

# 垂直抗力の作用点

## —物理入門におけるあいまいな図解—

加 藤 徹 也<sup>†</sup>

千葉大学教育学部

### Acting Point of Normal Force

—An Unmentioned Point in the Diagram Used in the Introductory Course of Physics—

Tetsuya KATO

Faculty of Education, Chiba University

斜面上での物体の落下が既に中学校理科で扱われているため、斜面上の物体にかかる力の考察は、高等学校物理で力の合成・分解を扱う際に例題としてよく用いられている。日常生活の中で接する斜面上の物体の運動にはさらにバラエティーがあり、静止するか滑り落ちるか、あるいは転倒するかという現象の分類も重要である。斜面上の物体にかかる重力・垂直抗力・摩擦力のうち、特に垂直抗力の作用点が、転倒するかどうかを決定する重要な意味を持つにも拘らず、斜面上での直線運動の考察では垂直抗力自体が現れないため、その作用点の議論は軽んじられている。そこで、垂直抗力の作用点を導出する方法を、斜面上の物理現象への多様な興味の例とともに示した。

Since a falling object on a slope is already treated in junior high school science, consideration of forces acting on a body on the slope is well used as a familiar exercise of composition and decomposition of forces in the introductory course of physics at high school level. Around the phenomena on the slope in everyday life, one of the most serious issues is whether the body stands still, slides down, or falls down. Among the properties of gravitational, normal and frictional forces, the acting point of the normal force plays an especially important roll on the determination of the critical condition to fall down. Nevertheless, no mention of the point was often made, because the normal force does not appear explicitly in the analysis of the well-known straight-line motion. In this paper, an understandable derivation of the acting point of the normal force was described, in addition to the examples of the various interest to the physical phenomena on the slope.

キーワード：垂直抗力・摩擦力・つりあい・転倒・滑走

斜面における物体に関して、働く力や速さを考えることは、中学校理科でも取り上げられる内容である。これは、ニュートンが力学を体系化した以前からガリレイが詳細に議論していたという歴史を紹介するまでもなく、斜面上の物体の問題が極めて身近な自然現象であり、その理解がすぐに生活に役立つからであるといえる。高等学校物理になると、ニュートンによる物体の運動に関する法則についての理解を進める中で、斜面はどの教科書でも扱われる手頃な例題になっている。中学校理科の内容からの継承という面もあり、力のモーメントを学習する以前の、比較的早い段階で議論されることが多い。この場合には力、特に抗力の作用点の説明にあいまいな近似が入り込む可能性があり、これが最終的な理解を困難にする場合が多い。しかし、斜面における物体の運動を正しく理解することは、「滑り落ちるか？摩擦で止まるか？」という力のつりあいの見方だけではなく、「転倒するか？姿勢を保てるか？」という力のモーメントのつりあいに関する視点からも現実の問題として重要であり、また生徒の注意を喚起しやすいものと考えられる。

そこで、この文章では、この斜面の扱いについて注目し、あいまいに済まされている「抗力の作用点」につい

て議論したい。以降ではまず、一般的に斜面に関わる身近な自然現象の具体例を取り上げ、また、歴史的に、斜面上の物体の運動問題にはじめて本格的に取り組んだガリレイが、斜面に関するどのような有用性に注目したのかについて紹介する。次に、中学校理科や高等学校物理での現行の指導要領や教科書での扱いについて触れ、それに関する問題点を整理する。さらに、より詳しい理解へ進むために、抗力の原因を説明し、最後に、この問題を系統的に考える手順を紹介する。

### 1. 斜面に関わる身近な自然現象の具体例

先日、幼稚園の先生が「滑り台で立ったまま滑る子供がいて、注意してもまたやろうとして困る」と言っていた。滑り台は、普通は両脚と尻を斜面につけて擦りながら滑るものだ。足の裏だけを斜面につけて滑ろうとすると、足を取られて前方に転倒しやすい。転倒すると、前方は低いので斜面に当たるまで体は加速して衝撃が大きくなるし、滑り台は高いところがあるのでそこから落下する危険性もある。普通に両脚と尻を斜面につけて滑ったときにちょうど良い高さとなる手摺や縁が、立ったまま滑ったのでは低すぎて役に立たず、簡単に乗り越えて転落するおそれがある。

連絡先著者 <sup>†</sup> E-mail address :

立ったまま滑る爽快さを味わいたいのなら、雪山の斜面でスキー板やスノーボードを用いて滑り降りればよい。この場合、一般には最大傾斜の方向を真っ直ぐ進む「直滑降」では加速が大きすぎるので、斜めに進む「斜滑降」によって自分自身の滑走運動を制御しながら滑るという技術を習得することがスキーを始める第一歩となる。蔵王スキー場に行くと、300mほどの急斜面で有名な「横倉の壁」と呼ばれるコースがある。そこでは一度転倒すると最後まで止まらないという。転倒した状態では制御不能となり、直滑降のように最大傾斜の方向へ進んでしまうのである。この斜面の最大傾斜角は38度といわれているので、日頃眼にしている階段やエスカレーターの傾斜とあまり変わらない。子供の頃、階段をあやまって滑り落ちた経験があれば、両脚や尻が下に着くと、段に引っかからず滑り台を滑るように、最も下まで滑り落ちてしまうことが想像できるだろう。

斜面を滑降するときの前方への転倒は骨折のような重大な事故につながるものであるから、スキーでは初心者は重心をやや後方におき、いつでも尻餅がつけるように滑る。しかし、十分な長さのスキーの板をつけている場合、一般には（猛烈なスピードで滑降し、それが衝突などで急に止められるようなことは例外として）前方への転倒は起こらない。その理由は以降で明らかにしていくが、ここでは、転倒と滑走に関する現象を簡単な実験によって紹介しよう。

用意したものは未開封の350mlスチール缶とアルミ製の斜面（10cm幅のチャンネル（断面がコの字型の角材）の底面を斜めに立てかけたもの）である。斜面に缶を立てるように置き、手を放すと、条件によって三通りの現象が起こる。つまり、その場での静止、斜面前方への転倒（とその後の滑落）、姿勢を保ったままでの斜面上の滑走（の開始）である。転倒と滑走についての実験例を図1に示す。

この二つの実験では、斜面の傾斜角など、多くの条件は同じである。違っているのは、表面に潤滑油（呉工業株CRC5-50）を塗ってあるかないかだけで、塗っていると滑走し、塗っていないと転倒した。潤滑油は斜面と缶のあいだの摩擦を小さくするものである。また、滑り続けているときの摩擦は、滑り出す前の（静止しているときの）摩擦に比べて小さいことが知られている。これを利用すれば、缶や斜面の表面を磨くなど多少工夫する必要があるが、潤滑油を用いずに、手で初速を与えるか、与えないかの条件の違いによってだけでも同様の結果（初速あり＝滑走、初速なし＝転倒）を得ることも可能である。

体の運動に関する経験から、転倒は、重心が高いことと、両足の開きが狭いことが起こりやすくなる原因であって、腰や膝を曲げて重心を低くし、両足を広く構えれば、起こりにくくなることが知られている。これは斜面でなくても、電車の中での加減速による転倒を防ぐための常套手段でもある。尻を床面につけてしまえばさらに重心は低く、およそ転倒はありえない。図に示した実験例での缶の転倒も、重心の高さと底面の幅を変えることができれば、当然、転倒し易さは変わってくる。

これらの例から、斜面での物体の滑走や転倒という運

動には、摩擦の力がどう働くか、また重力がどこに作用しているかが問題になることが感じ取ってもらえるものと思う。また、これらと類似の現象は斜面のほかにも現れる。例えば、箱にひもをかけ、水平な床面上に置いて真横に引くとき、箱は引きずられて床面上を滑ったり、あるいは引きずられずに転倒したりする現象がある。また、黒板や冷蔵庫などに磁石の付いたクリップをくっつけるのも同様である。クリップにはさむ物によっては、黒板などの面から剥がれることなくずり落ちてしまう場合と、面にくっつきもせず簡単に剥がれ落ちてしまう場合がある。ずり落ちるのが滑走、剥がれ落ちるのが転倒に対応する。

知識を生活に生かすという意味で、これらのような滑走や転倒がどのように起こるのかをきちんと理解することは重要である。そして、高等学校物理の基礎を正しく理解すればこれが可能である。



図1 アルミ製斜面上でのスチール缶の運動 左：転倒，右：滑走。

## 2. ガリレイが重要視した斜面問題の有用性

有名なガリレイの斜面の実験は、物体が斜面を転がり落ちるときの落下速度を調べたものであり、重力の影響で等加速度運動が起こっていることを実験的に示した研究である。慣性の法則を導くのに用いられている。加速度を論じる場合、重力による自然落下時の加速は大きすぎるので、斜面はこれを軽減するために導入された。ガリレイは「新科学対話」(1638) 第三日目「位置変化について」のなか[1]でこの実験を、登場人物サルヴィヤチを通して述べている。フィレンツェの自然科学博物館に所蔵されている実験装置(復元)の写真を始め、この実験の背景は文献[2]に詳しい。また、その斜面の寸法(長さ5m, 幅25cm, 厚さ5cm程度の磨かれた角材の一端を50cmあるいは1m持ち上げたもの)や、ホイヘンスによる振子時計(1673)のような短い時間間隔を測定する手段が確立されていなかった当時、時間測定が大きな問題になったことなどは文献[3]などに説明がある。

この有名な実験は物理教育の上でも重要であるが、詳細は文献を見ていただくとしてここではその内容を省略する。一方でガリレイは斜面を別の点からも重要な問題であると捉えていた。このことを、今日的な具体例を交えながら紹介したい。

ガリレイが斜面を詳細に議論するのは、「レ・メカニケ」(1593頃)[4]という講義録においてネジの効果の解析をするところにもある。この書でガリレイは、その当時の風潮、つまり、てこや滑車などの機械・道具を活用していた職人がその有用性に魅せられてしまって不自然な期待を持っていたことに対して、これらの機械も言うならば物理の原理に従い、決まった働きしかしていないのだ、ということを論証したものである。特にネジについては、ガリレイには「人間の叡智によって、さまざまな便利さを手に入れるために発明された、他のあらゆる機械的な道具の中で、第一位を占めるように思われる」というだけあって、議論には熱が入っている。

ネジは、身の回りの生活においてさまざまな形で使われている。ここではひとつの例として、テーブルの脚の

長さを調整するためのネジを考えよう。四脚のテーブルが平らでない床面に置かれると、テーブル面ががたついてしまう。三脚ならばがたつくことはないが、テーブル面が水平にならないことがある。これらをカバーするために、テーブルの脚の床と接する部分(ゴムなどでできた底面部)の近くにネジが付いていて、それを回すと脚の長さが若干伸び縮みし、水平でがたつかないテーブル面になるよう調整できる(図2)。このようなネジは、テーブルが相当重くても回すことができる。

ネジの構造は、ネジ棒あるいはボルトという、外側にネジ山が刻んである棒と、ナットという、この棒が入る穴があり内側にネジ山が刻んであるものからなる。テーブルの脚長を調整するネジの場合はたいいてい、ボルトが底面部と、ナットが脚本体とつながっていて、ボルトを回転させて長さを変えている。ボルトの外径の円周を一回り廻すと、ネジの山一個分の長さだけ脚本体を上を持ち上げ、脚全体としては長くなる。テーブルの脚にかかる荷重はナットのネジ山がボルトのネジ山を押す力になっている。この状態で脚を伸ばそうとしてボルトを回すと、ナットのネジ山の下にボルトのネジ山が入り込んでナットを突き上げる。

ボルトのネジ山は螺旋状の坂道を小型にしたものであり、この突き上げの効果は直線状の坂道に置き換えて考えるとわかりやすい。具体例としては、バールという道具などにある楔(くさび)を考えよう。腕の力ではびくともしないほど重たいものでも、その下と床面の間に楔形の物を押し込み、楔をハンマーでたたいて押し込めば、楔の突き上げによって重たいものを上方に動かすことができる。バールはこのようにして先端を重量物の下に押し込み、その後、てこの原理で重量物を大きく持ち上げる道具である(図3)。

楔の部分の打ち込みは、ボルトの回転によるナット(と脚全体)の突き上げと同じ効果を持っている。いずれも図4のように、傾斜のゆるやかな斜面を比較的長い距離を移動させながら、斜面上の物体をわずかに押し上げている。

ガリレイの著作の記述は、仕事やエネルギーの概念が明確になっていないので解りづらいが、移動距離で損をする分だけ力の大きさは得をすることにより、横向き的小さな力で重い物体を持ち上げていることが説明されている。一般にネジの斜面は傾斜がとてゆるやかであり、

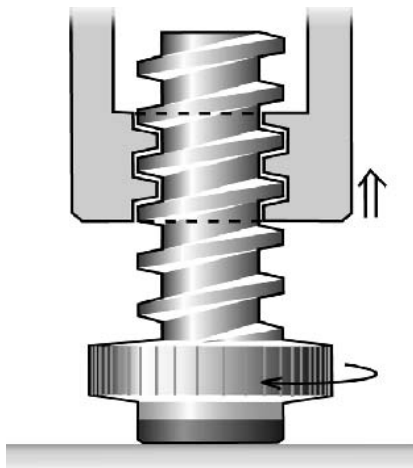


図2 テーブルの脚の調整ネジ 矢印は各部の移動方向を表す。

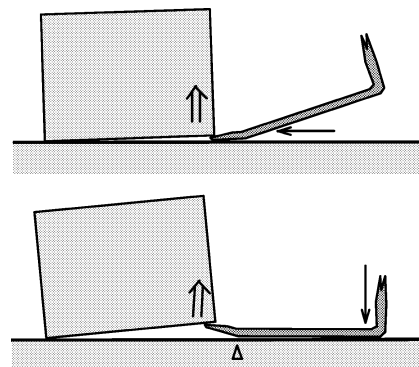


図3 バールの利用法 上: 楔の打ち込み, 下: てこの原理。矢印は各部の移動方向を表す。

そのような場合には、押し込み（ネジの回転）には長い距離（大きな回転角）が必要になるが、より小さな力で重量物を上げることができる。しかし、無限に重い物を持ち上げられるわけではなく、重量物の重さと必要な力の関係は、斜面の傾斜角と幾何学的に結びついている。

このネジのような例からも、斜面は、私たちの生活の中で欠かせない重要な仕組みの原理になっていることがわかる。

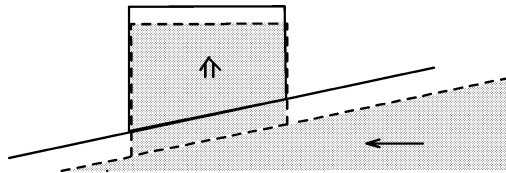


図4 斜面の移動と重量物の持ち上がり 矢印は各部の移動方向を表す。

### 3. 中学校理科・高等学校物理での扱いとその問題点

以上で述べたような斜面上の物体にかかる力を調べて、静止・転倒・滑走、あるいはネジの場合のようなゆっくりとした上昇などの物体の運動が、基本的な法則に従ってごく自然に起きているのだということを論じることは、高等学校物理の「運動とエネルギー」の内容における例題として相応しい。この場合、物体の変位（移動）の方向や大きさと、力の方向・大きさを明確に区別することが重要である。前節で示した図の中には各部分の移動方向が示してあるが、力については重力すら示されていない。物体の運動に関係のある力をすべて考えることができれば、それらを運動の法則にあてはめることによって、物体の運動は説明される。しかし、移動は見えても力は見えない。

見えない力を、説明のために目に見える形で図示することは、力学の論理を幾何学的・直観的に扱うためには欠かせない手法であろう。特に、物体に働く、斜面に平行な方向の力は、物体の変位（移動）の表現としばしば混同してしまうこともあるが、それだけに、物体の運動状態を直接左右する力であることはすぐわかる。斜面に平行な方向の力とは、具体的には、重力の斜面平行成分（あるいは外部から物体を斜面に沿って引く力）と、それに対する斜面からの抵抗としての「摩擦力」である。これらは物体に対して、それぞれ前方と後方から綱引きのように引っ張り合う（図5）。

一方、斜面に垂直に働く力、つまり、重力の斜面垂直

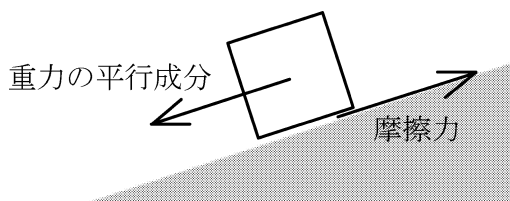


図5 斜面に平行な力 前方向下向き：重力の平行成分，後方向上向き：摩擦力。摩擦力の作用点は斜面上をずらして描いてもかまわない。

成分（あるいは外部から物体を斜面に垂直に押す力）と、それに対する斜面からの抵抗としての「垂直抗力」のほうは、やはり物体に対して、それぞれ上方と下方から押し競饅頭のように押し合っている（図6）が、これらについては、物体の起こりうる運動がこの面に沿ったものだけという限られた運動状態しか議論しないならば、あらわに考えなくても良い量である。実際、前節で省略したガリレイの有名な斜面の実験に関して、中学校理科第一分野で取り上げる場合は、これらの斜面に垂直に働く力は無視することになる。指導要領に、「力の合成と分解は扱わないこと」と明記されているためであるが、直線運動ではごく自然な省略といえる。

斜面からの抵抗としての二つの方向の力、つまり、斜面に平行の「摩擦力」と垂直の「垂直抗力」は、力がもともと目に見える物理量ではないということに加えて、それらの大きさは、それぞれの大きさが綱引きや押し競饅頭で例えたときの、相手の力の大きさに合わせて変化するという点によるわかりにくさを持っている。ところが、後で言及することになるが、転倒するかどうかをきちんと議論する上では、これらの力のうちでも特に、場合によっては省略が可能になる「垂直抗力」の作用点をどう考えるかが最も重要な鍵を握ってくる。垂直抗力の作用点に、考察すべき余地があるということは次節で示す。

転倒とは突っかかる点を中心とした回転運動であり、従って、これを議論するには、この原理として知られる「力のモーメント」のつりあいを考えなければならない。その結果として、転倒しない場合の垂直抗力の作用点は、物体の形やその重心の位置などから幾何学的に決まる。そして、多くの教科書ではそれを反映させた正しい図示をしているが、力のモーメントに関する内容の前にこの問題が扱われていたり、あるいは演習問題の意図として、力の大きさだけを議論し、作用点あるいは物体の回転運動まで考えないものとしたりするために、その図の中の、垂直抗力の作用点に関する説明はない。これは、教科書の製作者が、教育の現場において必要に応じて補うべき内容と判断してそうになっているものと考えられるが、現場で不注意に扱くと、復習する生徒に疑問が残るなど、内容として完結しないことになってしまう。

もともと物理学には、歴史的には自然哲学と呼ばれた

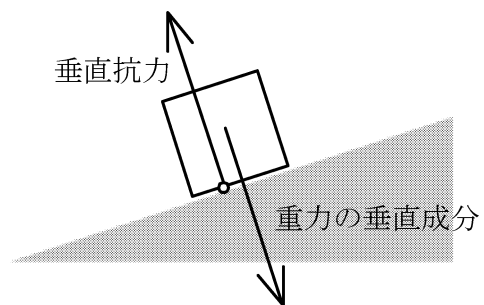


図6 斜面に垂直な力 下向き：重力の垂直成分，上向き：垂直抗力。この垂直抗力の作用点が幾何学的な関係から定まるので、適当にずらして描くと生徒に混乱を招く可能性がある。しかし、斜面上での直線運動だけを論じる場合はこれらの力は省略される。

ように、自然現象を支配する法則を発見し、理論として体系化するという面がある。物理学の教育においても、現象を見つめながら理論で扱う概念を定義し、さらに扱う現象を広げながら概念を追加したり定義しなおしたりして進めていく。それだけに、同じ現象を繰り返し取り上げ、新たに加えられた概念を用いて考察しなおすということは意義深いものとなる。また、教育的な配慮として、取り扱う概念に制限があるのは当然であるとしても、取り扱う現象に明確な制限を加えることはできない。生徒の主体性を尊重しつつ創造的な思考力を育てることが狙いとなる「課題研究」を充実させるためにも、身近にある興味深い現象を、教科書に登場する順序を気にせず総合的に考察できるように整理する必要がある。この意味で、垂直抗力の作用点への注意を喚起したい。

なお、ガリレイによる斜面上の落下運動の速度を解析する内容は、中学校理科から高等学校物理にかけて繰り返し扱われ、概念を追加して整理しなおす対象の、まさによい例になっている。中学校理科では、力が働かない物体の運動は等速直線運動で速さが変わらないこと、また、速さが変わる運動には力が働いていることを見いだす、という内容と対応しているが、加速度は扱わない。高等学校物理では加速度を扱う際に、あるいは「物理学の歴史における著名な実験」としての課題研究として、取り上げられている。しかし、ガリレイが扱わなかったという理由もあるが、転倒するかどうかについては触れられていない。

#### 4. 抗力の原因

二つの物体が互いに力を及ぼしあうとき、それぞれの物体が受ける力は同じ大きさで向きが逆になることが知られる。「作用・反作用の法則」である。斜面に置かれた物体では、重力などにより物体が受ける力はそのままだ斜面に作用し、その反作用として、垂直抗力と摩擦力が働いている。これら二つの力をベクトルとして合成したものは「抗力」と呼ばれる。これらの力をベクトルとして表記する場合、その作用点は必ずしも接触面の中央ではない。その理由を抗力の原因を探りながら考えよう。

まず、斜面と物体は普通、ともに固い物質であるとみなされているが、これはひとつの近似であって、実際には非常にわずかながら、力をやり取りするときに変形している。この変形の様子は、スポンジやゴムなどの変形であれば眼に見ることも可能である。卓球のラケットはラバー・スポンジ・木板の三重構造になっていて、ボールが勢いよく当たるとスポンジ部分がへこみ、ボールとラバーの接触面積が大きくなる。またボールが高速回転しているとラバー部分が横にずれる（図7）。

スポンジにおいては圧縮（図8）、ラバーではせん断（図9）と呼ばれるタイプの変形が特徴的である。それぞれ、受ける力の大きさに比例するように変形の度合いが大きくなり、元の形に戻ろうとして、外部へ反発力を与える。せん断という変形は、ゼリーやプリンを容器から出して盛り付けたときの横揺れでも起きている変形である。

図8・9に示した反発力の方向を見れば、圧縮変形に

よる反発力（の接触面全体での合計）が垂直抗力、せん断変形による反発力（の接触面全体での合計）が摩擦力であることがわかる。

スポンジは高分子が空気の泡（フォーム）を包み込んだ物質であり、泡が縮むことで体積が容易に小さくなり、圧縮変形が見える。一方、卓球のラバーには1mm程度の列柱状のでっぱりが規則正しく並んでいるので、この列柱が平行に倒れることにより、容易にせん断変形が見える。ただし、どの物質でも互いに力を及ぼしあうときに、その接触面上や物質内部で、これら圧縮変形とせん断変形が起きている。ラバーにおける圧縮変形は小さくて見えないが、スポンジを圧縮変形させる力と同じ力はラバーにもかかっており、その意味で、ラバーも圧縮変形しているはずである。いずれの変形も、その原因は外部の力であって、その力と同じ大きさで逆向きの反発力を外部へ与えるという点は、一般のゴムやバネと同様の、弾性力としての性質である。

卓球のラケットでは、場所によって変形の度合いが異なるので、それに応じて、場所によって反発力の大きさが異なっている。もともと平坦な斜面と物体のあいだで力をやり取りするときも同様に、場所によって変形の度合いが違い、反発力も場所によって異なる。このことは、斜面がゆるめの粘土でできていれば物体がどのように食い込むかを考えれば明らかだろう（図10）。

以上のように、接触面の上での力の大きさは一般には均一ではない。従って、接触面の中央に抗力の作用点があるとするわけにはいかないのである。高等学校物理の教科書では、このことは図の上での考慮はされているが、

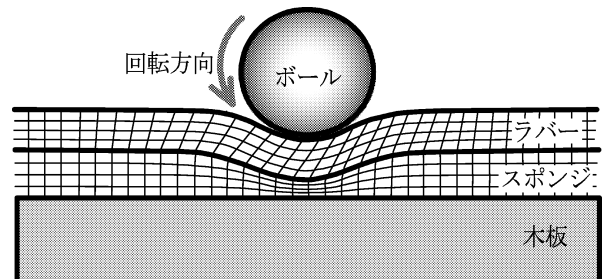


図7 卓球のラケットにボールがぶつかる様子 ラバーとスポンジでは変形の様子が異なる。

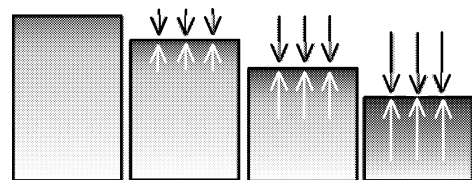


図8 スポンジにおける圧縮変形 内側の矢印は外部への反発力を表す。

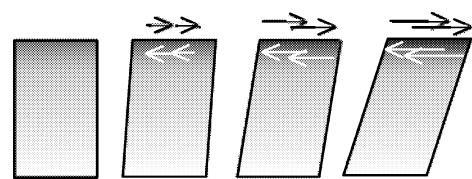


図9 ラバーにおけるせん断変形 内側の矢印は外部への反発力を表す。

言及はされていない。

斜面上の物体にかかる力については図11に示す。関連する現象として前述した、水平床面上の箱を横に引く場合（図12）や、黒板についた磁石の場合の図（図13）も示そう。

これらの場合、抗力の作用点は、斜面の場合はその傾きにより、また、箱を横に引く場合や磁力で横に引かれている場合はそれらの力と重力の比により幾何学的に決まることを読み取ってもらいたい。

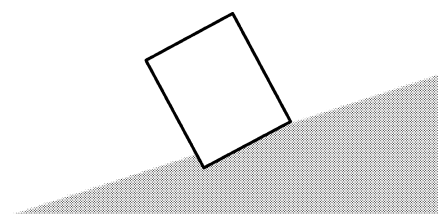


図10 斜面が粘土できている場合の物体の食い込み

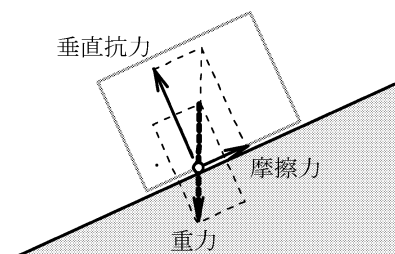


図11 斜面上の物体にかかる力 小さい丸は抗力の作用点を表す。

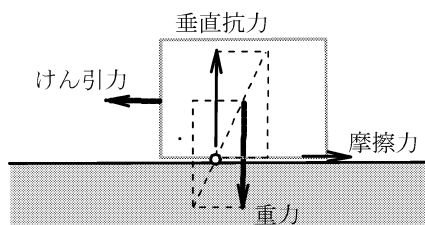


図12 水平床面上の箱を横に引く場合 小さい丸は抗力の作用点を表す。

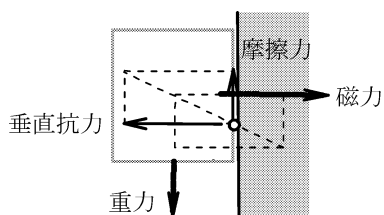


図13 黒板についた磁石の場合 小さい丸は抗力の作用点を表す。

## 5. 斜面上での物体の運動に関する考察手順

前節の図10～12を見ると、斜面の傾きが違う場合、あるいは横向きの力と重力との比が違う場合は、作用点が接触面の下端になってしまうこともありえる。しかし、接触面からの反発力が接触面の外からくることはありえない。つまり、そのときはつりあいが保てないことになる。摩擦力を減らすことによってつりあいが保てなく

なるのか？転倒と滑走のどちらが起こるのか？その理由は？これらの疑問に答えるための考察手順を最後に紹介しよう。

以降では、この問題の思考手順を、大学の1年生向けのある講義（普遍教育）で実際に使用した課題とその解説に手を加えたものにより紹介する。講義の対象学生には高等学校物理を学習していないものを含む。内容としては付録部分を除いて高等学校物理の内容程度である。

**課題** 底の平坦な紙コップに粘土を詰め、斜面に立てて置こうとした。力の作用点に注意し、また正確に図を写して答えなさい。ただし、紙コップの重さは無視できるとする。

**【1】** 下図（図14）の(A)の粘土の量が少ないときには立てておくことができた。紙コップ全体にかかる力として

- ① 地球が紙コップ全体を引く重力
- ② 斜面が紙コップ全体を面に垂直に押す抗力（垂直抗力）
- ③ 斜面が紙コップ全体を面に平行に引く抗力（摩擦力）

のベクトルを記入した図を例示し、力のつりあいを説明しなさい。

注：①（重力）の作用点は重心であり、②と③（抗力）の作用点は接触面の上のどこかである。また、転倒しないので、②と③をベクトル合成したもの（全抗力）が①と一直線上になる、つまり全抗力はコップの重心を通る直線上にある。

**【2】** 下図（図14）の(B)のように量を増すと立てておくことができず、転倒してしまう。同様に①～③の力のベクトルを記入した図を例示して、どちら向きに回転するか説明しなさい。

注：転倒することは、②と③をベクトル合成したものが①と一直線上にならなければ回転してしまうことで説明できる。

**【3】** 斜面に油がたれて、斜面とコップの底面との摩擦が小さくなった。この結果、(A)でも(B)でもコップは斜面を転がることなく滑り落ちた。このときの①～③の力のベクトルを記入した図を例示して、力のつりあいが取れていないこと、および転倒しないことを説明しなさい。

注：いずれも転倒しないので、②と③をベクトル合成した全抗力のはコップの重心を通る直線上にある。なお、ここでは、すべり運動しているときの動摩擦力は【1】【2】で滑らないときの静止摩

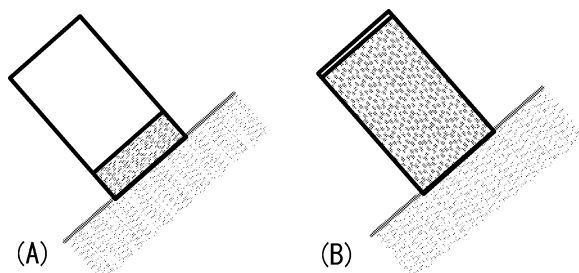


図14 課題の図

摩擦力より小さい。

**課題解説** 課題で設定した粘土の場合は幾何学から重心の位置が容易にわかるが、ここでは別の現象例として、底の平坦な紙コップに水を入れ、斜面に立てて置こうとした場合を扱おう。固体に比べて液体は低いほうに流れるので、下がっている端のほうへ重心が移動するため、固体の場合よりも転倒しやすい。摩擦力が大きい場合には倒れるコップが、摩擦力が小さくなって斜面を滑るときには倒れないという現象を、力のベクトルによって説明しようというこの課題の狙いは、変わらない。

まず、コップにかかる①重力、②重力の斜面に垂直な成分、③重力の斜面に平行な成分は図15のようになっていることを確認しよう。

次に、重力の作用線が斜面と交わる点に注目しよう。これが上図15(A)のようにコップの底面内であれば、そこがコップが斜面を押す力の作用点になりそうであるが、一方で、図15(B)のようにコップの底面から外れてしまった場合は、コップの底面の外でコップが斜面を押すことはありえないのだから、コップの底面のどこかに、コップが斜面を押す力の作用点を探さなければならないことになる。図15(B)の場合のように、一般には、コップにかかる重力がそのまま「コップが斜面を押す力」になるとは限らない。そこで、いずれの場合もこの力の反作用である「斜面がコップを押す力（抗力）」とコップにかかる重力とを合わせて、コップにかかる力全体とコップの運動状態の関係を先に考えることにしよう。

【1】 水量の少ないときにはコップを立てて置くことができた。

図15(A)の場合で、摩擦は十分大きく、コップが斜面を滑り出すことはない場合を考える。コップにかかる力は、コップにかかる重力と、斜面から押された抗力である。抗力を斜面に垂直な成分と平行な成分に分解したとき、前者を垂直抗力、後者を摩擦力（静止摩擦力）という。まず、垂直抗力と摩擦力を分けずに、これらの合力である抗力を考えよう。

コップを立てて置くことができたということは、コップにかかる重力と抗力はつりあっているはずである。ここで、一つの物体に働く二つの力がつりあうのは、同じ大きさで逆向きの関係があるときであるから、抗力は重力と同じ大きさで上向きになる。また、このときコップは転倒（回転）しない。これを確認するには、仮に転倒するとしたらどちら向きに転倒するかを調べたときに、右回りの効果と左回

りの効果がつりあうか、あるいは両方ともゼロの場合であれば転倒は起こらないという考え方をとるのがよい。ここで、回転の効果とは、「てこ」のつりあいが破れることであり、図16のように、力の作用線が回転中心より上側で、力が左向きなら、左回りの回転効果があるということを考えている<sup>2</sup>。

今の問題では、どこを支点（回転軸）として転倒（回転）するかによって、回転の効果は異なって見える。回転が起こらない場合はどこを回転軸にとっても同じ結果になるはずなので、ここでは重心のまわりの回転を考えよう。重力は重心にかかる力であり、回転の効果はない。従って抗力にも回転の効果はないはずである。つまり、抗力の作用線は重心を通る直線である。

以上のことに加えて、抗力の作用点は「コップの底と斜面の接する部分のどこか」であることを考慮すれば、抗力の作用点は重力の真下になる。コップが斜面を押す力の作用点もこの点であり、ここで押し合っていると考えるわけである。④抗力や、その成分としての⑤垂直抗力と⑥摩擦力を図示すると、図17(1)のようになる。重力①と抗力④だけの図17(2)は、コップが受ける力全体を示すもので、コップの運動状態（この場合は力がつりあって静止していること）を表すという意味で分かりやすい。また、あるいはその成分ごとのつりあいの図（図17(3)(4)）を

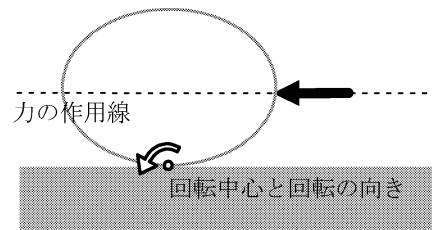


図16 力の向き・力の作用線と力の回転効果

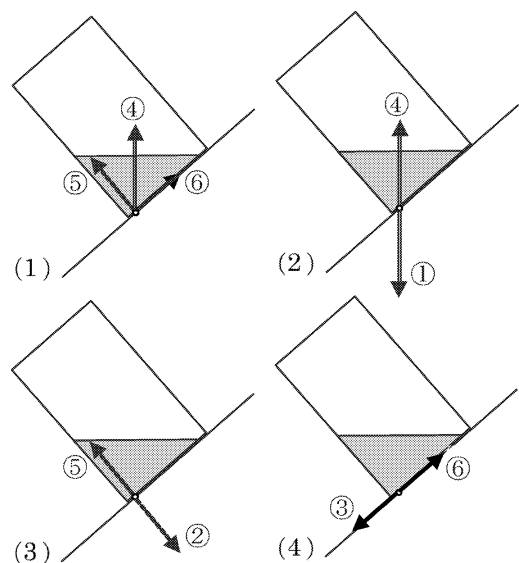


図17 斜面がコップを押す力と、力のつりあい (1)斜面がコップを押す力④およびその成分としての垂直抗力⑤と摩擦力⑥。(2)コップにかかる力全体や、(3)斜面に垂直な成分あるいは(4)平行な成分ごとのつりあい。

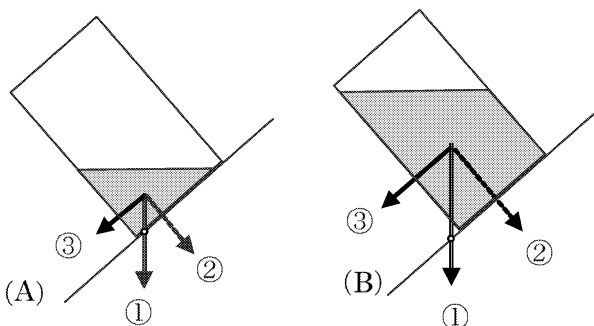


図15 コップにかかる重力①とその成分②③

描くと、②と⑤や、③と⑥が同じ大きさであることが分かりやすい。なお、力をかけたときの物体の変形が無視できるほど小さいなら、力はその作用線の上であれば、ずらしても効果は変わらない<sup>3)</sup>ので、図17(3)(4)では重力の各成分の力②③をずらして描いた。これにより、②は地球がコップを斜面に押し付ける力、③は地球がコップを斜面下方へ引く力という意味合いが分かりやすくなるかもしれない。①と④は同一直線上にあることに注意しよう。

【2】 水量が多いときにはコップが転倒した。

課題の図14(B)で摩擦が大きい場合、転倒する。転倒しているあいだはコップと斜面の接触は転倒のときの支点のみであるから、作用・反作用の関係にある二つの力、コップが斜面を押す力と斜面がコップを押す力（抗力）の作用点は、この点である。では、これらの力の方向はどうなるか？重力と同様に鉛直方向だろうと考えるのがひとつの考え方だろう。<sup>4)</sup>この場合のこれらの力は、図18のようになる。コップにかかる力をまとめると図19に見られるように、①と④は同一直線上ではない。重力①は「転倒の支点」を中心に左回転の効果があり、抗力④には回転の効果がないので、結果として左回りに回転（転倒）する。

【3】 斜面とコップの摩擦力が小さくなったら、水量が少ない場合も多い場合も、転倒することなくコップが斜面を滑った。

これは摩擦力が小さくなって転倒せずに斜面を滑っている場合である。重力の作用線が斜面と交わる点か、図15(A)のようにコップの底面の中にあるか、図15(B)のように外に出ているか、という条件は、摩擦力が大きい(1)(2)の問題と変わっていない。興味深いのは、図15(B)の場合でも、摩擦力が小さければ転

倒しないということである。

まず、図15(A)の場合を考えよう。ここで見通しの良い考え方は、斜面に沿って滑り出すのだから、コップには斜面に沿った「力」が働いているとするものである。ここで言う「力」とは、コップにかかるすべての力の合計であり、従って、重力と抗力のベクトル和である。少し一般的に扱うなら、既知ベクトル①と未知ベクトル④のベクトル和の方向が分かっている場合、この和の方向とそれに垂直な方向について、それぞれ①と④を分解すれば、垂直な成分②と⑤は足してゼロ、平行な成分③と⑥は足して和の方向になる、といえる。この指針で考えれば、垂直抗力⑤の大きさと、摩擦力⑥の大きさの限界（③より小さい）が決まる。あとは抗力の作用点を決めなければならない。

まずはこれを保留して図を描くことにしよう。作用点を考えない段階では物体の大きさを点で描けばよい。なぜなら物体を質点で扱うときは、物体に働く力の作用点をすべて同一の点とみなすからである。すると図20のようになる。転倒や回転を考えないときは、このようにするとわかりやすい。

次に、コップが転倒可能なのに転倒しない理由を考える。それには、先ほど述べたとおり、抗力④の作用線は重心を通ると考えればよい。図17のときと比べて今の場合、抗力④は垂直抗力⑤と摩擦力⑥の合力なので、その作用線は少し傾いている。そこで図20の④と同じ傾きの直線を重心から延ばし、それ

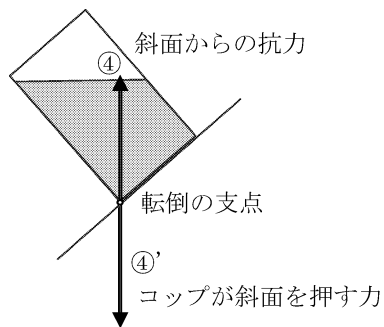


図18 転倒するコップが斜面を押す力と抗力の作用・反作用の関係 厳密には図25のように修正される。

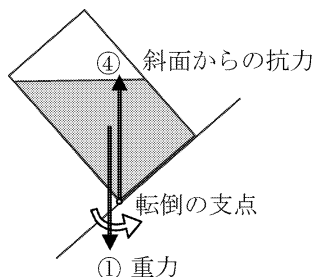


図19 転倒するコップにかかる力 厳密には図26のように修正される。

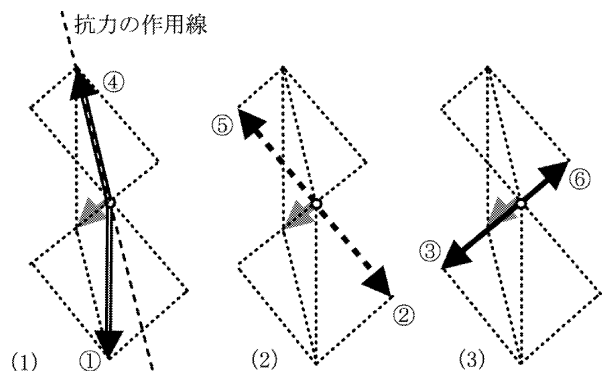


図20 質点と見なしたコップにかかる力 (1)重力と抗力、(2)斜面に対して垂直な成分、(3)平行な成分。

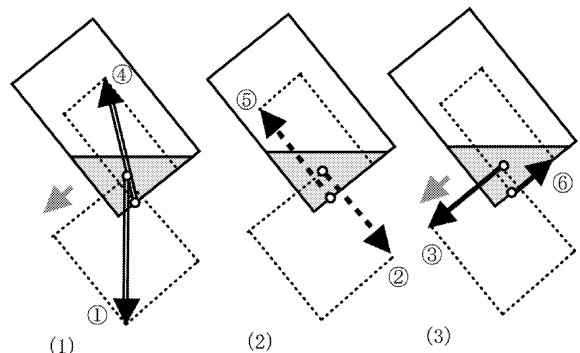


図21 摩擦力が小さくなって滑り落ちるとき、コップにかかる力 全体①④、斜面に対して垂直な成分②⑤、平行な成分③⑥。

が斜面と交わる点として、抗力の作用点が定まる。

あるいは、図20の中の④⑤⑥の長方形を平行移動して、④の作用線が重心を通りつつ、作用点を斜面上に置けばよい。この結果は図21のようになる。これは図17に比べて、摩擦力が小さくなった分だけ抗力の作用点が上方に少しずれたものである。

十分摩擦力が小さければ同じことが図15(B)の場合でも言える。例えば摩擦力がゼロになってしまえば、抗力は垂直抗力の成分しかないから斜面上に垂直になる。小さな摩擦力がある場合を図22(1)に、摩擦力がゼロの場合を図22(2)に示す。これらの図が、コップが斜面を滑っているときの力を説明する図である。

以上から分かったことをまとめてみよう。

- コップが倒れやすいのは、斜面の傾きが急で、コップの重心が高いときである。このとき、重力の作用線が斜面と交わる点が低いほうへ移動するので、コップの底面から外れやすい。
- 重力の作用線が斜面と交わる点がコップの底面に入っているならば、そこが抗力の支点となり、コップは転倒しない。
- 重力の作用線が斜面と交わる点がコップの底面に入っていない場合で摩擦力が大きい場合、抗力の作用点はコップの底面の端まで移動するが、それ以上低いほうには行かないので、重力による左まわりの回転効果が打ち消されず、転倒する。
- 重力の作用線が斜面と交わる点がコップの底面に入っていない場合でも、摩擦が弱ければ抗力の作用点は高いほうへ移動するので、これがコップの底面に入れば転倒しなくなる。
- 極端な場合として、摩擦がまったくない場合は転倒を起こすことはない。

一言でまとめれば、重心が前に出ると抗力の作用点がコップの端まで下がってきて倒れやすくなること、また摩擦力が小さくなると抗力の作用点が逆に上がって倒れにくくなるということがわかった。斜面上でのコップの運動は、斜面からの抗力がコップをどのように押し返すかにより類別できる、ということができる。

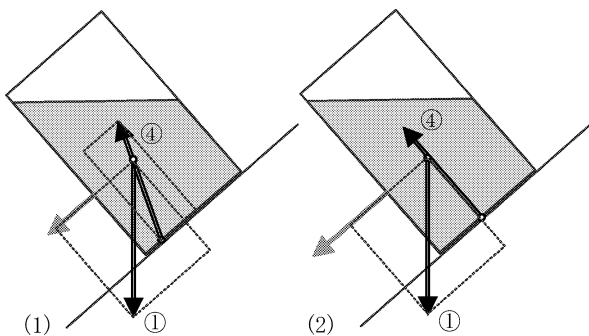


図22 摩擦力が小さいとき(1)およびゼロのとき(2)の、コップにかかる重力①と斜面からの抗力④ 斜面上に沿って下向きの矢印は、①と④の合力であり、これが滑走の原因となる。重力の作用線が斜面と交わる点がコップの外にありながら、転倒は起こらない。

**付録** ここでは、コップの転倒を、剛体の運動方程式<sup>5</sup>を使って解析してみる。水は流れるので剛体ではないから、氷や粘土で置き換えたものを想定して議論を進めてみよう。

コップが転倒しているとき、コップの重心は、転倒の支点を中心とする円の上を動く。重心と支点を、それぞれ点G、点Oとしよう。ここでは、重力①を線分GOに平行な成分②'と垂直な成分③'に分解して考える(図23)。同様に、抗力④も線分GOに平行な成分⑤'と垂直な成分⑥'に分解する(図24)。

線分GOに平行な成分②'と⑤'は同じ大きさになる。これは、重心Gが半径一定の円の上を動くという拘束条件から分かる。従って、抗力のGOに垂直な成分⑥'が決まればよい。これを大きさ $f$ とし、線分OGの長さを $r$ とする。コップの質量を $M$ 、重心まわりのコップの慣性モーメントを $I$ とし、線分OGが鉛直方向となす角度を左回りに $\theta$ ととると、以下のような運動方程式が成り立つ。

$$Mr \frac{d\omega}{dt} = M g \sin \theta - f$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = f r$$

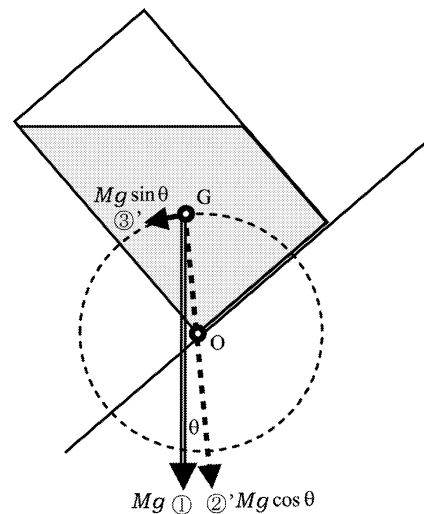


図23 重力とその成分

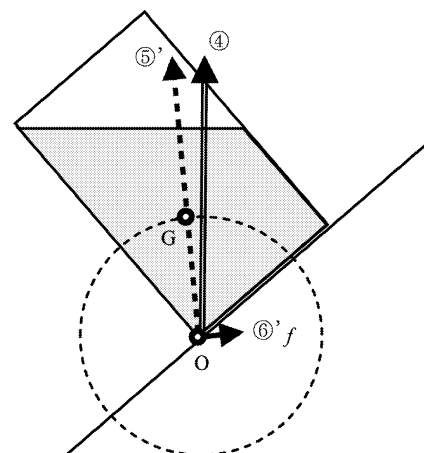


図24 抗力とその成分

ただし  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  である。二つの式は、重心の運動方程式と、重心まわりの剛体回転の運動方程式である。これらより  $\frac{d\omega}{dt}$  を消去すると、

$$f = \frac{I}{I + Mr^2} M g \sin \theta$$

が成り立つ。

質点で扱う場合、慣性モーメントを無視 ( $I = 0$ ) する。このとき明らかに  $f = 0$  となり、図21のように、抗力は重心に向かう力となる。一方、 $I \gg Mr^2$  を仮定すると  $f = Mg \sin \theta$  となり、図19のように、抗力が鉛直上向きになる。一般の場合、大雑把に扱えば  $I$  は  $0.5Mr^2$  程度であるから、結果として、 $f$  は  $0.3 Mg \sin \theta$  程度となる。従って、「抗力は、重心の方向を向く場合 (図21) と、鉛直上向きの方向を向く場合 (図19) のあいだの向きを向く」ということが言える。その結果、図18は図25へ、図19は図26へ、それぞれわざわざに変更されることになる。

## 6. まとめ

斜面上の物体の物理学にかかわる興味の紹介と、転倒や滑走が起きるときの力に関する解説をかなり些細なことにまでこだわっておこなった。幾何学的な説明は直感的でわかりやすく、そのため、力のベクトル図による運動の説明は印象に残りやすいものであるだけに、勉強がさらに進んだときに混乱を起こさせないための工夫が必要ということを念頭におくべきである。

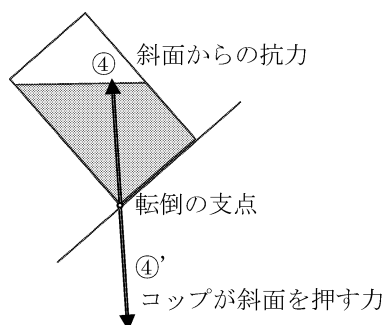


図25 図18の修正版 ④, ④' は一直線上だが鉛直方向からずれている。

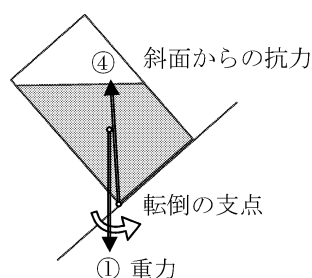


図26 図16の修正版 ④は鉛直方向ではない。また、図16からの修正は、転倒 (回転) の運動に影響を与えない。

## 文献

- [1] ガリレオ・ガリレイ著「新科学対話」今野武雄・日田節次訳、岩波書店 1948年 下巻p. 42～44。
- [2] 豊田利幸著「物理学とは何か」岩波書店 2000年 p. 32～41。
- [3] チャールズ・ジンガー著「科学思想の歩み」伊東俊太郎・木村陽二郎・平田寛訳、岩波書店 1968年 p. 260～262。
- [4] 豊田利幸責任編集「世界の名著21 ガリレオ」中央公論社 1973年, p. 211～270。

## 注

<sup>1</sup> コップと斜面の力がやり取りする力は、これらが接触する面全体に広がっている。広がった面に働く力は「応力」と呼ばれ、ある部分にかかる応力は、その部分の面積あたりの力として定義される。各部分の面積と応力の積を面全体について合計したものが面にかかる「力」である。その作用線や作用点の位置が面の中のどこかという問題は、一般には簡単ではない。

<sup>2</sup> 回転効果の量を議論するには、回転中心から力の作用線までの距離と力の大きさの積をとればよい。この積は「力のモーメント」あるいは「トルク」と呼ばれる。右回りか左回りかに対応して、この量には符号 (あるいはベクトルにする場合はその向き) を考える。

<sup>3</sup> 高等学校物理の教科書によっては、力の作用点の意義を強調するために、同じ作用線上の力でも、作用点が異なることによって変形の結果が異なることを示しているものもある。たしかに、大きく変形する弾性体に対して、前を引くのと後を押すのでは違った変形をする。しかし、変形の形状に関する議論はそれ以上何もされていない。ここでは、一般的に、物体の変形はほとんど無視できるほど小さいという性質を利用した記述をしている。

<sup>4</sup> 実はこれは、厳密には正しくない。この議論の詳細は付録で述べたが、ここでの議論の本筋にはそれは無関係なので、ここでの扱いが近似的に成り立つと見なして、このまま議論を進める。

<sup>5</sup> 大学理工系の初等力学教科書を参照。