

身近な遊具等の工学的解析 (その1: ペットボトルロケットの推力特性)

板倉嘉哉^{1)*} 本田祐基²⁾

¹⁾千葉大学・教育学部 ²⁾千葉大学教育学部・学部生 (現金沢市立大徳小学校教諭)

Engineering Analysis of a Familiar Plaything (1st Report: Unsteady Thrust Characteristics of Water Rocket)

ITAKURA Yoshiya^{1)*} HONDA Yuki²⁾

¹⁾Faculty of Education, Chiba University, Japan

²⁾Faculty of Education, Chiba University, Japan; Undergraduate Student

ペットボトルロケットは、老若男女が手軽に自作し飛ばして楽しめる遊具であり、工作教室や科学教室で数多く採用されている題材の一つである。その推進原理は、基本的に実際と宇宙ロケットと変わりがなく、流体を後方に向けて噴射することにより推力を得ており、作用・反作用の法則を教授する教材としても有効であると思われる。しかし、その推力特性は未解明な部分が多々あり、教材として採用するには情報不足な感は否めない。本論文では、時間とともに変化するペットボトルロケットの静止推力、ボトル内圧の計測、流れ場の高速度撮影をおこなうことにより、その複雑な非定常特性を明らかにするとともに、得られた推力データをウェーブレット解析することにより、時間一周波数特性を解明した。

Unsteady thrust characteristics of water rocket have been investigated experimentally. The results of the observation by a high-speed camera show that the state of the operation fluid flow is classified into three patterns. The time history of the thrust is observed oscillating change, and the frequency characteristics are analyzed by FFT and DWT. However, all the causes of oscillating behavior of the thrust are not elucidated. The transition time from liquid-phase flow to churn flow buried in the oscillating thrust is detected as a discontinuous point in the thrust curve by applying wavelet transform technique.

キーワード: ペットボトルロケット (Water Rocket) 推力特性 (Thrust Characteristics)

比推力 (Specific Impulse) 混相流 (Multi-phase Flow) ウェーブレット解析 (Wavelet Analysis)

1. 緒 論

千葉大学教育学部機械工学研究室では、小学校ならびに中学校における科学や技術、ものづくりに関する啓蒙教育の試みとして、紙飛行による飛行原理の理解、小型風洞による翼面上の剥離現象の可視化、ペットボトルロケットの推進原理等の教育実践をおこなってきた。飛行の原理などを教授するばかりで、我々には十分な予備知識があり、教材開発も比較的容易である。しかし、ペットボトルロケットの推力特性に関する情報は非常に少なく、渡辺による推力制御^①や、太田による最適飛行条件^②に関するものなど、数編の論文しか存在しない。ペットボトルロケットを作用・反作用による推力発生原理の教材として採用するためには、自らの手で力学的特性を十分に把握し、教材研究を行なう必要がある。また、ペットボトルロケットの推力発生原理は水と空気のみを使用した単純なものではあるが、わずかに1秒以内に速度域は亜音速から遷音速にまで変化し、作動流体も単相流から気液二相流に変化する非定常な混相流であり、流れ場中

のスロッシングや波動現象など、流体力学的な興味の尽きない題材でもある。

本報告では、ペットボトルロケットにおける時間的に変化する流れ場の高速度カメラによる撮影、ボトル内圧力および推力の時間変化を計測し、データの時間一周波数解析をおこなうことにより、その非定常特性を明らかにした。また、ペットボトルロケットが発生する推力の理論モデルを構築し、実験結果と比較することにより、その妥当性を検証するとともに、比推力を算出し、ペットボトルロケットの推進性能を定量的に評価した。

2. 実験装置および方法

ペットボトルロケットの静止推力およびボトル内圧の時間履歴を計測するために、本実験で使用した装置の概要を図1に示す。

装置全体は直径48mmの単管パイプで製作されており、地中500mmの深さに土台部分を埋設し、水噴射時の衝撃力による振動を極力抑える構造としたが、ロケット支持装置および力センサーを含めた計測系全体で、数種の固有振動が観測された。その詳細については3章冒頭で

*連絡先著者: 板倉嘉哉

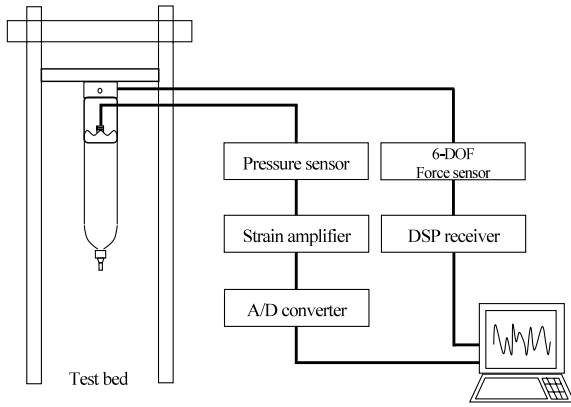


図1 実験装置概要

述べることにする。推力はペットボトルロケット支持部と架台間に設置された6軸力覚センサー（ニッタ株式会社IFS67M25A25-I40）により検出され、DSPレシーバーボードを介してコンピュータに取り込まれる。なお、本実験で使用した6軸力覚センサーは最大8kHzでの出力が可能であり、時間的に変動する推力を計測するのに十分な性能を有している。ペットボトル内の圧力はボトル後端から耐圧ホースで圧力センサーに導かれ、動歪計およびA/D変換器を介してコンピュータに取り込まれる。噴射時の流れ場は高速度カメラ（カシオ計算機株式会社EX-F1）により記憶され、解析される。また、実験には容量1500mlのペットボトルを使用し、表1に示すように、初期ボトル内水量を体積比で0～50%、初期内部圧力を0.1～0.4MPaに実験条件を変化させて推力および内部圧力の計測をおこなった。

表1 実験条件

Experimental conditions	
Bottle volume	1500 ml
Initial pressure	0.1 ~ 0.4 MPa
Water ratio	0 ~ 50 vol.%

3. 結果および考察

推力測定試験に先立ち、体積比で0～50%の水を注入したペットボトルを推力測定装置に取り付け、装置全体を加振することにより得られる力センサーからの信号をFFTにかけ、その周波数分析をおこなった。これは、装置全体の固有振動を同定し、推力測定データから雑音となる振動成分を除去するための予備実験である。その結果、装置全体として、75Hzおよび175Hz近傍の二つの振動モードを有しており、その中心周波数はボトル内圧には依存しないが、初期水量の増加とともに低下することが確認された。水を注入したペットボトルを含む計測装置全体として、一種のばね—質量系を形成していると考えられる。

3.1 流れ場の時間変化

図2は、初期水量30%および初期内圧0.4MPaにおけ

る噴射時の様子を、高速度カメラにより撮影した画像である。流れ場は、噴射開始から0.298秒までは水だけの噴射であるが、その後、チャーン流に遷移し、0.476秒以降は空気だけの噴射となり、3段階に分かれていることが確認された。特に、チャーン流遷移への過渡的な状態においては、水自由表面のスロッシングから旋回流となった後、水噴射が終了するよりも前にチャーン流へと移行しており、非常に複雑な流れ場を形成していることがわかる。

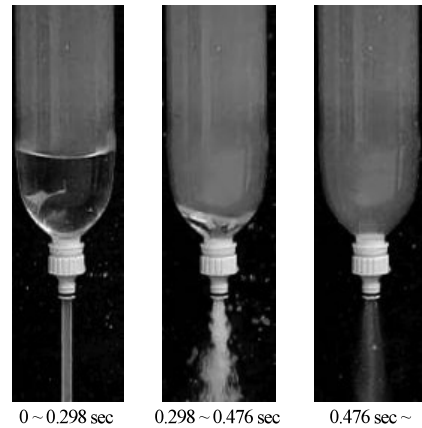


図2 噴射時の高速度撮影画像 (1,200fps)
(初期水量：30%，初期圧力：0.4MPa)

3.2 推力特性

推力の時間変化

初期水量30%、内圧0.4MPaにおける推力の時間履歴を図3に示す。全噴射時間は0.55秒程度あり、時間の経過によりボトル内の圧力が低下するとともに、作動流体が変化するため推力は低下していくが、噴射直後の約0.1秒間およびチャーン流噴射開始前後の0.2秒間に振動的な推力が観察されるのが特徴的である。後述する周波数分析結果からもわかるように、噴射開始直後の振動成分は支持装置全体の固有振動に起因するものであり、流体力

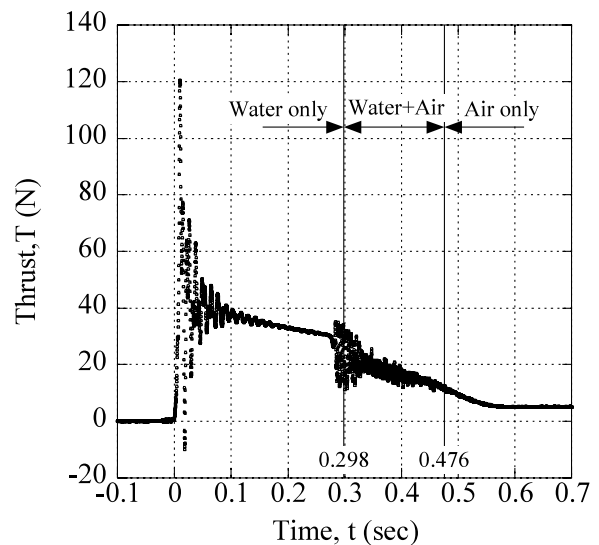


図3 推力の時間変化
(初期水量：30%，初期圧力：0.4MPa)

学的な現象によるものではない。高速度撮影結果からは0.298秒で単相流からチャン流へと遷移しているが、推力測定の結果からは遷移への前駆現象であるスロッシングから旋回流が発生する0.283秒頃から推力の変動が観測されている。また、チャン流への遷移時刻は振動波形に埋もれており、図3の推力曲線からは特定することは困難である。

推力の周波数分析

図3の推力変化を窓FFTにかけ、周波数分析をした結果が図4である。噴射直後の推力変動は主に2つの周波数成分に分離され、その中心周波数はそれぞれ75.4 Hzおよび176 Hzであった。前述の加振実験からは、支持装置全体の固有振動周波数は60~80 Hzおよび150~200 Hzに局在しており、水量に反比例するがボトル内圧には依存しないことが確認されている。非常に強い75.4 Hzおよび176 Hzの振動成分は支持装置全体の振動であり、流体力学的な振動に起因するものではないと考えられる。また、時刻0.283秒からのチャン流への遷移前後で観察される振動成分は、220 Hzの大きな山と約800 Hzまで連続的に分布する振幅の小さな振動とに分離される。支持装置に起因すると考えられる80 Hzおよび180 Hz近傍の成分も観察されるが、220 Hzの振動成分に比較して、その強度は極めて弱い。220 Hzの振動成分は、噴射流体のボイド率が時間的に変動することに起因して流れが間欠的となり、推力が変動するものと考えられる。また、800 Hzまで連続的に観察される微小な振動成分は、チャン流でのみ観察されており、気泡に起因するものと推察される。森岡⁽³⁾により、混相流中での気泡の自由振動の周波数 f は式(1)で与えられることが導かれている。ここで、 p : 圧力、 ρ : 密度、 R : 気泡半径である。

$$f_{Bubble} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3p}{\rho R^2}} \quad (1)$$

式(1)に、本実験における代表的な値を代入し、その周波数を試算すると約500 Hzとなる。チャン流中では、大小さまざまな気泡が存在することを考えれば、800 Hzまでの連続的な振動成分はチャン流中での、気泡の自由振動に起因するものとするのが妥当であるが、その検証は今後の課題である。

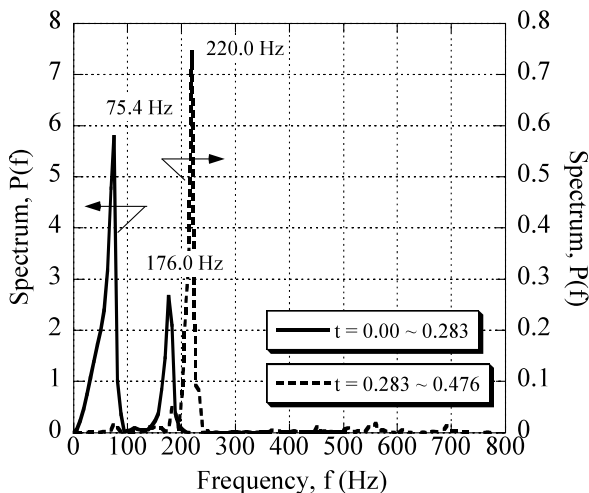


図4 推力変動中の周波数成分

図5はチャン流中で観察された、主な振動成分中心周波数への初期水量依存性を示しており、パラメータは初期圧力としている。初期水量の変化に対して、550 Hzおよび220 Hz近傍で観察される振動成分の中心周波数はほとんど変化せず、ほぼ一定値となっている。このことは、チャン流中で形成されている気泡の形状やボイド率は初期水量の変化に依存しないことを示している。しかし、700 Hz近傍で観察される振動成分の中心周波数は、初期水量の増加とともに低下しており、その依存関係が確認された。流れ場の高速度撮影結果からは、チャン流への遷移時刻は初期水量により変化するが、チャン流遷移時のボトル内に残存する水量は一定量であることが確認されており、水量が影響しているとは考えにくい。また、初期水量に対してチャン流遷移時のボトル内圧は変化するが、パラメータである初期圧力に対する依存性は無いことから、ボトル内圧の影響とも考えにくい。どのような流体力学的なメカニズムが、700 Hz近傍の振動成分に影響を与えているかは、更なる研究課題である。

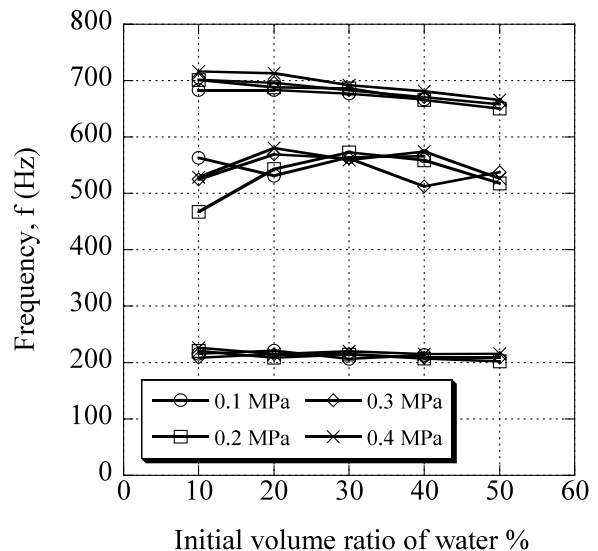


図5 チャン流中での各振動モード中心周波数の初期水量依存性

推力の時間-周波数分析

図6は、図3の推力変化を離散ウェーブレット変換した結果である。ウェーブレット関数には、ドベシイ⁽⁴⁾により導かれた離散数列 ($N = 8$) を使用した。噴射直後

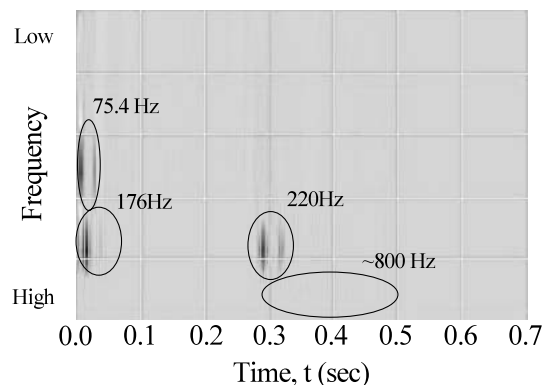


図6 推力変化の時間-周波数分析

に75.4Hzと176Hzの振動がはっきり捉えられており、それらはほぼ同時に出現しているのがわかる。一方、220 Hzの振動はチャン流への遷移時刻である0.283秒後から出現しており、ボイド率の時間的変化を裏付けている。また、読み取るのは非常に困難ではあるが、250Hz以上の振動成分はチャン流へ遷移後から時間的に遅れて出現しており、220Hz成分の発生源とは異なることを意味している。

ウェーブレット解析によるフィルタリング

ウェーブレット解析の信号処理への応用として、ウェーブレット縮退によるフィルタリングが挙げられる。その手法を取り入れ、推力データから支持装置に起因する75.4Hzのノイズ成分を除去したものが図7である。使用したウェーブレット関数の周波数分解能の限界で、176Hz近傍の振動成分は除去できず、噴射直後に推力の振動がみられるが、実際の飛行時に発生している推力変化に一番近いものと考えられる。

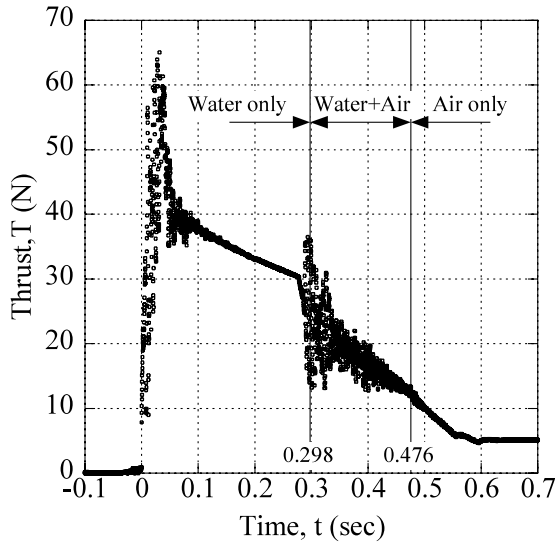


図7 75.4Hz成分除去後の推力変化

図8は、前述の手法により75.4Hz以上の高周波成分を除去したものである。振動成分に埋もれて判別不能で

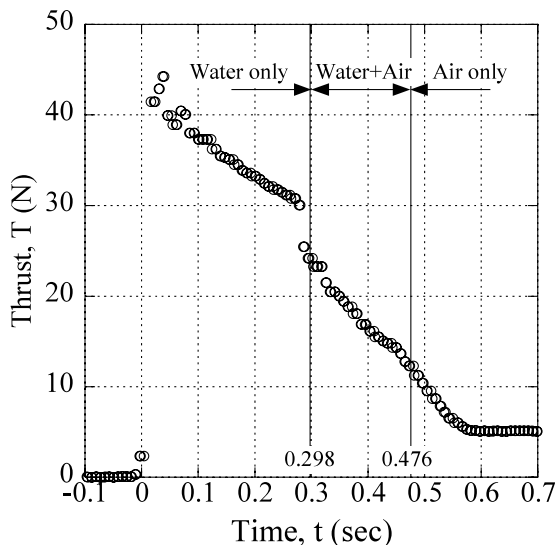


図8 高周波成分除去後の推力変化

あったチャン流への遷移時刻が、ウェーブレット変換によって推力変化の特徴が抽出され、不連続点として捉えられている。作動流体がチャン流へ遷移するとき、噴射速度は増加するが密度は急激に減少するため、噴射流体の運動量が不連続的に変化し、推力の不連続点としてチャン流への遷移点を検出可能となる。

3.3 比推力の算出

比推力 I_{sp} とは、ロケットの性能を評価する基本パラメータであり、一般的に、単位プロペラントあたりのトータルインパルス（全力積）として式(2)で定義される。ここで、 g_0 ：9.807m/s²（海面上の標準重力加速度）、 \dot{m} ：噴射流体の質量流量、 t ：噴射持続時間である。

$$I_{sp} = \frac{\int_0^t T dt}{g_0 \int_0^t \dot{m} dt} \quad (2)$$

図9に、ペットボトルロケットにおける、初期圧力ごとのトータルインパルスの初期水量依存性を示す。なお、トータルインパルス I_t （式(2)の分子）の算出では、実験から得られた推力の生データを使用すると正確な値が得られないため、ウェーブレット変換により高周波成分を除去した推力データを被積分関数として採用し、数値的に積分を実行した。トータルインパルスは初期圧力が高いほど増大するが、初期水量に対しては極大値を持つようになり、極大値をとる初期水量は初期圧力の増加とともに増大していく傾向が読み取れる。ペットボトルロケットが発生するトータルインパルスを最大とする、初期水量と初期圧力の組み合わせが存在することを示唆している。

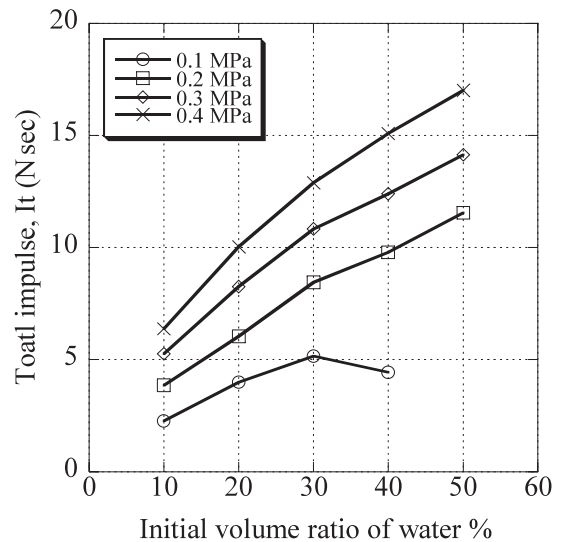


図9 トータルインパルスの初期水量依存性

算出されたトータルインパルスを基に、比推力を算出した結果が図10である。比推力は、初期圧力が高いほど大きくなるが、初期水量の増加とともに減少する。トータルインパルスは初期水量に対して極大値をもつため、比推力は初期水量の増加に対して低下することになる。本実験で使用したペットボトルロケットの比推力は、最大でも1～4秒程度と評価できるが、あくまで、単位プ

ロペラント質量流量あたりの推力として、推進装置単体で考えた性能指標である。ロケット全体としての飛行性能（最高到達高度や飛距離）を評価するにあい、トータルインパルスおよび全備重量（すなわち初期水量）が支配的となるが、初期水量の増加とともにトータルインパルスは極大値をとるので、初期水量には最適値が存在するものと考えられる。一般的に「もっとも飛距離が出る水量はタンク容量の1/3程度」と言われているが、これは、経験的に見出された水量の最適値なのである。

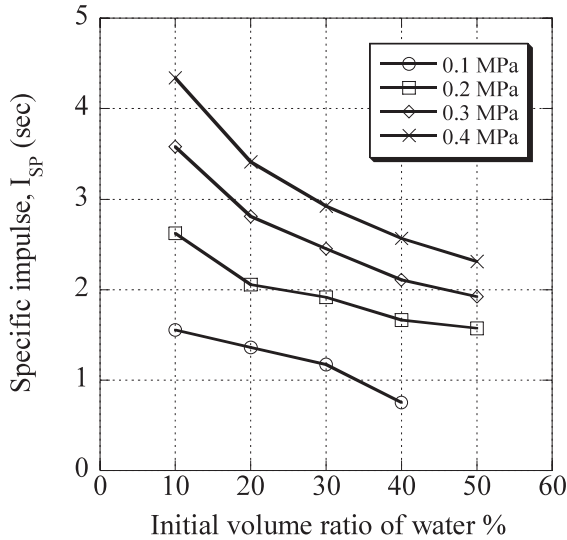


図10 比推力の初期水量依存性

3.4 理論モデル

理論モデルの構築

実験結果を理論的に裏付けるために、下記に示す5つの仮定を基に理論モデルを構築し、時間とともに変化するペットボトル内部の圧力および推力を推算した。

- ・ ペットボトルは円筒形状
- ・ 空気は非粘性・理想気体
- ・ 水は非粘性・非圧縮流体
- ・ 気体は等エントロピー変化
- ・ 水と空気の噴射を完全分離

まず、水噴射時における計算手順の概略を示す。初期状態を基に、ノズル出口における作動流体の噴射速度 v_e を式(3)で見積もる。ここで、 P ：圧力、 ρ ：密度、 h ：液面高、 S_1 ：ボトル断面積、 S_2 ：ノズル断面積。添え字は a ：ボトル内空気値、 w ：ボトル内水値、 e ：ノズル出口値を示す。なお、式(6)においては、噴射ノズルの流量係数を1としている。

$$v_e = \sqrt{\frac{2(P_a - P_e + \rho_w gh)}{\rho_w \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)}} \quad (3)$$

次に、微小時間内に水噴射によるボトル内水量の変化を見積もり、ボトル内空気の膨張による圧力、密度、温度変化を、断熱膨張の仮定のもとに計算し、諸量を更新する。以上の手順を全ての水が噴射されるまで繰り返す。その際、気体の状態方程式他4式を連立させて解くこと

になるが、その詳細については省略する。

水噴射終了後は空気噴射に切り替え、等エンタルピー流仮定の基に式(4)で噴射速度を見積もることになる。ここで、 M ：マッハ数、 θ ：温度、 γ ：比熱比、 R ：気体定数である。

$$v_e = M \sqrt{\gamma R \theta_e} = \sqrt{\frac{2\gamma R \theta_e}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{P_e}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)} \quad (4)$$

式(4)にて空気の噴射速度を求めるときに若干の注意が必要である。すなわち、ある初期圧力以上では、水噴射後もボトル内圧と外気圧との比が臨界状態以上になる場合が存在し、式(4)をそのまま適用すると噴射速度を過大に見積もってしまう危険がある。ノズル出口部で断面積は一定であり、一種のスロートを形成しているため、臨界圧力比以上ではノズル出口でマッハ数は1になると考えるが妥当である。実際の数値計算においては、繰り返し計算中で圧力比を監視し、臨界圧力比上では式(4)のマッハ数に制限をかけて計算を実行する必要がある。以後の計算は前述とほぼ同じ手順となり、微小時間内に空気噴射による質量流量を見積もり、ボトル内空気の膨張による圧力、密度、温度変化を、断熱膨張の仮定のもとに計算し、諸量を更新する。以上の手順を圧力比が1になるまで繰り返す。

ノズルからの噴射流体の密度および速度が得られれば、運動量理論を適用することにより、静止推力 T を式(5)で推算することが可能となる。

$$T = \dot{m} v_e \quad (5)$$

実験との比較

図11は、初期水量30%、初期圧力0.4Mpaにおけるボトル内圧の実験データと理論モデルを比較したものである。水噴射時の理論モデルによる圧力変化は実測値より低く見積もられており、断熱変化の仮定が必ずしも適切でないことを示唆している。ボトル壁面および水面（こちらが支配的である）を介して熱が流出していることを考えると、ポリトロップ変化を仮定した方が現実的ではあるが、ポリトロップ指数を理論的に決定することは現在の情報だけでは困難である。チャーン流へ遷移後、実験での圧力勾配は連続的に急になっていくが、理論モデ

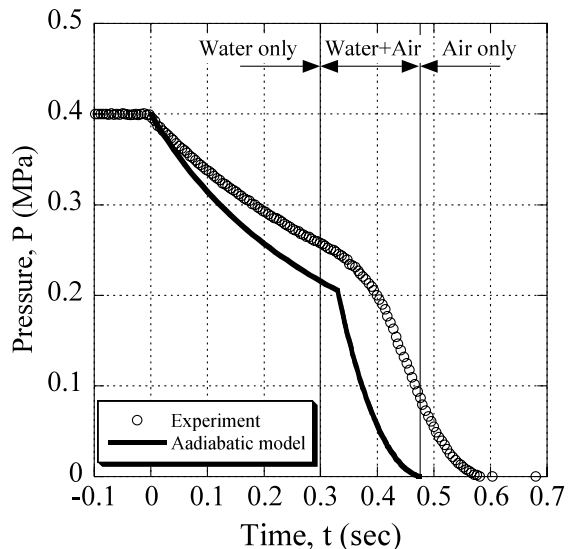


図11 ボトル内圧力の時間変化（実験・理論モデル）

ルではチャーン流を形成しないと仮定しているため、水から空気噴射への切り替え時に圧力は不連続に変化することになり、現実とは異なる圧力変化を再現することになる。空気噴射時の圧力変化は、時間的なずれはあるものの、その変化は同じ曲線を描いており、平行移動させることにより両者はほぼ完全に一致する。これは、水面からの熱の流出が無くなったことにより、断熱変化に近づいたためと考えられる。最終的な噴射終了時刻は、理論モデルとの間に0.1秒程の差が見られる。理論モデルではチャーン流を形成しないと仮定しており、その結果、噴射終了時刻の見積りに相違が生じることになる。チャーン流を適切にモデル化し計算に組み込むためには、周波数分析結果からポイド率等を導き出す手法を確立することが必要となる。

図12は、初期水量30%、初期圧力0.4Mpaにおける静止推力の実験データと理論モデルを比較したものである。図中の○点は実験で得られた推力をウェーブレット変換により高周波成分を除去したものである。両者の比較では、理論モデルでの水噴射時の推力は時間の経過とともに実験値よりも小さく見積もることになっており、前述したように、断熱膨張からのずれが推力変化にも大きく影響を与えている。また、水から空気噴射への切り替え時に、理論モデルでは急激な推力の低下が観察されるが、これは、作動流体の噴射速度は増加するが密度は急激に低下(約1/800)するためである。一方、空気噴射時の推力変化は実験値と同様な変化形状をしており、理論モデルの有効性が確認できる。課題となる、チャーン流の適切なモデル化により、推力の時間変化を単純な運動量理論でも正確に見積もることが可能となるであろう。

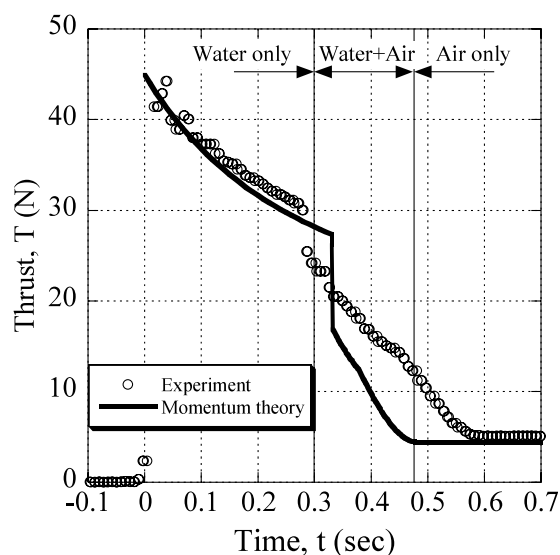


図12 推力の時間変化 (実験・理論モデル)

4. 結 論

初期水量および初期圧力を変化させ、ペットボトルロケット噴射時の流れ場の高速度撮影、静止推力およびボトル内圧の時間変化を計測し、その非定常特性を解明するとともに、ロケットとしての性能を評価した。また、理論モデルを構築し、実験結果と比較することにより、その妥当性を検証するとともに、モデルの問題点を明白にすることができた。以下に、その成果をまとめて記す。

- 1) 流れ場は3段階に分かれており、水噴射→チャーン流噴射→空気噴射へと推移する。
- 2) チャーン流への遷移に際しては、水面のスロッシング、旋回流が前駆現象としての発生することが確認された。
- 3) 窓FFTおよびウェーブレット解析を適用することにより、静止推力の時間-周波数特性の全貌がはっきりになった。
- 4) チャーン流中で観測される推力変動は、間欠的な流れによるポイド率の不連続変化および気泡の自由振動に起因するものと考えられるが、未解明な部分もあり、その検証は今後の課題である。
- 5) 推進性能の指標である比推力は、初期圧力および初期水量により変化するが、最大でも1~4秒程度であることが確認された。
- 6) 理論モデルによる内部圧力および静止推力の推算は、定性的には現象を再現できているが、定量的に再現するには、チャーン流を適切にモデル化し取り込むことが必要となる。

参考文献

- (1) 渡辺力夫, 富田信之, 竹前俊昭, 水ロケットの推力特性制御の一方法, 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 51, No.593, pp. 314-320, 2003.
- (2) 太田貴之, 梅村章, 水ロケットにおける飛行最適条件の研究, 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 49, No.574, pp. 382-387, 2001.
- (3) 日本流体力学会編集, 流体における波動, 第4章, 朝倉書店, 1995.
- (4) I. ドブシー, ウェーブレット10講, シュプリンガー・ジャパン, 2007.