\partial B$。もし，$dg_t(t(\alpha), x) \in T_y\partial B$なら，$T_y\partial B = dg_t(t(\alpha), x)R = dg_{(t(\alpha),x)}(R \times 0)$となり，$dg_{(t(\alpha),x)}(R \times 0) + dg_{(t(\alpha),x)}(0 \times T_x\partial M) = T_y\partial B + T_y\partial B = T_yB$となり矛盾。従って，$dg_t(t(\alpha), x) \notin T_y\partial B$であり，補題S14より$dg_t(t(\alpha), x)$は$y \in \partial B$において内向きである。

《証了》

定理S17：Xを角付き多様体とする。境界付き多様体$L \subseteqq X$で$X*$と微分同相なものが存在する。しかも，∂LはX^1にいくらでも近付けることができる。

《証明》$\psi(N) \supseteqq M/RR \times [0, 2]$と仮定して差し支えない。包含写像$Id : M/RR \times [0, 2] \to \psi(N)$は埋め込みであり，補題S16より，$L' = \psi(N) - M/RR \times [0, \varepsilon)$は$\psi(N)$と微分同相である。従って，$\psi^{-1}(L')$と$\psi^{-1}(\psi(N)) = N$は微分同相である。これから，集合$L = X - \psi^{-1}(M/RR \times [0, \varepsilon))$が$X*$と微分同相な境界付き多様体であり，$\partial L = \psi^{-1}(M/RR \times \varepsilon)$であることは明かである。$\varepsilon \to 0$にすることにより，$\partial L$は$X^1$にいくらでも近付けることができる。

《証了》

参考文献

[1] J.Geanakoplos and Shaffer, W, “Solving Systems of Simultaneous Equations in Economics”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 19, 1990, pp. 69-93

[2] W.Hildenbrand and Kirman, A.P., *Equilibrium Analysis*, North-Holland, 1988

[3] H.Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, 1968