

システマティック・リスクを考慮した DCC モデルについて

A Dynamic Conditional Correlation model with systematic risk

菅家和雄
KANKE Kazuo

要旨 近年多くの論文で相関係数が時変動しない仮定が棄却されている結果が示されている。このような中、従来より相関係数が時変動するモデルは数多く提案されているものの、強い制約条件が付加されている場合や推定しなければならないパラメータ数が多くなる等の問題点があった。Engle (2002) 等はこのような問題点のある程度軽減した Dynamic Conditional Correlation (DCC) モデルを考案し、その後も DCC モデルを対象とした研究が徐々に増加している。一方でポートフォリオを考えた場合、市場を観察すると、しばしば個別要因リターンを打ち消す以上の大きな市場要因リターンが発生すると、非常に多くの資産が一斉に同方向へ変動し、個々の資産の変動の相関が高まる場面が見られる。そこで本稿では DCC モデルに同方向へ変動する資産数を組み込み、東証業種別株価指数を用いて実証検証を行い、代表的な DCC モデルと比較したところ、対数尤度等において改善が見られた。

キーワード：相関、ボラティリティ、DCC モデル、ポートフォリオ、システマティック・リスク

1. はじめに

近年、ファイナンスの実務においては、ポートフォリオ及びアセット・アロケーションの構築、及び VaR に代表されるリスクマネジメントにおいて、相関マトリックスが大規模化しており、効率よく相関マトリックスを求める必要性がでてきている。また、金利あるいはコモディティのタームストラクチャー（期間構造）は、それぞれ満期あるいは限月の違う金利あるいは先物価格が互いに関連性をもって確率的挙動を表現するモデルが必要となる。一方、店頭オプションでも複数の資産を原資産とする取引が近年において増加していることから、相関係数の値がデリバティブのプライシングに著しい影響を及ぼすことが想定される。このように実務においては相関係数の推定についてますます重要性が増してきている。

しかしながらファイナンスにおける過去の研究においては、その関心は個々の資産のボラティリティに集中し、相関や共分散については前者と比較して研究対象として取り上げられることが少なかった。従って最近まで、相関は一定であり、安定しているものと仮定して取り扱われている研究が多い。しかし Tsui and Yu (1999) 等、多くの論文で相関係数が時変動しない仮定が棄却されている結果が示されている。

複数の資産の価格変化率の分散・共分散及び相関係数が時間を通じた変動を明示的に定式化している代表的な時系列モデルに多変量 GARCH モデルがある。多変量 GARCH モ

デルは基本的には一変量 GARCH モデルを多変量に拡張したモデルであり、条件付き共分散行列は正値定符号行列となるようモデルを構築する必要がある。ここではこれまでに発表されてきた代表的な多変量 GARCH モデルについて簡単にサーベイしてみる¹。まず VEC モデルが Bollerslev et al. (1988) により提案されている。このモデルは推定しなければならないパラメーターの数が多くなる点（例えば3変量であれば18個のパラメーター）、条件付き共分散行列の正値定符号性が保証されない点が欠点としてあげられる。VEC モデルの推定すべきパラメーターの数を減らす方法として、パラメーター行列の対角成分のみを取り扱ったモデルも提案されている。このモデルは、3変量の場合に9個のパラメーターを推定するだけでよい。次に BEEK モデルであるが、当初 Baba, Engle, Kraft and Kroner により発表され、後に Engle and Kroner (1995) として公刊されている。このモデルは条件付き共分散行列の正値定符号性は保証されるものの推定しなければならないパラメーターの数は VEC モデルよりも多くなる（3変量の場合、24個のパラメーター）。一方 CCC (Constant Conditional Correlation) モデルは、各資産間の相関係数は定数であるものと定義されたモデルであり、Bollerslev (1990) により提案されている。条件付き共分散行列の正値定符号性は保証されており、推定すべきパラメーターの数は BEEK モデルの半分ですむ。従って CCC モデルを使用して分析を進めることの利点は多い。しかし実証において各系列の相関を一定と置くことは現実的には強い制約であることから、この制約を外し相関係数に動的構造を仮定した DCC モデルが Christodoulakis and Satchell (2002)、Engle (2002)、及び Tse and Tsui (2002) によって提案されている。

DCC モデルについては、提案されて間もないこともあり研究の数は少ないものの次のような研究が行われている。最も簡単な DCC モデルは相関のダイナミクスを示すパラメーターがスカラーとして設定されているモデルであるが、これはすべての相関係数に対して同じパラメーターがウェイトされることになる。これに対してパラメーターを相関マトリックスと同じ次元の行列として設定すれば相関係数それぞれに対してパラメーターを付与することが可能となる。しかしこの方法は推定しなければならないパラメーター数が非常に多くなるため現実的ではない。またパラメーター行列の対角成分をパラメーターとして当てる方法もあるが、これもデータの系列数が大きくなれば現実的ではない。そこで同じ特性を持つデータ系列は連動して動く特性を利用して、これらに対して1パラメーターを与える、ブロック化 DCC モデルが提案されている。例えば、世界の株価指数をユニバースとすると、北米、中南米、欧州、アジア等の地域ごとにブロック分けし、各ブロックに対して1つのパラメーターを与えるモデルである。このブロック化 DCC モデルの提案は Billio, Capolin, and Gobbo (2003, 2004)、Hafner and Franses (2003)、Vargas III (2006) により行われている。

ボラティリティについては同じマグニチュードにおいてポジティブ・リターン後よりネガティブ・リターン後の方がボラティリティが増加しやすい、という“ボラティリティの非対称性”について多く研究されている。条件付き相関についても、ボラティリティ同様にポジティブ・リターンよりもネガティブ・リターン後に相関が高まりやすいという非対称性が見られる（例えば Kroner and Ng, 1998、Backaert and wu, 2000、Errunza and

¹ 多変量 GARCH モデルについては Bauwens et al. (2004) がサーベイ論文を発表している。

Hung, 1999)。ただしその経済的論拠については十分なリサーチが行われていない (Cappiello, Engle and Sheppard (2003))。この相関の非対称性について、Cappiello, Engle and Sheppard (2003) が Asymmetric DCC モデル (以下 ADCC モデル) を用いて株式に加えて国債もまた条件付き 2 次モーメントの非対称性を示すかどうか、そしてインターナショナル・マーケットにおける相関のダイナミクスと変化について検証している。Cajigas and Urga (2005) は、基準化残差が標準正規分布ではなく非対称多変量ラプラス分布に従うものとした ADCC モデルを提案している。Thorp and Milanovich (2005) はボラティリティ及び相関の非対称を考慮した GJR、ADCC モデルをポートフォリオ選択問題に当てはめている。

その他、Chau, Liu and Wu (2005) により High-Low (2005) データを用いた DCC モデルの提案が行われている。Feng (2006) は共分散を conditional な部分と unconditional な部分に分解した Local DCC モデルを提案している。また、相関はボラティリティが高い期間に増加し、相関のマグニチュードと持続性はボラティリティによって影響を受けるという報告もある (例えば Billio, Capolin and Gobbo, 2005、Haroutounian, 2005 にその記述が見られる)。Haroutounian (2005) は、ネガティブリターンについて、そのボラティリティがある程度大きいデータを考慮した、ボラティリティ閾値 DCC モデルを提案し、ポートフォリオの分散効果について議論している。本邦においては、森本・川崎 (2005) が株価のティック・データを用いて多変量 GARCH モデルからイントラデイ VaR を計測し結果を比較している。彼らが行った検証においては他の多変量 GARCH モデルと比較して DCC モデルが最良のモデルと結論付けている。

ボラティリティと相関の関係について、Haroutounian (2005) は個々の資産に関して議論をしている。しかしポートフォリオ理論によると、低相関あるいは逆相関の資産でポートフォリオを構築することによりポートフォリオのボラティリティを低減できることから、両者の関係は個別資産間と言うよりはむしろ、ポートフォリオ単位で論じることが適当であると考えられる。そこで本稿では、ある程度分散しているポートフォリオについてボラティリティが高くなるケースは、個々の資産価格の変動が正の相関関係を示す、システムティック・リスクの影響が大きい場合である旨を論じ、この点を考慮した DCC モデルを考案している。このモデルを用いて東証業種別株価指数について相関係数の時変動特性を検証したところ、比較的大きなシステムティック・リスク発生後に相関係数が高まりやすい傾向にある結果を得ている。私の知る限りでは、過去の DCC モデルに関連する研究において同類の研究は無い。

本稿の構成は次の通りである。セクション 2 では、本稿で考案しているモデルのベースとなっている Engle (2002) の DCC モデルについて簡単に触れ、セクション 3 においてボラティリティと相関の関係から本稿で考案した DCC 拡張モデルを示し、セクション 4 で東証業種別株価指数を用いた検証結果を示し、セクション 5 において考察を行っている。

2. DCC モデルについて

本稿では Engle (2002) の DCC モデルをベースとして研究を行っていることから簡単に触れておく。

当該 DCC モデルは下記の通り定式化されている。

$$\begin{aligned}
 r_t | \mathcal{S}_{t-1} &\sim N(0, D_t R_t D_t) \\
 D_t^2 &= \text{diag} \{ \omega_t \} + \text{diag} \{ \kappa_t \} \circ r_{t-1} r'_{t-1} + \text{diag} \{ \lambda_t \} \circ D_{t-1}^2 \\
 \varepsilon_t &= D_t^{-1} r_t \\
 Q_t &= \bar{Q} \cdot (I' - A - B) + A \cdot \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} + B \cdot Q_{t-1} \\
 R_t &= \text{diag} \{ Q_t \}^{-1} Q_t \text{diag} \{ Q_t \}^{-1}
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

(2-1) 式の第 2 式は各資産の GARCH プロセスを、第 3 式は基準化残差を示し、第 4 式は共分散マトリックス、第 5 式は相関マトリックスを示す。なお第 4 式の \bar{Q} は非条件付き共分散マトリックスを示す。またこの推定値の対数尤度は次の式で示される。

$$\begin{aligned}
 r_t | \mathcal{S}_{t-1} &\sim N(0, H_t) \\
 L &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |H_t| + r'_t H_t^{-1} r_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t R_t D_t| + r'_t D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \log |R_t| + \varepsilon'_t R_t^{-1} \varepsilon_t) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + r'_t D_t^{-1} D_t^{-1} r_t - \varepsilon'_t \varepsilon_t + \log |R_t| + \varepsilon'_t R_t^{-1} \varepsilon_t)
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

この式から最大対数尤度を容易に求めることができるため、たとえ共分散マトリックスが非常に大きくても比較的容易にパラメーターの推定が可能である。ここで D のパラメーターを θ 、 R のパラメーターを ϕ と定義する。すると対数尤度はボラティリティの項と相関の項の合計として示すことができる。

$$L(\theta, \phi) = L_v(\theta) + L_c(\theta, \phi) \tag{2-3}$$

ここでボラティリティ項は、

$$L_v(\theta) = -\frac{1}{2} \sum (n \log(2\pi) + \log |D_t|^2 + r'_t D_t^{-2} r_t) \tag{2-4}$$

相関項は、

$$L_c(\theta, \phi) = -\frac{1}{2} \sum (\log |R_t| + \varepsilon'_t R_t^{-1} \varepsilon_t - \varepsilon'_t \varepsilon_t) \tag{2-5}$$

で表される。ボラティリティ項、相関項はそれぞれ別々に最大化が可能であるため、DCC モデルのパラメーターは次の 2 段階アプローチにより推定できる。

$$\hat{\theta} = \text{argmax} \{ L_v(\theta) \} \tag{2-6}$$

$$\max_{\phi} \{ L_c(\hat{\theta}, \phi) \} \tag{2-7}$$

3. ボラティリティと相関について

ボラティリティと相関の関係については、相関はボラティリティが高い期間に増加し、

相関のマグニチュードと持続性はボラティリティによって影響を受ける、等の報告がある。Haroutounian (2005) は、欧州の株価指数についてボラティリティと相関の関係を分析し、先進国間の株価指数においてある程度高いボラティリティは高い相関係数と関係があると報告している。しかし同論文では、欧州のエマージング国の株価指数の間、及び欧州先進国とエマージング国の株価指数の間において、この関係は明白では無い旨も報告されている。この事例は、個別資産について高い相関と高いボラティリティの間に何らかの関係が有るとは一概に言えないことを示している一例と考えられる。一方、ポートフォリオ・マネジメントにおいてはポートフォリオ自体のボラティリティを抑えることが重要なポイントの1つである。そこで本稿では相関とボラティリティの関係を論じる際に、ボラティリティについては個々の資産ではなくポートフォリオ単位で捉えることにする。簡単のためにポートフォリオは資産 A と資産 B の 2 資産しか存在しないものと仮定する。マークヴィッツのポートフォリオ理論によると、このポートフォリオのボラティリティは、

$$\sigma_v^2(t) = \sigma_A^2(t) + 2\rho\sigma_A(t)\sigma_B(t) + \sigma_B^2(t) \quad (3-1)$$

$\sigma_A^2(t)$: t 時点における資産 A のボラティリティ

$\sigma_B^2(t)$: t 時点における資産 B のボラティリティ

ρ : 資産 A と資産 B の間の相関係数

で示すことができる。ここで資産 A と資産 B のボラティリティは等しい ($\sigma_{AB}^2(t)$) と仮定すると、 ρ がマイナス 1 (完全逆相関) の場合には $\sigma_v^2(t)$ の値はゼロとなり、 ρ がプラス 1 (完全正相関) の場合には $\sigma_v^2(t)$ の値は $4\sigma_{AB}^2(t)$ となる。これは、資産 A、資産 B それぞれのボラティリティがどんなに高くても相関係数が低いあるいは逆相関の関係にある場合はポートフォリオのボラティリティが低くなり、逆に相関が高い場合はポートフォリオのボラティリティが高くなることを示している。

一方、ポートフォリオのボラティリティは、ファイナンス理論によると、個別要因 (アンシステムティック・リスク) と市場要因 (システムティック・リスク) に分解される。アンシステムティック・リスクとは、株式であれば個別銘柄ごとの業績の変動や突発的事故、不祥事等、個別資産それぞれが持つ固有の変動要因であり、このリスクは異なる動きをする複数の資産に分散投資することにより軽減される。システムティック・リスクとは、例えば商品市況、海外の株式市場、金利の上昇・下落、政局の変動、世界情勢等、市場全体に対して同方向の影響を与える変動要因であり、分散投資によって達成しうるリスク低減効果が限られる。したがってポートフォリオのボラティリティはシステムティック・リスクとより密接に関係しており、つまり何らかの要因で大きなシステムティック・リスクが発生し各資産間の正の相関関係が高まるほどポートフォリオのボラティリティも大きくなるのがわかる。したがって相関係数の変動は個々のボラティリティの変動と同様にポートフォリオのリスク管理において重要なファクターである。

このような点から、システムティック・リスクに着目した DCC モデルを考えてみる。システムティック・リスクはファイナンス理論によるとベータ値で表される。ベータ値は個別資産の収益率と市場ポートフォリオの収益率との間の共分散を市場ポートフォリオの収益率の分散で割ったものとして計算される。したがってベータ値を求めるためには相関係数が予め求められている必要があるため、本稿ではシステムティック・リスクを示す計量値としてベータ値を用いることはできない。よって他の値で代替する必要がある。ここ

で比較的大きなシステムティック・リスクが発生していると考えられるマーケットを観察してみる。例えば日本のエクイティ・マーケットの場合、海外等で何らかのイベントが発生した場合は、個々の銘柄のファンダメンタルズに関係なく、多くの株価がそろって一斉に大きく上昇（あるいは下落）する場面が見られ、そのような場合は株価指数も大きな変動を伴うケースが多い²。よって本稿では、マーケットで実際に観測可能な、価格が上昇（あるいは下落）した資産数をシステムティック・リスクの指標として用いることにする。本稿で考案したモデルは次の通りである。

$$Q_t = \bar{Q} \cdot (I - A - B) - C \cdot \bar{H} + A \cdot (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') + B \cdot Q_{t-1} + C \cdot (n_{t-1} n_{t-1}') \quad (3-2)$$

ここで ε_t はGARCHモデルから求められた各資産の基準化残差ベクトルで、 $\bar{Q} = E[\varepsilon_t \varepsilon_t']$ 、 $\bar{H} = E[n_t n_t']$ 、 n_t は、 ε_t ベクトルについて正（あるいは負）の要素の数がある値を越えた場合には ε_t の各要素で構成され、ある値以下の場合はゼロで構成されるベクトルとする³。相関係数は、

$$R_t = (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}} \quad (3-3)$$

で求められる。本稿ではこのモデルを“システムティック・リスクDCCモデル（以下、SDCCモデル）”と呼ぶことにする。このモデルは、比較的大きなシステムティック・リスク発生時、及び発生後の相関係数の変動特性を捉えるようなDCCモデルと位置づけられ、私の知る限りでは、過去のDCCモデルに関連する研究において同類の研究は無い。また検証結果によってはシステムティック・リスクの低減についても言及できる可能性が期待できる。

4. 検証

ここでは、前セクションで考案したモデルが実際のデータに当てはめた場合にフィットするのか、DCCモデルやADCCモデルと対数尤度あるいは推定されたパラメーターについて比較を行う。本稿で考案したモデルはEngle(2002)が提案したDCCモデルをベースとしていることから、まず各データのGARCH推定結果を示す。次にDCCモデル、ADCCモデル、及びSDCCモデルの推定を示し結果について考察を行う。なお簡単のためにGARCH及び各DCCモデルのパラメーターの次数は1として検証を行っている。

4.1 データ

まず、検証に使用するデータであるが、1999年12月30日から2006年1月13日までの日次の東証業種別株価指数を用いる。東証業種別株価指数とは、TOPIX⁴の構成銘柄を「証券コード協議会」が定める業種区分に基づき次の33業種に分類して各業種の株価指数を算出したものである。

² このような相場は、新聞等で「ほぼ全面高（あるいは全面安）の大幅上昇（あるいは下落）」等と報道されるケースが多い。

³ 補足すると、このモデルでは、上昇（または下落）銘柄数を閾値とし、閾値より多い上昇（または下落）銘柄数の場合はシステムティック・リスクが発生しているものと考え、そうでない場合はシステムティック・リスクが発生していないと考える。

水産・農林業、鉱業、建設業、食料品、繊維製品、パルプ・紙、化学、医薬品、石油・石炭製品、ゴム製品、ガラス・土石、鉄鋼、非鉄金属、金属製品、機械、電気機器、輸送用機器、精密機器、その他製品、電力・ガス業、陸運業、海運業、空運業、倉庫・運輸関連業、通信業、卸売業、小売業、銀行業、証券・商品先物取引業、保険業、その他金融業、不動産業、サービス業

各業種別株価指数の構成銘柄は、市場第一部上場普通株式のうち各業種区分に分類されたものである。ただし、株価指数の算出対象から除外後の整理ポスト割当銘柄及び算出対象組入前の新規上場銘柄は除外される。なお、各業種にどのような銘柄が属するか、また、各銘柄がどの業種区分に属するかは、東証のホームページ⁵で検索することが可能である。算出方法は、銀行業、化学、医薬品、卸売業、小売業、証券・商品先物取引業、保険業、その他金融業は、1992年1月6日を1,000ポイントと、電気機器、輸送用機器など他の業種は、1968年1月4日を100ポイントとして、時価総額加重平均方式で計算され、TOPIXと同様に小数点第2位まで求められる。

4.2 GARCH 推定について

まず、東証業種別株価指数それぞれについて GARCH プロセスの推定結果を示す。本稿では簡単のために GARCH (1, 1) プロセスを採用している⁶。GARCH モデル、

$$\begin{aligned} R_t &= E_{t-1}(R_t) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (4-1)$$

について、 $E_{t-1}(R_t) = 0$ と仮定し、 $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ の z_t については標準正規分布を当てはめている。

結果は図表1に示している。空運業を除くすべての業種において $\alpha + \beta < 1$ であり、これらの業種については分析期間中において定常性が確認できる。空運業の z_t については標準正規分布の代わりに学生t分布を当てはめたところ定常性が確認できた。よって以降の各 DCC モデルのインプット・データとなる基準化残差については、空運業は学生t分布から求められたデータ、その他の業種については標準正規分布から求められたデータを用いることにする。

4.3 DCC モデルの推定について

推定にはセクション2で示したモデルを用いている。ただし簡単のために DCC モデルのパラメーター、A 及び B はスカラーで推定を行っている。推定結果は図表2-1に示している。この場合、DCC モデルの対数尤度の値は-5180.25を示し、またパラメーターの

⁴ Tokyo Stock Price Index (東証株価指数) の略で、1968年1月4日終値で評価した東証1部上場全銘柄の時価総額を100として、その後の時価総額を指数化したもの。東京証券取引所が計算、公表している。

⁵ <http://www.tse.or.jp/c/listed/cs02.html>

⁶ EGARCH、GJR など、他の GARCH プロセスも使用できる。本稿は相関係数の変動の検証を主眼としているため、その他の GARCH プロセスによる検証は行っていない。

図表 1 : GARCH プロセスの推定

	ω	α	β
水産・農林業	0.17367	0.09693	0.79102
	3.42768	4.31955	16.91561
鉱業	0.33425	0.10454	0.81256
	2.41655	3.77735	14.46641
建設業	0.07567	0.10450	0.85820
	2.56072	4.83852	27.62825
食料品	0.03888	0.08919	0.86608
	2.96567	5.80849	34.19048
繊維製品	0.04794	0.08943	0.88353
	2.90593	5.56004	42.56043
パルプ・紙	0.00849	0.03097	0.96561
	1.19674	2.50245	69.19113
石油・石炭製品	0.03702	0.05356	0.93554
	1.88296	3.89146	53.96152
ゴム製品	0.00288	0.02007	0.97801
	1.18971	3.90478	188.61358
ガラス・土石製品	0.02203	0.07254	0.92165
	1.87547	5.40198	66.20204
鉄鋼	0.15846	0.10189	0.84774
	2.99834	5.23100	28.26783
非鉄金属	0.02144	0.07205	0.92484
	1.70566	4.98714	64.73396
金属製品	0.02079	0.07618	0.91522
	2.31475	5.93450	68.66000
機械	0.05069	0.09178	0.88392
	2.58300	5.57321	44.21311
電気機器	0.01263	0.06281	0.93423
	2.08083	4.96034	76.02184
輸送用機器	0.03677	0.08549	0.90048
	2.64798	6.26993	60.81312
精密機器	0.01678	0.05067	0.94287
	1.76202	3.97835	65.07784
その他製品	0.01180	0.06488	0.93137
	1.83611	5.67406	81.92793

	ω	α	β
不動産業	0.03368	0.05632	0.93630
	1.61168	3.37170	48.68864
陸運業	0.03866	0.10309	0.87006
	2.62610	5.04640	33.12211
海運業	0.15809	0.06080	0.89880
	1.97376	3.73348	27.75470
空運業(*)	0.01028	0.06123	0.94030
	1.61812	3.47431	59.49481
倉庫・運輸関連	0.10940	0.06246	0.88619
	2.23442	3.95978	25.77630
情報・通信業	0.01643	0.06788	0.93083
	1.96399	4.43622	64.21559
電気・ガス業	0.02613	0.12309	0.84539
	2.69487	4.32885	22.90607
サービス業	0.04008	0.15265	0.84071
	2.60060	5.00615	28.23588
医薬品	0.04007	0.07828	0.89670
	1.69052	3.01869	23.74159
卸売業	0.02589	0.11069	0.88646
	2.16733	6.43013	56.61865
小売業	0.03808	0.13353	0.85996
	2.66282	6.38204	42.74207
証券・商品先物取引	0.02942	0.04702	0.94872
	1.80636	3.26406	61.83676
保険業	0.13295	0.09767	0.85979
	3.48066	5.17320	33.72322
その他金融業	0.03929	0.08133	0.90944
	2.09358	5.58527	56.84183
化学	0.02997	0.07725	0.90472
	2.50955	5.59266	54.14240
銀行業	0.02418	0.08178	0.91634
	2.13109	5.44116	66.21972

* スチューデントの t 分布による推定

	ω	α	β	自由度
空運業	0.00834	0.04940	0.95057	5.23664
	1.56582	4.83745	104.95203	8.23805

表の上段：パラメーターの推定値

表の下段：t 値

推定結果も $A + B < 1$ であることから定常性が示され、その値が 0.9846 と 1 に近いことから相関が上昇 (低下) した後は高い (低い) 相関の期間がしばらく続くという現象が観測できる。

4. 4 ADCC モデルの推定について

相関の変動の非対称性の検証については、Cappiello Enhle and Sheppard (2003, 2006) が提案したモデルを用いている。パラメーターをスカラーとすれば、

$$Q_t = \bar{Q}(1 - A - B) - C\bar{N} + A(\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}) + BQ_{t-1} + C(n_{t-1}n'_{t-1}) \quad (4-2)$$

$$R_t = (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}}Q_t(\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}}$$

となる。ここで $\bar{Q} = E[\varepsilon_t\varepsilon'_t]$ 、 $\bar{N} = E[n_t n'_t]$ 、 $n_t = I[\varepsilon_t < 0] \cdot \varepsilon_t$ である。推定結果は図表 2-2 に示している。DCC モデルの推定結果と比較すると、対数尤度が -5139.28 と改善されている点、非対称性を示すパラメーターの値が有意で正の値を示していることから、東証業種別株価指数については指数のネガティブ・リターン後に相関が高まる傾向にあることを示している。

次に本稿では、ポジティブ・リターンに対する非対称性についての検証も行っている。モデルは 4-2 式の n_t を $n_t = I[\varepsilon_t > 0] \cdot \varepsilon_t$ としている。推定結果は図表 2-3 に示している。DCC モデルの推定結果と比較すると、対数尤度の値が -5180.29 と DCC モデルの結果とほぼ同水準のレベルであり改善が見られない点、また非対称性を示すパラメーター“C”の値が負の値を示しており、また t 値も有意水準に達していないことから、東証業種別株

図表 2 : 各 DCC モデルの推定

下記に本稿で用いた各 DCC モデルのパラメーター推定結果を示す。

図表 2-1 : DCC モデルの推定

パラメーター	A	B	対数尤度
推定値	0.00568	0.97879	-5180.25
t値	13.29501	380.99654	

図表 2-2 : ADCC モデルの推定 (ネガティブ・リターン)

パラメーター	A	B	C	対数尤度
推定値	0.00379	0.98224	0.00440	-5139.28
t値	10.90600	486.80481	8.12466	

図表 2-3 : ADCC モデルの推定 (ポジティブ・リターン)

パラメーター	A	B	C	対数尤度
推定値	0.00578	0.97872	-0.00022	-5180.29
t値	11.89315	381.02236	-0.45175	

価指数についてはポジティブ・リターンに対する相関係数の非対称性が確認できない。

4.5 SDCC モデルの推定について

SDCC モデルの推定については、まずネガティブ・リターンに対する検証から行う。具体的には、4-2式の η_i は、業種のリターン・ベクトル ε_i においてネガティブ・リターンの業種数が18以上の場合に ε_i の各要素で、18業種未満の場合はゼロで構成されるベクトルとなる。以降、ネガティブ・リターンの業種数を増やして行き、最後に η_i は33業種全てにおいてネガティブ・リターンで構成されるか、1業種でもポジティブ・リターンがある場合はゼロで構成されるベクトルとなる。検証結果は図表3に示している。図表3-1の「対数尤度比較グラフ」から、SDCCモデル（ネガティブ）の対数尤度はネガティブ・リターンの業種数が27まではADCCモデル（ネガティブ）とほぼ同水準のレベルで推移しているが、ネガティブ・リターンの業種数が27を超える水準から対数尤度の改善が見られ、ネガティブ・リターンの業種数が33のケースで最も高い対数尤度（-5024.61）を示している。パラメーターの推定結果をみると、システムティック・リスクを示すパラメーター“C”の値が、ネガティブ・リターンの業種数の増加に伴い上昇してきている。またADCCモデル（ネガティブ）の非対称性を示すパラメーター“C”の値と比較すると、ADCCモデル（ネガティブ）のパラメーターCの値が0.00440であるのに対してSDCCモデル（ネガティブ）のパラメーターCの値がネガティブ・リターンの業種数18の場合の0.00468からネガティブ・リターンの業種数33の場合の0.03294まで増加しており、これは単にADCCモデルが示しているネガティブ・リターン後に相関が上昇しそれがある程度持続する度合いよりも、ネガティブ・リターンを示す業種数がある程度集まったあとの方がその度合いが強いことを示している。

次に同様の検証をポジティブ・リターンに対しても行った。つまり4-2式の η_i は、 ε_i ベクトルについてポジティブ・リターンの業種数が18以上の場合に ε_i の各要素で、18業種未満の場合はゼロで構成されるベクトルとなる。以降、ポジティブ・リターンの業種数を18から増やして行き、最後に η_i は33業種全てにおいてポジティブ・リターンで構成されるか、1業種でもネガティブ・リターンがある場合はゼロで構成されるベクトルとなる。図表3-1の「対数尤度比較グラフ」をみると、ネガティブ・リターンに対する検証結果と同様にポジティブ・リターンで構成される業種数が多くなるにつれて対数尤度の値が上昇傾向にある。具体的にはポジティブ・リターンの業種数が29を超える水準から対数尤度が上昇し始め、ポジティブ・リターンの業種数が33の場合に最も高い対数尤度（-5154.72）を示している。SDCCモデル（ポジティブ）のパラメーターCの値についてもSDCCモデル（ネガティブ）と同様にポジティブ・リターンの業種数の増加に伴い上昇してきている。具体的にはポジティブ・リターンの業種数が27からパラメーターCの値が正の値に転換しており、ポジティブ・リターンの業種数が30からt値が2以上の水準となっていることから推定されたパラメーターの統計的有意性が示されている。これは、ADCCモデル（ポジティブ）のポジティブ・リターンに対する相関係数の非対称性が確認できないケースに対して興味深い結果を示している。つまりポジティブ・リターンの業種数がある程度集まると、ADCCモデル（ポジティブ）とは異なり、ポジティブ・リターン後に相関が上昇しそれがある程度持続することを示している。ポートフォリオ・

マネジメントにおいては、リスクとは一般的に価格の変動性を示すことから、ネガティブ・リターンやポジティブ・リターンがある程度集まったケースではどちらも考慮する必要がある。

上記の結果を踏まえて、本稿ではネガティブ・リターン、ポジティブ・リターンの両方に対応するモデルを提示して検証を行っている。パラメーターをスカラーとすればモデルは、

$$Q_t = \bar{Q}(1-A-B)C^n \bar{H}^n - C^p \bar{H}^p + A(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}) + BQ_{t-1} + C^n (n_t^n n_t^{n'}) + C^p (n_t^p n_t^{p'}) \quad (4-3)$$

で示される。ここで ε_t は GARCH モデルから求められた基準化残差で、 $\bar{Q} = E[\varepsilon_t \varepsilon_t']$ 、 $\bar{H}^n = E[n_t^n n_t^n]$ 、 $\bar{H}^p = E[n_t^p n_t^p]$ 、 n_t^n は ε_t ベクトルについて負 (ネガティブ・リターン) の要素の数がある閾値を越えた場合に ε_t の各要素で、閾値以下の場合にはゼロで構成されるベクトル、 n_t^p は ε_t ベクトルについて正 (ポジティブ・リターン) の要素の数がある閾値を越えた場合に ε_t の各要素で、閾値以下の場合にはゼロで構成されるベクトルとする。相関係数は、

$$R_t = (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}} \quad (4-4)$$

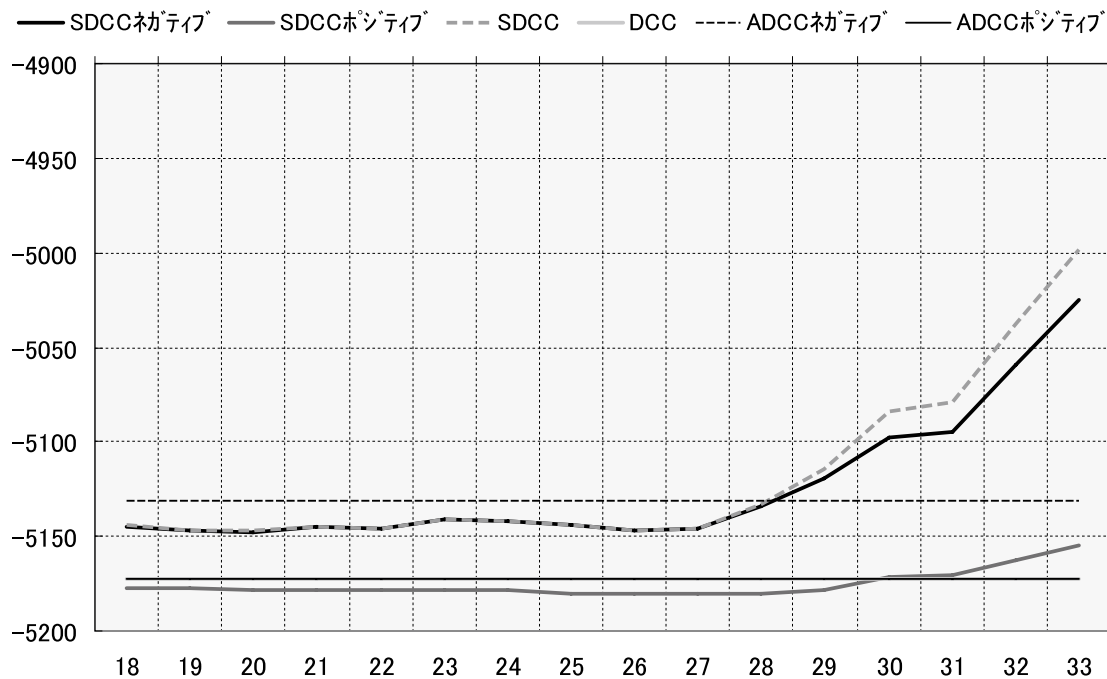
で求められる。本稿ではこのモデルを SDCC モデルと呼ぶことにする。推定結果について、SDCC モデルの対数尤度は、業種数が 27 を超える水準から上昇し始め、業種数が 33 の水準においては -4998.33 の値を示し、MDCC モデル (ネガティブ)、MDCC モデル (ポジティブ) と比較して、最も良い結果を得ている。

図表 3 : SDCC モデルの推定

図表 3-1 : SDCC モデルの対数尤度
対数尤度表

業種数	SDCC _{ネガティブ}	SDCC _{ポジティブ}	SDCC
18	-5144.86	-5177.19	-5144.21
19	-5147.12	-5177.18	-5146.45
20	-5147.40	-5178.04	-5147.14
21	-5145.34	-5178.14	-5145.11
22	-5145.64	-5178.39	-5145.42
23	-5141.17	-5178.71	-5141.13
24	-5141.61	-5178.85	-5141.52
25	-5144.40	-5179.95	-5144.42
26	-5146.90	-5180.27	-5146.77
27	-5146.36	-5180.26	-5145.94
28	-5134.43	-5179.86	-5132.89
29	-5118.96	-5178.09	-5114.18
30	-5097.27	-5171.60	-5084.03
31	-5094.28	-5170.61	-5079.34
32	-5059.41	-5163.07	-5038.05
33	-5024.61	-5154.72	-4998.33

対数尤度比較グラフ



*参考のため、DCCモデル、ADCCモデル（ネガティブ）、ADCCモデル（ポジティブ）の対数尤度についても細線でプロットしている。

*“SDCC”はネガティブ、ポジティブ両方を含むモデルを示す。

図表3-2：SDCCモデルのパラメーター推定結果

SDCC_{ネガティブ}

業種数	推定値			t値		
	A	B	C _{ネガティブ}	A	B	C _{ネガティブ}
18	0.00416	0.98093	0.00468	11.37413	439.16404	7.55130
19	0.00428	0.98043	0.00469	11.49502	423.04005	7.27916
20	0.00432	0.98038	0.00476	11.53688	420.08115	7.24811
21	0.00433	0.98023	0.00507	11.61138	416.56227	7.37707
22	0.00439	0.98007	0.00520	11.66773	410.27508	7.32267
23	0.00445	0.97924	0.00577	11.84694	395.01270	7.50430
24	0.00453	0.97905	0.00596	11.89826	387.55646	7.42505
25	0.00451	0.97986	0.00579	11.82424	403.03059	7.35505
26	0.00459	0.97992	0.00584	11.93460	405.57921	7.17822
27	0.00460	0.98005	0.00613	11.87551	403.66522	7.22033
28	0.00462	0.97907	0.00787	11.89814	380.48420	7.80151
29	0.00460	0.97819	0.00989	12.09708	374.71132	8.47923
30	0.00453	0.97824	0.01277	12.59236	407.04472	9.57536
31	0.00474	0.97711	0.01475	12.76679	382.93243	9.45653
32	0.00484	0.97595	0.02102	14.02912	433.64098	11.08538
33	0.00530	0.97274	0.03294	14.49810	396.28507	11.75063

SDCC_{ポジティブ}

業種数	推定値			t値		
	A	B	C _{ポジティブ}	A	B	C _{ポジティブ}
18	0.00607	0.97925	-0.00134	13.13659	405.64053	-2.50888
19	0.00605	0.97926	-0.00136	13.18284	405.58695	-2.51254
20	0.00600	0.97917	-0.00118	13.07680	400.01997	-2.14667
21	0.00597	0.97924	-0.00118	13.15730	401.14930	-2.10264
22	0.00590	0.97949	-0.00114	13.37281	406.02327	-1.99349
23	0.00587	0.97944	-0.00106	13.36395	403.54073	-1.82090
24	0.00583	0.97954	-0.00105	13.45377	402.70488	-1.74244
25	0.00574	0.97921	-0.00055	13.29066	386.82257	-0.84777
26	0.00569	0.97888	-0.00014	13.14189	377.68554	-0.19525
27	0.00566	0.97869	0.00017	13.06337	373.01707	0.23204
28	0.00562	0.97841	0.00073	12.95305	365.10545	0.90320
29	0.00557	0.97782	0.00181	12.78702	349.21018	1.99647
30	0.00546	0.97709	0.00415	12.44346	332.49640	3.74481
31	0.00545	0.97737	0.00490	12.62383	346.28624	3.95084
32	0.00542	0.97705	0.00775	12.59813	343.88959	5.01909
33	0.00590	0.97343	0.01553	13.28920	301.91800	5.52699

SDCC

業種数	推定値				t値			
	A	B	C _{ネガティブ}	C _{ポジティブ}	A	B	C _{ネガティブ}	C _{ポジティブ}
18	0.00432	0.98155	0.00450	-0.00060	10.94446	449.92294	7.33968	-1.21200
19	0.00444	0.98105	0.00451	-0.00062	11.08828	433.84045	7.06166	-1.22231
20	0.00443	0.98076	0.00464	-0.00041	11.02077	423.54793	7.03180	-0.78440
21	0.00442	0.98060	0.00495	-0.00040	11.14963	418.71355	7.16606	-0.74834
22	0.00447	0.98052	0.00507	-0.00041	11.37861	409.97927	7.09991	-0.72747
23	0.00449	0.97950	0.00570	-0.00023	11.49318	387.68435	7.25722	-0.39012
24	0.00457	0.97940	0.00587	-0.00030	11.68922	380.76146	7.20087	-0.49399
25	0.00451	0.97979	0.00581	0.00007	11.61611	386.24620	7.19067	0.10174
26	0.00455	0.97960	0.00592	0.00036	11.69686	385.99683	7.07694	0.53123
27	0.00454	0.97953	0.00626	0.00066	11.62163	381.63557	7.13623	0.91496
28	0.00452	0.97809	0.00817	0.00137	11.60962	354.05277	7.72235	1.69263
29	0.00445	0.97629	0.01056	0.00270	11.80914	342.39120	8.48525	2.86440
30	0.00425	0.97592	0.01379	0.00506	12.04859	374.14737	9.75322	4.55665
31	0.00442	0.97521	0.01579	0.00620	12.39252	374.55958	9.84535	4.84071
32	0.00449	0.97412	0.02204	0.00888	13.52484	430.79150	11.54916	5.72587
33	0.00518	0.96934	0.03525	0.01584	14.57705	383.61368	12.40572	6.08308

5. 考察

本稿では、同方向へ変動する資産の数をポートフォリオのシステムティック・リスクを示す変数と定義して DCC モデルを改良、東証業種別株価指数を用いて検証を行っている。結果は、ネガティブ・リターン、ポジティブ・リターンともに、同一方向へ変動する資産の数が多いほど、比較的大きなシステムティック・リスク発生後に相関が上昇しそれがある程度持続する度合いが強いことを示している。

この結果を鑑みた実務的応用としては、高度に分散化されたポートフォリオにおいて比較的大きなシステムティック・リスク発生後の相関の値が高い時期に限定してヘッジを行

い、システムティック・リスクによるショックをある程度緩和させる方法が考えられる。近年 BRICs に代表されるエマージング諸国の経済発展に伴い世界の経済圏が大きく拡大、多くのマネーが各国のさまざまな資産に分散投資されている。しかしこのようなリスク・マネーは、いざ何らかのイベントが発生すると一斉に引き上げられ、各資産が連動性を伴い急激な下落をもたらす。実際に、新聞報道等によると、2006年5月には為替市場における為替のキャリー・トレードの巻き戻しにより、各国の市場のコモディティ、株式等、多くの資産が大きく下落し、また2007年2月末にはエマージング国発（中国の上海）の世界同時株安が発生している。このような現象は世界経済の発展に伴いより顕著なものとなり、ますます国際分散投資の効果が期待できず、結果としてよりシステムティック・リスクの管理が重要になってくると考えられる。

最後に本稿で用いた DCC モデルについて実務的側面から考察してみる。DCC モデルは大規模な相関マトリックスであっても比較的容易に推定ができるというメリットがある。近年、コンピューターの性能の向上やまたコンピューター・サイエンスの進展に伴い、他のモデルを用いて大規模マトリックスを計算することも比較的容易になってきている。しかし、DCC モデルは GARCH モデルのフレームワークからパラメーターの推定が可能なことから実務者でも理解しやすいモデルといえる。DCC モデルは提案されてから日が浅いこともあり、公表されている研究の数が多くは無い。DCC モデルについて今後さまざまな分野で多くの研究がおこなわれることを期待している。

参考文献

- Bauwens, L., S. Laurent and J.V.K. Rombouts, 2004, "Multivariate GARCH Models: A Survey.", forthcoming in *Journal of Applied Econometrics*
- Bekaert, G. and G. Wu, 2000, "Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets.", *Review of Financial Studies*, Vol.13 (1), pp.1-42.
- Billio, M., Caporin, M. and M. Gobbo, 2003, "Block Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH models.", GRETA Working Paper n.03.03.
- Billio, M., Gobbo, M. and M. Caporin, 2005, "Flexible Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH models for Asset Allocation.", *Applied Financial Economics Letters*, Volume 2, Issue 2, pp.123-130
- Bollerslev, T., Engle, R. and J. Wooldridge, 1988, "A capital asset pricing model with time varying covariances.", *Journal of Political Economy*, 96, 116-131.
- Bollerslev, T., 1990, "Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model.", *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.
- Cajigas, J.-P. and G. Urga, 2005, "Dynamic Conditional Correlation Models with Asymmetric Multivariate Laplace Innovations.", Centre for Econometric Analysis, Cass Business School.
- Cappiello, L., Engle, R. and K. Sheppard, 2003 "Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns.", ECB Working Paper No. 204. *Journal of Financial Econometrics*, September 2006, Vol.4, Num. 4, pp.537-572.
- Cappiello, L. and Engle, R. and K. Sheppard, 2005, "Asymmetric Dynamics in the Correlation of Global Equity and Bond Returns.", ECB Working Paper, No. 204.
- Chou, R.Y., N. Lui, and C.-C. Wu, 2005, "Forecasting Correlation and Covariance with a Range-Based Dynamic Conditional Correlation Model.", 2005 China International Conference in Finance July 5-7, 2005.
- Christodoulakis, G. and S. Satchell, 2002, "Correlated ARCH: Modelling the time-varying correlation between financial asset returns.", *European Journal of Operations Research*, 72, 498-505.
- Engle, R. and K.F. Kroner, 1995, "Multivariate simultaneous generalized ARCH," *Econometric Theory*,

11. 122-150

- Engle, R., 2002, "Dynamic conditional correlation-A simple class of multivariate GARCH models.", Forthcoming Journal of Business and Economic Statistics.
- Errunza, V.K.H, and M.-H.Hung, 1999, "Can the Gains from Internatinal Diversification be Achieved without Trading A broad?", Journal of Finance, Vol. 54, pp.2075-2107.
- Feng, Y., 2006, "A local dynamic conditional correlation model", MPRA Paper No. 1592, posted 28.
- Hafner, C.M., and P.H. Franses, 2003, "A Generalized Dynamic Conditional Correlation Model for Many Asset Returns." Econometric Institute Report EI 2003-18.
- Kasch-Haroutounian, M., 2005, "Volatility Threshold Dynamic Conditional Correlations:Implications for International Portfolio Diversification.", International Conference on Finance, September 2-4, 2005.
- Kroner, K.F., and V.K. Ng, 1998, "Modeling asymmetric comovements of assets returns.", Review of Financial Studies.Vol. 11, No. 4, pp.817-844.
- Thorp, S, and G.Milunovich, 2005, "Asymmetric Risk and International Portfolio Choice.", UTS Quantitative Finance Research Paper No. 160.
- Tse, Y.and A.K.Tsui, 2002, "A multivariate GARCH model with time-varying correlations", Journal of Business and Economic Statistics, 20, 351-362.
- Tsui, A.K and Q. Yu, "Constant conditional correlation in a bivariate garch model: Evidence from the stock marker in china." Mathematics and Computers in Simulation, 48 (1999), pp.503-509
- Vargas III, G.A, 2006, "An Asymmetric Block Dyanmic Conditional Correlation Multivariate GARCH Model.", The Philippine Statistician, Vol. 55, Nos. 1-2, pp.83-102.
- 森本孝之・川崎能典, 2005, "イントラデイ VaR による GARCH モデルの比較実証", 統計数理 (2006) 第 54 巻第 1 号 5-21、特集「統計科学とリスク解析」原著論文

(かんげ・かずお 社会文化科学研究科博士後期課程)