1次分数変換群の有限部分群

Finite Subgroups of Lineear Fractional Transformations

鵜　澤　正　勝

Masakatsu UZAWA

3次の特殊直交群 $SO(3)$ の有限部分群の分類は良く知られている [1, 2, 3, 4]．1次分数変換群の有限部分群を分類すると同様の結果が得られるが、このことを複素関数論の立場からきちんと証明してある邦書は見あたらないので以下に紹介します [5].

1．1次分数変換群 $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3(\xi,\eta,\zeta)$ の中の平面 $\zeta=0$ 上の点 $(\xi,\eta,0)$ と複素平面 $\mathbf{C}$ 上の点 $z=\xi+i\eta$ を同一視する．原点 O を中心とする半径1の $\mathbf{R}^3$ の中の球面 $\Sigma=\{(\xi,\eta,\zeta)\mid \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\}$ 上の北極点を N=(0,0,1), 南極点を S=(0,0,−1) とする．N から複素平面 $\mathbf{C}$ への立体射影 $\pi:\Sigma-\{N\}\to\mathbf{C}$, $\pi(\xi,\eta,\zeta)=z=x+iy$ を

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta};\quad \xi=\frac{2x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{2y}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \tag{1}$$

で定める．π は同相写像である．複素平面 $\mathbf{C}$ に無限遠点 $\{\infty\}$ を付け加えた集合 $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ をコンパクト化し $\hat{\mathbf{C}}$ を拡張された複素平面と言う．上の写像 π を $\pi(\mathrm{N})=\infty$ と定める．すると $\pi:\Sigma\to\hat{\mathbf{C}}$ は同相写像となるから，以下 Σ と $\hat{\mathbf{C}}$ をしばしば同一視して共にリーマン球面と言うことがある．$\hat{\mathbf{C}}$ には自然に複素構造が入るから $\hat{\mathbf{C}}$ も Σ もコンパクトリーマン面と見なす事にする．すると $\pi:\Sigma\to\hat{\mathbf{C}}$ は等角写像である．2点 $z_1,z_2\in\hat{\mathbf{C}}$ に対して $\pi^{-1}(z_1)$, $\pi^{-1}(z_2)$ が球面 $\sum$ の直径の両端となるとき z_1,z_2 を**対心点**と言う．2点 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ が対心点となるための条件は $z_1\overline{z_2}=-1$ となることである．2点 $0,\infty$ も対心点であるから $\hat{\mathbf{C}}$ 上の2点 z_1,z_2 が対心点となるための必要十分条件は

$$z_2=-\frac{1}{\overline{z_1}} \tag{2}$$

となることである．写像 $z_1\to-1/\overline{z_1}$ は $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への反正則写像である．

我々が問題とする1次分数変換とは $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への写像で

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\hat{\mathbf{C}},\quad ad-bc\neq 0 \tag{3}$$

と表せるものである．このような写像の全体を $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ で表す．$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ は写像の合成を積と見て群をなす．上の写像 (3) はコンパクトリーマン面 $\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への双正則写像であるが，$\hat{\mathbf{C}}$ から $\hat{\mathbf{C}}$ への双正則写像は1次分数変換に限るから $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ は $\hat{\mathbf{C}}$ の自己同型群とも言われる．$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ の単位元は恒等写像 id である．変換 (3) に対して，a,b,c,d を $\sqrt{ad-bc}$ で割ったものをそれぞれ a',b',c',d' とすれば変換としては

$$f(z)=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

である．この右辺を (3) の右辺を正規化した変換と言う．

一般の１次分数変換は正規化して考えた方が分かりやすいので，以下特に断らない限り**１次分数変換**とは

$$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbf{C},\quad ad-bc=1 \tag{4}$$

の形のものを指すものとし，(3) の形のものを一般の１次分数変換と言うことにする． 変換 (4) に対して $\chi=a+d$ を T のトレースと言う．一般の１次分数変換 (3) に対して $f(\alpha)=\alpha$ となる点 α を f の固定点という． このとき f を正規化した変換 T に対しても $T(\alpha)=\alpha$ となる． よって f と T の固定点は全く同じものである．変換 (4) の T に対して $T\neq id$ なら T の異なる固定点の数は１又は２である． トレースと固定点の数及び位置の間には次のような関係がある．但し $T\neq id$ とする．以下の表 1，2，3 に付いては例えば [6]，[7]，[8] を参照．

c	χ	異なる固定点の数	固定点の位置
$c\neq 0$	$\chi^2\neq 4$	2	$\dfrac{a-d+\sqrt{\chi^2-4}}{2c},\ \dfrac{a-d-\sqrt{\chi^2-4}}{2c}$
	$\chi^2=4$	1	$\dfrac{a-d}{2c}$
$c=0$	$\chi^2\neq 4$	2	$\dfrac{b}{d-a},\ \infty$
	$\chi^2=4$	1	∞

表　1．　１次分数変換のトレースと固定点

１次分数変換 $T\neq id$ は T の固定点を使って次のように変形することが出来る．これを T の**標準形**と言う．

c	χ^2	標準形	固定点	K
$\neq 0$	$\neq 4$	$\dfrac{w-\xi_1}{w-\xi_2}=K\dfrac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$	$\xi_1=\dfrac{a-d+\sqrt{\chi^2-4}}{2c}$ $\xi_2=\dfrac{a-d-\sqrt{\chi^2-4}}{2c}$	$\dfrac{a-c\xi_1}{a-c\xi_2}$
	4	$\dfrac{1}{w-\xi}=\dfrac{1}{z-\xi}+\dfrac{2c}{a+d}$	$\xi=\dfrac{a-d}{2c}$	1
0	$\neq 4$	$w-\xi=K(z-\xi)$	$\xi=\dfrac{b}{d-a},\ \infty$	$\dfrac{a}{d}$
	4	$w=z+\dfrac{b}{d}$	∞	1

表　2．　　　１次分数変換の標準形と乗法因子

$\chi^2=4$ のとき T を放物型と言う．
$K=e^{i\theta}$ ($\theta \neq 2n\pi$) と表されるとき T を**楕円型**と言う．
$K=A$ ($A>0$, $A\neq 1$) と表されるとき T を双曲型と言う．
$K=Ae^{i\theta}$ ($A>0$, $A\neq 1$, $\theta \neq 2n\pi$) と表されるとき T を斜航型と言う．
K を T の乗法因子と言う．放物型変換の乗法因子を $K=1$ と定めることがある．K と χ の間には次の関係がある．

$$K+\frac{1}{K}=\chi^2-2$$

それ故 K と $1/K$ の組を T の乗法因子と言うこともある．トレースを使って1次分数変換 ($\neq id$) を分類すれば次のようになる．

名称	乗法因子 K	固定点点の数	判定条件
楕円型	$e^{i\theta}, (\theta \neq 2n\pi)$	2	$\chi \in \mathbf{R},\ \lvert\chi\rvert < 2$
双曲型	$A, (A>0,\ A\neq 1)$	2	$\chi \in \mathbf{R},\ \lvert\chi\rvert > 2$
斜航型	$Ae^{i\theta}, (A>0, A\neq 1,\ \theta\neq 2n\pi)$	2	$\chi \notin \mathbf{R}$
放物型	1	1	$\chi=\pm 2$

表 3．　1次分数変換のトレースによる分類

1次分数変換 $T\neq id$ に対して $T^n=id$ となる自然数 $n(\geq 2)$ があるとき，T は周期有限な変換と言い，このような自然数の中の最小の数を T の周期と言う．上のような自然数 n が存在しないとき T の周期は無限大であると言う．表2から分かるように T が周期有限ならば T は楕円型である．T の周期が n なら T の乗法因子は $K=e^{\frac{2\pi pi}{n}}$ と表される．ここに $0<p<n$ で p と n は互いに素である．一般の1次分数変換 (3) はそれを正規化した変換 (4) が，楕円型，双曲型，斜航型，放物型であるかに従って，それぞれ 楕円型，双曲型，斜航型，放物型と言う．

2．1次分数変換が球面の回転を表すための条件

2次の複素一般線形群 $GL(2,\mathbf{C})$ の元

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5}$$

に対して，1次分数変換 (3) を対応させる写像を Φ とおけば $\Phi: GL(2,\mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ は明らかに群の全射準同型である．Φ の核を K とすれば $K=\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbf{C}^*\}$ である．$GL(2,\mathbf{C})/K$ を $PGL(2,\mathbf{C})$ で表し，2次の複素射影一般線形群と言う．この写像 Φ を $SL(2,\mathbf{C})$ に制限した写像 $\Phi: SL(2,\mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ も (4) から分かるように全射準同型である．このときの核は $\{\pm I\}$ である．$SL(2,\mathbf{C})/\{\pm I\}$ を $PSL(2,\mathbf{C})$ で表し，2次の複素射影特殊線形群と言う．従って次のことが分かった．

$$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}}) \cong PGL(2,\mathbf{C}) \cong PSL(2,\mathbf{C}) \tag{6}$$

以下 $PGL(2,\mathbf{C})$ の単位元も $PSL(2,\mathbf{C})$ の単位元も $GL(2,\mathbf{C})$ の単位元と同じ記号 I で表す．また $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ の元は $PGL(2,\mathbf{C})$ の元や $PSL(2,\mathbf{C})$ の元と同一視することが多いが，簡単のためこれらの元も (5) の形の行列で表す．$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ の元 T に対応するこれらの行列は，T が楕円型，双曲型，斜航型，放物型であるかに従ってそれぞれ楕円型，

双曲型，斜航型，放物型と言う．$GL(2,\mathbf{C})$ は位相群だから $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ も位相群である．$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ は次の4つの元で生成される．

(i)．$w = R_\theta(z) = e^{i\theta} z$, $(\theta \in \mathbf{R})$

(ii)．$w = T(z) = 1/z$,

(iii)．$w = S_r(z) = rz$, $(r \in \mathbf{R})$

(iv)．$w = T_t(z) = z + t$, $(t \in \mathbf{C})$

$\lambda \in \mathbf{C}^*$ に対し，変換 $U_\lambda(z)$ を次のように定める．

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z, & \lambda \neq 1 \\ z+1, & \lambda = 1 \end{cases}$$

変換 $T \in PSL(2,\mathbf{C})$, $T \neq id$ は $PSL(2,\mathbf{C})$ の中でどれかの U_λ と共役である．即ち，ある $V \in PSL(2,\mathbf{C})$ とある U_λ があって，$VTV^{-1} = U_\lambda$ となる．

表2と関連して次のことが成り立つ[9]．
$T \in PSL(2,\mathbf{C})$, $T \neq id$ が U_λ と共役なら，T について

楕円型	$\lvert\lambda\rvert = 1, \lambda \neq 1$
双曲型	$\lambda > 0, \lambda \neq 1$
斜航型	$\lambda = re^{i\theta}, r > 0, r \neq 1, 0 < \theta < 2\pi$
放物型	$\lambda = 1$

表4．　1次分数変換の共役元 $U_\lambda(z)$

従って特に楕円型変換はすべて R_θ に共役である．
変換 (4) は T から引き起こされる写像

$$\pi^{-1} \cdot T \cdot \pi : \Sigma \to \Sigma$$

が球面 Σ の回転であるとき，T を $\hat{\mathbf{C}}$ の回転という．Σ 及び $\hat{\mathbf{C}}$ の回転の全体をそれぞれ $\mathrm{Rot}(\Sigma)$, $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ で表す．

命題 1．球面 Σ の直径 PP' の周りの角 θ の回転 τ に対応する $\hat{\mathbf{C}}$ の一般の1次分数変換は

$$w = T(z) = e^{i\varphi} \cdot \frac{z-\alpha}{1+\bar{\alpha}z}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \alpha \in \mathbf{C} \tag{7}$$

$$\text{又は } w = T(z) = \frac{e^{i\varphi}}{z}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{8}$$

で与えられる．但し PP' が ζ 軸上にあるときは、$P = S$, $P' = N$ と取る．

証明．(i)．$\theta = 2n\pi$ なら $\varphi = 0$, $\alpha = 0$ とすればよい．従って $T = id$ ．
よって以下 $\theta \neq 2n\pi$ とする．

(ii)．$P' = N$ のときは $\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\alpha = 0$ とすればよい．従って $w = T(z) = e^{i\varphi} z$. これは $\hat{\mathbf{C}}$ 上の点を原点 O の周りに角 φ だけ回転する変換である．

(iii)．$P' \neq N$ のとき，$\pi(P) = a$, $\pi(P') = a'$ とおくと a と a' は対心点となるから，τ には a, a' を固定点とする楕円型変換

$$\frac{w-a}{w+1/\bar{a}} = e^{i\theta} \frac{z-a}{z+1/\bar{a}} \tag{9}$$

即ち

$$w = T(z) = \frac{(|a|^2 + e^{i\theta})z + a(1-e^{i\theta})}{\bar{a}(1-e^{i\theta})z + |a|^2 e^{i\theta} + 1} \tag{10}$$

が対応する．ここで

(イ)． $|a|=1,\ \theta=(2n+1)\pi$ なら $a=e^{\frac{i\varphi}{2}}$ とおくと τ には

$$w=T(z)=\frac{e^{i\varphi}}{z}$$

が対応する．τ は実は赤道上の2点 $P=(\cos\frac{\varphi}{2},\ \sin\frac{\varphi}{2},\ 0),\ \ P'=(-\cos\frac{\varphi}{2},\ -\sin\frac{\varphi}{2},\ 0)$, を軸とする角 π の回転である．

(ロ)． $|a|=1$, かつ $\theta=(2n+1)\pi$ ではないとき

$$\alpha=\frac{a(e^{i\theta}-1)}{|a|^2+e^{i\theta}},\quad e^{i\varphi}=\frac{|a|^2+e^{i\theta}}{1+|a|^2e^{i\theta}},\quad (0\leq\varphi<2\pi)$$

とおくと τ には $w=T(z)=e^{i\varphi}\cdot\dfrac{z-\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$ が対応することがわかる．

命題 2． 一般の1次分数変換 $w=T(z)$ が (7) 又は (8) で与えられるなら T に対応する Σ の変換 τ はある軸 PP' の周りのある角 θ の回転である．

証明． (7) で $\alpha=0$ なら τ は SN を回転の軸とし角 φ だけの回転を表す．

以下 $\alpha\neq 0$ とする．

(7) の固定点を $a,\ a'$ とすると $a,\ a'$ は対心点となるから，$P=\pi^{-1}(a),\ P'=\pi^{-1}(a')$ とおけば， PP' は Σ の直径の両端となる． (7) を正規化ればそのトレース χ は $\chi^2=4\cos^2\frac{\varphi}{2}/(1+|\alpha|^2)<4$ だから T は楕円型である．よって T は (9) の形で表せる．よって τ は PP' を軸とする角 θ の回転を表す．

次に T が (8) の形で表されるなら T の固定点は $a,\ a'=\pm e^{\frac{i\varphi}{2}}$ となるからこのときも $a,\ a'$ は対心点である．よって T を正規化しそのトレースを χ とすれば $\chi=0$ となるから T は楕円型で乗法因子 K は $K=-1=e^{\pi i}$ である．よって τ は $P,\ P'$ を軸とする角 π の回転を表す．

従って $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ は (7) 及び (8) の形の変換の全体で， $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ は，写像の合成を積とみれば群をなすことがわかる．しかも $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の非単位元はすべて楕円型であってその固定点は常に対心点である．従ってまた $\mathrm{Rot}(\Sigma)$ も写像の合成を積とみれば群であって， $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ と同型なことがわかった．

一方2次の特殊ユニタリー行列の全体のつくる群 $SU(2,\mathbf{C})$ は

$$SU(2,\mathbf{C})=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbf{C},\ |a|^2+|b|^2=1\right\}$$

で表される．(7) と (8) の変換 T を正規化すれば

$$w=T(z)=\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}},\quad |a|^2+|b|^2=1 \tag{11}$$

の形で表せる．逆に変換 T が (11) の形で表されていれば T は (7) 又は (8) の形に表すことができる． $PSU(2,\mathbf{C})=SU(2,\mathbf{C})/\{\pm I\}$ を2次の射影特殊ユニタリー群という．以上の考察から次のことがわかった．

命題 3． $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$, $\mathrm{Rot}(\Sigma)$ 及び $PSU(2,\hat{\mathbf{C}})$ は同型である：

$$\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})\cong\mathrm{Rot}(\Sigma)\cong PSU(2,\mathbf{C}) \tag{12}$$

一方 $\mathbf{R}^3$ の原点 O を通る直線の周りの回転の全体を $\mathrm{Rot}(\mathbf{R}^3)$ で表せば，$\mathrm{Rot}(\mathbf{R}^3)$ は $\mathrm{Rot}(\Sigma)$ と同じものである．しかも $\mathrm{Rot}(\mathbf{R}^3)$ は3次の特殊直交群 $SO(3)$ と同型である．故に

$$\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})\cong\mathrm{Rot}(\mathbf{R}^3)\cong SO(3) \tag{13}$$

でもある．このことから，$SO(3)$ はしばしば3次の回転群とも言われる．

この小論の目的は $SO(3)$ に関する次の定理に対応する $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の有限部分群に関するクライン [10] による古典的な定理の証明を与えることである；

定理 A：$SO(3)$ の有限部分群は，次の 3 つの型の群のどれかと $SO(3)$ において共役である：
(i)．巡回群
(ii)．二面体群
(iii)．正四面体群，正八面体群，正二十面体群

3．$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ の有限部分群

楕円型変換の全体に id を加えた集合は群にならない．今 Γ を $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}}) \cong PSL(2,\mathbf{C})$ の部分群で，Γ の非単位元は全て楕円型であるとする．すると Γ は $PSL(2,\mathbf{C})$ の中である部分群 $\tilde{\Gamma} \subset PSU(2,\mathbf{C})$ に共役である（[10]）．即ちある元 $V \in PSL(2,\mathbf{C})$ があって

$$V\,\Gamma\,V^{-1} = \tilde{\Gamma} \tag{14}$$

従って特に $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ の有限部分群は全て $PSU(2,\mathbf{C}) \cong \mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の部分群に同型である．

命題 4．Γ を $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の位数 n の有限部分群で Γ は共通の固定点 z_0 を持つとする．

$$\tilde{\Gamma} = \{\ z \longmapsto e^{\frac{2k\pi i}{n}} z,\ \ k = 0, 1, \cdots, n-1\ \} \tag{15}$$

とおくと Γ は $PSU(2,\mathbf{C})$ の中で $\tilde{\Gamma}$ に共役である．従って特に Γ は巡回群である．

証明．Γ の非単位元は全て楕円型で z_0 を固定点として持つから実は z_0 の対心点 z_0' も Γ の固定点である．$PSU(2,\mathbf{C})$ は推移的だから $U(z_0) = 0$ となる $U \in PSU(2,\mathbf{C})$ がある．$U(z_0') = \infty$ である．よって $\tilde{\Gamma} = U\,\Gamma\,U^{-1}$ とおくと $\tilde{\Gamma}$ は $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の有限部分群で $\tilde{\Gamma}$ の元は 0 と ∞ を動かさない位数 n の群である．よって $\tilde{\Gamma}$ は (15) のように表せる．

$n \geq 3$ とする．正 n 角形 P_n を自分自身に移す運動の全体を D_n で表す．P_n の中心を O とし，O の回りに角 $2\pi/n$ だけ P_n を回転させる運動を a とする．P_n の 1 つの対称軸の回りに角 π だけ P_n を回転させる（即ち P_n を裏返しにする）運動を b とする（n が奇数なら対称軸は n 本ある．n が偶数なら対称軸は $2n$ 本ある．しかしどの対称軸の周りの角 π の回転を b としても結果は同じである）．このとき D_n は a と b で生成され

$$D_n = \{\ e,\ a,\ a^2,\ \cdots,\ a^{n-1},\ b,\ ba,\ ba^2,\ \cdots,\ ba^{n-1}\ \} \tag{16}$$

と表せる．ここに

$$a^n = b^2 = e,\quad bab = a^{-1} \tag{17}$$

と言う関係がある．逆に (17) という関係を満たす a, b に対して D_n を (16) で定めれば D_n は位数 $2n$ の非巡回群となる．更に $n = 1, 2$ に対しても D_n を次のように定める．
$D_1 = \{e, a\},\ \ a^2 = 1$
$D_2 = \{e, a, b, ab\},\quad a^2 = b^2 = e,\quad bab = a^{-1}$
D_1 は位数 2 の巡回群，D_2 は位数 4 の非巡回転である．以下 $D_n (n \geq 1)$ に合同な群をすべて**二面体群**と言い，二面体群を改めて D_n で表す．

Γ を $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ 或いはその部分群に共役な群の部分群とする．点 α に対し

$$\Gamma(\alpha) = \{\ \gamma(\alpha)\ |\ \gamma \in \Gamma\ \}$$

を α の Γ–**軌道**（*orbit*）といい，この集合の濃度を α の Γ–軌道の長さと言う．

命題 5． Δ が $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の有限部分群で、長さ2の Δ–軌道を持つなら Δ は2面体群である．

証明． $\Omega = \{z_0\,, z_1\}$ を Δ–軌道とする．すると Δ は z_0 と z_1 を固定点とする指数2の部分群 Γ を持つ．

実際仮定から $g(z_0) = z_1$ となる $g \in \Delta$ があるが，この g は $g(z_1) = z_0$ である．何故なら z_0 の Δ–軌道が Ω だから $g(z_1) \neq z_0$ なら $g(z_1) = z_1$ でなければならないが $z_0 \neq z_1$ だから $g(z_0) = g(z_1) = z_1$ となるが，こんなことはありえないからである．そこで $\gamma = g^2$ とおくと $\gamma \in \Delta$ であって $\gamma(z_0) = z_0\,, \gamma(z_1) = z_1$ となる．このとき $\Gamma = \{\,\gamma^n \,|\, n \in \mathbf{Z}\,\}$ とおくと Γ は Δ の有限部分群で $\Delta = \Gamma \cup g\Gamma$ (直和) であるから Γ の Δ に対する指数は2である．Γ の元はすべて z_0 を固定点に持つから命題4より Γ は位数有限の巡回群である．

$|\Gamma| = 1$ なら $|\Delta| = 2$．よって Δ は D_1 に同型 (実際このときは $\Delta = \{id, g\}$, $g^2 = id$ である)

$|\Gamma| \geq 2$ とする．z_0 と z_1 は Γ の唯1組の固定点だから，z_0 と z_1 は対心点である．$U \in PSU(2, \mathbf{C})$ を $U(z_0) = 0$，$U(z_1) = \infty$ となるようにとる．このとき

$$\tilde{\Delta} = U\,\Delta\,U^{-1}, \quad \tilde{\Gamma} = U\,\Gamma\,U^{-1}$$

とおく．すると命題4より $\tilde{\Gamma}$ は R_θ で生成される有限巡回群である．$\tilde{\Delta}$ は 0 を ∞ に，∞ を 0 に移す元 T を持つ．$|\Delta| = 2n$ とすると

$$R_\theta^n = T^2 = id, \quad T\,R_\theta\,T = R_\theta^{-1}$$

である．R_θ は $\tilde{\Gamma}$ を生成し $\tilde{\Delta} \setminus \tilde{\Gamma} = T\tilde{\Gamma}$ だから $\tilde{\Delta}$ は R_θ と T で生成される二面体群である．よって $\tilde{\Delta}$ に共役な Δ も二面体群である．

定理 B [5, 10]．Γ を $\mathrm{Rot}(\hat{\mathbf{C}})$ の有限部分群とすると Γ は次の3つの群のどれかである．
(イ)．Γ は巡回群
(ロ)．Γ は二面体群
(ハ)．Γ は球面 Σ に内接する正四面体、正八面体、正二十面体の回転群

証明． $|\Gamma| = N$ とする．$N \geq 2$ としてよい．$\Gamma = \{\,id, T_1, \cdots, T_{N-1}\,\}$ とおく．

$$\Psi = \{\,(z, T_j)\,|\, z \in \hat{\mathbf{C}}, j = 1, \cdots, N-1,\ T_j(z) = z\,\}$$

とおく．$T_j\,(1 \leq j \leq N-1)$ は全て
2つの固定点を持つから

$$|\Psi| = 2(N-1) \tag{18}$$

である．$z \in \hat{\mathbf{C}}$ に対し Γ の z における**固定群** (*stabilizer*) を

$$\Gamma_z = \{\,T \in \Gamma \,|\, T(z) = z\,\}$$

で定め，$N_z = |\Gamma_z|$ とおく．$\hat{\mathbf{C}}$ の有限個の点を除けば他のすべての z に対し $\Gamma_z = id$,
従って $N_z = 1$ である．よって

$$|\Psi| = \sum_{z \in \hat{\mathbf{C}}} (N_z - 1) \tag{19}$$

である．実際 $\Gamma_z \neq id$ とし，$T \in \Gamma_z$ とすると，z の対心点 z' に対しても $T(z') = z'$ となるから $|N_z| = |N_{z'}|$ である．従って Γ の固定点の集合を $\{\,a_1, \cdots, a_m\,\}$ とすると m は偶数であって，$a_1, \cdots, a_m$ の2つずつが対心点となっている．よって a_j の対心点を a_j' とおくと Γ の固定点の集合 A は

$$A = \{\,a_1, a_2, \cdots, a_n, a_1', a_2', \cdots, a_n'\,\}$$

と表せる．$Na_j - 1$ は $T(a_j) = a_j$，$T \neq id$ となる T の数である．それは即ち

$$(a_j, S_1) = (a_j, S_2) = \cdots = (a_j, S_l), \quad l = N_{a_j - 1}$$

となる $S_k \in \Gamma - \{id\}$ の数でもある．よって等式 (19) が成り立つ． 各点 $z \in \hat{\mathbf{C}}$ は長さ

$$|\,\Omega\,| = |\,\Gamma : \Gamma_z\,| = N/N_z \tag{20}$$

の１つの軌道の中にある．

実際 $z \notin A$ ，即ち $\Gamma_z = id$ なら $\Omega = \Omega(z) = \{\, z, T_1(z), T_2(z), \cdots, T_{N-1}(z)\,\}$ だから $|\,\Omega\,| = N = |\,\Gamma\,|$ となり (20) が成り立つ．

次に $T_{z_1} \neq id$ とする． $T^{(1)} \in \Gamma \setminus \Gamma_{z_1}$ となる $T^{(1)}$ があったとする． $T^{(1)}(z_1) = z_2$ とおくと $|\,\Gamma_{z_1}\,| = |\,\Gamma_{z_2}\,|$ である．更に $T^{(2)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_{z_1} \cup T^{(1)}\Gamma_{z_1}\}$ となる $T^{(2)}$ があったとする． $T^{(2)}(z_1) = z_3$ とおくと $|\,\Gamma_{z_1}\,| = |\,\Gamma_{z_3}\,|$ である．以下これを繰り返すとある数 $m = m(z_1)$ があって $\Gamma = \Gamma_{z_1} \cup T^{(1)}\Gamma_{z_1} \cup T^{(2)}\Gamma_{z_1} \cup \cdots T^{(m-1)}\Gamma_{z_1}$ (直和) となり z_1 の Γ–軌道 Ω は

$$\Omega = \Omega(z_1) = \Gamma(z_1) = \{\, z_1, z_2, \cdots, z_m\,\}$$

でありその濃度は $|\,\Gamma\,|/|\,\Gamma_{z_1}\,| = N/N_{z_1}$ であって，N_z の値は z の Γ–軌道 $\Gamma(z) = \Omega(z)$ にのみ依存し，$\Omega(z)$ の個々の元には依存しない．今 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ を $\hat{\mathbf{C}}$ 上の異なる Γ–軌道で，$|\,\Omega_j\,| < N$ となるものの全体とする． $z \in \Omega_j$ に対し N_z の値を n_j とする．従って $n_j > 1$ である． 例えば $\Omega_j = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ とすると $n_{\alpha_1} - 1 = n_{\alpha_2} - 1 = \cdots = n_{\alpha_s} - 1 = n_j - 1$ であって $s = N/n_j = |\,\Gamma\,|/|\,\Gamma_{\alpha_1}\,|$ である．よって

$$|\,\Psi\,| = \sum_{z \in \hat{\mathbf{C}}} (N_z - 1) = \sum_{j=1}^{k} \frac{N}{n_j}(n_j - 1) = N \sum_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{n_j}) \tag{21}$$

となる．従って

$$|\,\Psi\,| = 2(N-1) = N \sum_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{n_j}) \text{ だから } 2\,(1 - \frac{1}{N}) = \sum_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{n_j}) \tag{22}$$

各 n_j は $n_j \geq 2$ だから $1 - \frac{1}{n_j} \geq \frac{1}{2}$．よって $\sum_{j=1}^{k}(1 - \frac{1}{n_j}) \geq \frac{k}{2}$．他方 $2\,(1 - \frac{1}{N}) < 2$ だから $\frac{k}{2} < 2$．よって $k = 1, 2, 3$ である．しかし

k=1 なら $2\,(1 - \frac{1}{N}) = 1 - \frac{1}{n_1} < 1$． よって $N = 1$ となり矛盾．よって k は２又は３である．

k=2 のとき (22) より $2(1 - \frac{1}{N}) = 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$．よって $\frac{N}{n_1} + \frac{N}{n_2} = 2$．

しかし $N/n_j = |\,\Omega_j\,| \in \mathbf{N}$ だから $|\,\Omega_1\,| = |\,\Omega_2\,| = 1$ でなければならない．すると Γ は共通の１つ (実際は２つ) の固定点を持つ．故に命題４より Γ は巡回群である．

$k = 3$ のとき， $2\,(1 - \frac{1}{N}) = 3 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3}$ だから $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{N} > 1$．

ここで順番を付けなおして $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ とする．すると $n_1 = 2$ である．何故なら $n_1 \geq 3$ とすると $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq 1$ となるからである．従って $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{N} > \frac{1}{2}$．これより $n_2 \leq 3$ となることがわかる．

以上のことから n_1, n_2, n_3, N の組み合わせは次の４通りに限ることがわかる．

	n_1	n_2	n_3	N
(イ)	2	2	n	$2n(n \geq 2)$
(ロ)	2	3	3	12
(ハ)	2	3	4	24
(ニ)	2	3	5	60

表　５． Γ –軌道に付随する固定群の位数

(イ) のとき．n は2以上の任意の整数である．このときは $|\Omega_3| = N/n_3 = 2$． よって命題5より Γ は二面体群である．

ここで次のことに注意しておく．正多面体 $\mathcal{R}$ の回転群を $\mathrm{Rot}(\mathcal{R})$ で表すとき, $\mathcal{R}$ の頂点の数を V ， 1つの頂点に集まる辺の数を n とすると群 $\mathrm{Rot}(\mathcal{R})$ の位数 $|\mathrm{Rot}(\mathcal{R})|$ は nV である．従って特に正四面体, 正八面体, 正二十面体の回転群の位数はそれぞれ, 12 , 24, 60 である．

(ロ) のとき． Γ は長さ $|\Omega_3| = 12 / 3 = 4$ の軌道を持つ．Γ を $PSU(2,\mathbf{C}) \cong \mathrm{Rot}(\Sigma)$ の部分群 $\tilde{\Gamma}$ と見て , $\hat{\mathbf{C}}$ の代わりに Σ で考える．$\tilde{\Omega}_3 = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$ とする．$\tilde{\Gamma}$ における固定群 $\tilde{\Gamma}_{a_j}$ は位数 $N_{a_j} = n_3 = 3$ の巡回群である．$a'_j = -a_j$ とする．$\tilde{\Gamma}_{a_1}$ は a_1 と a'_1 を固定する群で a_2, a_3, a_4 を互いに入れ替える．しかも Γ とは異なり $\tilde{\Gamma}$ は球面 Σ の回転であるから Σ 上で2点間の距離を変えない．従って a_2, a_3, a_4 は a_1 から等距離の位置にある．同様に $\tilde{\Gamma}_{a_2}$ で考えれば a_1, a_3, a_4 は a_2 から等距離の位置にある．従って4点 a_1, a_2, a_3, a_4 は Σ 上で互いに等間隔の位置にある．よって4点 a_1, a_2, a_3, a_4 は球面 Σ に内接する正四面体 $\mathcal{T}$ の頂点である． しかも $|\tilde{\Gamma}| = |\Gamma| = N = 12 = |\mathrm{Rot}(\mathcal{T})|$ である．よって $\tilde{\Gamma}$ は $\mathcal{T}$ の回転群, 即ち正四面体群 $\mathrm{Rot}(\mathcal{T})$ である．辺 $a_i a_j$ の中点のを a_{ij} とし半直線 Oa_{ij} が Σ と交わる点を b_{ij} とする． $b_{12} = -b_{34}$, $b_{13} = -b_{24}$, $b_{14} = -b_{23}$ であって

$$\tilde{\Omega}_1 = \{ b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34} \} , \quad \tilde{\Omega}_2 = \{ a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 \}$$

となる．4点 a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 は $\mathcal{T}$ と合同な正四面体 $\mathcal{T}'$ の頂点であって, $\mathcal{T}'$ は中心 O に関して $\mathcal{T}$ と対称の位置にある．

$T \in \tilde{\Gamma}_{a_j} - \{id\}$ は 軸 $O a_j$ の周りに角 $\pm 2\pi/3$ だけ $\mathcal{T}$ を回転させ (このときの軌道空間は $\tilde{\Omega}_3$) ,
$T \in \tilde{\Gamma}_{a'_j} - \{id\}$ は軸 $O a'_j$ の周りに角 $\pm 2\pi/3$ だけ $\mathcal{T}'$ を回転させ (このときの軌道空間は $\tilde{\Omega}_2$),
$T \in \tilde{\Gamma}_{b_{ij}} - \{id\}$ は軸 $O b_{ij}$ の周りに角 π だけ $\mathcal{T}$ を回転させる (このときの軌道空間は $\tilde{\Omega}_1$)．
従って $|\Psi| = 2 \times 4 + 2 \times 4 + 6 = 22$ である．実際は軸 $O a_i$ の周りの回転と軸 $O a'_i$ の周りの回転は同じものである．

(ハ) のとき． 上と同様に Γ を $\mathrm{Rot}(\Sigma)$ の部分群 $\tilde{\Gamma}$ と見て Σ 上で考える．$\tilde{\Omega}_3$ は Σ 上の $N/n_3 = 24/4 = 6$ 個の元からなる．$\tilde{\Omega}_3 = \{a_1, a_2, \cdots, a_6\}$ と置くと, これらの点は Σ 上で等間隔の位置にあるから $\tilde{\Omega}_3$ は Σ に内接する正八面体 $\mathcal{O}$ の頂点の集合である． $|\tilde{\Gamma}| = 24$ だから $\tilde{\Gamma}$ は $\mathcal{O}$ の回転群でである．ここで必要とあれば点 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を並び替えて $a'_j = -a_j \ (1 \leq j \leq 3)$ と置くとき $\tilde{\Omega}_3 = \{ a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3 \}$ となるようにする．$\mathcal{O}$ の向かい合った4組の面の中心を結ぶ直線が Σ と交わる点を $c_1, c_2, \cdots, c_8$ とする． $c_1, c_2, \cdots, c_8$ は Σ に内接する正六面体 $\mathcal{H}$ の頂点でもある．$\tilde{\Omega}_2 = \{ c_1, c_2, \cdots, c_8 \}$ である．正八4面体 O の辺 $a_i a_j$ の中心を a_{ij} とし半直線 $O a_{ij}$ が Σ と交わる点を b_{ij} とすると

$\tilde{\Omega}_1 = \{ b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{62}, b_{63}, b_{64}, b_{65}, b_{23}, b_{45}, b_{25}, b_{34} \}$ である．

$T \in \tilde{\Gamma}_{a_j} - \{id\}$ なら T は軸 $O a_j$ の周りに角 $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ だけ $\mathcal{O}$ を回転させる変換である (軌道空間は $\tilde{\Omega}_3$)．
$T \in \tilde{\Gamma}_{c_j} - \{id\}$ なら T は軸 $O c_j$ の周りに角 $\pm 2\pi/3$ だけ $\mathcal{O}$ を回転させる変換である (軌道空間は $\tilde{\Omega}_2$)．
$T \in \tilde{\Gamma}_{b_{ij}} - \{id\}$ なら T は軸 Ob_{ij} の周りに角 π だけ $\mathcal{O}$ を回転させる変換である (軌道空間は $\tilde{\Omega}_1$)．
よって $|\Psi| = 3 \times 6 + 2 \times 8 + 12 = 46$ である．

(ニ) のとき． 全く同様にして $\tilde{\Omega}_3$ は Σ 上の $N/n_3 = 60/5 = 12$ 個の点よりなる．$\tilde{\Omega}_3 = \{ a_j \mid 1 \leq j \leq 12 \}$ と置くと， $\tilde{\Omega}_3$ は Σ に内接する正二十面体 $\mathcal{I}$ の頂点の集合である．$\tilde{\Gamma}$ は位数 60 の正二十面体群 $\mathrm{Rot}(\mathcal{I})$ である． $T \in \tilde{\Gamma}_{a_j} - \{id\}$ なら T は軸 $O a_j$ の周りに角 $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ だけ $\mathcal{I}$ を回転させる変換である (軌道空間は $\tilde{\Omega}_3$)． $\mathcal{I}$ の向かい合った 10 組の面の中心を結んだ直線が Σ と交わる点を c_j , $1 \leq j \leq 20$ とすると $\tilde{\Omega}_2 = \{ c_j \mid 1 \leq j \leq 20 \}$ である．$\tilde{\Omega}_2$ は Σ に内接する正十二面体の頂点の集合でもある． $T \in \tilde{\Gamma}_{c_j} - \{id\}$ なら T は軸 $O c_j$ の周りに角 $\pm 2\pi/3$ だけ $\mathcal{I}$ を回転させる変換である (軌道空間は $\tilde{\Omega}_2$)． $\tilde{\Omega}_3$ の2点 a_i, a_j が隣り

合っているとき辺 $a_i a_j$ の中点を a_{ij} とし半直線 Oa_{ij} が Σ と交わる点を b_{ij} とすれば集合 $\tilde{\Omega}_1 = \{ b_{ij} \}$ は 30 個の点 b_{ij} からなり， $T \in \tilde{\Gamma}_{b_{ij}} - \{id\}$ なら T は軸 Ob_{ij} の周りに角 π だけ $\mathcal{I}$ を回転させる変換である（軌道空間は $\tilde{\Omega}_1$ ）. よって $|\Psi| = 2 \times 12 + 2 \times 20 + 30 = 118$ である.

正4面体 $\mathcal{T}$ の4つの面に 1, 2, 3, 4 の番号を付ける. すると Rot($\mathcal{I}$) の元はこれら4つの数の置換を引き起こし全て偶置換である. よって Rot($\mathcal{I}$) は4次の交代群 A_4 と同型である. また正八面体 $\mathcal{O}$ の4組の向かい合った5組の面にそれぞれ同じ番号 1, 2, 3, 4 を付けると， Rot($\mathcal{O}$) の元はこれら4つの数の置換を引き起こし，Rot($\mathcal{O}$) が4次の対称群 S_4 と同型となることが解る. また正二十面体 $\mathcal{I}$ の各面に次のように番号 1, 2, 3, 4, 5 を付ける. 互いに向かい合った面には同じ番号を付け，しかもどの隣りあった2つの面も番号が異なる. この様に番号を付けると Rot($\mathcal{I}$) の元は5次の置換を引き起こし，全て偶置換である. よって Rot($\mathcal{I}$) は5次の交代群 A_5 と同型であることが解る.

よって次のことが得られた.

系. $PSL(2,\mathbf{C})$ の有限部分群は全て，巡回群か，二面体群か，または A_4，S_4，A_5 のどれかに同型である.

引 用 文 献

[1] H.Weyl , *Symmetry*, Princeton U.P. 1952（ワイル著，遠山 啓訳，シ「ンメトリー」），紀伊国屋書店,1967.

[2] 岩堀長慶 , 合同変換の話 , 現代数学社，1974 .

[3] H.S.M.Coxeter , *Introduction to geometry*, Wiley , 1961（コクセター著，銀林 浩訳，「幾何学入門」，明治図書，1965）.

[4] H. Knörrer, *Geometry*, Fried Vieweg & Sohn Verlarg , 1966（クネーラー著， 金井省二・秋葉繁夫訳，「幾何学」，シュプリンガー・フェアラーク，1999）.

[5] G. Jones & D. Silverman , *Complex Functions*, Cambridge U.P. 1987.

[6] 辻 正次，複素函数論，槙書店，1968.

[7] L. R. Ford , *Automorphi Functions* , McGraw–Hill , 1929 .

[8] J. Jehner. *A Short Course in Automorphic Functions* , Holt , Rinehalt and Winston , 1966 .

[9] R.C.Lyndon & J.L. Ullman , *Groups of elliptic linear fractional transformations* , Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967), 1119 -24.

[10] F.Klein , *Über binäre Formen und linearen Transformationen in sich selbst* , Math. Ann. 9 (1875/76)（Ges. Abh. Bd. 2. Nr. L1）.

千葉大学教育学部数学教室

mail-address : uzawa@math.e.chiba-u.ac.jp