

算数教科書における経験主義と系統主義

—「0」の概念とその計算を中心に—

Empiricism and Logicism in Arithmetic Textbooks

大田 邦 郎

OTA Kunio

はじめに

教育実習生の授業を見に行った。1年生の「なんばんめ」の授業であった。段ボールの箱に色紙を張ったものをいくつか並べて、これらに動物の縫いぐるみを入れて、「熊は右から何番目?」といった問いに答えさせるのがこの時間の指導内容である。

指導案をよく見ると、この前の時間までに「何番目」(順序数)の指導をした様子はない。だから、たてまえとしては子どもたちに答えられるはずはない。しかし、すでにどこかで知っているらしい子どもたちが、「右から3番目」とか「下から5番目」とか得意げに答えている。

さらには、「簡単すぎる」「もっとむずかしいのやって」と子どもたちからブーイングが出る始末であった。色紙張った箱づくりに時間をかけたことだけがほめられる、まさに教育実習らしい授業であった。

時間も余って、見かねた担任が市販ドリルを配った。これには何番目を問うありきたりの問題のつぎに、イチゴが並んでいる図があって、(1)左から5こに色をぬりなさい、(2)左から5こめに色をぬりなさい、という問題があった。

案の定、両方とも5こづつ色をぬるもの、両方とも5番目だけに色をぬるものがそれぞれ少なからずいた。「何番目?」と聞かれて「5番目」と答えられる子どもでも、このように間違ふことがある。

ここは、1年生が算数で最初につまづきやすい箇所である。だから、本当はこれこそが授業で扱われるべき内容であって、ドリルで初めて扱われるべきものではないのである。しかし、つぎの時間の予定は「何番目を用いた遊び」になっており、それでおしまいなのであった。

この実習生には「教える」とはどういうことがわかっていない。子どもたちにとって、何が既知で、何が未知かの意識がない。もしあれば、既知である集合数の「5個」を用いて、未知である順序数の「5個目」を教えようとするはずでないのである。

この授業は結局、何も教えようとするものではない。知っている子どもは知っていることを口にしただけであり、知らない子どもは知らないままで終わっている。ただ、子どもたちに教科書内容と関係のありそうな経験をさせようとしたにすぎない。

かれが、意識的にこうした経験主義的教育方法を採用しているのではなく、これまでに受けてきた教育の成果として無意識にこうした方法を採用しているところに、そして教育学部の4年生になってもそのことを自覚していないところに、悲劇または喜劇がある。

問題は教育方法だけにあるのではない。かれは結局、「何個(集合数)」と「何番目(順序数)」の違いを本当には理解していないのである。集合数とか順序数とかいう用語くらいは聞いたことがあるだろう。しかし、その違いを本当に理解していたら、それこそが指導内容の核心であると考えるはずなのだ。

「大人にはわかりきっていることでも、それを子どもにわかりやすく説明するのは難しい」というのは誤りであろう。正しくは「人にわかりやすく説明できてはじめて、自分もわかっているといえる」のである。

いいかえれば、教える側が教育内容をよく理解していないから、うまく教えることができないのである。大学生相手の授業がうまくいかない教員もまた、学生の態度や学力以前に、自身の教育能力を、さらには専門的力量を点検した方がよい。私自身、講義でうまく説明できないおかげで、ずいぶん勉強させてもらっている。

本題に入ろう。1年生の算数の教科書で、「0」という数を「なんばんめ」の前に扱う教科書と、後で扱う教科書⁽¹⁾とがある。前者では「10」という数の直後に「0」を扱うことになるが、後者では「10」のあと、しばらくしてから「0」を扱うのである。

実は、この相違はそれぞれの教科書が背景とする、教育方法論および教育内容論に関する相違を反映するものにほかならない。本稿は、具体的な教材の扱いの相違から、背景にある理論の相違を明らかにしていくという、帰納法的教科内容論のひとつの試みである。

1 経験主義と系統主義

各教科の指導法において、複数の対立する立場が存在することは良く知られているが、文部省の学習指導要領・指導書も特定の立場から自由ではないことは、どれだけ知られているだろうか。小学校1年生の算数の最初の部分を見るだけでも、このことを知るのに十分なのであるが。

----- 小学校学習指導要領 (1989) -----

第1学年の内容 [A 数と計算] (1) 数の概念と数の表し方

- (1) ものの個数、順序などを数を用いて正しく表すことができるようにするとともに、数の概念について理解できるようにする。
- ア 対応などの操作によって、ものの個数を比べること。
 - イ 個数や順番を正しく数えたり表したりすること。
 - ウ 数の大小及び順序について知り、数の系列を作ったり、数直線の上に表したりすること。
 - エ 一つの数をほかの数の和や差としてみるなど、ほかの数と関係付けてみること。
 - オ 2位数について、その表し方と意味を理解すること。

「数の概念」とは何か、この記述からわかるだろうか。それとも「数の概念」とは自明のことだから書なくても良いのだろうか。そうだとしたら、「数の概念」が理解されるのはアからオのどの段階であろうか。

アは、「数の概念」をもたなくてもできるから、「数の概念」以前の段階である。イは、論理的には「数の概念」をもっていなければならないはずだから、「数の概念」以後の段階のはずである。そうすると、現行学習指導要領はどこで「数の概念」を形成することになるのか。

結局、現行学習指導要領は、「数の概念は数えることによって起こる」⁽²⁾という経験主義的な「数え主義」の立場を採用しているとしか考えられない。すなわち、狭い範囲ではイの操作活動の中で、より広い範囲ではアからエあたりまでの中で、初歩的な数概念が形成されるという立場なのであろう。このことは、学習指導要領を解説した指導書に、より明確にみることができる。

----- 小学校指導書 (1989) -----

この学年では、初めは対応などの操作によって具体的なものの個数を比べる。やがて、具体的なものについて、その個数を正しく数えたり、数えた具体物の個数を数字を用いて表したりすることができるようにする。また、これらの操作を通して、数の大小や順序を知り、次第に数の概念及び数の表し

⁽¹⁾ 千葉市の小学校で使用されている学校図書版は前者で、附属小学校で使用されている啓林館版は後者である。

⁽²⁾ 藤沢利喜太郎『数学教授法』(1900年、大日本図書) 56-62ページを参照。

方やその仕組みを明らかにすることをねらいとしている。

このように、〈操作を通して〉〈次第に〉概念を明らかにするというのが、「経験主義」の立場を典型的に示している。これに対して、その時点で可能な限りにおいて概念それ自体を説明するという立場を「系統主義」と呼ぶことにする。私は、講義では「習うより慣れろの経験主義」「まとめて教える系統主義」と、いささか俗な説明をしている。

経験主義的な数え主義が順序数的な自然数論によるものであるのに対して、系統主義では集合数的な自然数論を採用する。そこでは、自然数とは、1対1対応がつく集合の類に付けられた名前である⁽³⁾。

これによると、現行学習指導要領でいえば「ア 対応などの操作によって、ものの個数を比べること」のつぎに、「1対1対応がつく集合の類に、その大きさを表すものとして数を与えること」とでもなるだろう。

この集合論的な自然数概念に基づく数指導は、日本では、1968年学習指導要領に「1対1対応」という用語が入って以来、数え主義的な数指導に代わって定着しつつある。しかし、現行学習指導要領も前述のように基本的には数え主義の影響から脱していないという実情を反映して、現行教科書の数詞の導入部分も、教科書によっては数え主義なのか集合数なのかを読み取りづらいものもある。

学校図書版（以下、学図）はほぼ集合数の扱いであるが（図1）、啓林館版（以下、啓林）はどちらともとれるような曖昧な書き方である（図2）。

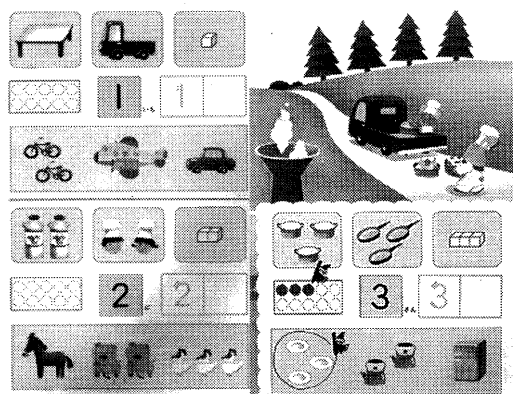


図1 学図（1996）

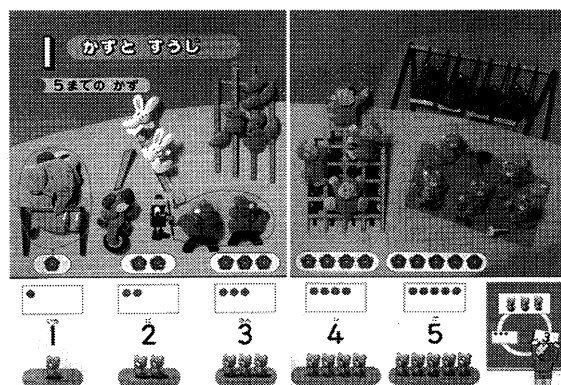


図2 啓林（1996）

学習指導要領・指導書が基本的には経験主義であっても、教科書にはそれに忠実であるものと、その範囲でもある程度系統主義的な内容編成をしているものとがある。ここでは、こうした視点から教科書内容の比較・分析を行っていく。

2 「0」の概念

現行教科書は6社とも、1から10までの数のあとで「0」を扱っているが、これには批判がある。「10」の前に「0」を教えておかなければ、「10」という数が「1」と「0」の二つの数から成ること（位取り記数法）を教えることができない。そのため、「10」は「じゅう」と読むひとつの記号として覚えるしかなく、「じゅういち」を「101」と書く子どもが出てくるというのである⁽⁴⁾。もっとも、「じゅういち」を「11」と書くことができるからといって、位取りがわかっているとも限らない。その子は、「11」をこれでひとつの記号と思っているかもしれないのである。

⁽³⁾ カントルの集合論に依拠した考え方である。ラッセル、平野智治訳『数理哲学序説』（1954年、岩波文庫）22-32ページを参照。

⁽⁴⁾ 遠山啓『数学の学び方教え方』（1972年、岩波新書）66ページなど参照。

実は、戦後になって小学校1年生で「0」という数それ自体を教えるようになったのは、基本的には1968年のいわゆる現代化学習指導要領以降である。戦前の国定教科書時代には、第1期から第3期までのいわゆる黒表紙教科書は1年で「0」という数を扱っていたのであるが、第4期以降は「0」についての記述が見られない。もちろん、 $20+30$ などの形で「0」という数字はくりかえし出てくるが、その意味についての説明がないのである。戦後もしばらくの間、基本的には2年生ではじめて「0」を扱う時代が続いた⁽⁵⁾。この時期には確かに「じゅういち」を「101」と書く子どもが多かったようである。

それでは、なぜ「0」という数が長い間1年生で教えられてこなかったのか。それは、日常生活において数えるという操作を行なう際に、「0」を用いることはないからであろう。すなわち、経験主義の数学においては「0」の概念は不要であり⁽⁶⁾、また、経験主義の教育においては、「10」を教える際にそれが「1」と「0」から成ることを教えずとも、あとで次第に気づいていけばよいのである。

1958年学習指導要領の第2学年の内容には「0の意味、たとえば、空位を表わすことや $2-2$ 、 $3+0$ などに関し計算に用いる数とみることを知ること」と書かれている。ここには「0」という数の概念それ自体を教えるという意識はなく、記数法や計算において「0」の意味と加減算が必要になるから、それに必要な限りで「0」を教えるという、操作的な扱いにとどまっている。いわば、インドで「発見」されたときの「0」の認識の水準にとどまっているのである。

しかし、集合論にもとづく自然数（集合数的自然数）は「0」からはじまる。これは、最小の集合が空集合であることによる。集合の大きさとして自然数を考えると、「0」は空集合の大きさとして教えることになる。このことは、小学校1年生の数指導を集合論という現代数学により再構成するという、「数学教育の現代化」の一環であり、世界的にもこれが主流となっている。

1968年学習指導要領にもとづく1971年からの教科書において、ようやく1年のほとんどの教科書で「0」が教えられることになった。これは、学習指導要領ではなく指導書に、第1学年の内容に関してつぎのように書かれたことによる。

-----小学校指導書（1969）-----

この学年で0を指導する場合には、たとえば、得点がないときに、0を用いることなどに関連して、空位（その単位の大きさのものがいない。）を表わすのに0を用いたりすることができよう。

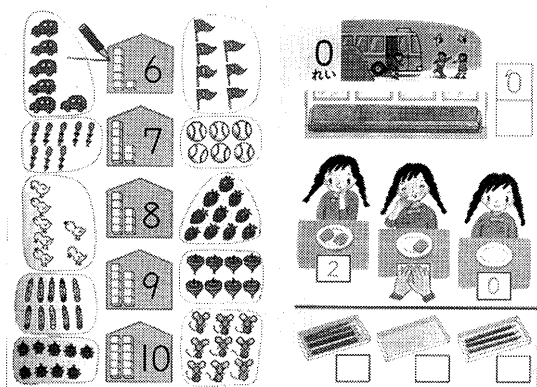


図3 学図1990

⁽⁵⁾ 1年の位取り記数法の説明の中に「0」が出て来るものは少なからずあったが、数としての「0」を扱うものはごく一部の教科書だけであった。

⁽⁶⁾ 実際、「0」が数としての市民権を得たのは歴史的にも遅い。吉田洋一『零の発見』（1939年、岩波新書）など参照。

このいわゆる現代化学習指導要領において、集合数の考え方が一部採用されたことにより、「0」を空集合、すなわち「得点がないとき」「皿にお菓子がなくていいとき」などの数として、ようやく日常経験とも結びつけて教えることが可能になった(図3)。これでようやくカントルまでたどりついたのである。

ところが、論理的には10の前に「0」を扱うべきであるにもかかわらず、これ以降1997年の現在に至るまでの算数教科書は、ごく一部を除いて「0」は10の後になっている。これは、学習指導要領・指導書では規定されていないにもかかわらずである。強いていえば、指導書のつぎの記述がかかわっているのかもしれない。

-----小学校指導書(1989)-----

なお、0については、次の三つの意味が次第に理解できるようにする必要がある。

- (ア) 得点ゲームなどで得点がないとか、具体的な量が1ずつ減少していつてなくなるといった場面を通して、何もないという意味に用いること。
- (イ) 十進位取り記数法で、空位を表すのに用いること。
- (ウ) 数直線で、基準の位置を表すのに用いること。

「次第に理解できるようにする」のだから、「10」を教える時点では、これが「1」と「0」から成ることはまだ教えなくてもよいと、教科書執筆者は受け止めたのであろう。ただし、教科書によっては10のすぐあとに「0」を扱う教科書(学図など)もあれば、10と「0」のあいだに他の単元をはさむ教科書(啓林など)もある。

このことは、「10までの数」に「0」を含めるかどうかということとも関係してくる。学図は「10までのかず」という単元の中で「0」を扱っているから、やはり集合数的自然数論の立場を採用していることがうかがわれる。一方、啓林は単元「かずとすうじ」が「5までのかず」と「10までのかず」に分かれているが、どちらにも「0」は出てこない。このあと単元「なんばんめ」「いくつといくつ」のあとに、トピック的に「0というかず」のページがある。啓林は、「0」を自然数に含めない順序数的自然数論(数え主義)の立場であるといえよう。

ただしどの教科書も、「0」を教えたあとで10の意味を振り返って考えさせることはしていない。20ないし30くらいまでは位取り記数法の説明抜きで教えて、「大きな数」すなわち2けたの数一般のところでは「十のくらい」「一のくらい」という位取り記数法の考え方が説明される。学習指導要領では「2位数について、その表し方と意味を理解すること」、指導書では「十進位取り記数法の原理についての初歩的な考え方の理解を図る」とあるだけで、指導順序についてはなにも規定していないのであるが。

以上のように、小学校1年生の数概念の指導において、学習指導要領・指導書は「…これらの操作を通して、数の大小や順序を知り、次第に数の概念及び数の表し方やその仕組みを明らかにする」(指導書1989)という経験主義の立場を表明しており、教科書も程度の差こそあれ基本的にはこれに追随している。ただし、程度の差の範囲ではあっても、系統主義の発想によるものもみられなくはない。さらに計算の場面についても見ていこう。

3 「0」の計算

学図は10までの数に「0」を含めているだけあって、加減算においても10までの数の範囲でそれぞれ「0」を含む計算も扱っている(図4)。一方、10までの数に「0」を含めていない啓林は、20までの数とその加減算(くり上がりとりくり下がりを含む)においても「0」を含む計算を扱っていない。「0のたしざんとひきざん」は、「大きいかず」(2位数と位取り記数法)の2つ前になっている(図5)。

つまり啓林は、学図のようにたし算やひき算の中に「0」を含むものも入れるというのではなく、「0」を含むものだけ特別扱いしているのである。そしてこれが位取り記数法の説明の直前にあることは興味深い。前述のように、まったく数え主義であった1958年学習指導要領のもとでの、記数法や計算において「0」の意味と加減算が必要になるから、それに必要な限りで「0」を教えるという、操作的な扱いそのものである。

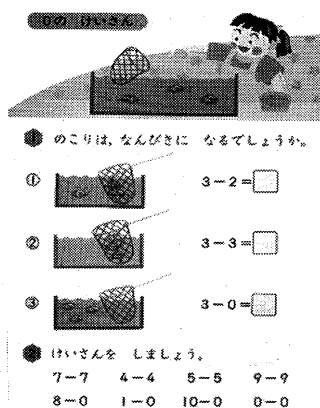


図4 学図1996

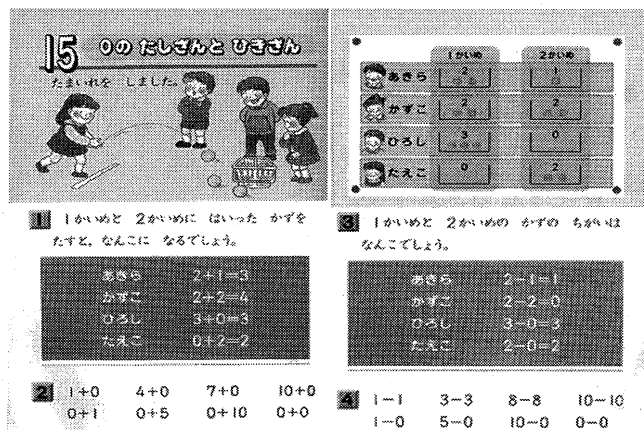


図5 啓林1996

なお、「0」を含むひき算を学図は求残(図4)で、啓林は求差で(図5)意味付けているが、求差で「0」を引くというのを考えるのは難しい。実際の操作が伴わないからである。難しいからあとまわしにしたのかもしれないが、求残のほうがはじめに「0」の意味を説明した考え方の延長上にあるし、実際の操作⁷⁾が伴ってわかりやすいから、早めに教えることが可能であるといえよう。

2位数の加減算は、学習指導要領では1年で「簡単な場合について、2位数についても加法および減法ができることを知ること」となっている。ここで「簡単な場合」とは何をさすのであろうか。2位数どうしのくり上がりのないたし算の場合で考えると、暗算であれば20+20型が簡単であるし、筆算であれば22+22型が簡単である。ここにも経験主義=暗算主義と系統主義=筆算主義の対立がある。ただし学習指導要領は、たし算の筆算は2年生で教えるとしているから、1年生の教科書は暗算しか取り上げることができない。学習指導要領が指導方法まで規制している例のひとつである。

「0」を含む計算は、一般に暗算ではやさしく筆算では難しい。わり算でいえば61÷3の暗算はやさしいが、これを3)61と筆算にしたとたんに難しくなる。1の上に0を立てるのが難しいからである。この3)1(あるいは1÷3)をどう扱うかについても、経験主義と系統主義とは異なってくる。

学習指導要領には、3年生で「除数が1位数の場合の筆算形式について知り用いること」とある。6社の教科書とも、この範囲のわり算をおよそつぎの3つの段階にわけている。

- ① 12÷3=4 のような答が1けたのわり算
- ② 16÷3=5…1 のような答が1けたであまりがでるわり算
- ③ 72÷3=24 のような答えが2けた以上のわり算

教科書によって大きく異なるのは、筆算をどの段階で扱うかということである。啓林などは③の段階ではじめて筆算を扱うが、学図などは②の段階から筆算を教えるのである。

ここで、3)1(あるいは1÷3)型の<答0余りあり>をどこで扱うかという問題であるが、啓林は③の段階の筆算のなかで初めて扱う(図6)。一方、学図は②の答1けた余りありで筆算を導入し、その最後に3)0型とともに扱う(図7)。

実は、学図がこのようなになったのは1996年版からであり、他社は依然として啓林と同様である。そして、3)1, 3)0型の筆算を単独で扱った教科書は、おそらく初めてではないだろうか(0÷3型の暗算は従来から全社が扱っているが)。

②の段階の3)1, 3)0型の筆算は、多位数÷1位数の筆算の、水道方式という「素過程」にあたる。これらが教

⁷⁾ 銀林浩氏は、「0の計算=無効な動作」という。『入門期の算数教育』(1992年、太郎次郎社)52ページ。

8 $83 \div 4$ を筆算でしてみましょう。

$$\begin{array}{r} 20 \\ 4 \overline{)83} \\ \underline{8} \\ 3 \\ \underline{0} \\ 3 \end{array}$$



3 つぎのひっ算のしかたをせつめいしましょう。

① $3 \div 5$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \overline{)3} \\ \underline{0} \\ 3 \end{array}$$

② $0 \div 7$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 7 \overline{)0} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

図6 啓林1996

図7 学図1996

科書で扱われてこなかったことは、子どもたちのつまづきの原因のひとつであった。教科書通りに教えられた子どもたちの $3\overline{)61}$ の正答率が63%で、水道方式で教えられた子どもたちの正答率が88%という調査結果⁽⁸⁾がある。ちなみに、商に0が立たない $3\overline{)734}$ の場合でそれぞれ81%、89%であるから、 $3\overline{)1}$ 型を②の段階で教えたかどうか正答率に大きく影響していることがわかる。

それでは、なぜ $3\overline{)1}$ 型のわり算がこれまで扱われてこなかったのか。それは、わり算の意味の捉え方と関連しているのではないだろうか。すなわち、以前はわり算を包含除で意味付けていたことによると考えられる。

「鉛筆が1本あります。3本ずつ配ると、何人がもらえて、何本余りますか」(包含除)

「鉛筆が1本あります。3人で分けると、1人何本もらえて、何本余りますか」(等分除)

包含除の場合、鉛筆は1本しかないのに3本ずつ配るということは考えづらい。

従来、わり算を包含除で意味付けていたのは、数え主義の影響である。数え主義では、かけ算は累加、わり算は累減=包含除で意味付ける。しかし、累加や累減は小数や分数のかけ算・わり算には使えない。そこで、かけ算・わり算の意味付けを一貫させる系統主義の立場から、かけ算は $\langle 1 \text{ 当たり量} \times \text{いくつ分} = \text{全体量} \rangle$ で、わり算は $\langle \text{全体量} \div \text{いくつ分} = 1 \text{ 当たり量} \rangle$ と等分除で意味付けることが提唱され、現行教科書もわり算の導入部分では多くが等分除から入るようになった。

等分除の場合、鉛筆1本に子ども3人という場面は実際に設定できる。そして、先生が配るふりをして、 $\langle 1 \text{ 人当たり} 0 \text{ 本, 余り} 1 \text{ 本} \rangle$ ということも納得できるだろう。そして、いずれ教科書にもこのような説明がのることであろう。

おわりに

この「0」の扱いに関する話題は、教育内容論などの講義でよく取り上げてきたものである。「10のあとに0を教えることには批判があるが、それはどのような批判か」と問うと、多くの学生は「小さい順に0から教えるべきだ」という批判である」と答えるが、数十人も学生がいれば、ひとりやふたりは、「10が1と0からできているから」と答えてくれる。

私はその「正解」が出ると喜び、「0」から教える教科書などないと言っていたのであるが、ある日、教科書研究センターの附属図書館で調べているうちに、1971年と74年の大日本図書版の教科書が、まさに「0から10まで」の順に扱っているのを見つけて驚いた。思えば、これまでも講義で話したことが「嘘」であることをあとで知って、ひとり赤面したことが何度もある。いまさら謝っても遅いのであるが、ここに記しておく。

⁽⁸⁾ 遠山啓編著『どうしたら算数ができるようになるか』(1960年、新評論社)巻末に所収の岡田進氏の調査結果より。