千葉大学教育学部研究紀要　第55巻　21～28頁（2007）

図形の包摂関係についての理解の変容
―定義についての検討場面を取り入れた授業を通して―

松　尾　七　重
千葉大学　教育学部

The transition of understanding of inclusion relations between geometric figures
―Through the lessons which adopt the situation of discussing about definitions of geometric figures―

MATSUO Nanae
Faculty of Education, Chiba University

本研究の目的は図形の定義についての検討場面を取り入れた授業により，図形の包摂関係についての生徒の理解が変容することを明らかにすることである。そのために，まず，図形の概念形成を促進することを目指し，定義の捉え方の指導を考えるという本研究の立場を明確にし，また，これまでの研究成果を踏まえ，定義指導の要因を示す。次に，その要因を考慮して実施された授業の概要，その授業前後で行われた図形の包摂関係についての理解に関する実態調査の概要及びその結果を述べ，その結果を考察する。その結果，長方形，平行四辺形及び二等辺三角形についてはより特殊な図形を含めて考えられるようになったことにより指導の効果が示された。しかしながら，定義を適切に捉えることができた生徒はある図形がそれより一般的な図形に含まれるかどうかの判断はできても，その判断を，概念イメージに当てはまる図を選ぶ際に用いていないことが明らかになった。

The purpose of this study is to show the transition of students' understanding of inclusion relations between geometric figures through the lessons which adopt the situation of discussing about definitions of geometric figures. First it clarifies that teaching definitions of geometric figures promotes concept formation of these figures in this study. Second the factors of teaching definitions of geometric figures are pointed out based on the results of the previous studies. Third the lessons which adopt the situation of discussing about definitions of geometric figures were given and the survey of understanding of inclusion relations between geometric figures before and after the lessons administered and the results of the survey were considered. It follows from what has been said that the teaching definitions effects students' understanding of inclusion relations between squares and rectangles, rectangles or rhombi and parallelograms, regular triangles and isosceles, right isosceles and isosceles, however, students who understood the definitions of geometric figures appropriately was not able to use the inclusion relations in order to select figures that are consistent to their concept image of geometric figures.

キーワード：図形の概念（concepts of geometric figures）　包摂関係（inclusion relations）　理解（understanding）
定義指導（teaching definitions）　概念イメージ（concept image）

1．はじめに

数学教育において，定義指導が重要であることはこれまでに様々な研究者により指摘され[1]，また，定義の指導実践が多数報告されている[2]。我が国では，小学校第２学年においてはじめて定義が取り上げられるが，定義の意味や役割については明らかにされていない。一方，中学校第２学年では，図形の証明の単元において命題として定義が本格的に取り扱われるようになる。しかしながら，中学校では，生徒たちは小学校での学習の延長として考え，特に注意して定義を学習することは少なく，また，教師も定義構成の学習指導には特に注目しているということはない。

連絡先著者：

これまでに，長方形についての小学校６年生と中学校２年生に対する実態調査の結果を基に，図形の定義についての捉え方が図形の概念形成に及ぼす影響を解明した[3]。また，日本とフィンランドにおける図形の定義の捉え方に関する調査結果を踏まえて，我が国の平行四辺形の定義指導の効果を明らかにするとともに，我が国における児童・生徒の長方形，ひし形及び平行四辺形の定義の捉え方が図形の概念形成に及ぼす影響を解明した[4]。

また，図形学習後の小学校６年生と図形の定義学習前の中学校２年生における定義の捉え方の比較から，図形の定義を性質の列挙と考える生徒が多く，捉え方の変容が殆ど見られないことを明らかにした[5]。そこで，これらの結果を踏まえ，図形の定義についての検討場面を取り入れた授業を実施することにより，図形の包摂関係についての生徒の理解の変容を明らかにすることを本研究

の目的とする。

2．図形の定義についての捉え方

これまでに，図形の概念形成を促進する学習指導を提案するために，図形に関する諸概念の関係についての理解の状態を捉える枠組みを設定した[6]。この構成要素の一つに図形に関する諸概念の関係についての理解の状態（以下，理解の状態）がある。この理解の状態は２つの図形の概念間の関係を捉える観点を基に以下のように設定されている。すなわち，２つの図形の概念を弁別できない状態（状態１），その相違点に基づいて弁別できる状態（状態２），その相違点によって弁別し，類似点によって同類と見なすことができる状態（状態３）である。さらに，２つの図形の概念の相違点及び類似点を基に，それらの包摂関係を理解できる状態（状態４）である。

上述の枠組みに基づいて，状態３から状態４への移行を促す要因「図形の概念をその定義にあてはまるもの全ての集合であると考え，定義の意味を正確に捉えること」を抽出した[7]。これにより，図形の定義についての捉え方が図形の概念形成を促進するための要因であることを示し，その重要性を明らかにしたことになる。したがって，本研究では，図形の定義についての適切な捉え方が図形の概念形成を促進する，とりわけ包摂関係の理解を促すという立場に立っている。

3．図形の定義指導の実践に関する先行研究

図形の定義についての捉え方を改善するために，様々な指導が提案されている。Pereira-Mendoza（1993）は数学における定義の役割についての理解を促すための活動を提案している[8]。具体的には，四角形を例として，三角形との違いを明らかにしたり，４点が同一平面上にない場合について検討したり，最少の単語数で図形を述べる方法を考えたりしている。また，Keiser（2000）は角の概念に焦点化して，６年生に対して定義の指導を行っている[9]。角の意味や角の概念に対する矛盾についての話し合いにより，子どもたちは形式的定義の導入前に豊かな概念イメージをつくることができると示唆されている。

我が国では，小関ほか７名（1981）は二等辺三角形の定義指導を中学校２年生で取り上げて授業を行い，その効果を明らかにしている[10]。生徒たちに二等辺三角形について説明させ，その中から，二辺相等，二角相等，二辺・二角相等の何れかが相応しいかについて話し合わせ，最終的に二辺相等を選んで，定義を意味づけている。また，この継続研究として，中西，国宗ほか７名（1983）は「図形の定義は，みんなで討論して決めるもの」という立場で，平行四辺形の単元において，その定義と性質を明確に捉えさせ，定義の必要性や役割を理解させる指導を実施し，その効果を示している[11]。さらに，清水（1999）は，高校１年生の２名ずつの２ペアに対して，たこ形と凹四角形を用いて教授実験を行い，図形の考察の水準及び定義観の変容から，その定義指導の効果を示している[12]。

以上のように，図形の定義指導に関する実践的研究が多数行われてきており，その成果が示されている。しかしながら，トピック的な取り扱いや少人数による教授実験であったり，指導要因が明確でなかったりする。そのうえ，小学校段階から中学校段階における図形の概念イメージや定義の捉え方の変容を考慮した指導にはなっていない。本研究では，小学校までの定義についての捉え方を踏まえ，また，中学校の教育課程に組み入れて図形の定義指導を構想し，実施することを目指している。

4．図形の概念イメージに関する先行研究

これまでに，概念イメージと概念定義の不一致[13]やそれらにより捉えられる概念理解[14]について研究がなされている。概念イメージとは，ある概念に対してもつメンタル・ピクチャーのことであり，概念定義とともに，概念理解の一側面を捉えるものである。概念イメージは与えられた数学的対象がその概念の例かどうかを判断する基準となり得るため，図的に表現しやすい図形の場合は特に概念理解において重要な役割を果たす。また，本研究で研究対象となっている定義の捉え方は概念に対する言語形式である概念定義と区別して取り扱われるため，概念定義は取り上げないことにする。

以上のように，本研究では，図形を表した図と概念イメージとの整合性を基に図形の包摂関係の理解を捉えることにする。

5．図形の定義指導における留意点

これまでに実施してきた研究により次のような示唆が得られたことから，それらを踏まえて図形の定義指導における留意点を示し，授業に取り入れる。まず，図形の定義についての捉え方が図形の概念形成に及ぼす影響を解明した研究[15]により，悪影響を回避するために，否定的な表現をなくすようにすること，必要条件だけでは不十分であることが分かるように，定義記述の内容を吟味することが必要であることを明らかにした。また，図形の概念イメージとのずれを視点として定義の捉え方の実態を解明した研究[16]では，定義の意味内容とそれを満たす図形の集合を対比させることで，図形の概念イメージと定義の捉え方のずれを解消させること，性質の列挙を簡潔な表現に改める話し合いの場面を設けることが必要であると結論づけた。

以上のことから，授業に取り入れる留意点として，以下の４点が挙げられる。第一に，否定的な表現を用いないようにする。第二に，定義を必要十分条件として捉えるようにする。第三に，定義の意味を明らかにし，それにあてはまる例示を行う。第四に，性質の列挙を簡潔な表現に改めるようにする。

6．調　　査

本章では，図形の定義指導による図形の包摂関係についての生徒の理解の変容を明らかにする。

⑴　調査の概要

この調査は国立大学の附属中学校１学級42名の生徒を対象にして行われた質問紙調査である。事前調査は2006年１月に，事後調査は2006年６月に行われた[17]。授業は2006年５月に，四角形の関係についての指導時期にあわせて，２単位時間（45分×２）で実施された。事前及び事後調査は数学担当教師の監督下でいずれも10分間で行われた。

⑵　調査問題

この調査では，問題２と問題３が出題された。問題２は12の図の中から，問として提示された図形にあてはまる図を全て選ぶ問題である（図１，２）。１では，正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，四角形及び多角形にあてはまるものを，図の中から選ぶ問題が出題されている。図はそれぞれ以下の図形を表している。Ａは平行四辺形，Ｂは正方形，Ｃはひし形，Ｄはたこ形，Ｅは台形，Ｆは凹八角形，Ｇは長方形，Ｈは平行四辺形，Ｉは長方形，Ｊはひし形，Ｋは正方形，Ｌは正六角形である。また，２では，直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形，二等辺三角形，正三角形，直角二等辺三角形にあてはまるものを図の中から選ぶ問題が出題されている。図はそれぞれ以下の図形を表している。Ａは正三角形，Ｂは直角二等辺三角形，Ｃは鋭角三角形，Ｄは二等辺三角形，Ｅは直角三角形，Ｆは鋭角三角形，Ｇは三角形でない，Ｈは鈍角三角形，Ｉは鈍角三角形，Ｊは鈍角三角形，Ｋは二等辺三角形，Ｌは直角三角形である。

また，問題３は定義を問う問題や包摂関係について説明する問題である（図３，４）。この問題には以下の６あるいは７つの問が出題されている。問１は定義としてあてはまるものを選ぶ問題である。事前調査では長方形，事後調査ではひし形についてたずねた。但し，事前調査では，定義が未習のため「……をはっきりと述べていると思われるのはどれですか」という問いにした。問２は問１の選択肢の中から最適なものを選ぶ問題である。問３では，事前調査ではひし形の図を示し，事後調査では長方形の図を示さずに，各々の定義をたずねた。また，問４では，事前事後調査ともに，正方形の図を示し，ひし形かあるいは長方形か，その理由をたずねた。問５では，事前事後調査ともに，問３と同様な形式で平行四辺形の定義をたずねた。問６では，事前調査で長方形の図，事後調査でひし形の図を示し，平行四辺形かどうか，その理由をたずねた。問７は事後調査でのみに出題され，台形の定義を記す問題である。

⑶　調査結果の分析方法

本研究では，まず，問題２においては，Ａ～Ｇの図が表す図形の中で，ａ）～ｆ）の図形を，より特殊な図形との包摂関係を基にそれらを含めて捉えているかどうかを判断する。また，問題３においては，問１及び問２についてはＡ～Ｇの選択肢を選んだ人数を学年ごとに集計する。定義の捉え方の視点としての経済性[18]，条件の過不足性[18]，任意性[19]及び視覚的イメージ[20]に基づく選択肢を設定した。そのため，経済性を満たしている一般的な定義をＢ，それに同値な命題としてのＧ，条件過剰のＤとＥ，条件不足のＡとＦ，視覚的イメージによるＣを設定した。具体的に言えば，次の通りである。Ａは図形の一種であるという記述である。Ｂは数学的に一般的な

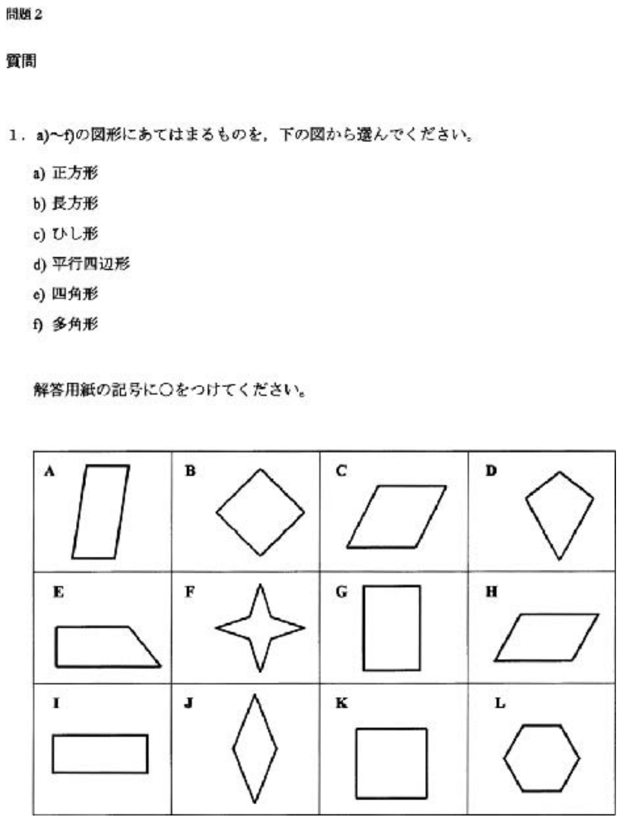


図１　事前事後調査の問題２・問１

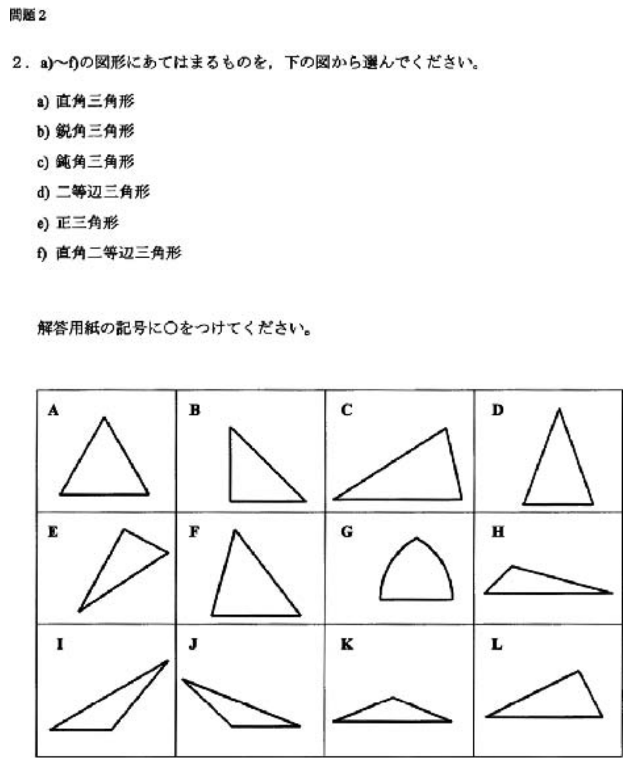


図２　事前事後調査の問題２・問２

問題３

２年＿＿組＿＿番　男・女　名前＿＿＿＿＿＿＿

問1. 次のＡ～Ｇの中で，長方形をはっきりと述べていると思われるのはどれですか。

あてはまるものの記号に○をつけてください（２つ以上つけてもよいです）。

Ａ　長方形は図形の一種です。

Ｂ　長方形は４つの角が等しい四角形です。

Ｃ　長方形は正方形を伸ばした図形です。

Ｄ　長方形は４つの角が等しく，４つの辺をもち，２つの対角線が等しく，２つの向かい合う辺が等しく，平行です。

Ｅ　長方形は４つの角が等しく，隣り合う辺の長さが違う四角形です。

Ｆ　長方形は向かい合う辺が平行な四角形です。

Ｇ　長方形は１つ角が直角である平行四辺形です。

問2. 上のＡ～Ｆの中で，長方形をもっともはっきりと述べているのはどれですか。

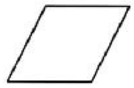
あてはまるものを一つ選んで，○をつけてください。

Ａ　Ｂ　Ｃ　Ｄ　Ｅ　Ｆ　Ｇ

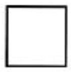
次のページに続きます。

問題３

問3. ひし形とは，どのような図形ですか。それについてはっきりと述べてください。
下の図はひし形の一つの例です。



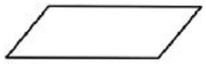
問4. 次の図形もひし形ですか。「はい」か「いいえ」に○をつけ，その理由を書いてください。



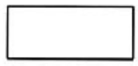
はい　　いいえ

理由:

問5. 平行四辺形とは，どのような図形ですか。それについてはっきりと述べてください。
下の図は平行四辺形の一つの例です。



問6. 次の図形も平行四辺形ですか。「はい」か「いいえ」に○をつけ，その理由を書いてください。



はい　　いいえ

理由:

図３　事前調査の問題３

問題３

３年Ｃ組　＿＿番　男・女　名前＿＿＿＿＿＿＿

問1. 次のＡ～Ｇの中で，ひし形の定義として用いられるのはどれですか。

あてはまるものの記号に○をつけてください（２つ以上つけてもよいです）。

Ａ　ひし形は図形の一種です。

Ｂ　ひし形は４つの辺が等しい四角形です。

Ｃ　ひし形は正方形を斜めにつぶした図形です。

Ｄ　ひし形は４つの辺が等しく，４つの角をもち，２つの対角線が垂直に交わり，２つの向かい合う辺が等しく，平行です。

Ｅ　ひし形は４つの辺が等しく，隣り合う角の大きさが等しくない四角形です。

Ｆ　ひし形は向かい合う辺が平行な四角形です。

Ｇ　ひし形は隣り合う辺が等しい平行四辺形です。

問2. 上のＡ～Ｆの中で，ひし形の定義として最もよいのはどれですか。

あてはまるものを一つ選んで，○をつけてください。

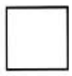
Ａ　Ｂ　Ｃ　Ｄ　Ｅ　Ｆ　Ｇ

次のページに続きます。

問題３

問3. 長方形とは，どのような図形ですか。その定義を述べてください。

問4. 次の図形も長方形ですか。「はい」か「いいえ」に○をつけ，その理由を書いてください。

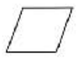


はい　　いいえ

理由:

問5. 平行四辺形とは，どのような図形ですか。その定義を述べてください。

問6. 次の図形も平行四辺形ですか。「はい」か「いいえ」に○をつけ，その理由を書いてください。



はい　　いいえ

理由:

問7. 台形とは，どのような図形ですか。その定義を述べてください。

図４　事後調査の問題３

定義である。Cは視覚的にどのように見えるかという記述である。Dでは４直角だけでなく，４辺あること，対角線の相等や対辺の相等及び平行性についても述べられている。Eでは４直角の他に，隣接する辺の長さが等しくないことが記されている。Fは対辺の平行性を述べて，より一般的な図形である平行四辺形の定義になっている。Gは１つの直角をもつ平行四辺形というBに同値な命題である。

問３，５及び７については，回答の記述に問１のA～Gを特定する。この場合，２つ以上に相当する回答にはDE等の２つ以上を特定することとする。

問４と問６については，「はい」か「いいえ」か，その理由が包摂関係を理解しているものとなっているかどうかを判断する。

⑷　授業の概要

授業は数学科の担当教師に，授業のねらいを理解して，実施して頂いた。授業のねらいは生徒たちが定義の役割を知り，定義を適切に理解し活用できるように，図形の定義指導を行うことである。事前打ち合わせをし，５で示した指導の留意点を基に，授業の展開過程を説明し，依頼した。

１時間目の授業の概要は以下の通りである。教師は長方形とは何かとたずね，一人ずつ順番に様々な特徴を言わせていった。教師の介入もあったが，以下の特徴が挙げられた。「向かい合う辺が平行」「対角線が互いに中心・中点で交わる」「４つの角が全部90°」「４つの角の合計が360°」「辺が４つ，角が４つ」「向かい合う辺の長さが同じ」「対角線の長さが等しい」等。

その後で，教師は長方形という言葉を的確に表すのはどれか，簡単で，無駄なく，しかし，必要なものを消さないようにするとどうかとたずねた。それぞれの特徴は一つずつ理由づけられ，消されていった。正方形でも言えるという理由で「４つの角が全部90°」も消されたが，Tさんから，平行四辺形との確実な違いを言うためには必要だという反対意見が出された。結果として，「４つの角が全部90°」「対角線の長さが等しい」が残された。しかし，生徒たちがすっきりしていない様子を受け止め，教師は角度が90°の平行四辺形はどうかともちかけ，角度が90°の平行四辺形では，角を90°にすることは結果として対辺が平行になることであり，90°と平行がダブりになるので，平行を消すことになると結論づけた。

続いて，教師は平行四辺形から条件付加により，ひし形，長方形及び正方形になるという図を示し，全体を大きく囲んで，全部が平行四辺形で，２組の向かい合う辺が平行だからと説明した。平行四辺形の角度を90°にすると長方形になること，四角形だから，360°で，全ての角が等しいと言えること，４つの辺が等しいとひし形で，角と辺がともに等しいと正方形になることから，図形を関係づけた。

最後に，長方形は４角が全て等しい四角形としてまとめ，必要最低限の言葉でいうのを定義と言い，定理は図形について言えることであると説明した。

また，２時間目の授業の概要は以下の通りである。再度，定義と定理の確認を行い，長方形を例として，定義はその用語の意味を述べたもの，必要十分条件であることを説明した。一方，定理はみんなが正しいと確認したことで，よく使われる性質をまとめたものであるとした。また，１時間目で挙げられた長方形の性質の中から，隣り合う辺は等しくないという表現を取り上げて，否定的表現を使わないことの確認を行った。一般の四角形でも言えることであり，条件は「そうである」というもののみとすることを説明した。さらに，「もれ，重なり」について，平行四辺形を取り上げて確認した。

７．調査結果とその考察

⑴　調査結果

問題２についての結果をまとめると以下の表１及び表２の通りになる。表１は四角形についてまとめたもので

表１　事前事後調査における問題２の四角形の解答率

図形	解答	事前（%）	事後（%）
正方形	BK	95.2	92.8
	K	2.4	4.8
	その他	2.4	2.4
長方形	BGIK	19.0	47.7
	GI	73.9	42.8
	その他	7.1	9.5
ひし形	BCJK	23.7	31.0
	BCJ	7.1	11.9
	BJ	14.3	4.8
	BJK	14.3	9.5
	CJ	16.7	19.0
	DJ	4.8	0
	J	14.3	4.8
	その他	4.8	19.0
平行四辺形	ABCGHIJK	31.0	59.5
	ACH	28.5	7.1
	ACHJ	11.9	4.8
	AH	4.8	11.9
	CH	4.8	2.4
	その他	19.0	14.3
四角形	ABCDEGHIJK	92.9	92.9
	その他	7.1	7.1
多角形	A～L	42.8	45.2
	ABCDEGHIJK	4.8	4.8
	A～M	4.8	0
	FL	38.0	45.2
	L	4.8	2.4
	その他	4.8	2.4

表２　事前事後調査における問題２の三角形の解答率

図形	解答	事前（%）	事後（%）
直角三角形	ＢＥＬ	66.6	59.5
	ＢＥ	7.1	7.1
	ＢＬ	4.8	26.2
	Ｂ	4.8	2.4
	ＥＬ	4.8	0
	その他	11.9	4.8
二等辺三角形	ＡＢＤＪＫ	11.9	23.8
	ＡＢＤＦＪＫ	7.1	11.9
	ＡＢＤＫ	4.8	16.7
	ＡＤＫ	4.8	2.4
	ＢＣＤＪＫ	4.8	2.4
	ＢＤＦＪＫ	0	7.1
	ＢＤＫ	9.5	2.4
	ＢＤＪＫ	11.9	2.4
	ＤＫ	11.9	2.4
	その他	33.3	28.5
正三角形	Ａ	88.1	95.2
	無解答	4.8	0
	その他	7.1	4.8
直角二等辺三角形	Ｂ	71.4	90.5
	ＢＬ	4.8	0
	Ｍ	4.8	0
	無解答	7.1	0
	その他	11.9	9.5

あり，表２は三角形についてまとめたものである。それぞれの図形の主たる解答に対してそれを出した生徒の割合を，事前調査，事後調査毎に示した。三角形の中で，鋭角三角形，鈍角三角形については本研究では特に考察の対象としないことから，ここでは削除した。また，各解答については２名以上の生徒が答えたもののみを取り上げ，１名だけが答えたものについてはその他にまとめた。したがって，「その他」の割合が多い場合は，多種の解答が出されたということである。

⑵　理解の変容が見られなかった図形

以上の結果から，図形の包摂関係の理解についての変容が見られなかった図形を取り上げる。正方形，四角形，正三角形及び直角二等辺三角形である。これらの図形の場合，殆どの生徒が事前調査の段階で既に正解であったために，変容は見られなかったと言える。

また，多角形の場合は，正答率は必ずしも高くないが，全体的な変容は見られなかった。ＡからＬの全ての図形を選んだ生徒と，四角形ではない図形Ｆ，Ｌのみを選んだ生徒に大きく２つに分かれている。このため，四角形と多角形の包摂関係についての理解は受けた授業によって改善されたとは言えない。

さらに，ひし形の場合，正答率は２，３割であり，低く，また，理解の変容も見られなかった。また，正方形以外のひし形だけをひし形と捉える生徒の割合はそれほど多いわけではなく，２割弱であり，これについても変容が見られなかった。しかしながら，解答の種類は多い。水平鉛直方向に置かれた正方形を除いた解答や，底辺が水辺になるように置いたひし形を除いた解答，対角線が水平鉛直の位置になるように置いた正方形やひし形のみを選んだ解答などがある。このように，正方形を含まない典型的なひし形のみ選んだ解答の他に，置かれている位置に依存して図形を捉えている解答が授業の前後を通して多く出されていることが分かった。

また，直角三角形については，６，７割の生徒が正答しており，事前事後調査で変容が見られなかった。

⑶　理解の変容が見られた図形

長方形の場合，正答率は有意に増加するが（$x^2(1)=12.35$，$p<.01$），その割合は５割弱であり，望ましい結果であるとは言えない。図形Ｇ，Ｉという正方形を除いた長方形を選んでいる生徒が急激に減少していることから，このことについては，授業の効果があったと判断できる。しかしながら，正方形を除いた長方形のみを選んでいる生徒の割合は４割であり，依然として多く残っていることが明らかである。

また，平行四辺形の場合，正答率が増え，６割程度になっている。これはACHという底辺が水平になるように置かれたひし形と平行四辺形であり，この解答が有意に減少したことにより（$x^2(1)=8.98$，$p<.01$），正答が増えたと解釈できる。置かれた位置によらずに図形を判断できるようになったと言えよう。

さらに，二等辺三角形の場合，正三角形や直角二等辺三角形を含めて正答できた生徒は増加しているが（$x^2(1)=10.73$，$p<.01$），事後調査の結果では，２割強の生徒たちのみが正答しており，十分な効果が出ているとは言い難い。しかしながら，授業では四角形を取り扱い，三角形自体を取り扱っていないことから，四角形のみに関する学習が三角形に転移したと考えることができるだろう。正三角形が含まれていなかったり，不等辺三角形を含めていたり，底辺が水平方向のみのものを選んでいたりして，生徒の概念イメージに整合している図のみが選ばれていると考えられる解答が多い。そのうえ，「その他」の割合が多いことからも，生徒の捉え方が多様であり，様々な誤りがあることが分かる。しかしながら，二等辺三角形について，図形Ａ，Ｂ，つまり，正三角形や直角二等辺三角形が含まれる解答は有意に増えていることから（$x^2(1)=10.33$，$p<.01$），二等辺三角形と正三角形，二等辺三角形と直角二等辺三角形の包摂関係についての理解が促進されていることは明らかである。

⑷　定義の捉え方と包摂関係の理解

ここでは，問題３で，長方形，平行四辺形の定義を，数学的に一般的な定義であると考える生徒の包摂関係についての理解に関して考察する。問題３における包摂関

係についてたずねた問題は，問４及び問６がある。事後調査では，問４は正方形が長方形と言えるかどうか，問６はひし形が平行四辺形と言えるかどうかをたずねている。長方形の定義が数学的に一般的な定義になっている人[21)]10名中９名が問４で「はい」と答えており，平行四辺形の定義が数学的に一般的な定義になっている生徒15名のうち全てが問６で「はい」と答えている。このことから，数学的に正しい定義を捉えている生徒は包摂関係の理解ができると言える。

しかしながら，問題２において，包摂関係になるように図形を選択できていたかどうかを判断すると，必ずしも包摂関係になるようには図形を選択できていないことが分かった。具体的には，問２において，長方形を，正方形を含んだものとして選んでいる生徒は10名中６名であり，平行四辺形を，ひし形，長方形及び正方形を含んだものとして選んでいる生徒は15名中11名である。これらのことから，問２において正答の割合が有意に多いとは言えないので，包摂関係を基にした解答であるとは判断できない。

以上のことを総合して考えると，定義構成の授業を通じて，定義を適切に捉えることができている生徒において，包摂関係については，各図形がより一般的な図形に含まれるかどうかという判断が正しくても，その図形として，自分のもつ概念イメージに合わせて当てはまる図を適切に選ぶことができるとは言えない。つまり，包摂関係かどうかを記述できることと，包摂関係になるように具体的に図を選ぶこととは必ずしも一致しないということである。より一般的な図形に含まれるかどうかの判断記述は定義の捉え方に依存するものであり，ここでの結果は概念イメージと定義の捉え方との不一致を表していると言えるだろう。

８．おわりに

本研究では，図形の定義についての検討場面を取り入れた授業の実施により，図形の包摂関係についての生徒の理解が変容することを明らかにした。この結果から，この授業を受けることにより，長方形，平行四辺形及び二等辺三角形に関する包摂関係の理解については効果があることが分かった。また，定義を適切に捉えることができた生徒は包摂関係について，より一般的な図形に含まれるかどうかの判断はできても，概念イメージに当てはまる図を選ぶ際にその判断を用いていないことが明らかになった。

今後はこの結果を踏まえて図形の包摂関係の理解を促進するために，図形の定義指導の方策をどのように工夫していったらよいかについて考察することが課題である。

謝　辞

本研究の実施にあたり，千葉大学教育学部附属中学校の大塚智子先生及び生徒の皆さんにご協力を頂きました。この場をかりて感謝申し上げます。また，本研究は平成18年度科学研究費補助金（基盤研究Ｃ）の交付を受けて進められました。

註

１）例えば，Vinner, S.（1991）. The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*（pp. 65–81）. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.等

２）例えば，中西知真紀，国宗進ほか７名（1983）．図形における論証指導について（第６次報告）．日本数学教育学会誌，65(3)，13–24．等

３）松尾七重（2004）．定義の捉え方が図形の概念形成に及ぼす影響—小学校６年生と中学校２年生の捉え方の分析を通して—．第37回数学教育論文発表会論文集，307–312．

４）松尾七重（2006）．図形の定義指導の重要性—平行四辺形の定義指導の効果に焦点をあてて—．千葉大学教育学部研究紀要，第54巻，175–183．

５）松尾七重（2006）．図形の定義についての捉え方の実態—図形学習後の小学校６年生と図形の定義学習前の中学校２年生の比較—．日本科学教育学会年会論文集，30，153–154．

６）松尾七重（2000）．算数・数学における図形指導の改善．東京：東洋館出版社．

７）松尾七重（2000）．算数・数学における図形指導の改善．東京：東洋館出版社．

８）Pereira-Mendoza, L. (1993). What is a quadrilateral？ *The Mathematics Teacher 86*（9), 774–776.

９）Keiser, J.M. (2000). The role of definition. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*（8), 506–511.

10）小関熙純ほか７名（1981）．図形における論証指導について—第５次報告（その１）—．日本数学教育学会誌，63(11)，2–14．

11）中西知真紀，国宗進ほか７名（1983）．図形における論証指導について（第６次報告）．日本数学教育学会誌，65(3)，13–24．

12）清水美憲（1999）．数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究．数学教育学論究，73，74，3–26．等

13）Vinner, S.（1983）. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*（3），293–305.等

14）松尾七重（2000）．算数・数学における図形指導の改善．東京：東洋館出版社．

15）松尾七重（2004）．定義の捉え方が図形の概念形成に及ぼす影響—小学校６年生と中学校２年生の捉え方の分析を通して—．第37回数学教育論文発表会論文集，307–312．

16）松尾七重（2005）．小学校６年生と中学校２年生における平行四辺形の定義の捉え方の実態—概念イメージとのずれを視点として—．第38回数学教育論文発表会論文集，391–396．

17）事前調査時には，少人数の２クラスに別れて授業が行われていたが，定義の授業及び事後調査の実施時には１クラスで授業が行われていた。学校の授業計画にともない，本来第２学年で行われるべき図形の証明の

指導は，第２学年と第３学年にわたって行われていた。
18）Govender, R., & de Villiers, M. (2002). Constructive evaluation of definitions in a skechpad context. *Paper represented at AMESA, 1-5 July 2002, Univ. Natal, Dirban, South Africa*.
19）Linchesvsky, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. In W. Geeslin & K. Graham (eds.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 48-55. Durham, USA.
20）Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14* (3), 293-305.
Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
21）問２についての詳しい結果は以下の論文を参照．松尾七重（2006）．図形の定義についての捉え方の変容―定義についての検討場面を取り入れた授業を通して―．第39回数学教育論文発表会論文集，367-372．