無裁定価格理論の学際的アプローチ

An Interdisciplinary Approach to the Non-Arbitrage Theory

井　上　猛　継

INOUYE Taketsugu

要旨　本稿は、「デリバティブに対する価格決定の理論」の中核となる基本定理［無裁定の条件:同値マルチンゲール測度の存在条件、市場の完備性:同値マルチンゲール測度の一意条件］を、証券市場モデルに依存することなく定式化[確率測度の決定問題を提示]し、マルチンゲール理論の定義理解を前提に、線型代数の基礎知識だけで完全に問題を解決する。この結果は直ちに価格決定理論に応用できるが、測度決定の問題自体は数学的必然性を持つ固有の存在である。必然的な問題と明快な解決を提示して、応用の根底にある理論構造を解明するのが本稿の目的である。経済学理論の立場からは、経済学的モデル化を先行させ、その中で基本定理を定式化し、マルチンゲールを後に回す方式が標準的である。これに対し、マルチンゲールの定義が前面に出て、基本定理のインフラが先行し、証券市場の経済学的モデル化が最後になる方式は、経済学と数学の両面で負担が少なく、学際的アプローチに適している。

1. はじめに

本稿は、「条件付請求権(デリバティブ)に対する価格決定(プライシング)の理論」の中核となる基本定理［無裁定の条件:同値マルチンゲール測度の存在条件、市場の完備性:同値マルチンゲール測度の一意条件］を、証券市場モデルに依存することなく定式化[確率測度の決定問題を提示]し、マルチンゲール理論の初歩的理解(定義の理解)のみを前提に、線型代数の基礎知識だけで完全に問題を解決する。この結果は直ちにプライシング理論に応用できるが、測度決定の問題自体は数学的必然性を持つ固有の存在である。必然的な問題と明快な解決を提示して、応用の根底にある理論構造を解明するのが本稿の目的である。

筆者は、金融数理に対する学際的アプローチの具体化を目標に、プライシング理論の数学的基盤を厳密かつ初等的に構築する研究を進めている。その一部は、修士論文[内容:有限離散型確率解析とギルサノフの定理の初等的証明]、博士課程・書評論文1[内容:「条件付」の本質解明と条件付期待値の導入方式]で発表した。また、社会文化科学研究科の研究プロジェクト[03－32:金融数理の基礎教育課程の構築に関する研究]の2003年度成果として、ラドン・ニコディムの定理と確率測度の変換定理を、一般形式を損なうことなく有限離散バージョンで定式化し、詳細な証明を与えた。これ等に対し、本稿は無裁定価格理論の数理基盤を直接に論じて

おり、学際的アプローチの中核を与えている。

修士論文の有限離散型確率解析においては、可予測2次共変分過程の本質に迫る、新しい確率微分公式を発見し証明した。書評論文においても、「条件付」の本質を把握するための新しいアプローチ、「部分確率空間→乗法公式、直積確率空間→独立性、相対確率空間→条件付」を打ち出した。研究プロジェクトでは、通常は金融数理の大きな数学的負担と見做されている測度論の領域が、有限離散型での定式化が可能であり、十分に初等化され得ることを立証した。本稿は新しくマルチンゲール測度問題を提示し、証券市場モデルに依存しない方式で、すなわち証券市場モデルに先行する方式で、無裁定価格理論の数理基盤を構築した。

2. 無裁定価格理論と標準アプローチ

無裁定価格理論は、1970年代以降、米国を中心に発展してきた。無裁定[裁定：無リスクで利益を得る取引]の概念をベースにした理論展開は、直接にはBlack, F. , and M. Scholes (1973)[文献1]に始まる。同値マルチンゲール測度（リスク中立確率）の導入による無裁定価格理論の簡潔・明快な体系化はHarrison, M. , and D. Kreps（1979）[文献2]提示された。従って、既に30年を越える歴史を持ち、基礎的な理論は一応の整理が付いている。このことは、Duffieの教科書（初版1992）[文献3]を見れば分かる。また、Duffieに比べれば数学的な負担の少ない、Pliskaの教科書（初版1997）[文献5]も出版され、離散型のプライシング理論が丁寧に解説されている。これが20世紀の終末における世界（特に米国）の状況である。

国内では、1991年に、金融の実務家むけテキストである「森村英典–木島正明（日科技連）」[文献6]が出版されている。しかし、金融工学・金融数理が真に学際的注目を集めたのは1997年、MertonとScholesがノーベル経済学賞 [派生資産の価格決定理論の新たな手法への貢献]を受賞した後である。 ダフィーとプリスカの教科書も翻訳（各1998、2001）され、いくつかの信頼すべき著書も刊行された。 確率解析についても、国際的に基準教科書の評価を得ている 2書 I. カラザス・S. E. シュレーブ（2001）[文献9]、ベァーント・エクセンダール（1999）[文献8]が翻訳され、特に後者は金融工学関係者の多くが利用する。

ダフィー[文献3]は、裁定（Arbitrage）を最適性（Optimality）と均衡（Equilibrium）に強く関連づけており、この3本柱で証券市場の理論展開を図っている。3つを統合する概念が状態価格（State Price）である。この枠組みの中で、離散時間モデル（同書の前半）を1期間モデルと多期間モデルの2段階に分けて扱う。前段で状態価格、リスク中立確率の概念を導入し、後段でこれを同値マルチンゲール測度に拡張する。ダフィーは同書を経済学分野の理論書として書いているから、体系化の重視は当然だが、これを読むのは経済学研究者だけではない。数学専攻者以外が確率解析の理論書を読むのと同じく、経済専攻者以外にとって同書は負担が大きい。

津野（1999）[文献7]はダフィーの教科書の第1部（離散時間モデル）に相当する内容を詳細に書いている。ダフィーはアウトラインのみを書いているので、表面的には、津野の本は読み易いといえる。また、微分積分と線型代数で読める数学書の位置づけなので、一見すると経済理

論書の負担は無いように感じる。しかし、証券市場の最適戦略、市場均衡を細かく論じており、実質はダフィーと同じである。無裁定価格理論の部分は、経済学的概念と数学的概念をいくつも変遷する多段の同値変形が連なり、最後のマルチンゲール測度にたどり着くまでの道程が長い。無裁定の基本定理に本格的に取り組んだ貴重な著作であるが、ダフィーに拘り過ぎている。

プリスカ（初版1997）[文献5]は離散時間モデルに特化しており、経済理論書の色彩も薄い[数理ファイナンスがテーマ]ので、ダフィーの本に比べれば格段に読みやすく、津野の本との類似性が高い。理論化・体系化よりも教育的配慮（厳密性、明快性、実用性）に重点を置いており、学際的見地からは好ましい。しかし、重要な概念の大部分を1期間証券市場モデルで導入し、多期間証券市場において概念を拡張する方式は、他書と同じである。

無裁定価格理論の通常の展開は証券市場のモデル化から始まり、これを1期間と多期間の2段階で実行する。概念の大部分は前段で導入され、その際に必要となる数学は連立1次方程式の理論（行列、階数、Stiemkeの補題、Farkasの補題）である。確率過程は必要とされず、従ってマルチンゲールも登場して来ない。概念定義を支える数学基盤はStiemkeの補題とFarkasの補題であり、連立1次方程式論の中で概念構成される。

（2．1） Stiemkeの補題： Aを(m,n)行列 とするとき、下記の同値式が成り立つ。

■ $Ax=0$ に $x \gg 0$ の解がある. $\Leftrightarrow$ ${}^tAp>0$ となる$p \in R^m$は存在しない.

（2．2） Farkasの補題： Aを(n,m)行列、$b \in R^n$とするとき、下記の同値式が成り立つ。

■ $Ax=b$に 非負解$x \in R^n_+$がある. $\Leftrightarrow$ $\forall p \in R^m$: ${}^tAp \ge 0 \rightarrow b \cdot p \ge 0$.

上記の枠組みは、一般的な経済数学の中に納まっており、この枠組みで無裁定の主要な概念が構築できるのであるから、相応の評価はすべきである。津野（1999）[文献7]は、無裁定価格理論を実際に詳細展開している。しかし、その理論展開は相当に複雑である。理論の入口で、状態価格を規準化して確率と解釈したリスク中立確率（疑似確率）を導き出してから、最後の同値マルチンゲール測度に至るまでが単純ではない。リスク中立確率を形式的な概念として導入すること自体は簡単であっても、それの補強・拡張には手間が掛かる。これは、証券市場の確率過程（マルチンゲール）を避けたモデル化が持つ不自然さに由来している。1期間証券市場モデルに重点を置いたアプローチが行われる理由は、無裁定論の原型を連立1次方程式論の範囲に収め得る、連立1次方程式論で無裁定論の原型が定式化できる、ということである。連立1次方程式論は易しいが、その後の展開に手間どるのが、このアプローチの問題点である。

連立1次方程式論に拘らず、基本定理の数学的な実質だけに注目すれば、基本定理は証券市場モデルには依存しておらず、数学固有の存在（確率測度の決定問題）として把握できる。このような見方をすると、従来とは別のアプローチが開けてくる。証券市場の経済学的モデル化から基本定理の定式化を分離し、基本定理の学際的定式化を証券市場の経済学的モデル化に先行させ、経済学的モデル化においてもマルチンゲールを初めから前面に押し出すアプローチで

ある。経済学理論の立場で証券市場に取り組めば、経済学的モデル化を先行させ、その中で基本定理を連立1次方程式論で定式化し、マルチンゲールを後に回す方式が標準的であろう。しかし、学際的アプローチの視点に立てば、マルチンゲールが（定義のレベルで）前面に出て、基本定理の学際的インフラが先行し、証券市場の経済学的モデル化が最後になる方式が、経済学と数学の両面で負担が少ない。

3. マルチンゲールと確率積分

まず、簡単にマルチンゲールの定義を説明しておく。本稿の設定する標本空間Ωは空でない有限集合であり、Ωは相異なるn個の要素を持つ。

$$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_i,\cdots,\omega_n\} \qquad [\ 1\le n<+\infty\ ]$$

Ω が台となる確率事象空間 $\mathcal{M}=(\Omega,\mathcal{B})$ と 確率空間$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}=(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P})$ に対しては　$\mathcal{B}=\{M \mid M\subset\Omega\}$, $\forall\omega\in\Omega$: $\mathcal{P}(\omega)>0$　と定める。

必要に応じて 増大情報系 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ [t : 非負整数 , $1\le T<+\infty$] を設定し、

（3．1） $\forall t\,(0\le t\le T)$: $\mathcal{A}_t$は標本空間 Ω の直和分割である.

（3．2） [$\mathcal{A}_0=\{\Omega\}$] & [$\mathcal{A}_T=\{\{\omega\} \mid \omega\in\Omega\}$] である.

（3．3） $\forall t\,(1\le t\le T)$: 直和分割 $\mathcal{A}_t$は直和分割 $\mathcal{A}_{t-1}$の細分である.

とする。増大情報系 $\mathcal{A}$ の設定された確率事象空間 $\mathcal{M}$や確率空間 $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$は次のように表記される。

$$\mathcal{M}=(\Omega,\mathcal{B};\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}) \ , \ \mathcal{M}_{\mathcal{P}}=(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P};\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T})$$

確率事象空間 $\mathcal{M}=(\Omega,\mathcal{B};\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T})$ において、確率変数Xが下記の条件

$$\forall D\in\mathcal{A}_t : \text{ 確率変数} X \text{ は} D \text{において定値 } [\exists\text{定数}\,\forall\omega\in D: X(\omega)=\text{定数}\ ].$$

を充たすならば、確率変数Xは $\mathcal{A}_t$可測であるという。 そして、確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ が

$$\forall t\,(0\le t\le T) : \quad \text{確率変数} X_t \text{ は } \mathcal{A}_t \text{可測 である.}$$

を充たすならば、$\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ は増大情報系 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ に適合する（$\mathcal{A}$ 適合）といい、

$$\forall t\,(1\le t\le T) : \quad \text{確率変数} X_t \text{ は } \mathcal{A}_{t-1} \text{可測である.}$$

を充たすならば、$\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$は増大情報系 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$に関して可予測であるという。確率

事象空間 $\mathcal{M}$ における $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ 適合な任意の確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ が、確率測度 $\mathcal{P}$ で

$$\forall t\,(1\le t\le T)\ :\ E_{\mathcal{P}}(X_t \mid \mathcal{A}_{t-1}) = X_{t-1}$$

を充たすならば、確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ は確率測度 $\mathcal{P}$ に関してマルチンゲールであるという。

次に、確率事象空間 $\mathcal{M}=(\Omega,\mathcal{B};\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T})$ における確率積分を説明する。2つの任意の確率過程 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_t\}_{t=0}^{T}$ と $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ に対し $\int_0^t \alpha_s dX_s$ を

$$\forall t\,(0\le t\le T)\ :\ \int_0^t \alpha_s dX_s = \sum_{s=1}^{t}\alpha_s(X_s - X_{s-1})\quad [t=0\text{の場合は両辺}0]$$

と定め、これを $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_t\}_{t=0}^{T}$ の $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ による（t までの）確率積分という。[確率積分は t 個の確率変数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ と $t+1$ 個の確率変数 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ とで算出される確率変数である.] この定義から直ちに次の結果が得られる。

■ $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_t\}_{t=0}^{T}$ と $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ が共に $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ 適合であれば、確率積分過程 $\{\int_0^t \alpha_s dX_s\}_{t=0}^{T}$ も $\mathcal{A}$ 適合である。X が確率測度 $\mathcal{P}$ のマルチンゲールであるならば、確率積分過程 $\{\int_0^t \alpha_s dX_s\}_{t=0}^{T}$ も $\mathcal{P}$ に関してマルチンゲールとなる.

このとき、マルチンゲールの基本性質 [$E_{\mathcal{P}}(Y_t)=E_{\mathcal{P}}(Y_0)$] から次式も導かれる。

■ $$E_{\mathcal{P}}\left(\int_0^T \alpha_s dX_s\right) = E_{\mathcal{P}}\left(\int_0^0 \alpha_s dX_s\right) = 0$$

すなわち、マルチンゲールの定義から容易に下記の主張を証明することができる。

■ $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ 適合な確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ が確率測度 $\mathcal{P}$ のマルチンゲールであるならば、$\mathcal{A}$ に関して可予測な任意の確率過程 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_t\}_{t=0}^{T}$ に対して次式が成り立つ.

$$E_{\mathcal{P}}\left(\int_0^T \alpha_s dX_s\right) = 0$$

逆も成り立ち（文献[4]参照）、最終的には、$\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ 適合な確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ が確率測度 $\mathcal{P}$ に関してマルチンゲールであるための、必要十分条件を与える命題となる。

命題3-1： $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T}$ 適合な確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ が確率測度 $\mathcal{P}$ のマルチンゲール

であるための必要十分条件は、$\mathcal{A}$ に関して可予測な任意の確率過程 $\alpha = \{\alpha_t\}_{t=0}^{T}$

に対して次式が成り立つことである. $E_{\mathcal{P}}(\int_0^T \alpha_s dX_s) = 0$

4. 学際的アプローチの出発点

命題3-1は、確率過程 $\mathcal{X}=\{X_t\}_{t=0}^{T}$ と確率測度 $\mathcal{P}$ が与えられることを前提にしている。これを見ていると、マルチンゲールの定義に直結する、更に基本的な課題が浮かび上がって来る。確率事象空間 $\mathcal{M}=(\Omega, \mathcal{B}; \mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T})$ において、$\mathcal{A}$ 適合な任意の確率過程 $\mathcal{X}$ に対し、$\mathcal{X}$ をマルチンゲールにする確率測度 $\mathcal{P}$ が存在するか、その存在は一意的か、を問う問題である。本稿ではこれをマルチンゲール測度問題と呼ぶ。

ここまでの説明により、マルチンゲール測度問題がマルチンゲール理論の入口で自然に現れる基本問題であることを理解してもらえたと思う。しかし、マルチンゲール理論の標準的な展開においては、この問題が扱われることはない。マルチンゲール理論は、数理ファイナンスとの関連で最近の注目を集めているが、本来は確率過程における微分積分学の位置づけを持ち、1960年代に大きく発展した。純数学的に展開されたマルチンゲール理論においては、最初にベースとなる確率空間 $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}=(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}; \mathcal{A}=\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T})$ が設定され、その際に確率測度 $\mathcal{P}$ も固定されるので、マルチンゲール測度問題が出て来ることはない。

I. カラザス・S. E. シュレーブ(2001)[文献8]にはマルチンゲール測度という用語は索引にもない。エクセンダール(1999)[文献7]は、「第12章　数理ファイナンスへの応用」(最終章)で同値マルチンゲール測度を扱っているが、第1章～第11章の本論部分には全く出てこない。ダフィー(初版1992)[文献3]では、重要なテーマとして、離散時間(1期間、多期間)モデルと連続時間モデルの両方で大きく扱う。まず、連立1次方程式論をベースに疑似確率的にリスク中立確率を導入し、それを同値マルチンゲール測度に発展させる。プリスカ(初版1997)[文献5]も実質的にはダフィーと同じスタンスであるが、リスク中立確率を概念と用語の両面で基本としており、マルチンゲール測度は用語の紹介に止めている。

これ等は、マルチンゲール測度が、標準的な確率過程論におけるマルチンゲール理論では素通りされ、裁定を最適性と均衡に結び付けて体系化する経済学的な証券市場理論の中で、偏って扱われている状況を写し出している。マルチンゲール測度の概念は、純数学的なマルチンゲール理論の中では定義されることがなく、経済学理論の証券市場モデルで「最終場面」に出現し、必ず同値マルチンゲール測度(リスク中立確率の一般化)として定義される。無裁定アプローチによるプライシング理論を十分に学際化するためには、この状況を改革する必要があり、その起点となるのがマルチンゲール測度問題である。

マルチンゲール測度問題が証券市場の経済学的モデルに対する直接的なインフラであるためには、問題の形を少し一般化しておく必要がある。**問題4-1**が拡張されたマルチンゲール測度問題であり、本稿はこの形式でマルチンゲール測度問題を扱う。

問題4-1［マルチンゲール測度問題］：

確率事象空間 $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{B}; \mathcal{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^{T})$ において、k 個［$1 \le k < +\infty$］の

$\mathcal{A}$ 適合な任意の確率過程 $\mathcal{X}^{(1)} = \{X_t^{(1)}\}_{t=0}^{T}, \cdots, \mathcal{X}^{(k)} = \{X_t^{(k)}\}_{t=0}^{T}$ に対し、

これ等を同時にマルチンゲールとする1つの確率測度 $\mathcal{P}$ が存在するか、その存在は一意的であるか.

5. 線型空間における「Stiemkeの補題」

マルチンゲール測度問題を解くために必要な数学は線型代数の初等事項（部分空間、直交補空間）だけである。直接の解決基盤は n 次元線型空間における「Stiemkeの補題」であるが、それは部分空間（原点を通る直線、平面、超平面）と直交補空間（直交軸）だけで理解できる。第3節で述べた行列型のStiemkeの補題は連立1次方程式の形を取っており、幾何学的なイメージを読み取りにくい。これに対し、n 次元線型空間における「Stiemkeの補題」は明快な幾何学的表現をもち、直観的に把握できる。しかも、その幾何学的な表現がマルチンゲール測度問題の解決に直結している。従って、無裁定理論の学際的アプローチにおいては、適切な説明を与えることを前提に、積極的に「Stiemkeの補題」を利用する。

「Stiemkeの補題」に進もう。n 次元の実数空間（線型空間、ベクトル空間）を R^n とする。次元

$$R^n = \left\{ (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \;\middle|\; \forall i : x_i \in R \right\}$$

数 n は標本空間 Ω の要素数に合わせておく。この理由は後で判明する。R^n は必要に応じて、2次元平面的に、あるいは3次元立体的に図表示される。R^n の原点 $(0, \cdots, 0, \cdots, 0)$ を通る直線（＝1次元）と平面（＝2次元）と高次元平面（$n-1 \leqq$ 次元、特に $n-1$ 次元の場合は超平面と呼ばれる）、そして R^n 自身（＝n 次元）と原点自身（＝0 次元）の5つを R^n の部分空間という。部分空間は集合であるから、原点自身の部分空間も1点集合 $\{(0, \cdots, 0, \cdots, 0)\}$ の表記となる。L が R^n の部分空間であるとき、L に直交する部分空間が存在する。これを $L^{\perp}$ と表記し、L の直交補空間という。L が m 次元であれば、$L^{\perp}$ は $n-m$ 次元である。L が R^n 自身の場合には、$L^{\perp}$ は原点自身の部分空間である。

R^n の非負領域は R_{+}^{n} 、正領域は R_{++}^{n} と表記される。R_{+}^{n} には部分空間 $\{(0, \cdots, 0, \cdots, 0)\}$ が含

$$R_{+}^{n}=\{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)|\ \forall i: x_i\geq 0\}\quad R_{++}^{n}=\{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)|\ \forall i: x_i>0\}$$

まれている。部分空間は必ず原点 $(0,\cdots,0,\cdots,0)$ を通る(定義)から、全ての部分空間は非負領域 R_{+}^{n} を通る。すなわち、L を任意の部分空間として $(L\cap R_{+}^{n})\supset\{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}\neq\phi$ が成り立つ。ここで、式 $(L\cap R_{+}^{n})=\{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}$ の状況を考えてみる。部分空間 L は原点を通るが、正領域 R_{++}^{n} を通ってはいない。$R_{+}^{n}\supset R_{++}^{n}$ であるから $(L\cap R_{++}^{n})=\phi$ である。 逆も成り立ち、次の同値式を得る。

■ $(L\cap R_{+}^{n})=\{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}\Leftrightarrow$ L が正領域 R_{++}^{n} を通らない.

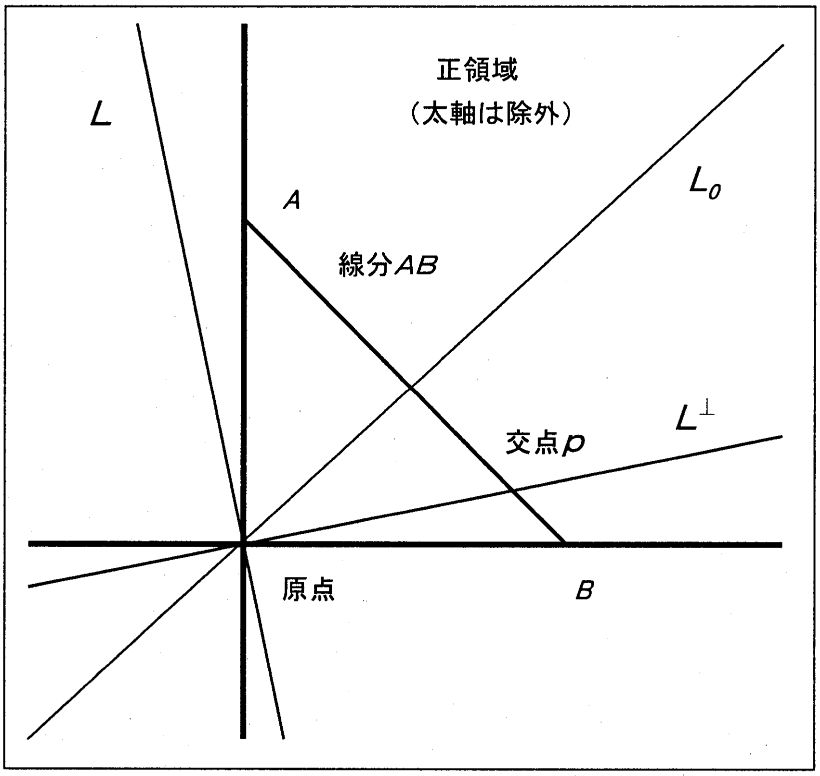

図5－1 ： 線型空間における「Stiemkeの補題」

L と $L^{\perp}$ を合わせれば全空間 R^n ［$R^n=L$ と $L^{\perp}$ の直和］であり、R^n は正領域 R_{++}^{n} を含む。従って、$(L\cap R_{++}^{n})=\phi$ ならば $(L^{\perp}\cap R_{++}^{n})\neq\phi$ であり、逆の成立は L と $L^{\perp}$ の役割を入れ替えれば明らかである。 このことは、

■ 部分空間 L が正領域 R_{++}^{n} を通らない. $\Leftrightarrow$ 直交補空間 $L^{\perp}$ が正領域 R_{++}^{n} を通る.

を意味しており、下記の命題を導く。

命題5-1： $(L \cap R^n_+) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\} \Leftrightarrow$ 直交補空間 $L^\perp$ が正領域 R^n_{++} を通る.

これが線型空間における「Stiemkeの補題」で、図5－1はその直観的な理解を与える。

6. 確率変数の線型空間

図5－1には、非負領域 R^n_+ に 線分 AB が書かれていた。これは、正確にいえば、n 個の点 $(1,0,0,\cdots,0)$, $(0,1,0,\cdots,0)$, $(0,0,0,\cdots,1)$ を頂点とする n 辺形（n 角形）である。n 辺形の内部は正領域 R^n_{++} の一部であり、直交補空間 $L^\perp$ [m 次元, $1 \le m \le n$]が正領域 R^n_{++} を通ることと、$L^\perp$ が n 辺形の内部を通ることは同値（直観的に納得できる）である。これまでの結果を整理すると次のようになる。

■ $(L \cap R^n_+) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\} \Leftrightarrow$ 直交補空間 $L^\perp$ が正領域 R^n_{++} を通る.

$\Leftrightarrow$ 直交補空間 $L^\perp$ が n 辺形の内部を通る.

n 辺形を含む超平面は n 元1次方程式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n = 1$ で表現される[2,3 次元の場合から類推すれば理解できる]から、n 辺形（$n-1$ 次元の超平面の一部）と直交補空間 $L^\perp$（一般には m 次元の平面）の交領域に存在する点を p $(\in R^n)$ とすれば次式が成り立つ。

$$p = (p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_n) \rightarrow \quad p_1 + \cdots + p_i + \cdots + p_n = 1,\ \forall i : p_i > 0$$

直交補空間 $L^\perp$ が直線（＝1次元）であれば交領域は1点（交点）で確定する。

以上に説明した内容がマルチンゲール測度問題を解決するための直接基盤である。線型代数の初歩を学んでいれば十分に理解でき、学際的アプローチの立場からは好都合である。この結果を利用するために、確率変数の全体を線型空間（ベクトル空間）として再把握する。本稿の設定した標本空間は $\Omega = \{\omega_1,\cdots,\omega_i,\cdots,\omega_n\}$ であったから、確率事象空間 $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{B})$ において定義される確率変数 X

$$X: \Omega \rightarrow R\ ,\quad \omega_i \mapsto a_i \quad ; \quad (\omega_1,\cdots,\omega_i,\cdots,\omega_n) \rightarrow (a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$$

は n 個の実数を列に並べた1組、すなわち n 次元の実数空間 R^n（線型空間）の1点と同一視することが出来る。従って、確率変数の全体は R^n と同一視される。

この確率変数の線型空間 R^n において、ある部分空間 L を定義し、L が非負領域 R^n_+ の原点 $(0,\cdots,0,\cdots,0)$ のみを通る $(L \cap R^n_+) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}$ と仮定する。

L が n 次元すなわち $L=R^n$ であれば $(L\cap R^n_+)=R^n_+\neq\{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}$ だから不合理で、L の次元数 m は $0\leq m\leq n-1$ となる。L の直交補空間 $L^\perp$ $(n-m$ 次元$,1\leq n-m\leq n)$ は正領域 R^n_{++} を通り、$n-1$ 次元の超平面（$x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n=1$）と正領域で交わる。この交領域の１点を $p=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$ とすれば、p は R^n の要素であるから確率変数で、$p_1+\cdots+p_i+\cdots+p_n=1,\ \forall i:p_i>0$ が成り立つ。更に、p が直交補空間 $L^\perp$ の要素であることから、p は部分空間 L と直交し、従って L の任意の要素 $x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ と直交して、p と x の内積が０になる。　$p\cdot x=p_1x_1+\cdots+p_ix_i+\cdots+p_nx_n=0$

p は確率事象空間 $\mathcal{M}=(\Omega,\mathcal{B})$ における確率変数

$$p:\Omega\to R,\quad \omega_i\mapsto p_i\quad;\quad(\omega_1,\cdots,\omega_i,\cdots,\omega_n)\to(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$$

であるが、標本空間 Ω の各点 ω_i に正実数値 p_i を対応させ、$p_1+\cdots+p_i+\cdots+p_n=1$ であるので、確率変数 p を確率測度 $\mathcal{P}$ として流用することが可能になる。このとき、部分空間 L の任意の要素 $x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ に対して、確率測度 $\mathcal{P}$ での期待値を計算すると

$$\begin{aligned}E_{\mathcal{P}}(x)&=\sum_{\omega\in\Omega}[\,p(\omega)x(\omega)\,]\\&=p(\omega_1)x(\omega_1)+\cdots+p(\omega_n)x(\omega_n)\\&=p_1x_1+\cdots+p_nx_n=0\end{aligned}$$

となる。　逆に、$\forall i:\mathcal{P}(\omega_i)>0$ を充たす確率測度 $\mathcal{P}$ が存在し、かつ $\mathcal{P}$ による $x\ (\in L)$ の期待値 $E_{\mathcal{P}}(x)$ が常に０であるとき、$\mathcal{P}$ に対応する確率変数 $p=(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$，$\forall i:p_i=\mathcal{P}(\omega_i)$ が（R^n の点として）必ず存在し、この p を基底（座標軸）とする線型空間 [p で生成される線型空間] は部分空間 L と直交する。

本節の結果をまとめると、最終的に下記の命題が得られる。

命題6-1：確率事象空間 $\mathcal{M}=(\Omega,\mathcal{B})$ 上の確率変数の全体から成る線型空間 R^n において、R^n の任意の部分空間 L に対し次の同値式が成り立つ.

$$(L \cap R_+^n) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\} \Leftrightarrow$$ 確率測度 $\mathcal{P}[\forall \omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega) > 0]$が存在し

$\forall x\ (\in L):\ E_{\mathcal{P}}(x) = 0$ が成り立つ.

7. マルチンゲール測度問題の解決

確率事象空間 $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{B}; \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{T})$において、$k$ 個$[1 \le k < +\infty]$の $\mathcal{F}$ 適合な確率過程 $\mathcal{X}^{(1)} = \{X_t^{(1)}\}_{t=0}^{T}, \cdots, \mathcal{X}^{(j)} = \{X_t^{(j)}\}_{t=0}^{T}, \cdots, \mathcal{X}^{(k)} = \{X_t^{(k)}\}_{t=0}^{T}$ $[X_t^{(j)}$は確率変数、従って$X_t^{(j)} \in R^n]$ に対し、$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \{\alpha_t^{(1)}\}_{t=0}^{T}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{(j)} = \{\alpha_t^{(j)}\}_{t=0}^{T}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{(k)} = \{\alpha_t^{(k)}\}_{t=0}^{T}$ $[\alpha_t^{(j)} \in R^n]$をk 個の任意の可予測な確率過程とし、$\alpha^{(j)}$ の $X^{(j)}$ によるT までの確率積分 $Y_T^{(j)} = \int_0^T \alpha_s^{(j)} dX_s^{(j)}$ $[Y_T^{(j)} \in R^n]$ を用いて、集合L_Xを次のように定める。

$$L_X = \left\{ Y_T \in R^n \,\middle|\, Y_T = \sum_{j=1}^{k} \int_0^T \alpha_s^{(j)} dX_s^{(j)} \quad (\forall \alpha_s^{(j)}) \right\}$$

$\alpha_s^{(j)}\ [1 \le j \le k < +\infty]$は任意の可予測な確率変数

この集合L_X がR^nの部分空間であることは簡単に分かる。$(0,\cdots,0,\cdots,0)$ はゼロ定値の確率変数に対応し、$\forall j\ [1 \le j \le k < +\infty]$で $\alpha_t^{(j)}$ をゼロ定値にとればY_T がゼロ定値になり$(0,\cdots,0,\cdots,0) \in L_X$が成り立つ。 $a \cdot Y_T \in L_X$ $[a$:実定数$]$ と $Y_T + Z_T \in L_X$ も明らかである。 従って、L_Xに対しても次の同値式が成り立つ。

■ $(L_X \cap R_+^n) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\} \Leftrightarrow$ 確率測度 $\mathcal{P}$ $[\forall \omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega) > 0]$ が存在し$\forall Y \in L_X : E_{\mathcal{P}}(Y) = 0$が成り立つ.

ここで、部分空間$L_X^{(j)}$

$$L_X^{(j)} = \left\{ Y_T^{(j)} \in R^n \,\middle|\, Y_T^{(j)} = \int_0^T \alpha_s^{(j)} dX_s^{(j)}\ (\forall \alpha_s^{(j)}) \right\} : \alpha_s^{(j)} \text{は任意の可予測な確率変数}$$

を考えると $\quad L_X = \sum_{j=1}^{k} L_X^{(j)} = \left\{ Y \in R^n \mid Y = \sum_{j=1}^{k} Y_T^{(j)} \right\}$

となり、上記の同値式は次のように変形される。

■ $[(\sum_{j=1}^{k} L_X^{(j)}) \cap R^n] = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\} \Leftrightarrow$ 確率測度 $\mathcal{P}[\forall\omega\in\Omega : \mathcal{P}(\omega) > 0]$

が存在し$\forall j(1 \le j \le k)\ \forall Y^{(j)} \in L_X : E_P(Y) = 0$が成り立つ.

$E_{\mathcal{P}}(Y^{(j)}) = E_{\mathcal{P}}(\int_0^T \alpha_s^{(j)} dX_s^{(j)}) = 0$ ［$\alpha_s^{(j)}$: 任意で可予測］は確率過程 $\mathcal{X}^{(j)} = \{X_t^{(j)}\}_{t=0}^{T}$ がマルチンゲールになるための必要十分条件であるから、最終結果として次の定理を得る。

定理7-1［マルチンゲール測度の存在条件］:

$L_X = \left\{ Y_T \middle| Y_T = \sum_{j=1}^{k} \int_0^T \alpha_s^{(j)} dX_s^{(j)} \quad (\forall \alpha_s^{(j)}) \right\}$に対し、次の同値式が成り立つ.

$(L_X \cap R_+^n) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}$

$\Leftrightarrow$　確率測度 $\mathcal{P}$ ［$\forall\omega\in\Omega : \mathcal{P}(\omega) > 0$］が存在し、$k$ 個の $\mathcal{F}$ 適合な確率過程 $\mathcal{X}^{(j)} = \{X_t^{(j)}\}_{t=0}^{T}$［$1 \le j \le k < +\infty$］が全てマルチンゲールになる.

これで、マルチンゲール測度の存在条件が判明した。

次に、存在条件を仮定して、マルチンゲール測度の一意性を解決する。既に述べた（6節）ように、一意に確定するための必要十分条件は、L_X の直交補空間 $L_X{}^{\perp}$ の次元数が１、すなわち部分空間 L_X の次元数が $n-1$ 、である。 従って、直ちに定理7-2が得られる。

定理7-2［マルチンゲール測度の一意性条件］:

$(L_X \cap R_+^n) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}$を充足する部分空間 L_X に対し、下記が成り立つ.

部分空間 L_X の次元数が $n-1$ である.

$\Leftrightarrow$　k 個の $\mathcal{F}$ 適合な確率過程 $\mathcal{X}^{(j)} = \{X_t^{(j)}\}_{t=0}^{T}$　［$1 \le j \le k < +\infty$］ を全てマルチンゲールにする確率測度 $\mathcal{P}$ ［$\forall\omega\in\Omega : \mathcal{P}(\omega) > 0$］ が一意に定まる.

8. $\mathcal{F}_T$ 可測性による一意性の判定

部分空間 L_X の次元数だけでなく、実は、増大情報系 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{T}$ 自体が直接にマルチンゲール測度の一意性と結びついている。それを理解するために、$\mathcal{F}_t$ 可測な確率変数 X_t と、

その全体V_tを考える。一般の確率変数Xは$(a_1,\cdots,a_n)$と同一視され、確率変数の全体はR^nと同一視できた。$\mathscr{A}_t$は標本空間Ωの直和分割であるから、個数m（$1 \le m \le n$）が一意に定まり、$\mathscr{A}_t = \{D_1,\cdots,D_m\}$, $\Omega = \cup_{i=1}^{m} D_i$, $\forall i \forall j : D_i \cap D_j = \phi$, $\forall i : D_i \ne \phi$が成り立つ。$\mathscr{A}_t$可測な確率変数X_tは各D_i上で一定値をとるので、［直和分割 $\mathscr{A}_t$に応じ、Ωの要素の並び順を調整しておけば、］X_tは（$a_1,\sim a_1,\cdots,a_i,\sim a_i,\cdots,a_m,\sim a_m$）の形に整理される$n$個の実数の列で、実質的には$m$個の実数の列（$a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_m$）である。従って、$\mathscr{A}_t$可測な確率変数$X_t$の全体$V_t$は$m$次元の部分空間$V_t^{(m)}$（線型空間）を構成する。特に、$\mathscr{A}_0$可測な確率変数$X_0$の全体$V_0$は1次元の部分空間$V_0^{(1)}$（線型空間）を構成し、$\mathscr{A}_T$可測な確率変数$X_T$の全体$V_T$は$n$次元の線型空間（＝実数空間$R^n$）を構成する。

増大情報系 $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_t\}_{t=0}^{T}$に対しては$T+1$個の線型空間$V_0^{(1)}$,$\cdots$, $V_t^{(m)}$,$\cdots$, $V_T^{(n)} = R^n$が存在するが、$V_t^{(m)}$ $(0 \le t \le T, 1 \le m \le n)$は部分空間として$R^n$に埋め込まれている。すなわち、$\mathscr{A} =$ $\{\mathscr{A}_t\}_{t=0}^{T}$に対して $\mathscr{A}_T$ 可測な確率変数の線型空間R^nが存在し、R^nは部分空間として$\mathscr{A}_t$可測な確率変数の線型空間$V_t^{(m)}$を内包し、$V_t^{(m)}$も部分空間として $\mathscr{A}_s$可測$(1 \le s \le t)$な確率変数の線型空間$V_s^{(l)}$ $(1 \le l \le m)$を内包する。このようなR^nを$V_0^{(1)}$とその補空間W［これも部分空間で$n-1$次元、直交しているとは限らない］とに分解してみよう。ここではR^nを $\mathscr{A}_T$ 可測な確率変数の全体と考えているが、7節においてはR^nを単純に確率変数の全体とした。この状況は $\mathscr{A}_T =$ $\{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\}$と定めたことの結果である。これを積極的に活用すると、$V_0^{(1)}$とWによるR^nの分解の実質が理解できる。

$V_0^{(1)}$は$\mathscr{A}_0$可測な［すなわちΩ上で一定値の］確率変数の全体であり、R^nの点$(1,\cdots,1)$に対応する確率変数［Ω上で一定値1］を基底とする線型空間である。図5－1において、$V_0^{(1)}$に相

当する部分空間はL_0 [$(1,\cdots,1)$ を含む１次元の部分空間] である。補空間Wは$n-1$次元の線型空間であるが、その本質は少し見えにくい。$V_0^{(1)}$を内包していないので、$\mathscr{F}_t$可測$(1 \le t \le T)$な確率変数の全体とはならない。Wも図5−1との比較で理解でき、L_0と独立な（すなわち、L_0を内包しない）$n-1$次元の部分空間を図5−1から見つけ出せばよい。

L_Xは正領域R^n_{++}を通らずL_0と独立で、もしL_Xの次元数が$n-1$であればL_Xは補空間になる。L_Xが補空間であれば、L_Xの次元数は$n-1$になるから、下記の同値式が成り立つ。

■　部分空間L_Xの次元数が$n-1$である.

⇔　部分空間L_Xは$V_0^{(1)}$のR^nに対する補空間である.

⇔　$\mathscr{F}_T$可測な確率変数の全体から成る線型空間R^nは$\mathscr{F}_0$可測な確率変数の全体から成る線型空間$V_0^{(1)}$と部分空間L_Xとに分解（直和分解）される.

以上により、$\mathscr{F}_T$可測性とマルチンゲール測度の一意性を結び付ける、次の定理が得られた。

定理8-1 [$\mathscr{F}_T$可測性によるマルチンゲール測度の一意性判定]：

$(L_X \cap R^n_+) = \{(0,\cdots,0,\cdots,0)\}$を充足する部分空間$L_X$に対し、下記が成り立つ.

$\mathscr{F}_T$可測な確率変数の全体から成る線型空間R^nは$\mathscr{F}_0$可測な確率変数の全体から成る部分空間$V_0^{(1)}$と部分空間L_Xとに分解（直和分解）される.

⇔　k個の$\mathscr{F}$適合な確率過程$\mathcal{X}^{(j)} = \{X_t^{(j)}\}_{t=0}^{T}$ $[1 \le j \le k < +\infty]$ を全てマルチンゲールにする確率測度$\mathcal{P}[\forall \omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega) > 0]$ が一意に定まる.

９. 結語

本稿は無裁定価格理論の基本定理そのものに集中し、ここで得られた学際的インフラに基づく、証券市場の経済学的モデル化は扱わなかった。しかし、本稿の結果があれば、円滑に証券市場の経済学的モデル化が実行できる。それについては学位論文で触れる予定である。

また、本稿はマルチンゲール測度の存在条件と一意性条件に直結する事項のみを解明しており、部分空間 L_X 自体の本質や、L_X と増大情報系 $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_t\}_{t=0}^{T}$ の詳細な関係に踏み込んではいない。これ等を、有限離散の標本空間 Ω をベースに解明しておけば、その結果をそのまま超準解析の超有限（形式的には有限、実質的には無限を包含）に移行できる。今後は、超有限も視野に置いて研究を進める。

（いのうえ・たけつぐ　社会文化科学研究科博士課程）

【参考文献】

1. Black, F., and M. Scholes (1973) ,"The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy 81: pp. 637-654.

2. Harrison, M., and D. Kreps (1979) ," Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," Journal of Economic Theory 20: pp. 381-408

3. Duffie, Darrel (1992) Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton, NJ: Princeton University Press.
(資産価格の理論、山崎・桑名・大橋・本多　訳、創文社1998)

4. Lamberton, D., and B. Lapeyre (1996) Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. London: Chapman & Hall

5. Pliska ,Stanley R. (1997) Introduction to Mathematical Finance. Malden, Massachusetts: Blackwell Publishers Inc.
(数理ファイナンス入門、 木島正明　監訳、 共立出版2001)

6. 森村英典-木島正明(1991) ： ファイナンスのための確率過程(日科技連)

7. 津野義道(1999) ： ファイナンスの数学的基礎(共立出版)

8. ベァーント・エクセンダール(1999) ： 確率微分方程式ー入門から応用まで (シュプリンガー・フェアラーク東京)

9. I. カラザス・S. E. シュレーブ(2001) ： ブラウン運動と確率積分 (シュプリンガー・フェアラーク東京)