千葉大学　経済研究　第17巻第4号（2003年3月）

論　説

凸距離空間における Berge の最大値定理の逆問題

青　山　耕　治

1　はじめに

次の定理は Berge の最大値定理と呼ばれ, 経済均衡分析においてしばしば利用される[1)].

定理 1.1 (Berge). X, Y を位相空間とする. X から Y への多価写像 $F : X \multimap Y$ はコンパクト値かつ連続とし, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ を連続な関数とする. このとき, $\hat{f}(x) = \max\{f(x,y) : y \in F(x)\}$ で定義される関数 $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ は連続で, さらに, $\Gamma(x) = \{y \in F(x) : f(x,y) = \hat{f}(x)\}$ で定義される多価写像 $\Gamma : X \multimap Y$ はコンパクト値かつ上半連続である.

Komiya は, この定理の逆問題の考察を行い, 次のような結果を得ている[2)].

定理 1.2 (Komiya). X を $\mathbb{R}^l$ の部分集合とする. また, $K : X \multimap \mathbb{R}^m$ を非空値, コンパクト値, 凸値かつ上半連続な多価写像とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して,

(i) $K(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : v(x,y) = \max_{z \in \mathbb{R}^m} v(x,z)\}$;

---

1) C. Berge (1997), G. Debreu (1959)
2) H. Komiya (1997), Theorem2.1

(ii) $v(x,\cdot)$ は準凹関数

を満たす連続な関数 $v : X \times \mathbb{R}^m \to [0,1]$ が存在する．

Komiya と Park の最近の研究により，この結果の無限次元空間へ拡張が行われている[3]．これらの成果を踏まえ，本論文では，ある性質を持った凸距離空間で Komiya の考察した逆問題を肯定的に解くことができることを示す．

2 準備

以下，特に断らない限り X, Y は距離空間を表すものとする．$x \in X$ を中心とする半径 r の開球を $B(x,r)$ で表す．また，C を X の部分集合，r を正の実数とするとき，X の部分集合 C^r, $C^{\overline{r}}$ を，それぞれ，$C^r = \{x \in X : d(x,C) < r\}$, $C^{\overline{r}} = \{x \in X : d(x,C) \leq r\}$ と定義する．ノルム空間では，$\overline{C^r} = C^{\overline{r}}$ が成り立つが，一般の距離空間では，$\overline{C^r} \subset C^{\overline{r}}$ である．

X から 2^Y への写像 F を X から Y への多価写像と呼び，$F : X \multimap Y$ で表す．本論文で取り扱う多価写像はすべて非空値かつコンパクト値とする．つまり，各 $x \in X$ に対して，$F(x)$ は，$F(x) \neq \emptyset$ なるコンパクト集合とする．また，多価写像 $F : X \multimap Y$ のグラフを $\mathrm{Gr}(F)$ で表す．つまり，$\mathrm{Gr}(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ である．

F を X から Y への多価写像とし，t を正の実数とするとき，多価写像 $F^t : X \multimap Y$ と多価写像 $F^{\overline{t}} : X \multimap Y$ を，それぞれ次のように定義する．各 $x \in X$ に対して，

$$F^t(x) = \{y \in Y : d(y, F(x)) < t\},$$
$$F^{\overline{t}}(x) = \{y \in Y : d(y, F(x)) \leq t\}.$$

---

3) S. Park and H. Komiya (2001)

$F(x) \cap G = \emptyset$ なる開集合 G に対して, x の近傍 U_x が存在し,

$$x' \in U_x \Rightarrow F(x') \cap G \neq \emptyset$$

が成り立つとき, 多価写像 $F : X \multimap Y$ は x で下半連続であるという。また, $F(x) \subset G$ なる開集合 G に対して, x の近傍 U_x が存在し,

$$x' \in U_x \Rightarrow F(x') \subset G$$

が成り立つとき, 多価写像 $F : X \multimap Y$ は x で上半連続であるという。多価写像 F が, すべての $x \in X$ で下半連続であるとき, F は X で下半連続であるといい, すべての $x \in X$ で上半連続であるとき, F は X で上半連続であるという. さらに, F が X で下半連続かつ下半連続であるとき, F は X で連続であるという.

次に, Takahashi によって導入された凸距離空間の定義といくつかの性質を記す[4]. 距離空間 (Y, d) に対して, 写像 $W : Y \times Y \times [0,1] \to Y$ が存在し, 任意の $(x, y, \lambda) \in Y \times Y \times [0,1]$ と任意の $z \in Y$ に対して,

$$d(z, W(x,y,\lambda)) \leq \lambda d(z,x) + (1-\lambda) d(z,y)$$

を満たすとき, Y は凸構造 (convex structure) を持つという. 凸構造を持つ距離空間を凸距離空間 (convex metric space) といい (Y, d, W) で表す. また, K を凸距離空間 (Y, d, W) の部分集合とするとき, 任意の x, $y \in K$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して, $W(x,y,\lambda) \in K$ が成り立つとき, K は凸であるという. 凸距離空間の凸集合について, 次のことが成り立つ[5].

補助定理 2.1. $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を凸距離空間 (Y, d, W) の凸集合列とする. このとき, $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ は凸集合である.

---

4) W. Takahashi (1970)
5) W. Takahashi (1970), Proposition 1

距離空間 X から凸距離空間 Y への多価写像 $F : X \multimap Y$ に対して，次の条件を満たす X から Y への多価写像の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するとき，F は性質 (σ) を持つと定義する．

(i) 各 $A_n : X \multimap Y$ は非空値，凸値，コンパクト値，かつ連続である；
(ii) 任意の $x \in X$ と $n > n'$ に対して，$F(x) \subset A_n(x) \subset A_{n'}(x)$;
(iii) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(x)$.

X がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合，Y がユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ のとき，多価写像 $F : X \multimap Y$ が上半連続で，非空値，コンパクト値かつ凸値ならば，F が性質 (σ) を持つことが知られている[6]．

K を凸距離空間 (Y, d, W) の凸部分集合とし，f を K から $\mathbb{R}$ への関数とする．任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，$\{y \in K : f(y) \geq s\}$ が Y の凸集合になるとき，f は準凹 (quasi-concave) であると定義する．また，$\{y \in K : f(y) \leq s\}$ が Y の凸集合になるとき，f は準凸 (quasi-convex) であると定義する．

(Y, d, W) を凸距離空間とするとき，任意の x, y, x', $y' \in Y$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して，

$$d(W(x, y, \lambda), W(x', y', \lambda)) \leq \lambda d(x, x') + (1 - \lambda)d(y, y')$$

が成り立つとき，凸距離空間 (Y, d, W) は性質 (K) を持つと定義する．性質 (K) を持つ凸距離空間に関する命題は，次節で示す．

本節の最後に，もう一つ補助定理を記す．この命題は，J. L. Kelly (1955), Lemma 4.2, Lemma 4.3 を組み合わせることによって得られる．

補助定理 2.2. X を位相空間，D を正の実数の稠密な部分集合とする．$t \in D$ に対して，X の開集合 F_t が次の条件を満たすとする．

6) H. Komiya (1997), Lemma 2.1

(i) $t, s \in D, t < s$ のとき, $\overline{F_t} \subset F_s$;

(ii) $\bigcup_{t \in D} F_t = X$.

このとき, $f(x) = \inf\{t : x \in F_t\}$ で定義される実数値関数 f は連続で, さらに, 任意の非負実数 s に対して,

$$\{x \in X : f(x) \leq s\} = \bigcap_{\substack{t \in D \\ t > s}} F_t.$$

3　主要な結果

定理を述べる前に, いくつかの補助定理とその証明を記す. 次の補助定理は, H. Komiya (1997), Lemma 2.2 を距離空間へ拡張した命題である.

補助定理 3.1. X, (Y, d) を距離空間, $A : X \multimap Y$ を非空値, コンパクト値, 下半連続な多価写像とする. このとき, 任意の $x \in X$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $x' \in B(x, \delta)$ ならば $A(x) \subset A^{\epsilon}(x')$.

証明. $x \in X$, $\epsilon > 0$ とする. A は下半連続だから, $y \in A(x)$ に対して, $\delta(y) > 0$ が存在して, 任意の $x' \in B(x, \delta(y))$ に対して,

$$A(x') \cap B(y, \epsilon/2) \neq \emptyset$$

が成り立つ. ここで, $A(x) \subset \bigcup_{y \in A(x)} B(y, \epsilon/2)$ であり, $A(x)$ はコンパクトであるから, 有限集合 $\{y_i\} \subset A(x)$ が存在して, $A(x) \subset \bigcup_i B(y_i, \epsilon/2)$ とできる.

次に, $\delta = \min_i \delta(y_i)$ とおき,

$$A(x) \subset A^{\epsilon}(x') \quad (\forall x' \in B(x, \delta))$$

を示そう. $x' \in B(x, \delta)$, $y' \in A(x)$ とする. $A(x) \subset \bigcup_i B(y_i, \epsilon/2)$ より, ある y_i が存在して, $y' \in B(y_i, \epsilon/2)$. また, $x' \in B(x, \delta) \subset B(x, \delta(y_i))$

だから, $A(x') \cap B(y_i, \epsilon/2) \neq \emptyset$. $z \in A(x') \cap B(y_i, \epsilon/2)$ をとると,

$$d(y', z) \leq d(y', y_i) + d(y_i, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ここで, $d(y', A(x')) = \inf_{w \in A(x')} d(y', w) \leq d(y', z) < \epsilon$ である. したがって, $y' \in A^\epsilon(x')$. ゆえに, $A(x) \subset A^\epsilon(x')$ が示せた. □

この補助定理を用いると, H. Komiya (1997), Lemma 2.3 を距離空間へ拡張した次の補助定理が得られる.

補助定理 3.2. $A : X \multimap Y$ を非空値, コンパクト値, 下半連続な多価写像とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 多価写像 $A^\epsilon : X \multimap Y$ のグラフは $X \times Y$ の開集合である.

証明. $(x, y) \in \mathrm{Gr}(A^\epsilon)$, つまり, $x \in X$, $y \in A^\epsilon(x)$ とする. $\epsilon' = \frac{1}{3}(\epsilon - d(y, A(x)))$ とおくと, 補助定理 3.1 により, この $\epsilon' > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して,

$$A(x) \subset A^{\epsilon'}(x') \quad (\forall x' \in B(x, \delta))$$

が成り立つ.

次に, $B(x, \delta) \times B(y, \epsilon') \subset \mathrm{Gr}(A^\epsilon)$ であることを示す. $(x', y') \in B(x, \delta) \times B(y, \epsilon')$ とすると,

$$y' \in B(y, \epsilon') \subset A^{\epsilon - \epsilon'}(x) \subset A^\epsilon(x')$$

であるから, $(x', y') \in \mathrm{Gr}(A^\epsilon)$ が示せる. ゆえに, $\mathrm{Gr}(A^\epsilon)$ は開集合である. □

さらに, 凸距離空間における命題を記す.

補助定理 3.3. C を凸距離空間 (X, d, W) の空でない部分集合とする. このとき, 任意の $r > 0$ に対して, $C^{\overline{r}} = \overline{C^r}$ が成り立つ.

証明. まず, $\overline{C^r} \subset \overline{C^r}$ であることを示す. $x \in C^{\overline{r}}$ とする. $d(x, C) < r$ のときは, 明らかに $x \in \overline{C^r}$ であるから, $d(x, C) = r$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$d(x, a_n) < r + \frac{r}{n} = \frac{r(n+1)}{n}$$

を満たす $a_n \in C$ が存在する. ここで, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = W\left(a_n, x, \frac{1}{n+1}\right)$$

で定義する. すると,

$$\begin{aligned} d(C, x_n) \leq d(a_n, x_n) &\leq \frac{1}{n+1} d(a_n, a_n) + \frac{n}{n+1} d(a_n, x) \\ &= \frac{n}{n+1} d(a_n, x) < r. \end{aligned}$$

よって, $x_n \in C^r$ である. また,

$$\begin{aligned} d(x, x_n) &\leq \frac{1}{n+1} d(x, a_n) + \frac{n}{n+1} d(x, x) \\ &= \frac{1}{n+1} d(x, a_n) < \frac{r}{n} \end{aligned}$$

より, $n \to \infty$ のとき, $x_n \to x$ である. したがって, $x \in \overline{C^r}$ が示せた.

また, $C^{\overline{r}} \supset \overline{C^r}$ は明らかであるから, 結局, $C^{\overline{r}} = \overline{C^r}$ が成り立つ. □

補助定理 3.4. X, (Y, d) を距離空間とし, $A : X \multimap Y$ を非空値, コンパクト値, 上半連続な多価写像とする. このとき, 任意の $t > 0$ に対して, 多価写像 $A^{\bar{t}} : X \multimap Y$ のグラフは閉である.

証明. $x \in X$ とし, $\{x_n\}$ を x に収束する X の点列とする. また, $\{y_n\}$ を, 各 n に対して, $y_n \in A^{\bar{t}}(x_n)$ であり, $y_n \to y$ となる Y の点列とする. このとき, $y \in A^{\bar{t}}(x)$ であること, つまり, $d(A(x), y) \leq t$ であることを示せばよい.

$y_n \in A^{\bar{t}}(x_n)$ であり, $A(x_n)$ はコンパクトであるから, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $z_n \in A(x_n)$ であり,

$$d(z_n, y_n) = d(A(x_n), y_n) \leq t$$

を満たす点列 $\{z_n\}$ が存在する. さらに, $A(x)$ はコンパクトであるから, $\{z_n\}$ に対し, $w_n \in A(x)$ であり, $d(w_n, z_n) = d(A(x), z_n)$ を満たす点列 $\{w_n\}$ が存在する. $\{w_n\}$ は, コンパクト集合 $A(x)$ 内の点列であるから, $w_{n'} \to w \in A(x)$ となる部分列 $\{w_{n'}\}$ が存在する.

ここで, $\{w_{n'}\}$ に対応する $\{z_n\}$ の部分列 $\{z_{n'}\}$ と $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n'}\}$ を考えると,

$$\begin{aligned} d(A(x), y) \leq d(w, y) &\leq d(w, z_{n'}) + d(z_{n'}, y_{n'}) + d(y_{n'}, y) \\ &= d(w, z_{n'}) + d(A(x_{n'}), y_{n'}) + d(y_{n'}, y) \\ &\leq d(w, z_{n'}) + t + d(y_{n'}, y). \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき, $y_{n'} \to y$ であり, A は上半連続であるから, $z_{n'} \to w$ である. よって, $d(A(x), y) \leq t$. したがって, $y \in A^{\bar{t}}(x)$ が示せた. □

凸距離空間に性質 (K) を仮定することによって, 次の命題を示すことができる.

補助定理 3.5. (Y, d, W) を性質 (K) を満たす凸距離空間とし, C を Y の空でない凸集合とする. このとき, 各正の実数 r について C^r は凸集合である.

証明. $x, y \in C^r$ とし, $\lambda \in [0, 1]$ とする. このとき, x に対し, $d(x_0, x) < r$ を満たす $x_0 \in C$ が存在する. y についても同様に, $d(y_0, y) < r$ を満たす $y_0 \in C$ が存在する. 性質 (K) を満たすことから,

$$\begin{aligned} d(W(x, y, \lambda), W(x_0, y_0, \lambda)) &\leq \lambda d(x, x_0) + (1 - \lambda) d(y, y_0) \\ &< \lambda r + (1 - \lambda) r = r \end{aligned}$$

ここで, C は凸であるから, $W(x_0, y_0, \lambda) \in C$ であるので,

$$d(W(x,y,\lambda), C) \leq d(W(x,y,\lambda), W(x_0,y_0,\lambda)) < r.$$

したがって, $W(x,y,\lambda) \in C^r$ となり, C^r が凸であることが示せた. □

以上の補助定理を使って, 本論文の主要な結果である次の定理が得られる. この定理は, H. Komiya (1997), Theorem 2.1 を凸距離空間へ拡張したものであり, ある凸距離空間において, Berge の最大値定理の逆問題が肯定的に解けることを示すものである。

定理 3.6. X を距離空間, (Y, d, W) を性質 (K) を持つ凸距離空間とする. また, $\Gamma : X \multimap Y$ は非空値な多価写像で性質 (σ) を持つとする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して,

(i) $\Gamma(x) = \{y \in Y : f(x,y) = \max_{z \in Y} f(x,z)\}$;
(ii) $f(x, \cdot)$ は準凹関数である

を満たす連続関数 $f : X \times Y \to [0,1]$ が存在する.

証明. $D = \left\{ \dfrac{n}{2^{n'}} : n,\, n' \in \mathbb{N} \right\}$ とする. このとき, D は正の実数の稠密部分集合である. ここで, $t \in D \cap (0,1)$ について 2 進数展開, つまり,

$$t = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{2^i} \quad (t_i = 0 \text{ または } t_i = 1)$$

を考え, $\ell : D \cap (0,1) \to \mathbb{N}$ を次式で定義する.

$$\ell(t) = \min\{i : t_i = 1\}.$$

Γ は性質 (σ) を満たすことから, 性質 (σ) の条件を満たす連続な多価写像列 $\{A_n\}$ が存在する. これを使って, 各 $t \in D$ に対して, 多価写像 $G_t : X \multimap Y$ を次のように定義する.

$$G_t(x) = \begin{cases} A^t_{\ell(t)}(x) = \{y \in Y : d(A_{\ell(t)}(x), y) < t\} & (0 < t < 1) \\ Y & (t \geq 1) \end{cases}.$$

すると, 任意の $x \in X$, $s, t \in D$ に対して, $s < t$ のとき,

$$\overline{G_s(x)} \subset G_t(x)$$

が成り立つ.

次に, 各 $x \in X$ に対して, $\overline{G_t}(x) = \overline{G_t(x)}$ によって, 多価写像 $\overline{G_t} : X \multimap Y$ を定義する. 補助定理 3.3 と補助定理 3.4 により, 各 $t \in D$ に対し, そのグラフ $\mathrm{Gr}(\overline{G_t})$ は $X \times Y$ の閉集合である. つまり, 任意の $t \in D$ に対して, $\mathrm{Gr}(\overline{G_t}) = \overline{\mathrm{Gr}(\overline{G_t})}$ となり, このことから, 任意の $s, t \in D$ に対して, $s < t$ のとき,

$$\overline{\mathrm{Gr}(G_s)} \subset \mathrm{Gr}(G_t)$$

が成り立つ. 実際,

$$\overline{\mathrm{Gr}(G_s)} \subset \overline{\mathrm{Gr}(\overline{G_s})} = \mathrm{Gr}(\overline{G_s}) \subset \mathrm{Gr}(G_t).$$

一方, 補助定理 3.2 により, 各 $t \in D$ に対し, $\mathrm{Gr}(G_t)$ は $X \times Y$ の開集合である. また, $\bigcup_{t \in D} \mathrm{Gr}(G_t) = X \times Y$. ここで, 補助定理 2.2 を適用すると,

$$g(x, y) = \inf\{t : (x, y) \in \mathrm{Gr}(G_t)\}$$

によって定義される関数 $g : X \times Y \to [0, 1]$ は連続であり, 各非負実数 s に対して,

$$\bigcap_{\substack{t \in D \\ t > s}} \mathrm{Gr}(G_t) = \{(x, y) \in X \times Y : g(x, y) \leq s\},$$

つまり, 任意の $x \in X$ と $s \geq 0$ に対して,

$$\bigcap_{\substack{t \in D \\ t > s}} G_t(x) = \{y \in Y : g(x, y) \leq s\}$$

が成り立つ. 補助定理 2.1 と補助定理 3.5 により, 上式の左辺は凸距離空間 Y の凸集合である. したがって, g は第 2 変数に関して準凸である.

さらに, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\Gamma(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(x) = \bigcap_{t \in D} G_t(x)$$
$$= \{y \in Y : g(x,y) = 0\} = \{y \in Y : g(x,y) = \min_{z \in Y} g(x,z)\}$$

が成り立ち, $f = -g + 1$ とすれば, f が求める関数であることが示せた.

□

4 付記

前節の定理の証明の中で多価写像 $\overline{G_t} : X \multimap Y$ を構成した. もし, この $\overline{G_t}$ が上半連続な多価写像であれば, 補助定理 3.4 を利用することなく, 直ちに $\mathrm{Gr}(\overline{G_t})$ が閉であることが得られる. しかし, この $\overline{G_t}$ は, 必ずしも上半連続にならないことが, 以下の例によってわかる.

例 4.1. X は 0 を内点に持つノルム空間 ℓ^∞ の部分集合であるとする. また, 多価写像 $A : X \multimap \ell^\infty$ を非空値, コンパクト値で連続とし, 原点の近傍では, $A(x) = x$, つまり, 1 価写像とする. さらに, $t > 0$ に対して, 多価写像 $\overline{G_t} : X \multimap \ell^\infty$ を $\overline{G_t}(x) = \overline{A^t(x)}$ として定義する. このとき, $\overline{G_t}$ は $0 \in X$ で上半連続ではない.

証明. 簡単のため $t = 1$ のときを考える. 各 $x \in X$ に対して, $A(x)$ はノルム空間のコンパクト集合であるから, 各 $x \in X$ に対して,

$$\overline{G_1}(x) = \overline{A(x) + B(0,1)} = \overline{A(x)} + \overline{B(0,1)} = A(x) + \overline{B}$$

と表すことができる. ただし, $\overline{B} = \{y \in \ell^\infty : \|y\| \leq 1\}$ である.

ここで, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n = (0, \ldots, 0, \overset{n}{\breve{1 + \frac{1}{n}}}, 0, \ldots)$, $y_n = (0, \ldots, 0, \overset{n}{\breve{1}}, 0, \ldots)$ として点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を定義する. すると, $i \neq j$

のとき, $\|x_i - x_j\| = 1 + \max\{\frac{1}{i}, \frac{1}{j}\} > 1$ であるから, $F = \{x_1, x_2, \ldots\}$ とすれば, F は閉集合である.

また, $\overline{G_1}(0) = A(0) + \overline{B} = \{0\} + \overline{B} = \overline{B}$ であり, 各 n に対して, $\|x_n\| > 1$ であることより, $x_n \notin \overline{B} = \overline{G_1}(0)$ である. したがって, $F \cap \overline{G_1}(0) = \emptyset$. よって, F の補集合 F^c は $\overline{G_1}(0) \subset F^c$ となる開集合である.

ここで, $\overline{G_1}$ が $0 \in X$ で上半連続であると仮定すると, この F^c に対して, $r > 0$ が存在し, $x' \in B(0, r)$ ならば $\overline{G_1}(x') \subset F^c$. いま, $0 < \frac{1}{n} < r$ となる正の整数 n をとる. $\frac{1}{n} y_n \in B(0, r)$ であるから,

$$\overline{G_1}\left(\frac{1}{n} y_n\right) = A\left(\frac{1}{n} y_n\right) + \overline{B} = \left\{\frac{1}{n} y_n\right\} + \overline{B} \subset F^c.$$

$y_n \in \overline{B}$ であるから, $\frac{1}{n} y_n + y_n = (1 + \frac{1}{n}) y_n \in F^c$.

一方, $(1 + \frac{1}{n}) y_n = x_n \in F$ であり, 矛盾である. したがって, 多価写像 $\overline{G_1} : X \multimap \ell^\infty$ は上半連続ではない. □

参考文献

C. Berge (1997) *Topological Spaces*, Mineola, New York, Dover Publications.

G. Debreu (1959) *Theory of value*, New Haven, London, Yale University Press.

J. L. Kelly (1955) *General Topology*, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer-Verlag.

H. Komiya (1997) "Inverse of the Berge maximum theorem," *Econ. Th.* 9, 371–375.

S. Park and H. Komiya (2001) "Another Inverse of the Berge maximum theorem," *J. Nonlinear and Convex Anal.* 2, 105–109.

W. Takahashi (1970) "A Convexity in metric space and nonexpansive mappings, I," *Kōdai Math. Sem. Rep.* 22, 142–149.

丸山徹 (1985)『均衡分析の数理』日本経済新聞社。

丸山徹 (1995)『数理経済学の方法』創文社。

(2002 年 12 月 4 日受理)