

# 中学校数学における複素数を題材とした授業実践開発

## —「社会とつながる数学」の考察を通して—

### Development of Teaching about Complex Number in Junior High School

#### -Through an Analysis of “Connecting Mathematics and Society”-

小池 翔太

千葉大学教育学部小学校教員養成課程

本研究は、中学校段階における複素数を題材とした授業プランを作成、実践することでその成果と課題を考察し、高校の学習内容である複素数が、中学校段階における授業として工夫した方法が最善であるかを検討したものである。この授業プランは、千葉大学教育学部附属中学校 3 年生の選択教科の「社会とつながる数学」の中で行ったため、これまで行われた授業に相応しい形で実践が出来るように構成した。研究の目的に対する成果を挙げるためには、複素平面の導入による効果、電子・電気工学に関する研究を行っている人物をゲスト講師として招くことによる効果、数学史の導入による効果、の 3 点の効果を十分に踏まえる必要があることが明らかとなった。<sup>1</sup>

キーワード：複素数、社会とつながる、電気工学、電子工学、複素平面、数学史

## 1. はじめに

千葉大学教育学部授業実践開発研究室(以下、授業実践開発研究室)では、2011 年度前期、千葉大学教育学部附属中学校での 3 年生選択教科で「社会とつながる数学」<sup>2</sup>という講座を開設した。この講座における授業の内容は、教科書では曖昧にされている概念について、数学史から見て検討していくものである。更に、数学が社会とつながっていることを実感できるような内容も取り上げた。授業実践開発研究室の藤川大祐教授、大学院生、学部学生がチームとなって、教員養成課程としての研究の一環として、授業を開発、実践している。

筆者はこのチームに所属しながら、複素数の指導が身の回りの社会と関連づけて行われていないことに疑問を持ち続けており、この授業の題材として扱って実践ができないかを考えて教材研究を行っていた。

また、筆者は併行して「キャリア教育演習」における「西千葉子ども起業塾」の活動も行っていた。これを支援していた千葉大学経済人倶楽部「絆」が主催した懇親会にて、千葉工業大学の大矢将登<sup>3</sup>と出会った。大矢はロボット工学が専門で、研究において複素数の概念を活用していることがわかった。そこで筆者が考えていた複素数の授業についての相談を行い、「研究において複素数を活用していることを、是非中学生に直接話をしてほしい」とゲスト講師を依頼した所、快く引き受けていた

だいた。

以上のような、教育とは関係の無い場面において「越境」して教材研究をした経緯から、本研究の授業実践開発を行った。

## 2. 問題の所在

### 2.1. 中学校数学科の現状

近年、日本の子どもたちの理数教育離れが問題となっている。IEA国際数学・理科教育動向調査の 2007 年調査(TIMSS2007)では国際的に成績の順位は高いものの、「算数・数学の勉強を楽しい」と思う割合は、小学 4 年の約 7 割(国際平均値は 8 割)、中学 2 年の約 4 割(国際平均値は約 7 割)という結果であった<sup>4</sup>。「数学の勉強は日常生活に役立つ」と思う割合も、中学 2 年生が約 7 割(国際平均値は約 9 割)であった。以上の国際平均値と比較した結果から、現在の日本の子どもたちは数学を学ぶ意欲が高まったり、学ぶことへの意義や有用性を実感したりすることが難しい状況にあることがわかる。

生徒が数学の学習に主体的に取り組むことができるようになるためには、この数学的活動の楽しさや数学のよさを実感することが大切であると、2008 年の中学校数学科の改訂において述べられている<sup>5</sup>。数学的活動のうち、特に中学校数学科において重視していることは、3 点あるという。それは、既習の数学を基にして数や図

形の性質などを見だし発展させる活動、日常生活や社会で数学を利用する活動、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動の3点である。

また、『数学のよさ』を実感できるようにすることは、数学の学習に意欲的に取り組むことができるようにすることに本来のねらいがある<sup>6</sup>という。この「数学のよさ」は、「数学が生活に役立つこと、数学が科学技術を支え相互にかかわって発展してきていることなどにかかわる知識」<sup>7</sup>のことを指す。以上からも、子どもたちが数学を学ぶことの意義や有用性を実感し、主体的に取り組むためには実生活において数学を利用する活動が重視されていることがわかる。

## 2.2. 数学科を身の回りの社会と関連づけて学習する意義

しかし、実生活と関連づけた数学によって、数学を学ぶことの意義や有用性を実感させることができるのであろうか。まず、数学を実生活と関連付けることについて、検討をしていく。長崎(2001)は、「現代の子どもたちは、算数・数学と社会とのつながりに関する意識が弱いだけでなく、社会における現象や問題を数学的に扱う力や考え方も欠けているのである」<sup>8</sup>と述べている。先ほどのTIMSS2007での調査における、「数学の勉強は日常生活に役立つ」という回答結果にもある通り、社会における現象や問題を数学的に扱うための学習を行う必要があると考えられる。そもそも中学生が「数学は役に立たない」と考えるようになった要因として、小寺(1997)は、数学の指導が受験に重点を置くようになったことと同時に、戦後日本においては、生活単元学習から系統学習に転換して以降、数学の論理的側面が重視され、有用性は比較的に追いやられてきたことを指摘している。そこで、「現実の問題を取り上げ、数学の有用性を体験させることにより、現実の問題解決に数学が役に立つという実感を生徒に持たせることが大切である」<sup>9</sup>と主張している。

一方で新井(2010)は、『なんで算数をやらなきゃいけないの』と子どもが聞くのは『社会のどこで使われているの』という意味じゃない<sup>10</sup>と主張する。「携帯電話の技術に使っていると言えば『それはその研究が好きな人がやればいい』となる。そうじゃなくて、『いま授業でやっていることは何の意味があるのか』と聞いている」と見解を示している。これは、先の小寺の意見と対立するように捉えられる。確かに小寺(2000)も「数学は科学技術の基礎であり、数学がなかったら現代社会はあり得ないということは正しいが、子供の多くは科学技術者になるつもりもなく、自分には関係ないと割り切っている」<sup>11</sup>と述べている。しかし、この小寺の主張には、子どもの立場で有用性を考える視点を持っているとした上で、子どもたちが有用性を実感するためには、「ま

ずは今学んでいる数学が身近な事象を考える上でどのように有効かをたっぷり見せることが重要である」という。この小寺の主張は、新井が子どもに代わって述べていた「いま授業でやっていることは何の意味があるのか」に答えているものであると考える。

以上を踏まえると、「いま授業でやっていること」が「身近な事象を考える上でどのように有効かをたっぷり見せる」ことで、児童生徒が算数・数学を学ぶ意義を見出すことになると考えられる。

## 2.3. 数学科において数学史を導入する意義

近年、児童生徒が算数・数学を学ぶ意義を見出すために、身の回りの社会と関連づける以外に、数学史の活用という側面から議論されている。塚原(2001)は、国際的にも、数学教育の目指すべき方向性の転換が求められているとして、数学の教授・学習の改善における数学史の活用に関する研究を取り上げている。高等数学の授業において、「数学史活用の有用性」として以下の3点を挙げている<sup>12</sup>。

- (1)数学史を授業に取り入れることによって、問題提起をし、数学的概念・原理・公式・記号法が成立する根拠を明らかにすることができる。
- (2)数学史を授業に取り入れることによって、問題の把握の仕方やその問題の解決に向けての着想と方法、数学が形成されるとき視点の明らかにすることができる。
- (3)数学の形成過程における問題解決の様々な方法や理論は、現代的規範から見れば必ずしも正しいとは限らない。しかし、そのことがパラダイムの変換を促し、数学を形成する原動力ともなる。

このように、数学の教授・学習の改善における数学史の活用を塚原が主張しているが、実際の学校現場ではどのような指導がなされてきているのだろうか。荒木(2008)は、「数学史を教材化することについては、かなり昔から国内外の論文にその意義や目的が登場している」としている。しかし、「人類が文化として獲得した過程の感得(上垣、1990)」<sup>13</sup>、「数学的な見方や考え方の育成(塚原、1996)」<sup>14</sup>、「数学をヒューマナイズすること(塚原、2002)」<sup>15</sup>の3つのねらいに踏み込んだ実践研究とその報告はあまり例を見ない、としている。

塚原(2002)は、これらのうち「数学をヒューマナイズすること」について、「数学学習に人間味を持たせ、数学を人間の活動として捉えること」と定義している。「ヒューマナイズ」するとは、「もともとあるものを画一的に捉えるのではなく、人間味のあるものにするという意味」という。これは、先の塚原(2001)の(2)で述べられている「数学が形成されるとき視点の明らかにする」内容を、より具体的に示している内容であると考えられ

る。例えば、先人達の偉大な苦勞と努力の足跡などを取り上げるような指導が考えられる。他にも、仲田(2000)は、数学史には「驚きと感動のエピソードが詰まっている」<sup>16</sup>と述べている。従って、数学には「人間社会との関わりなしに生まれたものは、ほとんどない」<sup>17</sup>ということがいえる。この仲田の主張も、塚原(2002)の「ヒューマナイズ」の考えに則していると考えられる。

## 2.4. 複素数に関する指導の現状

本節では、伊達(2011)により「形式的な提示による指導が行われる」<sup>18</sup>と主張されている、複素数(complex number)について論じていく。複素数とは、実数(real number) $a$ 、 $b$ と虚数単位(imaginary number)  $i$ を用いて  $a+bi$ の形で表すことのできる数のことである。虚数単位とは、二乗すると $-1$ となる数、つまり $x^2+1=0$ の解の任意の一つを $i$ と定義する。「実数の全体と虚数単位 $i$ を含み四則演算が自由にできる(体になる)」という仮定を満たす最小の集合を複素数体、その元を複素数といい、実数でない複素数のことを虚数という。

2003年4月より施行された学習指導要領においては高校数学Ⅱで学習する「複素数」、また旧課程<sup>19</sup>においては高校数学Bで学習した「複素数と複素数平面」で扱われる。本節では、こうした複素数の指導がどのように行われているか、現状について論じていく。

### 2.4.1 高校数学科における複素数の授業実態

伊達(2011)は「数学的活動図」の研究の中で、高校数学科における複素数の学習に関して、以下のような実態を提示している。

高校の複素数の指導は『2乗して負になる数が虚数である』ことを言っているだけ、即ち複素数の形式的な提示に終わっているものであり、複素数のイメージは深まることも広がることもなかった。

つまり、高校数学における複素数の学習は、中学校での「文字と式」での文字と同等に扱う範囲でのみ学習されている現状があると捉えることができる。これを武本(2007)は、「複素数の計算(足し算、引き算、掛け算、割り算)では、普通の式と同じように計算を進め、 $i^2$ が現れたら、それを $-1$ でおきかえればよい」<sup>20</sup>としている。例えば、二次方程式を解く際は、判別式が負の数になったら「解なし」としてきたものを、複素数の概念を用いて虚数解を導くようになる。これも、文字同等に扱う範囲の計算である。武本は、大学での講義における学生の指導を通して、上記に関連した話を以下のように述べている。

学生は試験での解答で $\sqrt{i}$ によって式の中の一つ

として簡単に書いているように、 $i$ を文字の感覚としか捉えていない。虚数単位であることを知っていたとしたら、また、複素数平面についてのちょっとした知識をもっていたとしたら、

$$z^2=i \text{ の解は、 } \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ と } -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

の二つであることを知っているであろう。 $z^2=i$ の解は $\pm\sqrt{i}$ とでないのである。<sup>21</sup>

例え複素平面に基づかずに、文字として扱ったとしても、 $z=a+bi$ を代入して連立方程式を解けば、 $z^2=i$ の解も $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ と $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ と導けるだろう。しかし、 $i$ を文字の感覚としか捉えていない現状があると考えられる。

ここで、高校数学において複素数の概念が必要となり得る場面と実際について考えていく。数学Ⅰでは、2次関数のグラフと $x$ 軸との交点について解説され、2次方程式の実数解の個数との関係について示されている。武本(2007)は、「本質的な複素数については、複素数平面を知ってからであるから、大学に入ってから学ぶことになると言っても過言ではなかろう」<sup>22</sup>と見解を述べている。次に、複素数が導入される数学Ⅱについて、先の武本は教科書における複素数の導入が次の4つであると述べている。

- ①虚数単位の導入
- ②複素数の定義
- ③ $a>0$  ときの、 $-a$ の平方根
- ④ $a>0$  のときの、 $\sqrt{-a}$ の定義

①から④まで、教科書によって学習する順序は異なるようだが、項目①についてはどの教科書も必ず最初に導入をしている。②から④は、教科書によって順序が異なるようだ。武本は「虚数単位の導入①の前に、純虚数や実数ではない複素数を解としている実数係数の簡単な2次方程式を例として挙げるのが良いのではなかろうか」と言う。数学Bでは、「ハミルトン<sup>23</sup>の考えのように複素数をベクトルとして考えて見ていくと、平面上での図形の問題を考える上でも複素数は非常に役に立つ役割をも演じてくる」としているが、実際は複素数の概念を高校数学で学ぶベクトルにおいては導入されていない。よって、ここからも複素数の学習は、中学校での「文字と式」での文字と同等に扱う範囲でのみ学習されていることがわかる。

ここで、複素数に関する3つの授業実践の先行事例に注目していく。

まず1つは、小松(2003)によって行われた「複素数の歴史にみる虚数を実体化する学習—歴史的の原典を利用した解釈学的営み—」<sup>24</sup>という研究授業である。数学史

を用いた解釈学的営み<sup>25</sup>に基づく授業を行った。虚数、複素数平面について考察したカルダノ<sup>26</sup>、ウォリス<sup>27</sup>など数々の数学者の考えとその歴史的な過程に関して、教材開発と授業実践を行った。実体化には、カルダノの原典<sup>28</sup>や作図ツール<sup>29</sup>を用いた。当時に解き明かそうとしていた問題を解かせ、当時の人物の主張や苦悩にも触れ、全3時間で構成された。その結果、他者の立場の想定、現在学んでいる数学の創造的な側面の感得、歴史と現代の知識に関する生産的なつながりの理解などが実現されたという。

2つ目は、渡邊(2010)によって行われた「数学史を取り入れた授業の実践(工業高校)ー複素数を作り上げてきた人たち」<sup>30</sup>という研究授業である。「数学が様々な人間の思考の紆余曲折を経てじっくり出来上がったということと一緒に考えていけば、今よりは考え方を大事にしてくれるのではないか」と仮説を立てた上で、「複素数の成り立ちのような人間的な部分にふれさせ、身近に感じさせる」授業を実践した。授業の流れは、様々な考えをたどっていきながら、最終的に教科書の複素数の計算方法や $i$ の使い方や計算演習をし、最後に電気工学における複素数の有用性を紹介するものである。しかし、論文上では数時間扱いと表記されていて進行中の研究であり、成果報告等の表記も無かった。

3つ目は、鈴木智秀(2011)<sup>31</sup>が2011年2月26日に、株式会社日立ソリューションズの協力の下で行った「虚数の誕生と現代社会での役割」という授業<sup>32</sup>である。授業は、Keynote<sup>33</sup>を電子黒板上で操作し、アニメーションを用いながら行われた。3次方程式を解くためにカルダノが虚数を導入したことを説明し、3次方程式の立法完成を3Dグラフィックで表現して解説を行った。更に、複素数は現代社会において、数学よりもむしろ電気工学でなくてはならないものになっていることまで、生徒に説明をした。この授業について、秋山仁<sup>34</sup>は「東京理科大学 第4回 数学・授業の達人 大賞」<sup>35</sup>の中で、「単純に知識を植え付けるだけでなく、虚数が生まれた必然性を生徒に気付かせようとしている」「社会で虚数がどのように使われているか、具体例を見せている」「教科書に載っていない内容でも、必要だと思うことを生徒に伝えようとしているチャレンジングな授業である」と講評した。

以上の3つが、複素数を研究的に実践した授業である。複素数の授業実践は、学習指導要領に位置づけられているため、様々な実践が行われていると考えられる。しかし、研究的な実践として行われた授業は、CiNii<sup>36</sup>で調査をした所上記のような授業しか見られなかった。これらに見られる課題を3点挙げていき、中学で実践をする際の手掛かりとしていく。

1点目は、授業の成果が不明確なことである。渡邊(2010)の実践は研究発表時点では、授業実践中であつたがその後の報告は見られていない。また、鈴木(2011)

の授業でも、授業映像による報告しか行われていない。授業実践により生徒の意識がどのように変容したのかが不明瞭であつた。

2点目は、数学史上の人物の考え方の、どこにスポットを当てればよいか困難なことである。この困難さは渡邊(2010)が報告している。塚原(1995)は、「複素数は、実在性の希薄から、数学における市民権獲得までに相当の苦勞を強いられた経緯がある」<sup>37</sup>と述べている。教師はこうした複雑な経緯の、どこを選択するかが難しいのだろう。しかし、塚原(1995)はその上で、教師が複素数といった数学史の教材研究をすることによって、「授業の内容に一層の深みを与えるものである」とその意義についても主張している。すなわち、複素数の数学史の教材研究によって、どこを扱うかを判断することが難しい、という報告が見られながらも、それを追求する意義は十分にあると解釈できる。

3点目は、実生活上では正と負の数しか表現できないことが、生徒にとってはあまり納得がいかないということである。これは、小松(2003)が授業実践後の課題として挙げていた内容である。虚数を例え複素平面上で図示できても、それは結局人為的に定義されたものであるため、生徒の一部は「少しガッカリした」という感想を持ったようである。つまり、複素数は実在しない数ではあるが、身の回りの社会と関連づけて高校生に指導すれば解決できると考えられる課題である。

#### 2.4.2. 中学校数学科において複素数を扱う意義

上記の通り、高等学校における複素数の授業には、一定の成果と課題がみられている。ではこうした題材を、中学校数学科の課程を超えた上で扱う意義はあるのだろうか。

当然、発展的な課題であるために、生徒の前提としては数学に関心があり、最低限中学の授業の内容を抑えている必要があるだろう。しかし、前節で述べた通り高校数学における複素数の学習は、中学校での「文字と式」での文字と同等に扱う範囲でのみ学習されている現状である。中学校数学科において、「無理数の根号の中は正の数」、「二次方程式を解く際は、判別式が負の数になったら『解なし』とする」と説明を行う。しかし、もしそのように教師が指導した際、生徒に「なぜ無理数の根号の中は負の数ではいけないのか」、「二次方程式の判別式が負になっても、『解なし』なのは証明できるのか」という疑問を寄せられたらどうするか。こうした知的好奇心に答えることが、教師の本質的な力量を発揮する場面であると考えられる。この疑問は、生徒の数学への関心や学力の有無に関わらず、純粋に心から湧くものであると考えても自然である。これらに答えるために、数学史上でも紆余曲折してようやく存在が認められた「虚数」について、教師は話をする事が出来るチャンスであると考える。以上より、中学校数学科で曖昧とされて

いる「無理数の根号が負のときにどうするか」という疑問に立ち向かった際に、中学生でも複素数を教える意義があると考え。更に、「社会とつながる数学」のカリキュラムの中で行われることにも、中学生でも複素数を教える意義があると考え。これに関しては、本章 5 節 3 項で詳しく論じていく。

吉田(2000)は、著書を通じて中学生に向けて虚数を教えている<sup>38</sup>。全方位ということもあり、1000 ページにわたる大著で「学ぶとはどういうことか?」といった学問に臨む際の姿勢にまで答えている。しかし本著を中学生が現実的に理解するためには、読書量が豊富で、かつ数式などに対して美しさや神秘を感じている、わずかな中学生にしか対象としては挙げられないだろう。また、佐川大樹<sup>39</sup>は、2008 年 11 月 29 日に北海道野幌高等学校にて中学 3 年生を対象に、20 分間の高校数学の体験授業を行い、その中で虚数を題材とした話を行った<sup>40</sup>。方程式中の文字  $x$  が  $i$  に変わった時に、どのように計算をするか導入で説明をした。その後、「 $i^2 = -1$ 」という定義を紹介し、「 $i$  はこの世の中には絶対ない数字」としながら「この虚数って数字は将来、電気関係の仕事に就きたいという人は必須の知識なんだ」と言い、「君たちが今電気製品に囲まれて便利な暮らしができるのも、この虚数って数字のおかげなんだ」と締めくくった。この授業は、あくまで体験授業であり、一つの高校数学の紹介をする話としては成立しているように捉えられる。しかし、ともすると「電気製品と虚数がなぜ関係あるのか?」と聞いている中学生は疑問を持たざるを得ないだろう。こうした疑問にも、丁寧に答えられるようにする必要があると考え。

以上より、複素数の学習は、本章 2 節で述べた「数学科を身の回りの社会と関連づけて学習する意義」と、本章 3 節で述べた「数学科において数学史を導入する意義」とを、中学の学習範囲で取り上げることが達成できれば、中学校数学科においても導入が可能であると考えられる。

## 2.5. 「社会とつながる数学」のカリキュラム開発と実際

これまでに述べた問題の所在を基にして、中学生を対象として複素数を題材とした授業を開発し実践を行っていく。本授業は、授業実践開発研究室の藤川大祐<sup>41</sup>、阿部学<sup>42</sup>、根岸千悠<sup>43</sup>、筆者の 4 名が中心のメンバーとなって担当した「社会とつながる数学」というカリキュラムの中で行う。「社会とつながる数学」とは、2011 年 4 月より、千葉大学教育学部附属中学校(以下、附属中学校)の前期選択教科にて行われた授業のことである。本節では、附属中学校と選択教科について、カリキュラム開発の視点、これまでの授業の実際と考察、複素数を題材とした授業を「社会とつながる数学」で行う意義についての、4 点について論じていく。

### 2.5.1. カリキュラム開発の視点

「社会とつながる数学」では、既習の分数やこれから学ぶ平方根などを取り上げ、教科書では曖昧にされている概念について、数学史(特にギリシア数学)から見て、検討していく。また、毎回の授業の中で、数学が社会とつながっていることを実感できるような内容を取り上げる。更に、中学で学習している数学が、現代の身の回りの社会に使われていることを実感し、古代で扱っていた数学と現代社会とのつながりも実感させるような授業とする。数学に対して意欲的な生徒がいる実態も考慮した上で、教科書の範囲外である無限・背理法・完全数などの応用的な題材についても取り上げる<sup>44</sup>。更に、数学教育の可能性を探るために、決まり切ったことを断片的に教えるのではなく、生徒が少人数であることと選択教科であることを踏まえ、自由で大胆な発想で授業づくりを行った。必要に応じて、表計算ソフトなどの情報機器を活用していきたい。

こうした視点の下で、表 1 のような 13 時間のカリキュラムで授業が行われた。

表 1 「社会とつながる数学」実践内容

時数	内容
2	オリエンテーション、正方形の対角線
1	有理数と背理法
1	ピタゴラスと整数
2	整数と音楽
2	素数と背理法
1	完全数
2	ユークリッド幾何学の体系
2	複素数と電気工学

### 2.5.2. これまでの授業の実際と考察

各時間において、その授業内容に対する成果や反省はあったが、ここでは本研究である複素数を題材とした授業において関連するような内容について、以下の 3 点に分類して考察を行う。

#### 2.5.2.1. 数学的活動の時間の確保

45 分間という授業時間において、生徒が計算を行ったり証明をしたりする活動の時間が多めに取られていることが、「社会とつながる数学」の特徴である。例えば、完全数や背理法などの、中学の学習範囲を超えた概念を導入する時でも、定義の説明はなるべく最小限に行い、生徒が書く活動などをしながら理解を深めるような仕掛けであった。10 時間目に、阿部が授業を行った際に、タレスやユークリッドなどの人物を紹介した。この際に、「ヒューマナイズ」することが意識された教材であったが、それらの人物を紹介するために話す時間を長く取っていた。この授業後に阿部は、「疲れている様子の生徒たちを見て、なるべく話をして面白くしようとし

たが、それが裏目に出てしまい、寝てしまう生徒が増えた。テンポよくサクサクと進めるべきだった」と述べている。藤川が担当した2時間目の授業でも、「前半でピタゴラスという人物と当時の無理数がタブーとされていた文化を紹介する際に、話す時間が長くなってしまった」と後に語っている。人物から迫ることは、生徒にとって共感性を持つ期待もあるが、それで終始してしまうことが課題として挙げられるだろう。

このように、細部で検討をすると話が長くなってしまったこともあるが、それらの行為を授業者は、一貫して反省の弁として述べていることであった。

### 2.5.2.2. 授業の文脈と問題の質

藤川は自身で9時間行ってきた授業を振り返って、「話を聞かせて教え込むような授業は行ってこなかった。せいぜい教え込む時があっても、黒板の内容を写させるとき」と述べている。しかし、藤川が行って来た授業のまま行えば良いのではなく、取り扱う単元の中で考察を深めた上で、今までの授業の文脈に合わせる必要がある。例えば、単元の中で即興的に話す必要な場面となった時に、数学史の内容だけでなく数学的な問題例まで話せるように、教材研究をする必要があるだろう。文脈が崩れるということは、先に述べたような数学的な活動の時間が十分確保されないことなどが挙げられ、そうなると飽きてしまう生徒が増えてしまうのだろう。

では、このような授業の文脈の中で、どのような問題を提示することがよいのか。例えば、「 $\sqrt{2}$ が無理数であることを、背理法を用いて証明をせよ」という問題が、3時間目に行われた。こうした難問に対して、たくさんの作業をさせることが、授業の文脈としては合っていた。しかし、10時間目で数学的な要素が無い1問1答形式に似たクイズ問題<sup>45</sup>を取り上げた際に、生徒の活動が停滞してしまう様子があった。以上から、数学的な要素を含めた問題を、文脈に合わせて行う必要があると考えられる。

### 2.5.2.3. 生徒の実態

「社会とつながる数学」を受講した9名が、講座の選択希望をする際に提出した「調査票」の中で、「この講座を希望した理由」という自由記述の内容を考察した。

「数学が得意」や「身近な所に使われているということを知れるから」などの肯定的な理由から受講したのは、新川、高野、城、竹内、玉根の5名<sup>46</sup>、「数学が苦手」などの否定的な理由から受講したのは木村、和田、古角、平野の4名であった<sup>47</sup>。

尚、生徒の本名はすべてを仮名に入れ替えてある。

### 2.5.3. 複素数を題材とした授業を「社会とつながる数学」で行う意義

本章4節2項では、「中学校数学科において複素数を扱う意義」を述べたが、本節で論じてきた「社会とつながる数学」において、複素数を題材とした授業を行う意義はあるのだろうか。「数学科を身の回りの社会と関連づけて学習する意義と、数学科において数学史を導入する意義とを、中学の学習範囲内で取り上げることが達成できれば、中学校数学科においても導入が可能」と述べたが、これは本節2項で述べた「カリキュラム開発の視点」に合致するものである。その際は、これまでの授業の文脈を考慮する必要がある。また、前述の生徒の実態を考えても、「数学が得意」と知的好奇心のある生徒が5名いる上に、「数学が苦手」などの否定的な4名も「社会とのつながりを知りたい」という意欲が記述されている。身の回りの電気製品を支えている電気工学という概念に、複素数の計算が欠かせないことを丁寧に扱えるようにすれば、生徒の期待にも答えながら新たな学びのある授業が達成できると考えられる。

更に本節2項では、「社会とつながる数学」のカリキュラム開発の視点として、「生徒が少人数であることと選択教科であることを踏まえ、自由で大胆な発想で授業づくり」を行った、と述べてきた。複素数を題材とした授業を中学生に実践することも、これまでにあまり行われてきておらず、どのような指導を行うか十分議論されてきていないと考えられる。

以上より、複素数を題材とした授業を「社会とつながる数学」で行う意義があると考えられる。

## 3. 研究の目的と方法

本研究の目的は、中学校段階における複素数を題材とした授業プランを作成、実践することでその成果と課題を考察し、高校の学習内容である複素数が、中学校段階における授業として工夫した方法が最善であるかを、明らかにしていく。そのために、中学校段階における複素数を題材とした授業の方法上の工夫を論じた上で、その工夫が妥当であったかを考察していく。

附属中学校3年生の選択数学「社会とつながる数学」にて、作成した2時間の授業を実践する。11時間分の授業の後に行われるものであるため、この授業を開発するにあたり、カリキュラムとこれまで実際に行われた授業に相応しい形で実践が出来るようなプランを構成する。各授業の生徒の実際の様子、生徒によるアンケート記述、授業を見学して検討された方からの指摘を中心として取り上げることで、授業を考察する。

アンケートの設問は以下の4項目である。

- |   |
|---|
| (1) 前回の授業から今日の授業まで、予習・復習などはできましたか？(復習にかけた時間も記入する)<br>(2) 今日の授業について理解できましたか？<br>(3) 今日の授業で、「数学が社会とつながっている！」と思いませんか？<br>(4) 感想を自由に書いてください |
|---|

以上の結果を吟味した上で、高校の学習内容である複素数が、中学校段階における授業としていかにして可能であったか、考察を行う。

#### 4. 授業・教材の開発

本授業では2時間で1つの単元構成とする。中学生を対象として、複素数の単元を構成する際にどのように扱っていくかを、以下に論じていく。仮に、複素数の計算や複素平面の話をきちんとやれば、高校生でもそれなりに時間がかかると考えられる。よって、中学生に短時間で扱う際にどこを抽出して扱うか、以下の3点を意識して行った。尚、各時間の具体的な内容構成については、次節で論じていく。

まず、公理・公準の話を取り上げることである。生徒はこれまでの「社会とつながる数学」の中で、ユークリッド原論に触れていることもあり、新しい概念を導入するときは、定理・公理・公準の話をして丁寧に吟味してきた。よって、今回も虚数や複素数といった新たな概念を導入するときに、どのような公理・公準であるかを丁寧に取り上げていきたい。

次に、計算問題を厳選したことである。中学1年生で「文字と式」を学習しているとはいえ、複素数の概念が入れば、様々なタイプの計算に触れる必要も出てくる。しかし、本単元の中に複素数と身の回りの社会とのつながりも取り上げていくことを考えているため、必要最低限に問題を絞っていく。

3点目に、複素平面を中学生にも理解できるような範囲に限定して、導入したことである。複素平面は、現在の高校数学の単元でも取り上げられていない概念である。しかし、「複素数が電気工学の世界で役立ち、それが身の回りの電化製品には欠かせない概念である」ことを説明する際に、複素平面は取り上げる必要があると考える。例えば複素数を「文字と式」での文字と同等に扱う範囲でのみ取り上げた後に、「複素数は電化製品には欠かせない概念である」と説明しても、生徒はそれを実感として湧かないだろう。よって、本単元では、絶対値が1の複素数に限定して積を扱い、一般的な回転でなく限定された角度の回転のみを扱っていく。こうした限定をしても、複素数を扱ったといえるかどうかは検討をする必要がある。しかし、その特殊な場合についてはきちんと証明まで行うようにしていきたい。

#### 5. 授業の実際と考察

授業の概要は以下の通りである。

実施校：千葉大学教育学部附属中学校
教科：数学(選択教科)
学年：中学3年生9名
時間：45分×2
実施日：1時間目 平成23年9月14日(水)
2時間目 平成23年9月28日(水)
授業者：1時間目 小池、大矢
2時間目 小池

授業の流れを、以下表2に示す。

表2 授業の流れ

時間	内容(1時間目)
8分	(1) 自己紹介・ロボット研究の話
10分	(2) 複素数とは何かを知る
20分	(3) 複素平面上で複素数を表す
5分	(4) まとめとアンケート記入
時間	内容(2時間目)
8分	(1) 複素数に関わる歴史を知る
12分	(2) 当時行われていた計算を解く
10分	(3) 直流と交流を知り、複素数と回転運動の関係を 知る
10分	(4) 複素数と回転の計算をする
5分	(5) まとめとアンケート記入

##### 5.1. 1時間目

##### 5.1.1. 授業開発の視点

1時間目の授業を開発するにあたって、3つの点を意識した。

1点目は、電気・電子工学関連の研究をしている人をゲスト講師として招くことである。教師が複素数に関する教材研究を深めて指導をすることも一つであるだろうが、今回は、ロボット工学を専門としながら活躍をする大矢をゲスト講師とした。大矢の所属する研究室であるエンジニアリングシステム研究室は、人が感情の理解できるロボットと共生することを目指し、最先端の様々な研究が行われている。例えば、介護者支援ロボット、擬似感性システムなどを研究している。このような、ロボットが身近な社会問題の解決に向かっている話を、複素数という電気工学に関連することを導入として取り上げることは、生徒にとっての効果的な動機付けとなると考えられる。これまでの「社会とつながる数学」でも、米国で数学の博士号を取得した元高校教諭がゲストとして来た際も、数学に関心のある生徒は興味を示していた<sup>48</sup>。よって、教師がただ間接的に紹介するのではなく、実際に研究に携わっている学生の生の話を聞くこと

で、生徒の興味関心も増すだろう。以上から、複素数が活用されている社会での場面、特に電気工学の話をつぶりと話してもらうようにした。

2点目は、ゲストが研究のために製作したり使ったりしている機材や実物を、生徒に触れてもらうことである。これは、藤川によって行われてきたギリシア数学の題材にて、日本語訳のものではあるがユークリッド原論を持ちこんでいたことから行った。このような本物に目を触れることで、生徒の興味関心も引き付けられると考える。今回は、図1のような大矢の製作した加速度センサーによって、傾き具合で光の色が変わる箱を持ってきてもらい、それを生徒に触ってもらうようにした。

3点目は、複素平面に慣れてもらうように丁寧に問題を提示したことである。複素数の理解を代数的なもので終始してしまうと、電化製品に複素数が使われていることにまで納得がいかないと考える。そのために、複素平面を導入することは必要不可欠となる。そもそも電気工学の世界では、複素数を用いることで交流電流の計算を簡単に行うことを可能としている。中学生が、回転を表す計算を行うことはこれまでに学んでおらず、発展的な学習とはなるが、丁寧に説明を行うことで一定程度の理解は行えると考えられる。プリントを活用して解説を行い、複素数の世界観を実感してもらうようにした。



図1 箱型の光る機械を見せる様子

### 5.1.2. 授業の実際と考察

ここからは、本研究の目的である「高等学校の内容である複素数が、中学校段階における授業としていかに達成できたか」について考察を行う。それと併行して、生徒の授業の実際の様子、アンケート記述、授業を見学して検討された方からの指摘を取り上げることで、授業の考察を深めていく。「導入部分にあたるゲスト講師による現代の話の効果」と「授業者の発言」、「複素数という概念の導入の仕方」、「資料の提示の仕方」、「問題の出し方」の5つの観点から、以下に論じていく。

まずは、ゲスト講師の大矢のロボットを始めとした電気工学の導入についての考察を行う。これらを生徒の反応や感想から分析すると、一定の成果が挙げられた。ここでは、複素数が社会で使われている具体的な場面を、大矢の研究と絡めて取り上げた。この話は、大矢の自己紹介として紹介したが、実際には「どこに向かうかわからない話」と聞こえていたかもしれない。前項2点目でも述べたように、大矢には製作した箱型の光る機械も

持ってきて、動機づけには工夫を凝らしたが、それが複素数につながる話だということは、その時点で生徒たちは理解していなかった。実際にこれまでの「社会とつながる数学」の構成は基本的に以下の2通りであった。1つは、まず数学的な活動があり、その次に数学の歴史的な背景を知り、最後に身の回りの社会とのつながりを知る、という順序である。もう1つは、数学的な活動とその歴史の背景を同時に取り上げ、最後に身の回りの社会とのつながりを知る、という順序である。今回はその2通りにも当てはまらない順序で行った。その理由は、大矢が次回予定されていた授業に都合がつかなかったためである。元々の授業の文脈を大事にしておけば、「どこに向かうかわからない話」にはならなかったため、課題点としては挙げられる。しかし、ここでの考察に関連する生徒の感想を抽出すると、大矢の技術興味を持った、驚いたりする既述がみられた。

大矢の話は、救助ロボット、共感覚などの難しい内容にも触れた上に、一方的に語りかけていたが、生徒は時折笑う様子を見せた。また、大矢に共感覚の質問をされると、隣同士で少し話をしていた様子を見せた物もいた。こうした生徒の様子からも、動機づけとしてゲストの大矢に登場してもらったことに対する、効果が見られた。

併せて、アンケートの3つ目の問いである「今日の授業で「数学が社会とつながっている！」と思いましたか？」については、「とても思った」が7名、「そう思った」が2名であった。この数値は、今までの「社会とつながる数学」のアンケートと比較して、高い数値である。実際に、大矢には製作した箱型の光る機械は、生徒全員が触って傾けながら観察をしていた。

以上から、生徒の反応等から分析をすると、中学生にとっても電気工学が社会で活躍する話は、複素数を学ぶ上で効果を得られるものであると考えられる。しかし、より電気工学と複素数とのつながりを実感させるためには、「複素数と電気工学」のようなタイトルを予め打ち出して、どこに向かうかわかるような見通しをつけるべきであった。こちらは授業者が授業を進行する上での反省点である。

2点目に、授業者の発言に関して考えていく。授業者が45分間の授業のうち、「高校生」、「難しい」という言葉を4回発した。前者は『高校生で習うこと』、後者は『中学生のみんなには難しい』といった文脈で使っていた。これは、授業者である筆者が、中学生に合わせた教材開発が十分に行われていないのでは、という自信の無さから発言してしまったものであると振り返る。一方で授業者の意図として、肯定層の生徒の知的好奇心やチャレンジ精神を持たせるために言ったこともあった。アンケートを見ると、肯定層にあたる城は「高校の問題を先取りすることができ、どのように解けばいいのかがよく分かりました」と述べている。

しかし、同じ肯定層の高野は「自分の知識の未熟さを



感じた」と、自己肯定感が下がってしまった様子の記述が見られた。また、否定層の古角は「今日は問題むずかしかった!」、和田は「今日の授業は、難しいと感じた」と述べている。特に古角は、授業の中での問題を解く際も頭を抱え、「難しい」という言葉を残している場面があった。他の記述を見ると、城のみは高校の単元を先取りすることに好評価を出していた。これまでの授業でも難問を提示することはあったが、それは中学生にも解けるような形で取り上げていた。しかし、今回はそのような段階を飛ばしている場面が多かった。以上より、少数の生徒のモチベーションを上げることの効果は見られたが、ほとんどの生徒は授業から取り残されてしまう感覚を持ってしまうと考えられるために、「高校生」や「難しい」という言葉を全面に押し出すことは本授業には馴染まないということがわかった。

3点目に、複素数という概念の導入の仕方について考えていく。授業者はゲスト講師の研究の話の後に、複素数に関する説明を一方的に行った。授業者は、複素数がこれまでに学んだことの無かった概念であるために、まずは言葉の定義などを抑えてもらう必要があると考え、こうした形での説明を行った。竹内と木村は、授業の中で虚数を知っていると反応を示していたが、その他の生徒は「虚数」や「複素数」という言葉を初めて聞いた様子であった。こうした虚数の説明は、結果的に授業者から生徒への一方通行の指導となってしまった。これまで授業をしてきた藤川に、「過去の授業の文脈とは異なっていた」と後に指摘を受けた。概念の説明は最低限に留めて、複素数に馴染ませるためにまず計算をやらせてみる、などの活動をさせる必要があった。

計算以外の活動でも、例えば虚数という言葉の説明で「イマジナリーナンバー(imaginary number)という、想像上の数なのです」と言ったり、「ありえない数を導入しても、このように計算ができるのです」と言ったりして、数学の面白さを中学生でも興味が引き付けられるようにする必要があった。本項2点目の分析にも関連するが、生徒が授業から取り残されてしまう感覚を持ってしまうことも、これらの指摘を踏まえて実践が出来ていけば、より軽減できたと考えられる。こうした説明は、次回の授業でフォローをする必要があり、反省すべき点である。

4点目に、資料の提示の仕方について考えていく。まずは投影をした図2の表計算ソフトのデータ<sup>49</sup>を考える。ここでは、 $\sin$ や $\cos$ などの三角関数の言葉のある数値を残していた。実際に授業者が『サインとコサインというような数が出てくるので、ちょっと具体的に説明するのは難しい』と授業で言ったが、そうであればそもそも提示する必要はなかったであろう。更に図2は元々、「複素数を導入すると、三角関数の計算が楽になる」ことについて、「円の回転と波の関係」を基としたアニメーションを使って理解をしてもらうために提示をする

予定であった。しかし、筆者の教材製作が進まずに、結果的にアニメーションの無いまま提示することになってしまった。これは2時間目に再度説明をやり直すこととなった

最後に、問題の出し方について考えていく。この授業では、虚数の説明の後にすぐ、複素平面の問題に移った。しかし、この複素平面上で点を取る問題をなぜ解くのか、またこの問題を解くことでどこの話に向かうのか、という説明が不明確であった。授業に同行をして分析をしていた根岸は、授業後に以下のように述べていた。

生徒が「なぜこの問題を解くの?」と疑問に持っていたはず。これまでの授業で「2が無理数であることを、背理法を用いて証明をせよ」という問題を解く場面があったが、この問いは予めゴールが設定されていた。

授業者は、導入でゲストの大矢に電気工学の話をしてもらったことで、この問題を解くことが電気工学の基礎となることを伝えたつもりであったが、それが十分でなかったと考えられる。肯定層にあたる生徒は、問題に立ち向かっている様子も見られたが、玉根は2問目に移る際に寝ている様子も見られた。前述ではあるが、古角も頭を抱え、「難しい」という言葉を残している場面がみられた。玉根が寝るという行為に移ったことには、当然様々な要因があつただと考えられるが、問題の向かう方向が不明確であったことも、一つの理由として挙げられるのではないかと。これについても、2時間目の授業において、改めて丁寧に上げ直す必要のある課題点である。

以上の考察で挙げた課題を踏まえて、2時間目の授業プランを再構成し、実践を行う。

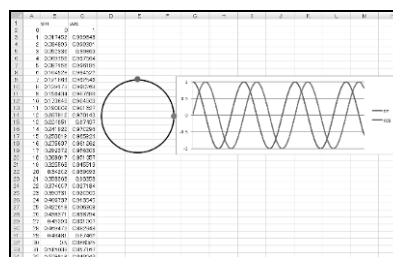


図2 円の回転と波の関係

## 5.2. 2時間目

### 5.2.1. 授業開発の視点

1時間目の授業実践を踏まえた上で、以下の3点を考慮して授業開発を行った。

1点目は、塚原(2002)の「ヒューマナイズ」の考え方を踏まえた上で、複素数に関わった数学史上の人物に触れさせることである。まず、17世紀に虚数という考え方が確立するまでのエピソードを、生徒に共感してもら

うような形で話していく。具体的には、虚数を世に広めたカルダノが、数学者という肩書き以外にも賭博師や占星術師という変わった側面もあったことを紹介する。更には、タルタリア<sup>50</sup>とカルダノが虚数を必要とする3次方程式の解の公式を見つけて世に広めるまでに、どのような苦労や駆け引きがあったかの話をする。

ここでは単なる数学史の紹介とにならないよう、当時先人がぶつかっていた問題を中学生のレベルに落とした形で問題を体験してもらうようにした。この問題の出し方に関する内容が、2点目の授業開発の視点である。前回の授業では、複素数の世界観に馴染ませるために計算問題を解かせる活動をする時間が十分に取れなかった課題があった。これまでの「社会とつながる数学」と比較をしても、数学的活動の時間が確保できていなかったため、色々な解答結果になる問題を、少しでも多く提示するようにした。

3点目は、複素数と電気工学とのつながりをより具体的に理解してもらうように、複素数の計算が、ベクトルの回転の計算を表すことを、中学生にも理解できるように示すことである。例えば、ベクトル図において位相が $90^\circ$ ずれることを数式で表すと、三角関数や行列の計算をしていかなければならない。電気工学においてこのように位相をずらすことは、コンデンサ<sup>51</sup>やコイルに加わる電圧と流れる電流の関係を表すために、必要とされる計算である。しかし、先に述べた通りベクトル図の計算は大変複雑で、実際の電気工学の世界では複素数を使うことによって、電圧と電流の関係をその大きさだけでなく、位相を含めてオームの法則と同様な式で表している。当然、中学校の生徒にこれらを理解させることを求めることはできないが、複素数の計算によって回転を表していることを計算によって少しでも体験させることは可能であると考え。そのためには、まず交流が波<sup>52</sup>であることを説明する。蛍光灯が交流の例であることを取り上げた上で、交流は時間と共に周期的に大きさと方向(+と-)が変化する電流であることから、波の形をしていることを説明する。次に、等速円運動の1次元射影が、波の形を表すことを説明する。ここでは、生徒が身体を使って円運動が波に見えることを体験した上で、映像教材も使いながら理解してもらう。最後に、2点目の授業開発の視点とも関連するが、このような概念を体系づけたのはガウスであることを紹介する。そして、実際に複素数の計算が回転を表すことを、実際に計算してもらって授業展開とする。これによって、前回の課題点であった「複素数の概念の導入の仕方」を、修正するような形で改善した。

### 5.2.2. 授業の実際と考察

前時と同様の形式で、本研究の目的である「高等学校の内容である複素数が、中学校段階における授業としていかに達成できたか」について考察を行う。2時間目で

は、「「ヒューマナイズ」することの成果」と「複素数の計算と回転運動の関連」、「複素数の計算の面白さ」の3点に分けて、以下に論じていく。

1点目は、「ヒューマナイズ」することの成果について考えていく。数学史において、虚数の概念を確立し世に広めた人物として、タルタリアとカルダノとガウスを、図3のように紹介した。授業の前半の計算では、『タルタリアとカルダノが当時に計算をしていた問題を、体験しよう』という切り口で取り上げた。数学史上で正確に取り上げるのであれば、3次方程式の解の公式から虚数は来ている。しかし、筆者はその説明を最低限に行い、実数の文字式の計算と同様の問題を提示した。このような中学生のレベルに合わせて簡略化することは、事実と反しない範囲であれば問題は無いと筆者は考えた。しかし、上記の解釈には飛躍があるのではないかと、という反論が考えられる。そのために、筆者は「3次方程式の解の公式」という言葉は投影するスライドに入れ込んだ上で、説明を行った。後半の計算では、『ガウスが確立した複素平面において、複素数が回転を表す世界観を体験しよう』という切り口で取り上げた。この設定が生徒にどのように伝わったかを、アンケートの記述から分析を行う。否定層の平野・古角、肯定層の玉根が、以下のように「ヒューマナイズ」に関する記述をしていた(原文のまま一部抜粋)。

- 平野「よくわからない数「虚数」を表そうとする数学者たちにかんしんしました」
- 古角「エピソードがおもしろく、さすが、大昔だと思った」
- 玉根「昔の人の偉大さを感じました」

こうした記述が見られる背景として、これまでの「社会とつながる数学」において、1つ1つの単元において必ず数学史を取り上げていたからであると考え。授業の中でも、『1501年から1576年の人。ちょっと面白い経歴なんですけど。イタリアの医者であり、占星術師、占いとか。で、賭博師、賭けごとをする、ギャンブラー。で、哲学者でもあり数学者でもある。何だかよくわからない人ですよ』と紹介した際に、高野と新川と平野は笑った様子を見せていた。

実際に、前時のアンケートにも、竹内と平野は次のように述べていた(原文のまま一部抜粋)。

- 竹内「ギリシャの人は虚数を考えなかったのか不思議に思った」
- 平野「わからない虚数を*i*とする。このことについて具体的な数字にしようとする昔の人は考えなかったのだろうか？」

以上より、3次方程式の解の公式の扱い方に課題は残

るが、「ヒューマナイズ」することによる生徒の関心を高めることの成果を見ることができた結果となった。

2点目に、複素数の計算と回転運動の関連とを生徒が理解できたか考察していく。直流と交流の説明をした際に、9人の生徒の中で元々知っている者は、授業中に質問をして聞いた所1人もいなかった。こうした様子を見ると、図4の中で交流と直流の説明をもう少し丁寧にやる必要があると考えられる。例えば、図4の説明のグラフとの関連を深めるために、直流のグラフと交流のグラフを比較して、電流の方向の変化の違いを説明することなどが挙げられるだろう。この内容も、中学校理科の範囲を超えているために、より段階に合わせた説明が必要になってくる。しかし、『関西で使っている電気、交流は、1秒間に60回+とーが入れ替わる。関東は、違うんですよ。何回だと思う？ 知ってる？』と質問をした所、和田が小さく「50回」と答えていた。ヘルツの話に限っては、これまでの「社会とつながる数学」の「整数と音楽」という単元でも出てきた話題であったために、このような反応が返ってきたと考えられる。

次に、ガウスの紹介を行った後の問題に取り組む際の進行の仕方も振り返る。複素数の計算と回転運動の関連が、中学生の生徒にも理解してもらうため、1問1問を丁寧に解説した。具体的には、プリントの計算前後の座標における位置を、指で差させて変化を実感してもらうように説明をした。他にも、『1から*i*はこう動くよね。これって何度？』と、自分の腕を時計の針のように動かして表現をしながら生徒に質問をして、木村が「90°」と答えていた。このような説明によって生徒の反応も確かめながら進行ができたが、想定よりも時間がかかってしまい、予定していた3乗根の計算まで進むことができなかった。

身の回りの社会である電気工学と複素数とが関連する話は、1時間目のゲスト講師の大矢の説明で既に行っていたために、2時間目では取り上げることも無かったが、木村はアンケートの中で「虚数というものは現代の様々な分野において用いられて、数学はとても重要であるということがよくわかりました」と述べている。更に玉根は虚数について「身近な所にもいろいろと使われているそうなので、探してみたいと思います」と述べている。これは、1時間目の内容が生徒の中で関連づいたからなのか、それとも交流の例を蛍光灯で表したからなのか、直接的な要因は明確ではないが、社会とのつながりを実感した一つの成果であると考えられる。実際の指導の場面は、以下の通りである。

『関西と関東で使っている電流、交流というものは違うという事。波の+とーのこの行き方、波が違う。これが良く分かるのが、これなんですよ。これこれ。』

授業者は上に指を差した。生徒9人もそれに合

わせて、上を向いた。

『蛍光灯。蛍光灯って今、こうやって自分で見ているとずっと光っているように見えるでしょ。見えるよね？ピカピカ光っているように見える？』

質問には反応が見られなかったが、新川はずっと上を向いていた。

このような実物を伴った説明によって、生徒の一定の反応が見られたことが、社会と数学とのつながりを生徒が実感したと考えられる。

更に、否定層の平野も「ガウス平面を使うと波を円として表すことがすごいと思いました」と述べている。これは、複素数の計算と電気工学における回転運動との関連が、理解できたことの成果とも捉えることができる。木村に手を回転してもらい、横を向いて歩いてもらった結果、波に見えることを実演したり、軌跡を表した図5のような映像教材を使って紹介したりしながら説明を行ったことが、一つの印象として残ったと考えられる。実際に、高野と新川は「おー」と低い声で歓声を上げた様子も見られた。

以上より、複素数の計算と回転運動の関連が、中学生の生徒にも理解可能であることが示唆された。

最後に、複素数の計算の面白さを生徒が実感できたかどうかを考察していく。これは、前時に課題が残るものであり修正と改善を図った。しかし、2点目に挙げた通り、当初の予定よりも取り上げる問題数が少なくなってしまった。アンケートでは、前時よりも計算が多く取り上げられたことへの反応が多く見られた。計算の面白さに関して述べられていた5人の内容を、以下に取り上げていく。

城「虚数の計算は面白かったです」

竹内「今回は*i*を使った計算をして、少し難しいなと思ったけど、とても楽しかった」

平野「ガウス平面を使うと波を円として表すことがすごいと思いました」

新川「今日は、虚数の計算が多めで、おもしろかったです」

和田「虚数という、数学の上でくらいしか存在しない数について、自分が計算することができて、面白いなと思いました」

受講生の9人の中で半分以上の生徒が虚数や複素数の計算を面白いと感じたという結果から、前時の課題を改善できたのではないかと。特に新川の記述は、特徴的である。前時と比べて計算が多かったことを認識した上で、その方が面白いと感じることは、これまでの「社会とつながる数学」の文脈に合った感想であると捉えられる。一方で、否定層の古角は「計算はニガテ」という記述も見られた。古角がこれまでの授業に馴染まなかった可

能性もあるだろう。授業の様子を振り返ると、これまでに発表をしたり板書をしたりすることの無かった否定層の和田が、図6の(2)の問題を途中式までしっかりと取り組んでいた場面があった。授業者は、今まで活躍の場面の少なかった和田にチャンスを与えたい意図を持ち、黒板に書いてもらうように指示をした。最初はためらう様子も見せていたが、正しい計算結果を導き出していた。先ほど取り上げた和田のアンケートにもあった、「自分が計算できて」と実感できた背景に、この発表があったのではないかと考えられる。計算自体も、計算が苦手な古角も含めて、問題の中で解けていない生徒は1人も見られなかった。

以上より、複素数の計算の面白さを感じながら解答をすることが、中学生にも可能であることが示された。

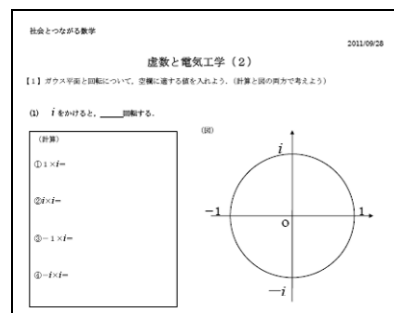


図6 生徒が解いた問題(一部)

## 6. 成果と課題

本研究の目的の成果を挙げるためには、複素平面の導入による効果、電子・電気工学に関する研究を行っている人物をゲスト講師として招くことによる効果、数学史の導入による効果、の3点の効果を十分に踏まえる必要があった。

上記の観点から、本研究の目的である、中学校段階における複素数の授業として、工夫した方法が最善であるかの示唆を得ることができた。一方、考察した内容などを改善した上で、授業を再度行う必要があることや、様々な場面で実施可能かどうかの検証などが、課題として挙げられた。

最後に、高校における複素数の指導を見直す必要があることを、提言していきたい。複素数が社会で活用されている場面を、中学生でも理解できる成果が一定程度見られたことから、本授業で取り上げた内容は高校生でも十分理解ができると考えられる。本論文でも述べてきたが、高校における複素数の指導のほとんどは、文字式の計算で完結してしまう内容である。このような実態では、複素数という世界観の魅力を味わうことはできないだろう。高校生の数学に対する意欲を向上するためにも、社会とのつながりを実感できるような本実践のような授業が、複素数においても広まっていく一つのきっかけとなってもらいたい。

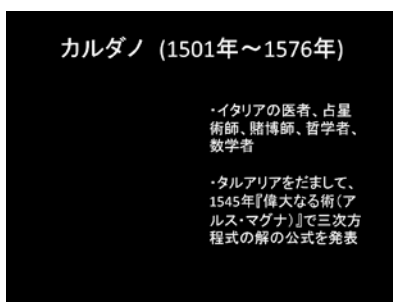


図3 カルダノを紹介したスライド

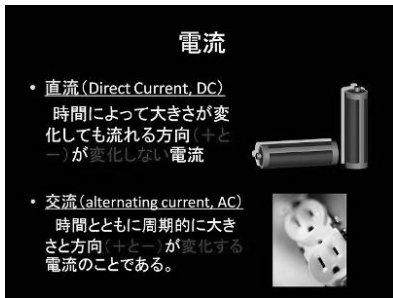


図4 直流と交流を説明したスライド

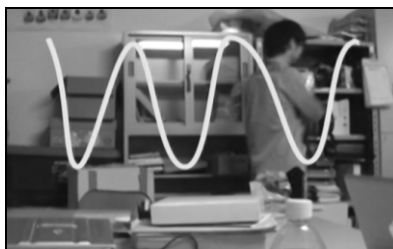


図5 円の回転と波の関係を説明した映像教材

1 本論文は、筆者の平成 23 年度千葉大学教育学部卒業論文「中学校数学における複素数を題材とした授業実践開発～「社会とつながる数学」の考察を通して～」の内容を抜粋し、新たな知見を加えたものである。

2 授業の概要と実際の詳細は、「千葉大学教育学部藤川研究室論文等掲載ページ」ウェブサイト内「社会とつながる数学」<http://ace-npo.org/fujikawa-lab/other/math.html> (2012 年 2 月 7 日確認)に掲載。

3 千葉工業大学 工学部 未来ロボティクス学科 4 年

4 国立教育政策研究所ウェブサイト内『国際数学・理科教育動向調査の 2007 年調査(TIMSS2007)国際調査結果報告』<http://www.nier.go.jp/timss/2007/gaiyou2007.pdf> (2011 年 12 月 24 日確認)

5 文部科学省(2008)『学習指導要領解説 数学編』、p.7

6 同上、p.8

7 同上

8 長崎栄三(2001)『算数・数学と社会・文化のつながり』、明治図書

- 9 小寺隆幸(1997)「現実の事象のモデル化を通して数学の有用性を理解させる指導の在り方」、日本数学教育学会、『第30回数学教育論文発表会論文集』、pp.433-438
- 10 「きょういく特報部 2010 算数 大嫌いだったけど...」2010年10月17日、朝日新聞・朝刊
- 11 小寺孝幸(2000)「有用性を重視した数学教育を!」、東京理科大学、『理学専攻科雑誌』、pp.31-34
- 12 塚原久美子(2001)「高等学校数学科における数学史の活用と有用性について」、東京理科大学、『理学専攻科雑誌』、pp.54-63
- 13 上垣渉(1990)『算数・数学授業を楽しくする数学史の話』、明治図書出版
- 14 塚原久美子(1996)「数学史の教材化に関する提言—実践事例としての数学史の有用性と方策」、『数学史研究』、151号、pp.9-18
- 15 塚原久美子(2002)「数学学習において数学を”ヒューマナイズ”するための数学史の活用と方法論」、『理科専攻科雑誌』、44(2) pp.66-84
- 16 仲田紀夫(2000)『マンガ おはなし数学史』、講談社ブルーバックス
- 17 同上
- 18 伊達文治(2011)「ゼミから生まれた数学的活動図」、上越数学教育研究、第26号、『上越教育大学数学教室』、pp.13-20
- 19 平成11年に改訂され、平成15年度から年次進行している新課程以前の指導要領内容に従う内容による教科書で学ぶ課程を意味する。
- 20 武本英夫(2007)「高校生に対する複素数の導入に関わって考えること—学生によって与えられた等式  $|i|=i$  から教えられたこと」、『宮城教育大学紀要』、42巻、pp.53-61
- 21 同上
- 22 前掲論文、武本(2007)
- 23 ウィリアム・ローワン・ハミルトン(1805-1865)。イギリスの数学者、物理学者。
- 24 小松孝太郎(2003)「複素数の歴史にみる虚数を実体化する学習—歴史的原典を利用した解釈学的営み—」、筑波大学数学教育学研究室『中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究』、10、pp.153-166
- 25 解釈学の「理解(了解)」「他者の立場の想定」「自己理解(教訓)」「解釈学的循環」といった基本概念を数学の場合に適用すること。詳しくは以下を参照。
- 磯田正美(2002)「解釈学からみた数学的活動論の展開—人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ」、『筑波数学教育研究』、第21号、pp.1-10
- 26 ジェロラモ・カルダノ(1501-1576)。イタリアの数学者。
- 27 ジョン・ウォリス(1616-1703)。イングランドの数学者。
- 28 1545年に著した本『偉大なる術(Ars Magna)』を取り上げた。
- 29 Cabri Geometry II を使用。
- 30 渡邊和貴(2010)「数学史を取り入れた授業の実践(工業高校)—複素数を作り上げてきた人たち」、『日本数学教育学会誌』、臨時増刊、総会特集号 92、p.458
- 31 東京都立小金井北高等学校 教諭(2011年2月26日当時)。授業も同校で実施された。
- 32 鈴木によるウェブサイト『Memory of the mathematics lover | suzukitomohide.com』  
<http://suzukitomohide.com/index.html> (2012年2月7日確認)に授業映像が掲載されている。
- 33 Apple 社によるプレゼンテーションソフト。
- 34 東海大学教育開発研究所 教授(2012年2月7日現在)
- 35 東京理科大学数学教育研究所 主催・企画。小・中・高等学校において、意欲的な実践・研究や創意あふれる指導により、優れた授業を実践した数学科の教員を顕彰する目的で開催された。詳細は、以下ウェブサイト参照。  
<http://www.rime.kagu.tus.ac.jp/> (2012年2月7日確認)
- 36 論文情報データベースサイト <http://ci.nii.ac.jp/>
- 37 塚原久美子(1995)「コースによる複素数の定義と四則計算について—教師にとっての数学史」、『数学史研究』、144号、pp.27-34
- 38 吉田武(2000)『虚数の情緒—中学生からの全方位独学法』、

東海大学出版社

- 39 北海道野幌高等学校 教諭(2008年11月24日当時)
- 40 体験授業のレポートは、「北海道算数数学教育会高等学校部会研究部数学のいずみ」ウェブサイト内「体験授業資料」  
[http://izumi-math.jp/D\\_Sagawa/taikenjugyou.pdf](http://izumi-math.jp/D_Sagawa/taikenjugyou.pdf) (2012年2月7日確認)に掲載。
- 41 千葉大学教育学部教授
- 42 千葉大学大学院人文社会科学系研究科公共研究専攻博士後期課程
- 43 同上
- 44 完全数などの授業実践に関しては、以下を参照。  
藤川大祐(1994)『数学する教室』、学事出版
- 45 例えば、「湖で挟まれている家と家との距離の測り方を考える」という問題。直接家の距離が測れないために、三角形の合同条件を活かして、同じ距離を別の場所によって測れば答えが導けるといふもの。これは、先の「背理法」の問題と比較すると、数学的な要素が無いと考えられる。
- 46 以降、この5名を「肯定層」として記述していく。
- 47 以降、この4名を「否定層」として記述していく。
- 48 例えば、その授業後アンケートで、生徒の高野は「話がとても興味深く、もっと沢山知りたいと思った」と述べていた。
- 49 Microsoft の表計算ソフト『Microsoft Office Excel 2007』を使用して作成。
- 50 ニコロ・フォンタナ・タルタリア(1500?-1557)。イタリアの数学者。
- 51 大辞林によると、「二つの導体を絶縁して向かい合わせ、電圧を加えて電気を蓄える装置。蓄電器」をいう。
- 52 正確には正弦波、矩形波、三角波などがあるが、ここでは中学生でも理解がしやすくするように、正弦波の形のみを取り上げた。

#### 謝辞

本研究を進めるにあたり、大矢将登様に協力していただきました。ここに感謝の意を表します。