

研究ノート

非拡大型写像に関する不動点定理と 平均収束定理

青 山 耕 治

1 はじめに

本稿では, ある非拡大型写像とその不動点に関する最近の研究結果¹⁾の紹介と解説を行う.

本稿で紹介する主な結果は, ある種の非拡大性をもった非線形写像の

- 不動点定理 (定理 4.1 など),
- 平均収束定理 (定理 5.1 など),
- 定義域の不動点性と有界性に関する結果 (定理 6.1)

の三つに分類することができる. ここでは, これらの先行研究である非拡大写像に関する定理を三つ紹介する. 以下, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T: C \rightarrow C$ を非拡大²⁾写像とする.

まず, 次の定理³⁾は, 非拡大写像の不動点の存在に関するものである.

1) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010); K. Aoyama and F. Kohsaka (2011a,b) および K. Aoyama (2011).

2) 写像 $T: C \rightarrow C$ が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう. ここで, $\|\cdot\|$ は H のノルムである.

3) A. Pazy (1971).

定理 1.1. $\{T^n x\}$ が有界となる $x \in C$ が存在するならば, T は不動点をもつ. つまり, $z = Tz$ となる $z \in C$ が存在する.

次の定理⁴⁾は, 非線形エルゴード定理としてよく知られている.

定理 1.2. T は不動点をもつと仮定し, $x \in C$ に対して, 点列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = x, z_2 = \frac{x + Tx}{2}, z_3 = \frac{x + Tx + T^2x}{3}, \dots \quad (1.1)$$

で定義する. このとき, $\{z_n\}$ は T の不動点に弱収束する.

次の定理⁵⁾は, 非拡大写像の定義域の不動点性と有界性に関する結果である.

定理 1.3. C が非拡大写像に関して不動点性を持つ, つまり, すべての非拡大写像 $T: C \rightarrow C$ が不動点をもつならば, C は有界である.

最近, 非拡大写像とは異なる種類の写像に対しても, 定理 1.1 のような不動点定理や定理 1.2 のような平均収束定理が成り立つことが示された. 例えば, 次のことが知られている.

- 写像 T が F. Kohsaka ら⁶⁾の意味で nonspreading のとき, 定理 1.1 と同様な不動点定理⁷⁾や定理 1.2 と同様な平均収束定理⁸⁾が成り立つ.
- 写像 T が W. Takahashi (2010) の意味で hybrid のとき, 定理 1.1 および定理 1.3 と同様な結果⁹⁾が, 定理 1.2 と同様な平均収束

4) J.-B. Baillon (1975).

5) W. O. Ray (1980).

6) F. Kohsaka and W. Takahashi (2008).

7) F. Kohsaka and W. Takahashi (2008) の Theorem 4.1 の特別な場合.

8) Y. Kurokawa and W. Takahashi (2010).

9) W. Takahashi (2010) の Theorem 4.3 および Theorem 5.2.

定理¹⁰⁾が成り立つ.

この後の第 3 節で詳しく説明する λ -hybrid 写像に関する議論によって, これらの先行研究の結果を統一的に扱うことが可能となる. そして, 後で述べる定理 4.1, 定理 5.1 および定理 6.1 は, 本節に述べた先行研究の結果を統合したものになっている.

2 準備

以下, $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像とする.

写像 $T: C \rightarrow H$ の不動点の集合を, $F(T)$ で表す. つまり, $F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$ である. 写像 $T: C \rightarrow H$ が擬非拡大 (quasi-nonexpansive) であるとは, $F(T)$ が空ではなく, すべての $x \in C$ と $z \in F(T)$ に対して, $\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$ が成り立とうときをいう. 擬非拡大写像 $T: C \rightarrow H$ の不動点集合は閉凸であることが知られている. 写像 $T: C \rightarrow H$ が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立とうときをいう. 写像 $T: C \rightarrow H$ が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$ が成り立とうときをいう. 定義より, 堅非拡大写像は非拡大であり, 不動点をもつ非拡大写像は擬非拡大であることがわかる. 写像 $T: C \rightarrow H$ が strictly pseudononspreading である¹¹⁾とは, ある $\kappa \in [0, 1)$ が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2$$

10) W. Takahashi and J.-C. Yao (2011).

11) M. O. Osilike and F. O. Isiogugu (2011).

$$\leq \|x - y\|^2 + 2 \langle x - Tx, y - Ty \rangle + \kappa \|x - Tx - (y - Ty)\|^2$$

が成り立つときをいう．このとき, T は κ -strictly pseudononspreading であるという．0-strictly pseudononspreading 写像を, 単に nonspreading 写像という．

各 $x \in H$ に対して, $\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する．その点 z を $P_C(x)$ と表し, P_C を H から C の上への距離射影 (metric projection) という．距離射影 P_C は堅非拡大であることが知られている¹²⁾．

3 λ -hybrid 写像

本節では, λ -hybrid 写像の定義とその基本性質を扱う．以下, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合とし, λ を実数とする．

写像 $T: C \rightarrow H$ が λ -hybrid である¹³⁾とは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda) \langle x - Tx, y - Ty \rangle \quad (3.1)$$

が成り立つときをいう．Hilbert 空間では, すべての $x, y \in H$ に対して

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 + \|x - y\|^2 + 2 \langle x - Tx, y - Ty \rangle \\ = \|x - Ty\|^2 + \|Tx - y\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つことから, 式 (3.1) は次のノルムだけの不等式

$$\begin{aligned} (2 - \lambda) \|Tx - Ty\|^2 \\ \leq (1 - \lambda) (\|x - Ty\|^2 + \|y - Tx\|^2) + \lambda \|x - y\|^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

12) 例えば, 高橋渉 (2005)．

13) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010)．

と同値であることがわかる. よって, (3.2) を定義式と考えてもよい¹⁴⁾.
定義から, 次のことが容易にわかる.

- T が 0-hybrid 写像ならば, T は nonspreading であり,
- T が 1/2-hybrid 写像ならば, T は W. Takahashi (2010) の意味で hybrid であり,
- T が 1-hybrid 写像ならば, T は非拡大であり,
- $T: C \rightarrow H$ が不動点をもつ λ -hybrid 写像ならば, 擬非拡大である. よって, λ -hybrid 写像の不動点集合は閉凸である.

さらに, 次のことが知られている.

- $\lambda > 1$ のとき, λ -hybrid 写像は恒等写像である. 実際, 式 (3.1) で $x = y$ とすると, $0 \leq 2(1 - \lambda) \|x - Tx\|^2$ で, $x = Tx$ となる.
- T が堅非拡大写像で $0 \leq \lambda \leq 1$ ならば, T は λ -hybrid である¹⁵⁾.
- λ -hybrid 写像は連続とは限らない¹⁶⁾.

次の補助定理¹⁷⁾は, strictly pseudononspreading 写像と λ -hybrid 写像との関係を示している.

補助定理 3.1. κ と β を $0 \leq \kappa \leq \beta < 1$ を満たす実数, $T: C \rightarrow H$ を不動点をもつ κ -strictly pseudononspreading 写像とし, 写像 $T_\beta: C \rightarrow H$ を $T_\beta = \beta I + (1 - \beta)T$ で定義する. このとき, T_β は $-\beta/(1 - \beta)$ -hybrid 写像である.

14) 第 4 節で, Banach 空間上の λ -hybrid 写像を考える際は, 式 (3.2) を定義式とする.

15) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010) の Lemma 3.1.

16) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010) の Example 3.4.

17) K. Aoyama and F. Kohsaka (2011a) の Lemma 2.5.

4 不動点定理

本節では, λ -hybrid 写像の不動点定理を述べる. 以下, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, λ を 1 以下の実数とする.

次の定理¹⁸⁾は, 第 1 節で紹介した不動点定理をすべて統合したものである.

定理 4.1. $T: C \rightarrow C$ を λ -hybrid 写像, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k-1}x \quad (4.1)$$

で定義する. ここで, $T^0 = I$ とする. このとき, $\{T^n x\}$ が有界ならば T は不動点をもち, $\{z_n\}$ の弱収積点 (weak cluster point) は T の不動点である.

定理 4.1 より, 直ちに次の系が得られる.

系 4.2. $T: C \rightarrow C$ を λ -hybrid 写像とする. このとき, C が有界ならば T は不動点をもつ.

次の定理¹⁹⁾は, λ -hybrid 写像の列に関する結果で, 定理 4.1 の一般化の一つである.

定理 4.3. $\{\lambda_n\}$ を λ に収束する実数列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n: C \rightarrow C$ を λ_n -hybrid 写像とする. C の点列 $\{x_n\}$ と $\{z_n\}$ を, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_{n+1} = T_n x_n$, $z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ で定

18) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010) の Theorem 4.1.

19) K. Aoyama and F. Kohsaka (2011a) の Theorem 3.1.

義する. さらに, $\{T_n\}$ は各点収束し, その各点収束極限を T で表す. つまり, $x \in C$ に対して $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) T は λ -hybrid であり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \subset F(T)$ となる.
- (2) $\{x_n\}$ が有界ならば T の不動点をもち, $\{z_n\}$ の弱収積点は T の不動点である.

定理 4.3 で $T_1 = T_2 = \dots$ の場合が定理 4.1 である. また, 定理 4.3 で $\lambda_n \equiv 1$ の場合, つまり, 各 T_n が非拡大写像の場合はすでに知られていた結果²⁰⁾である.

次の定理²¹⁾は, Banach 空間の上の λ -hybrid 写像の不動点の存在に関する結果である.

定理 4.4. E を一様凸 (uniformly convex)²²⁾な実 Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $T: C \rightarrow C$ を λ -hybrid 写像²³⁾とする. このとき, $\{T^n x\}$ が有界となる $x \in C$ が存在するならば, T は不動点をもつ.

5 平均収束定理

本節では, λ -hybrid 写像の平均収束定理を取り扱う. 以下, 前節と同様に, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, λ を 1 以下の実数とする.

20) M. Akatsuka, K. Aoyama, and W. Takahashi (2008) の Theorem 3.2.

21) K. Aoyama and F. Kohsaka (2011b) の主結果から直接得られる. なお, 定理 4.1 や定理 4.3 の証明では Cesàro 平均を用いているが, 定理 4.4 では Banach limit を用いている.

22) Hilbert 空間は, 一様凸な Banach 空間の一例である.

23) この場合, 式 (3.2) を定義式とする.

次の定理²⁴⁾は、第 1 節で紹介した平均収束定理をすべて統合したものである。

定理 5.1. $T: C \rightarrow C$ を不動点をもつ λ -hybrid 写像, P を H から $F(T)$ の上への距離射影, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.1) で定義する. このとき, $\{PT^n x\}$ は強収束し, $\{z_n\}$ は $\{PT^n x\}$ の極限に弱収束する.

次の定理²⁵⁾は, λ -hybrid 写像の列に関する結果で, 定理 5.1 の一般化の一つである.

定理 5.2. $\{\lambda_n\}$, $\{T_n\}$, $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ および T は, 定理 4.3 と同じとする. さらに, $F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ が成り立つと仮定し, P を H から $F(T)$ の上への距離射影とする. このとき, $\{Px_n\}$ は強収束し, $\{z_n\}$ は $\{Px_n\}$ の極限に弱収束する.

定理 5.2 で $T_1 = T_2 = \dots$ の場合が定理 5.1 である. また, 定理 5.2 で $\lambda_n \equiv 1$ の場合, つまり, 各 T_n が非拡大写像の場合はすでに知られていた結果²⁶⁾である.

定理 5.2 および補助定理 3.1 を使うと, 次の系²⁷⁾が直ちに得られる.

系 5.3. $\{\alpha_n\}$ を 0 に収束する $[0, 1)$ の数列, κ と β を $0 \leq \kappa \leq \beta < 1$ を満たす実数, $T: C \rightarrow C$ を不動点をもつ κ -strictly pseudononspreading 写像, P を H から $F(T)$ の上への距離射影とする. 点列 $\{x_n\}$ と $\{z_n\}$

24) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010) の Theorem 5.2.

25) K. Aoyama and F. Kohsaka (2011a) の Theorem 4.1.

26) M. Akatsuka, K. Aoyama, and W. Takahashi (2008) の Theorem 3.2.

27) M. O. Osilike and F. O. Isiogugu (2011) の Theorem 3.1.

を, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)(\beta x_n + (1 - \beta)Tx_n), \quad z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

で定義する. このとき, $\{Px_n\}$ は強収束し, $\{z_n\}$ は $\{Px_n\}$ の極限に弱収束する.

著者らの最近の結果²⁸⁾によって, 平均の取り方をもっと一般的にしても, 定理 5.2 と同様な結論が得られることがわかっている.

6 定義域の不動点性と有界性

本節においても, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, λ を 1 以下の実数とする.

系 4.2 より, C が有界ならば C 上の任意の λ -hybrid 写像は不動点をもつこと²⁹⁾がわかっている. 次の定理³⁰⁾より, その逆も限定的に成り立つことがわかる.

定理 6.1. $\lambda \in [0, 1]$ とし, C は λ -hybrid 写像に関して不動点性をもつ, つまり, すべての λ -hybrid 写像 $T: C \rightarrow C$ が不動点をもつと仮定する. このとき, C は有界である.

定理 6.1 で $\lambda = 1$ の場合が定理 1.3 であるから, 定理 6.1 は定理 1.3 の一般化であるが, その証明は定理 1.3 から得られる次の補助定理を使うと容易である.

補助定理 6.2. C は堅非拡大写像に関して不動点性をもつ, つまり, す

28) K. Aoyama and F. Kohsaka (2012).

29) このとき, C は λ -hybrid 写像に関して不動点性をもつという.

30) K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010) の Theorem 6.2.

すべての堅非拡大写像 $T: C \rightarrow C$ が不動点をもつと仮定する. このとき, C は有界である.

第 3 節で述べたように, $\lambda \in [0, 1]$ のとき, すべての堅非拡大写像は λ -hybrid であるから, 補助定理 6.2 より, 定理 6.1 が得られる.

7 強収束定理

第 5 節の定理はすべて, 不動点への弱収束定理であったが, 別のアルゴリズムを用いると, 次のような強収束定理³¹⁾を得ることができる. 以下, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, λ を 1 以下の実数とする.

定理 7.1. u を C の点, $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列, $T: C \rightarrow C$ を不動点をもつ λ -hybrid 写像とし, $\alpha_n \rightarrow 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を仮定する. 写像 $S_n: C \rightarrow C$ を, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{k-1}$$

で定義する. ただし, $T^0 = I$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 \in C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) S_n x_n \quad (7.1)$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}(u)$ へ強収束する.

定理 7.1 と補助定理 3.1 を使うと, 直ちに次の系³²⁾が得られる.

系 7.2. u と $\{\alpha_n\}$ は定理 7.1 と同じとする. κ と β を $0 \leq \kappa \leq \beta < 1$ を満たす実数, $T: C \rightarrow C$ を不動点をもつ κ -strictly pseudononspreading

31) K. Aoyama (2011) の Theorem 2.

32) M. O. Osilike and F. O. Isiogugu (2011) の Theorem 3.2.

写像とし, $S_n: C \rightarrow C$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (T_\beta)^{k-1}$$

で定義する. ここで, $T_\beta = \beta I + (1-\beta)T$, $(T_\beta)^0 = I$ である. 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 \in C$ およびすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して (7.1) で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}(u)$ へ強収束する.

8 おわりに

λ -hybrid 写像およびその周辺については様々な研究が行われている³³⁾. ここでは, λ -hybrid 写像の一般化の一つである generalized hybrid 写像を取り上げ, λ -hybrid 写像との関係を述べる. 以下, C を実 Hilbert 空間 H の空でない部分集合, α および β を実数とする.

写像 $T: C \rightarrow H$ が (α, β) -generalized hybrid 写像である³⁴⁾とは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha \|Tx - Ty\|^2 + (1-\alpha) \|x - Ty\|^2 \\ \leq \beta \|Tx - y\|^2 + (1-\beta) \|x - y\|^2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

が成り立つときをいう. (α, β) -generalized hybrid 写像は, λ -hybrid 写像の一般化とみなすことができる. 実際, λ を実数, $T: C \rightarrow H$ を λ -hybird 写像とすると, (3.2) より, T は $(2-\lambda, 1-\lambda)$ -generalized hybrid であることがわかる.

ところが, 一部の generalized hybrid 写像は, 恒等写像または, ある λ -hybrid 写像になってしまう. もう少し具体的に書くと, 次のことがわ

33) Google Scholar で検索すると, K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010) の引用数は 24 である (本稿執筆時).

34) P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, (2010).

かっている³⁵⁾.

$T: C \rightarrow H$ を (α, β) -generalized hybrid 写像とするとき

- (1) $\alpha + \beta - 1 < 0$ ならば, T は恒等写像である.
- (2) $\alpha + 1 - \beta > 0$ ならば, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して, T は λ -hybrid である.

さらに, T が C から C の中への generalized hybrid 写像のとき, 次が成り立つ³⁶⁾.

- $\alpha = 0$ および $\beta = 1$ ならば, T は等長である.
- $1 - \beta - \alpha(1 - \alpha) < 0$ ならば, T は恒等写像である.

以上のことから, generalized hybrid 写像の研究においては, 恒等写像や λ -hybrid 写像に帰着されない場合, つまり

$$\alpha < 0 \text{ かつ } -\alpha + 1 \leq \beta \leq \alpha^2 - \alpha + 1$$

または

$$\alpha \geq 2 \text{ かつ } \alpha + 1 \leq \beta \leq \alpha^2 - \alpha + 1$$

の場合が重要であるといえる.

参考文献

- M. Akatsuka, K. Aoyama, and W. Takahashi (2008), “Mean ergodic theorems for a sequence of nonexpansive mappings in Hilbert spaces,” *Scientiae Mathematicae Japonicae* 68, 233–239.
- K. Aoyama (2011), “Halpern’s iteration for a sequence of quasinonexpansive type

35) 青山耕治 (2012) の命題 6.1.

36) 青山耕治 (2012) の命題 6.2.

- mappings,” *Advances in Intelligent and Soft Computing*, Springer, Berlin, pp. 387–394.
- K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi (2010), “Fixed point and ergodic theorems for λ -hybrid mappings in Hilbert spaces,” *J. Nonlinear Convex Anal.* 11, 335–343.
- K. Aoyama and F. Kohsaka (2011a), “Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ -hybrid mappings,” *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization* 2, 85–92.
- K. Aoyama and F. Kohsaka (2011b), “Fixed point theorem for α -nonexpansive mappings in Banach spaces,” *Nonlinear Anal.* 74, 4387–4391.
- K. Aoyama and F. Kohsaka (2012), “Uniform mean convergence theorems for hybrid mappings in Hilbert spaces,” *Fixed Point Theory Appl.* 2012:193, 13pp.
- J.-B. Baillon (1975), “Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 280, A11, A1511–A1514.
- K. Goebel and W. A. Kirk (1990), “Topics in metric fixed point theory,” Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28, Cambridge University Press, Cambridge.
- P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, (2010), “Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces,” *Taiwanese J. Math.* 14, 2497–2511.
- F. Kohsaka and W. Takahashi (2008), “Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces,” *Arch. Math.* (Basel) 91, 166–177.
- Y. Kurokawa and W. Takahashi (2010), “Weak and strong convergence theorems for nonspreading mappings in Hilbert spaces,” *Nonlinear Anal.* 73, 1562–1568.
- M. O. Osilike and F. O. Isiogugu (2011), “Weak and strong convergence theorems for nonspreading-type mappings in Hilbert spaces,” *Nonlinear Anal.* 74, 1814–1822.
- A. Pazy (1971), “Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space,” *Israel J. Math.* 9, 235–240.
- W. O. Ray (1980), “The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space,” *Trans. Amer. Math. Soc.* 258, 531–537.

- W. Takahashi (2010), “Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space,” *J. Nonlinear Convex Anal.* 11, 79–88.
- W. Takahashi and J.-C. Yao (2011), “Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces,” *Taiwanese J. Math.* 15, 457–472.
- 青山耕治 (2012) 「ハイブリッド写像の不動点定理と平均収束定理」『京都大学数理解析研究所講究録 (独立性と従属性の数理—代数と確率の出会い—)』京都大学数理解析研究所, 第 1820 巻, 1–10 頁.
- 高橋渉 (2005) 「非線形・凸解析学入門」横浜図書.

(2013 年 9 月 9 日受理)