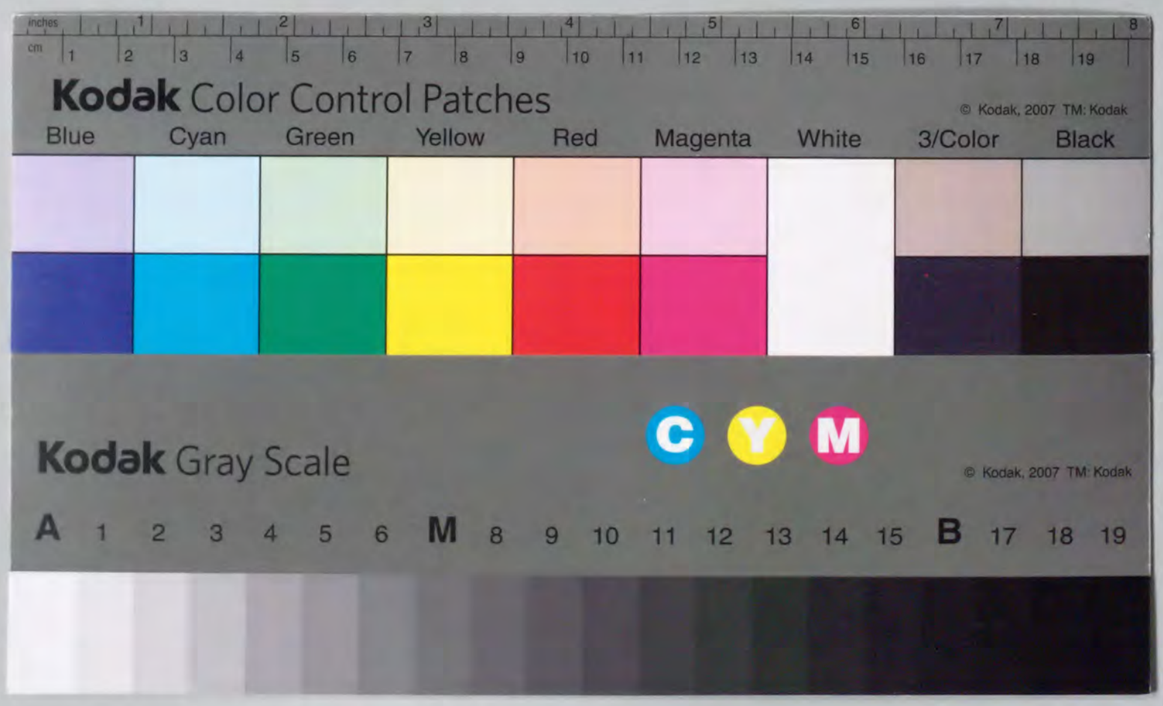
神以領域法を用いた伝導場・応諸場と混ざる直由流跳関域の数値計算アルゴリズムに関する研究

川原仁志

1997年7月



①

（千葉大学学位申請論文）

補助領域法を用いた伝熱場・流動場に現れる自由境界問題の数値計算アルゴリズムに関する研究

１９９７年７月

川原 仁志

目　　次

第１章 緒論 1

第２章 溶融･凝固を考慮した伝熱計算 5

第１節 緒言 5

第２節 １次元１相ステファン問題に対する数学モデル 5

第３節 １次元１相ステファン問題の補助領域法による計算モデル 7

第４節 １次元１相ステファン問題の計算モデルに対する離散化 10

第１項 差分法による離散化 10

第２項 時間積分方法 12

第３項 離散特性関数の構成 15

第５節 １次元１相ステファン問題に対する数値計算結果 26

第６節 溶融・凝固問題への適用 32

第１項 自由境界における境界値が０でない場合の数値解法 32

第２項 ２次元２相ステファン問題の数学モデル 35

第３項 補助領域法に基づく２次元２相ステファン問題の計算モデル 36

第４項 ２次元の離散特性関数の構成 37

第５項 数値計算結果 44

第７節 ３次元離散特性関数 48

第８節 結言 52

第３章 自由表面を考慮した流動計算 53

第１節 緒言 53

第２節 自由表面問題の数学モデル 53

第３節 補助領域法による計算モデル 55

第１項 補助領域法による非斉次 Neumann 境界条件の近似 57

第２項 自由表面問題の補助領域法による近似 73

第４節　VOF 法、FS 法を応用した数値計算アルゴリズム　74
第１項　自由境界問題に対する VOF 法の適用　74
第２項　Navier－Stokes 方程式の FS 法による数値解法　76
第３項　表面セルの流速　77
第４項　補助領域法を用いて導出された数学モデルの計算アルゴリズム　78
第５節　数値計算例　79
第１項　ダム崩壊問題　79
第２項　液滴振動問題　83
第３項　電磁気力による溶融金属表面制御　89
第４項　微小領域における熱流動問題　93
第６節　結言　98
第４章　壁面における摩擦･浸透を考慮した流動問題　99
第１節　緒言　99
第２節　浸透・摩擦に関するモデル　99
第３節　数値計算アルゴリズム　104
第４節　数値計算例　106
第５節　結言　115
第５章　多孔質媒体に接する流れの数値解析モデル　116
第１節　緒言　116
第２節　数学モデル　117
第３節　数値計算アルゴリズム　121
第１項　多孔質媒体境界にディリクレ境界条件が課された場合のアルゴリズム　122
第２項　多孔質媒体境界にノイマン境界条件が課された場合のアルゴリズム　122
第４節　計算結果　125

第１項　ディリクレ境界条件の場合　126
第２項　ノイマン境界条件の場合　129
第５節　結言　131
第６章　浸透･自由表面を考慮した流動計算　132
第１節　緒言　132
第２節　数学モデル　133
第３節　移流項に関する高精度スキーム　135
第４節　数値計算アルゴリズム　140
第５節　計算結果　142
第６節　結言　148
第７章　総括　149
謝辞　152
参考文献　153

第1章 緒論

J. von Neumannが非線形偏微分方程式を解くための計算機を提案して半世紀、ベクトル型のスーパーコンピュータが世に現れて四半世紀たとうとしている現在、並列計算機が実用に近い形で運用されており、近い将来には計算機の処理速度は間違いなくTFLOPS（Tera Floating Point Operation Per Second）の域に到達するであろう。こういった計算機の進歩、言い換えれば計算処理能力の向上はそれまでは困難であった計算を可能にし、あらゆる分野に多大な効果をもたらした。

国内の自動車産業、鉄鋼製造業、建設・建築業界等のハードメーカーにおいては、実機あるいは模型による実験の代替え手段として計算機シミュレーションが有効に利用されている。1940年代にアメリカ ボーイング社のエンジニアが有限要素法を考案し航空機の翼の計算を行って以来、有限要素法を用いた数値計算による構造解析は産業界においては必須の技術となっている。また、差分法／有限要素法を用いた流体の計算は天文学、気象予測の面でも多大な効果をあげている。一方、物理学や工学の分野では理論解が特定の場合を除いて存在しない非線形偏微分方程式の解を数値的に求めるといったことがなされている。

これらコンピュータを利用した研究の根底には現象を如何に数式化するか、そして数式化された現象を如何に数値計算モデルとし、離散化して解くかが重要なポイントとして存在する。その中でも特に、自由境界を含む現象に関しては自由境界を考慮するための手法と離散化手法の選択は、対象とする現象の計算精度に大きな影響を与える。

著者の属する鉄鋼業における鉄の製造プロセスにおいては伝熱場・流動場に関する様々な自由境界問題が存在するが、製品の品質や生産性の向上・設備改造にはこの自由境界問題の解明が非常に重要となる。例えば、溶鉱炉から銑鉄を抽出する際には、溶鉱炉中の銑鉄とスラグの界面位置の時間変化の予測がトラブル回避と生産性向上に重要となる。また、連続鋳造設備においては、溶鋼の自由表面における流速と凝固過程の予測が品質向上に対して重要な意味を持つ。その他、様々な自由境界問題が鉄鋼製造プロセスには存在するが、鉄鋼製造プロセスにおける生産性の向上，設備改造のための数値計算は、現象の解明に止まらず、設備操業条件の決定，設備仕様の決定のために利用されるという側面を有する。そのため、短期間に数多くの精度の良い計算が要求されるのが実状である。

従来の伝熱場・流動場の問題に対する計算は、一般的に偏微分方程式で記述される現象を表すための数学モデルを有限要素法（Finite Element Method），境界要素法（Boundary Element Method），有限差分法（Finite Difference Method）の離散化手法を用い直接離散化し、その離散化されたモデルに対するアルゴリズムを構成し実行するのが一般的である。

自由境界を含む問題に関しても同様のアプローチがとられ、自由境界を考慮するための手法を併用することにより数値計算されている。

自由境界を考慮するための手法としては二つに大別できる。
一つは、自由境界の移動・変形に計算格子を追従させる方法で、Lagrange 法や ALE（Arbiterary Lagrangian Eulerian）法がある。もう一つは固定された格子の中で自由境界を識別し計算を行う方法で、高さ関数法や流体の自由表面解析で用いられる MAC(Marker and Cell)法，VOF(Volume of Fluid)法がある。
これら二つの方法は、自由境界の予想される変形度合や計算効率を鑑み選択されるが、それぞれに一長一短ある。

自由境界に計算格子を適合させる方法では、自由境界の形状近似や境界条件の近似精度は優れているが、反面、計算格子の再構築が必要であり計算処理が煩雑になること、自由境界の変形が大きな場合には計算が不安定になるという欠点がある。図 1.1 にレイリー・テイラー不安定現象の Lagrange 法による計算例を示す。図 1.1 の最終状態では計算格子が大きくゆがんでいる様子が良くわかる。

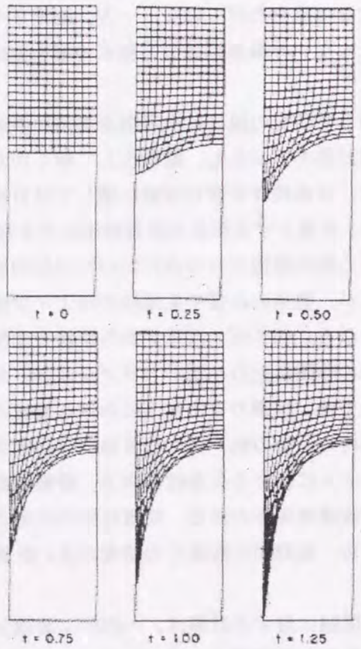
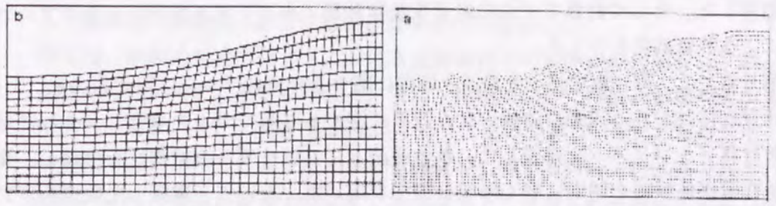


図 1.1　レイリー・テイラー不安定現象の計算例

また、固定された計算格子で自由境界を考慮する場合には、一般的には有限差分法が離散化手法として用いられるため、計算効率（計算時間、使用メモリ量、使用ディスク量）の点では移動格子を用いた計算に比べると優れているが、自由境界の形状近似，自由境界での境界条件近似の点では移動格子を用いた計算よりも劣る。図 1.2 には液体のスロッシングを ALE と MAC 法で計算した例を示すが、MAC 法による計算では自由境界の形状が乱れているのが良くわかる。



ALE 法による計算例　　MAC 法による計算例

図 1.2　スロッシング計算例

本研究の狙いは、伝熱場と流動場に現れる自由境界問題の数学モデルに対して、補助領域法を適用することにより得られる計算モデルに関して離散化を行い、その離散化モデルに対するアルゴリズムを構成することで、効率的かつ精度の良い自由境界問題の計算手法を確立することにある。
補助領域法を用いた計算モデルでは、対象領域を矩形あるいは長方形領域の一部として、特性関数を用い考慮することが可能なため、固定直行格子を用いた効率的計算が可能となる。本研究では、対象領域内での解の精度と、補助領域法を適用することによって利用できる積分ペナルティ法の精度向上のための離散化特性関数の考察と、離散化されたモデルに関してのアルゴリズムの構成を行った。そして、導出した離散特性関数とアルゴリズムを用い、実際に計算を行いその有効性の確認を行った。

本論文は先ず第 2 章において、斉次 Dirichlet 境界条件が課される自由境界値問題に対する固定格子を用いた数値解法を構築することを目的に、自由境界において斉次 Dirichlet 境界条件が課される典型的自由境界値問題であるステファン問題の数学モデルに対して補助領域法を用いた計算モデルを構築し、離散化を行う上で重要となる離散特性関数の構成を行った。そして、構成した離散特性関数の精度確認を一次元常微分方程式での積分ペナルティ法の近似精度により確認した。さらに、構築したステファン問題の計算モデルを解くための具体的アルゴリズムを提案し実際に差分法を用いステファン問題を計算した。

第 3 章においては、非斉次 Neumann 境界条件が課される場合の固定格子による数値解法を構築することを目的に、先ず流動場における自由境界値問題である自由表面（移動表面）問題に対して、補助領域法を適用した計算モデルを構築した。次に Neumann 境界条件が課される場合の離散特性関数を構成し、一次元常微分方程式での積分ペナルティ法の近似精度でその有効性を示した。そして、実際に流体の自由表面問題を解き良

い精度で計算できることを示した。また、本方法を適用した実際の鉄鋼製造プロセスにおける流動計算の具体的な計算例を幾つか示した。

第４章では、第３章で示した非斉次 Neumann 境界条件の近似の応用として、笹本・河原田の Friction Type の境界条件を流動場における壁面の浸透・摩擦の計算モデルとして適用した。そして計算モデルに対する数値計算アルゴリズムを示し、そのアルゴリズムによる計算結果を示した。

第５章では、第４章で述べた浸透・摩擦に関する計算モデルを応用することによって、多孔質媒体における流動を連成させた流動に関する計算モデルを考察し、それに対する数値計算アルゴリズムを構築した。数値解法としてはモデルの拡張性を考慮し、流動層と多孔質媒体領域を個別に解く領域分割法を用いた。そいて、構築した数値計算アルゴリズムは対象とする領域、特に多孔質媒体の境界条件によって、 Dirichlet 境界条件が課される場合と Neumann 境界条件が課される場合とで異なるアルゴリズムが必要であることを示した。

第６章においては、多相流に関する数学モデルとして、空気と液体さらに浸透流を考慮した数学モデルに対して、空気と液体そして流体と多孔質媒体との境界では、4,5 章で示した Friction Type の境界条件を用いモデル化した。また、多相流体の計算手法として、流体の密度の違いに着目した解法を用い容易に分離二層流体を扱うことのできるモデルを構築した。さらに、本方法を精度良く解くための手段として、密度に関する移流方程式を数値拡散や数値振動を抑えてとくためのスキームに対する検討を加え、移流方程式を精度良く解くためのスキームの提案を行った。そして、提案したモデルと解法・アルゴリズムを用いて孤立波の進行の計算を行った。

第７章では以上述べた本研究から得られた結果を総括した。

第２章　溶融･凝固を考慮した伝熱計算

第１節 緒言

伝熱の問題、つまり物体の温度場がどのような温度分布となるのか、あるいは時間的に温度分布がどのように変化するのかを考えた場合、相の変化は時として精度的，現象的に非常に重要となるケースが多い。

例えば、鉄鋼の製造プロセスにおける連鋳機内での溶鋼の凝固過程は、製品の品質や材質に大きな影響を与える。また、溶接においては鉄の溶融現象が重要である。こういった、溶融･凝固現象を伴う伝熱の問題は、物体の温度分布と相が変化するところの界面を記述する自由境界に関する微分方程式系で表される。物理的には、液体が凝固する温度である境界上で定義される液体の熱流（温度勾配）についての非線形偏微分方程式である。

本章では、この自由境界における熱流を河原田らにより考案された“積分ペナルティ法”（Integrated Penalty Method）と呼ばれる手法を用いて近似し、モデル化方程式を構成する。そしてモデル化方程式に対して、差分法を用いた場合の離散モデルの構成と数値計算アルゴリズムを考案し、積分ペナルティ法の精度確認とモデル化方程式の数値シミュレーションを行う。

また、差分法により自由境界問題を解く上で重要となる、離散特性関数について、差分近似の観点より新たな離散特性関数を構成し、その精度について検討する。

まず第２節では、伝熱場における典型的な自由境界問題である“１次元１相ステファン問題”の定式化を行い、第３節において補助領域法を用いた計算モデルを構成する。第４節では構成した近似モデル化方程式の差分法を用いた数値解法について述べ、差分近似の観点より離散特性関数を導出する。そして、新たに導出した離散特性関数の精度について河原田・名取の離散特性関数による計算結果と比較する。第５節では、本論文で導出した離散特性関数と河原田・名取の離散特性関数を用い、１次元１相ステファン問題の計算モデルを実際に計算した場合の精度等について触れる。そして、第６節で２次元２相ステファン問題の例を示す。同時に、２次元の場合の離散特性関数の精度についても河原田・名取の離散特性関数と比較する。

第７節では３次元の場合の離散特性関数の精度について述べる。

第２節　１次元１相ステファン問題に対する数学モデル

熱伝導計算における典型的な自由境界値問題のひとつである、ステファン問題を考える。

ステファン問題とは、例えば池に張った氷が日射などにより溶融していく過程において、氷と水の界面及び水の温度分布を求める問題をいう。すなわち、水

の温度分布を時間とともに位置が変化する自由境界（水と氷の界面）の基に計算するという、自由境界値問題である。

【１次元１相ステファン問題】

今、水の深さをxで表す。水の深さが

$$x = b\ (>0) \tag{2.1}$$

のとき、時刻$t=0$にとる、t時間後における水の温度分布を$\theta = \theta(x,t)$,
界面の位置を$x = s(t)$で表せば、θは領域
$\Omega_w(t) = \{x\ ;\ 0 < x < s(t)\ ,\ 0 < t < T\}$で熱伝導方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

を満たす。

水の初期条件を

$$\theta(x,0) = \varphi(x)\ (\geq 0) \quad (0 \leq x \leq b) \tag{2.3}$$

とする。また、境界条件としては水の表面温度が$f(t)$の場合には

$$\theta(0,t) = f(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T) \tag{2.4}$$

空気側から$g(t)$の熱流がある場合には

$$-k_0\theta_x(0,t) = g(t) \quad (0 \leq t \leq T) \tag{2.5}$$

が成り立つ。ここでk_0は水の熱伝導率である。

水と氷の界面$x = s(t)$上では、水の温度は０℃より

$$\theta(s(t),t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \tag{2.6}$$

である。

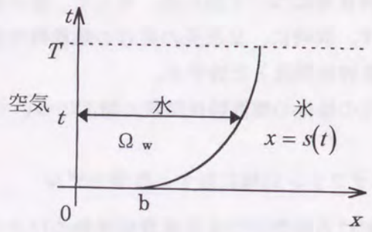


図 2.1 １次元１相ステファン問題

一方、氷が溶解するには単位容量あたりにLなる潜熱が必要である。これは単位時間当たりに$-k_0\dfrac{\partial\theta(s(t),t)}{\partial x}$なる熱流によって供給される。

つまり、dt時間にdsの量の氷が解けたとすると、次の熱平衡条件：

$$L \cdot ds = -k_0 \frac{\partial \theta(s(t),t)}{\partial x} \cdot dt \tag{2.7}$$

が成り立つ。$\dfrac{k_0}{L} = 1$に規準化して、変形すれば、次のステファン条件：

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial \theta(s(t),t)}{\partial x} \quad (t > 0) \tag{2.8}$$

となる。

以上の(2.2)から(2.8)を満たす$\theta = \theta(x,t)$と$x = s(t)$を求めることを１次元１相ステファン問題という。

第３節　１次元１相ステファン問題の補助領域法による計算モデル

ステファン問題を数値的に解く場合には、自由境界におけるステファン条件の近似が計算精度に対して非常に重要となる。すなわち自由境界においてDirichlet境界条件が課された場合の境界における法線方向微分の計算が重要なポイントとなる。本節では、自由境界における境界条件として斉次Dirichlet境界条件、具体的には自由境界上において値が０の場合に、自由境界上で法線方向微分を容易に求めることができる積分ペナルティ型補助領域法について述べる。

前節で述べたステファン問題(2.2)から(2.8)までの問題において、$x = s(t)$が既知の関数として与えられるとする。つまりステファン条件を考慮しない次の熱伝導問題を考える。

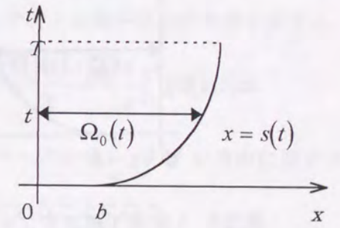


図 2.2　１次元伝熱問題

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\quad(\Omega_T) \tag{2.9}$$

$$\theta(0,t)=-f(t)\quad(0<t<T) \tag{2.10}$$

$$\theta(s(t),t)=0\quad(0<t<T) \tag{2.11}$$

$$\theta(x,0)=\varphi(x)\quad(0<t<T) \tag{2.12}$$

ここで$s(t)$は滑らかで、ある正定数lに対して$0<s(t)<l$ とする。

今、(2.9)～(2.12)の問題に対して、河原田により提案された積分ペナルティ型の補助領域法を適用する。

河原田の方法によれば、元の問題が定義される領域の近傍に補助的に領域を付加して、そこで特異摂動を施した方程式を考慮する。

つまりΩ_Tを含む領域

$$B(t)=\{x;\ 0<x<l,0<t<T\}$$

を設定し(2.9)～(2.12)の問題をBにおいて次の問題として考える。

$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta^\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon(x,t)\theta^\varepsilon\quad(in\ B) \tag{2.13}$$

$$\theta^\varepsilon(0,t)=-f(t)\quad(0<t<T) \tag{2.14}$$

$$\theta^\varepsilon(l,t)=0\quad(0<t<T) \tag{2.15}$$

$$\theta^\varepsilon(x,0)=\tilde{\varphi}(x)\quad(0<t<T) \tag{2.16}$$

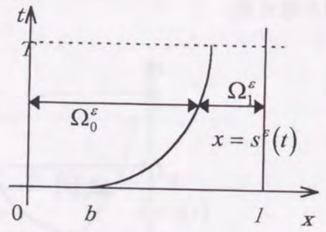


図 2.3　1次元1相ステファン問題

ここで、εは十分小さい正数で、$\tilde{\varphi}(x)$は区間 *(0, b)*では$\varphi(x)$で区間 *(b, l)*では *0* をとる関数を意味する。また

$$\chi^\varepsilon=\begin{cases}0 & \left(in\ \Omega_0^\varepsilon(t)=\{x;0<x<s(t),0<t<T\}\right)\\ 1 & \left(in\ \Omega_1^\varepsilon(t)=\{x;s(t)\le x\le l,0<t<T\}\right)\end{cases} \tag{2.17}$$

である。そして$\frac{1}{\varepsilon}\chi\theta$はペナルティ項である。

ここで、$x=s(t)$をステファン問題の自由境界と考えステファン条件が成立しているとし、(2.9)をΩ_T上で積分する。

$$0=\int_0^t\int_0^{s(t)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi}\right)d\xi d\tau$$

$$=\int_0^t\int_0^{s(t)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)d\xi d\tau-\int_0^t\left(\left[\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right]_{\xi=0}^{\xi=s(t)}\right)d\tau$$

$$=I_1-I_2$$

(2.11)(2.12)より　$I_1=\int_0^{s(t)}\theta(\xi,t)d\xi-\int_0^b\varphi_0(\xi)d\xi$

(2.10)より　$I_2=-s(t)+b+\int_0^t f(\tau)d\tau$

従って、

$$s(t)=b+\int_0^b\varphi_0(x)dx+\int_0^t f(\tau)d\tau-\int_0^{s(t)}\theta(x,t)dx \tag{2.18}$$

を得る。また$\theta(x,t)$は$B\ \overline{\Omega}_T$上では十分小さいため(2.17)を

$$s(t)=b+\int_0^b\varphi_0(x)dx+\int_0^t f(\tau)d\tau-\int_0^l\theta(x,t)dx \tag{2.19}$$

と近似する。(2.19)式の両辺を時間 t で微分して、(2.13)式を代入すれば、(2.14)(2.15)によって

$$\frac{ds}{dt}=\int_0^l\left(\frac{1}{\varepsilon}\chi\theta(x,t)\right)dx \tag{2.20}$$

を得る。(2.20)を用いステファン条件(2.8)式を書き直すと

$$-\frac{\partial\theta(s(t),t)}{\partial x}\fallingdotseq\frac{1}{\varepsilon}\int_0^l\chi\theta(x,t)dx \tag{2.21}$$

となる。すなわち、ペナルティ項$\frac{1}{\varepsilon}\chi\theta$の x 方向に関する定積分が、自由境界 *x=s(t)*の熱流を近似していることになる。

第４節　１次元１相ステファン問題の計算モデルに対する離散化

前節において導出された計算モデルの離散化について述べる。

第１項　差分法による離散化

偏微分方程式で記述された問題を実際に計算機で解く場合には、偏微分方程式を何らかの手法により離散化を行い、離散点で数値を算出･評価する必要がある。

離散化の一般的方法には、

a) 有限要素法(Finite Element Method)b)

b) 有限差分法(Finite Difference Method)

c) 有限体積法(Finite Volume Method)

d) 境界要素法(Boundary Element Method)

があるが、ここでは離散化の手法として差分法を用いる。

今対象としている関数$\theta(x,t)$の導関数についての差分近似をTaylor展開法を用いて求める。

まず、関数$\theta(x,t)$の１階偏導関数に関して考える。

$\theta(x_{i+1},t)$をx_iについてTaylor級数に展開する。

$$\theta_{i+1,t}=\theta_{i,t}+\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}\Delta x+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}\Delta x^2+\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}\right|_{i,t}\Delta x^3+\cdots \tag{2.22}$$

$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}$について解くと、

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}\fallingdotseq\frac{\theta_{i+1,t}-\theta_{i,t}}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Delta x-O(\Delta x^2)\fallingdotseq\frac{\theta_{i+1,t}-\theta_{i,t}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{2.23}$$

となる。ゆえに、$\left.\frac{\partial\theta}{dx}\right|_{i,t}$に対する前進差分近似は

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}=\frac{\theta_{i+1,t}-\theta_{i,t}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{2.24}$$

で定義される。

同様に$\theta(x_{i-1},t)$をx_iについてTaylor展開すると、

$$\theta_{i-1,t}=\theta_{i,t}-\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}\Delta x+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}\Delta x^2-\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}\right|_{i,t}\Delta x^3+\cdots \tag{2.25}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}\fallingdotseq\frac{\theta_{i,t}-\theta_{i-1,t}}{\Delta x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Delta x-O(\Delta x^2)\fallingdotseq\frac{\theta_{i,t}-\theta_{i+1,t}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{2.26}$$

となる。よって、$\left.\frac{\partial\theta}{dx}\right|_{i,t}$に対する後退差分近似は、

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}=\frac{\theta_{i,t}-\theta_{i-1,t}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{2.27}$$

で定義される。

また、$\theta_{i+1,t}$と$\theta_{i-1,t}$に関するTaylor展開式(2.22)と(2.25)を辺々減じ、$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}$について解くと、

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}=\frac{\theta_{i+1,t}-\theta_{i-1,t}}{2\Delta x}+O(\Delta x^2) \tag{2.28}$$

となり、$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{i,t}$に対する中心差分近似が定義される。

次に２階偏導関数$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$の差分近似を求める。

$\theta_{i+1,t}$と$\theta_{i-1,t}$に関するTaylor展開式(2.22)と(2.25)を辺々加えると

$$\theta_{i+1,t}+\theta_{i-1,t}=2\theta_{i,t}+\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}\Delta x^2+\frac{1}{12}\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}\Delta x^4+O(\Delta x^5) \tag{2.29}$$

となり、$\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}$について解くと、以下の$\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}$に対する中心差分近似が得られる。

$$\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{i,t}=\frac{\theta_{i+1,t}-2\theta_{i,t}+\theta_{i-1,t}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2) \tag{2.30}$$

以上、関数$\theta(x,t)$に関して空間xの導関数に対する差分近似を求めたが、時間tに関しても同様な手順により差分近似を求めることができる。

第２項 時間積分法

一般に time dependent な問題を数値的に解く場合には、精度と安定性を考慮して時間進行法を選択しなければならない。本項では、微分方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(v) \tag{2.31}$$

に対して幾つかの時間進行法についてまとめておく。

【一般化台形公式】

式(2.31)において$a = \frac{\partial v}{\partial t}$とすれば微分方程式の一般化台形公式による時間進行法は

$$a^{n+1} = f\left(v^{n+1}\right) \tag{2.32}$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t a^{n+\alpha} \tag{2.33}$$

$$a^{n+\alpha} = (1-\alpha)a^n + \alpha a^{n+1} \tag{2.34}$$

と表すことができる。ここでαは混合パラメータで、1/2≦α≦1に対してこのスキームは安定である。

式(2.34)においてα=0のときには前進 Euler 法となり、

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = f\left(v^n\right) \tag{2.35}$$

と表される。前進 Euler 法は時間に対して１次精度の陽解法であり、一般的には不安定なスキームである。しかし、計算はすべて既知の値を用いて、代数的に処理可能なため高速に計算できる。

また　α=1/2 の場合は Crank-Nicolson 法となり、

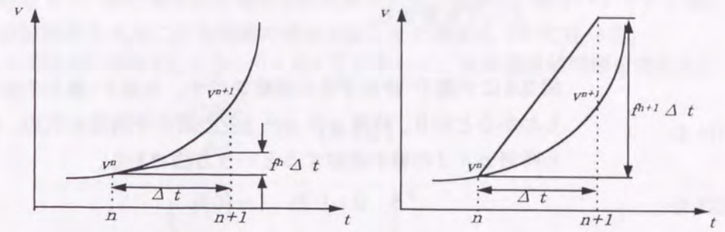
$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left\{f\left(v^n\right) + f\left(v^{n+1}\right)\right\} \tag{2.36}$$

として、α=1 のときは後退 Euler 法となり、

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = f\left(v^{n+1}\right) \tag{2.37}$$

と表される。Crank-Nicolson 法は時間に対して２次の精度、後退 Euler 法は時間に対して１次精度の陰解法であり、数値的には安定なスキームである。しかし、計算の処理は前進 Euler 法に比較して多くなる。 図 2.4 に前進 Euler 法，後退 Euler 法の概念を示す。図 2.4

より式(2.36)で$\frac{1}{2}\left\{f\left(v^n\right) + f\left(v^{n+1}\right)\right\}$を用い$v^{n+1}$を計算する Crank-Nicolson 法は精度の点で前進・後退 Euler 法より優れていることが、直感的に理解できる。



前進 Euler 法
（アンダー・シュート）

後退 Euler 法
（オーバー・シュート）

図 2.4　Euler 法

【予測子・修正子法】

後退 Euler 法，Crank-Nicolson 法は陰解法であるために、陽解法に比べると数値的には安定であるが、計算量の点で劣るという欠点がある。予測子・修正子法はこの欠点を改良した、すなわち陰的スキームを陽的に扱う方法である。その例として、

A．陽的後退 Euler 法

前進 Euler 法で予測子を

$$\frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta t} = f\left(v^n\right) \tag{2.38}$$

と計算し、この予測子を後退 Euler 法の右辺に代入する。すなわち、

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = f\left(\tilde{v}\right) \tag{2.39}$$

として計算する。

（気象学の分野ではこの方法を松野法とよんでいる）

B．陽的 Crank-Nicolson 法

前進 Euler 法で予測子を式(2.38)で近似した後、

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left\{f\left(v^n\right)+f\left(\tilde{v}\right)\right\} \tag{2.40}$$

として計算する。

図 2.5 に予測子･修正子法の概略を示す。予測子･修正子法は図 2.5 からもわかるとおり、時刻 n と $n+1$ との間の予測値を求め、その予測値から時刻 $n+1$ の値を近似するという方法である。

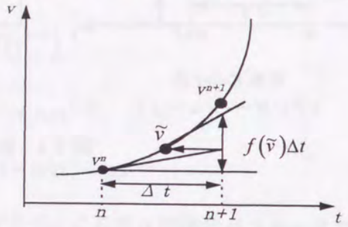


図 2.5　予測子･修正子法

【多段階法】

多段階法は予測子･修正子法を反復的に行うことによって、さらに精度を向上させる方法である。

A．k 段階反復法

この方法は計算の打ち切り誤差が $(\Delta t)^k$ のオーダーとなり、高精度の時間前進が可能である。

＜アルゴリズム＞

$$v^{(0)}=v^n$$

$$v^{(1)}=v^{(0)}+\Delta t f\left(v^{(0)}\right)$$

$$v^{(2)}=v^{(0)}+\Delta t\left\{(1-\alpha)f\left(v^{(0)}\right)+\alpha f\left(v^{(1)}\right)\right\}$$

$$\vdots$$

$$v^{(k)}=v^{(0)}+\Delta t\left\{(1-\alpha)f\left(v^{(0)}\right)+\alpha f\left(v^{(k-1)}\right)\right\}$$

$$v^{n+1}=v^{(k)}$$

第３項　離散特性関数の構成

本項では、場を示す特性関数に関する離散化を行う。自由境界問題を固定直交格子で扱う場合には、自由境界の位置を如何に識別するかが、計算精度に対して非常に重要となる。ここでは、１次元の常微分方程式の境界値問題に対して、補助領域法を適用した計算モデルを構築し、積分ペナルティ法の近似精度を尺度に特性関数の構成方法とその精度について述べる。

まず最初に領域 $\Omega_0=\{x:0<x<1\}$ において、次の境界値問題を考える。

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}=0 \quad \left(in\ \Omega_0\right) \tag{2.41}$$

$$\theta(0)=1,\ \theta(1)=0 \tag{2.42}$$

この問題は厳密解が

$$\theta_{ex}(x)=1-x \quad \left(in\ \Omega_0\right) \tag{2.43}$$

で与えられ、境界 $x=1$ での１次導関数は $\theta'(1)=-1$ で与えられる。

この問題の補助領域法に基づく計算モデルは、

$$\frac{d^2\theta^\varepsilon}{dx^2}-\frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon=0 \quad \left(in\ \Omega=\{x;0<x<2\}\right) \tag{2.44}$$

$$\theta^\varepsilon(0)=1,\ \theta^\varepsilon(2)=0 \tag{2.45}$$

となる。ここで特性関数は

$$\chi^\varepsilon=\begin{cases}0 & \left(in\ \Omega_0=\{x;0<x<1\}\right)\\ 1 & \left(in\ \Omega_1=\{x;1\le x\le 2\}\right)\end{cases} \tag{2.46}$$

と定義する。

この問題に対して、境界（$x=1$）が計算ポイント上にある場合と計算ポイント間にある場合とに分けて、数値計算精度をみる。連立一次方程式の解法には反復法の SOR 法を用い、収束誤差としては 10^{-10} とした。

ちなみに、もとの問題を $\Delta x=0.1$ として解いた場合の計算値を θ，厳密解を θ_{ex} として計算値と厳密解との誤差を以下の式で定義すると、

$$err=\sqrt{\sum\left(\theta_{ex}-\theta\right)^2} \tag{2.47}$$

$$err_0=2.165931916269930\times10^{-7}$$

となった。

A．境界が計算ポイント上にある場合

$n=20\ (\Delta x=0.1)$，$\varepsilon=10^{-8}$として計算した結果を次に示す。

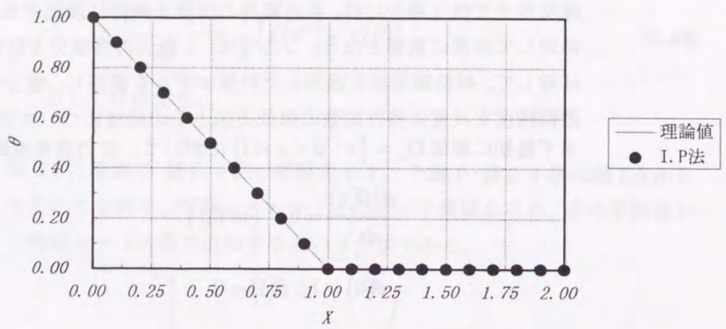


図 2.6　境界が計算ポイント上にある場合の計算結果

表 2.1 境界が計算ポイント上にある場合の計算結果

x	理論値	I. P法
0.000	1.000	1.000
0.100	0.900	0.900
0.200	0.800	0.800
0.300	0.700	0.700
0.400	0.600	0.600
0.500	0.500	0.500
0.600	0.400	0.400
0.700	0.300	0.300
0.800	0.200	0.200
0.900	0.100	0.100
1.000	0.000	0.000
1.100		0.000
1.200		0.000
1.300		0.000
1.400		0.000
1.500		0.000
1.600		0.000
1.700		0.000
1.800		0.000
1.900		0.000
2.000		0.000

この計算結果の誤差を式(2.46)で評価すると

$$err_1 = 1.806790906743199\times10^{-7}$$

となり、もとの問題をしかるべき境界条件で解いた場合と同等の精度で計算できる事がわかる。

また、積分ペナルティ法の精度としては、以下の式で

$$-\theta'(1)=\frac{1}{\varepsilon}\int\chi^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}dx=\frac{1}{\varepsilon}\Delta x\sum\theta^{\varepsilon}\chi^{\varepsilon} \tag{2.48}$$

積分を数値的に近似すると、

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1}=-0.999999749012532$$

が得られ、理論値と良く一致した値となる。

B．境界が計算格子間に存在する場合

固定格子で移動境界問題を解く場合には、境界が計算格子間（計算ポイント間）に存在する場合の計算精度が非常に重要である。

今、境界が計算ポイント i と $i+1$ の間に存在し、i から境界までの距離の Δx に対する割合を $\alpha = \dfrac{h}{\Delta x}$ (>0) とする。

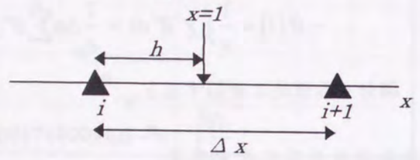


図 2.7　境界位置の定義

河原田・名取は境界が格子間にある場合には、領域を示す特性関数 χ を

$$\chi_j = \begin{cases} 1 & ,j \geq i+1 \\ (1-\alpha)/\left(1+\Delta x^2/2\varepsilon\cdot\alpha\right) & ,j=i \\ 0 & ,j \leq i-1 \end{cases} \qquad (2.49)$$

としている。$n=21$ $(\Delta x = 0.0952380952381)$, $\varepsilon = 10^{-8}$ でこの特性関数を用い計算すると、図 2.8 と表 2.2 の結果が得られる。

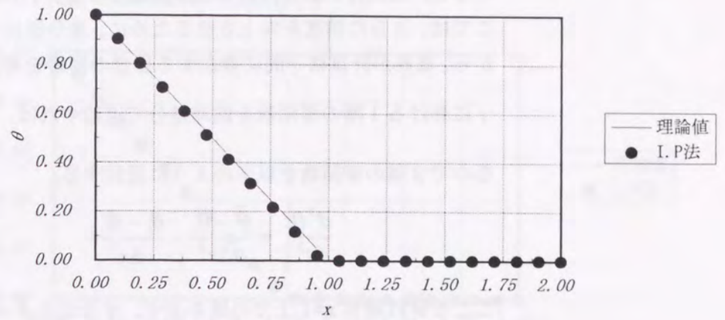


図 2.8　境界が計算ポイント間にある場合（河原田の方法）

表 2.2　境界が計算ポイント間にある場合（河原田の方法）

	理論値	I.P法
0.000	1.000	1.000
0.095	0.905	0.902
0.190	0.810	0.804
0.286	0.714	0.706
0.381	0.619	0.608
0.476	0.524	0.510
0.571	0.429	0.412
0.667	0.333	0.314
0.762	0.238	0.216
0.857	0.143	0.118
0.952	0.048	0.020
1.048		0.000
1.143		0.000
1.238		0.000
1.333		0.000
1.429		0.000
1.524		0.000
1.619		0.000
1.714		0.000
1.810		0.000
1.905		0.000
2.000		0.000

この結果を、式(2.47)で評価すると、

$$err_1 = 0.0910160001233$$

となり、式(2.48)で数値積分を行うと

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = -1.04870505675296$$

となる。精度は、場合によっては問題とならない程度と考えられる。ここでは、さらに精度を向上させるために、差分法による差分近似の観点から、境界が計算格子間に存在する場合の影響を考慮することを試みる。

iにおける1階の導関数を前進差分で近似すれば、$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_i = \frac{\tilde{\theta}-\theta_i}{\alpha\Delta x}$となるので2階の導関数を以下のように近似する。

$$\left.\frac{d^2\theta}{dx^2}\right|_i = \frac{\tilde{\theta}-\theta_i}{\alpha\Delta x^2} - \frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{2.50}$$

ここで$\tilde{\theta}$は境界x=1上での値を示す。すなわち$\tilde{\theta}=0$である。
よって式(2.50)は、

$$\left.\frac{d^2\theta}{dx^2}\right|_i = -\frac{\theta_i}{\alpha\Delta x} - \frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{\Delta x} \tag{2.51}$$

となる。
また、計算ポイントiにおける式(2.44)の差分法による離散式は次のようになる。

$$\left.\frac{d^2\theta^\varepsilon}{dx^2}\right|_i - \frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon_i = \frac{\theta^\varepsilon{}_{i+1}-2\theta^\varepsilon{}_i+\theta^\varepsilon{}_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon{}_i \tag{2.52}$$

ここで、$\theta^\varepsilon{}_{i+1} \fallingdotseq 0$であるので式(2.52)は、

$$\left.\frac{d^2\theta^\varepsilon}{dx^2}\right|_i - \frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon{}_i = \frac{-2\theta^\varepsilon{}_i+\theta^\varepsilon{}_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon{}_i \tag{2.53}$$

となる。従って、式(2.53)が式(2.51)と同じであれば、計算ポイント間に存在する境界を近似していることになる。よって、式(2.51)の右辺と式(2.53)の右辺を等価としてχについて解くと、

$$\chi = \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)/\Delta x^2 \tag{2.54}$$

を得る。ここでχが1を超える場合には$\chi=1$とする、操作が必要である。この方法を用い特性関数を定義すると、

$$\chi_j = \begin{cases} 1 & ,j \geq i+1 \\ \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)/\Delta x^2 & ,j=i \\ 0 & ,j \leq i-1 \end{cases} \tag{2.55}$$

となる。この特性関数を用い計算した結果を次に示す。

$n=21\left(\Delta x=0.0952380952381\right)$, $\varepsilon=10^{-8}$

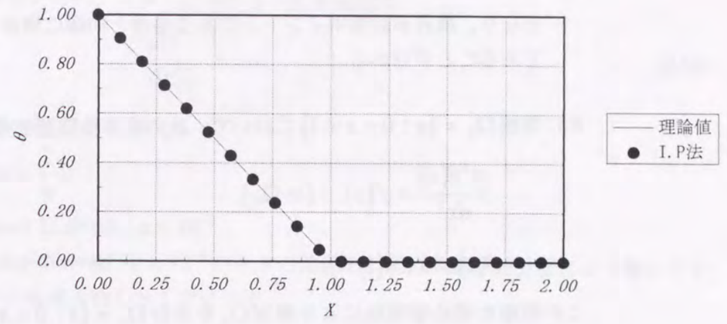


図 2.9　境界が計算ポイント間にある場合の計算結果

表 2.3　境界が計算ポイント間にある場合の計算結果

	理論値	I.P法
0.000	1.000	1.000
0.095	0.905	0.905
0.190	0.810	0.810
0.286	0.714	0.714
0.381	0.619	0.619
0.476	0.524	0.524
0.571	0.429	0.429
0.667	0.333	0.333
0.762	0.238	0.238
0.857	0.143	0.143
0.952	0.048	0.048
1.048		0.000
1.143		0.000
1.238		0.000
1.333		0.000
1.429		0.000
1.524		0.000
1.619		0.000
1.714		0.000
1.810		0.000
1.905		0.000
2.000		0.000

ここで、計算値の精度として誤差を式(2.47)で評価すると、

$$err_2 = 2.016746217177944\times10^{-7}$$

となり、また$x=1$におけるθの一次導関数の値は

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = -0.999999806121218$$

となり、境界が計算ポイント上にある場合と同様に精度良く計算可能であることが分かる。

次に領域$\Omega_0 = \{x : 0 < x < 1\}$において、次の境界値問題を考える。

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = f(x) \quad (in\ \Omega_0) \tag{2.56}$$

$$\theta(0) = 0\ ,\ \theta(1) = 0 \tag{2.57}$$

この問題を補助領域法により領域Ω_0を含む$\Omega_1 = \{x : 0 < x < 2\}$において近似すると、

$$\frac{d^2\theta^\varepsilon}{dx} - \frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon\theta^\varepsilon = -\kappa f(x) \quad (in\ \Omega_1) \tag{2.58}$$

となる。ここでεは非常に小さい正の値であり、領域を示す特性関数χ,κは次の値をとる。

$$\chi = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x \le 2) \end{cases} \tag{2.59}$$

$$\kappa = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 0.5 & (x=1) \\ 0 & (1 < x \le 2) \end{cases} \tag{2.60}$$

補助領域法は基の問題が定義される領域の周りに仮想の領域を付与し、問題を考える。従って、基の問題が定義される領域と付与される領域の境界における、$f(1)$の近似が問題となる。ここでは境界におけいては基の問題の$f(1)$と補助領域の値の平均と考える。

差分法で問題を離散化することを考えると、計算ポイント間に境界が存在する場合のκとして、iから境界までの距離のΔxに対する割合をα (>0)とすると、計算ポイントiにおけるκの近似として

$$\kappa = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 0.5(1+\alpha) & (x=1) \\ 0 & (1 < x \le 2) \end{cases} \tag{2.61}$$

とした重み平均で考慮する。

今、$f(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$とすると、基の問題の厳密解は、

$$\theta_{ex}(x) = \sin(\pi x) \tag{2.62}$$

で与えられ、$x = 1$における一次導関数は

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = -\pi \tag{2.63}$$

となる。

$\Delta x = \frac{2}{n}$として、

(case 1) $n=40$, $\varepsilon = 10^{-8}$

(case 2) $n=80$, $\varepsilon = 10^{-8}$のときの結果を、基の問題を差分法により解いたときの結果と合わせて次に示す。

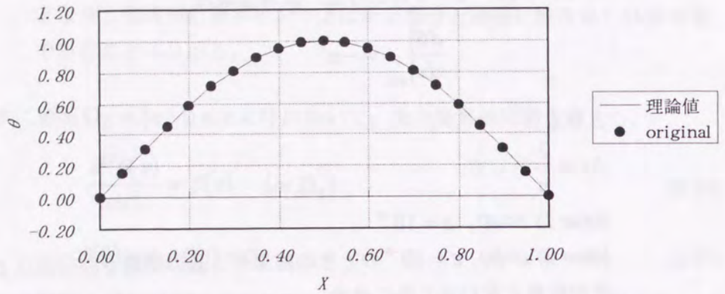


図 2.10　original Poisson problem

表 2.4　original Poisson problem

x	理論値	original
0.000	0.000	0.000
0.050	0.156	0.157
0.100	0.309	0.310
0.150	0.454	0.455
0.200	0.588	0.589
0.250	0.707	0.709
0.300	0.809	0.811
0.350	0.891	0.893
0.400	0.951	0.953
0.450	0.988	0.990
0.500	1.000	1.002
0.550	0.988	0.990
0.600	0.951	0.953
0.650	0.891	0.893
0.700	0.809	0.811
0.750	0.707	0.709
0.800	0.588	0.589
0.850	0.454	0.455
0.900	0.309	0.310
0.950	0.156	0.157
1.000	0.000	0.000

$err_0 = 0.0065099278$

ここでθ_{ex}：厳密解，θ：計算値として、$err = \sqrt{\sum(\theta_{ex} - \theta)^2}$ である。

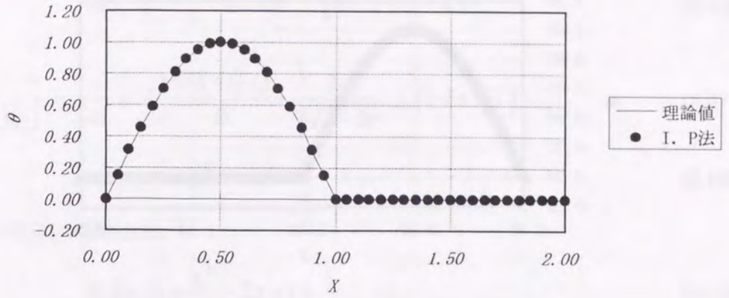


図 2.11　casa 1

表 2.5　case 1

x	理論値	I．P法
0.000	0.000	0.000
0.050	0.156	0.157
0.100	0.309	0.310
0.150	0.454	0.455
0.200	0.588	0.589
0.250	0.707	0.709
0.300	0.809	0.811
0.350	0.891	0.893
0.400	0.951	0.953
0.450	0.988	0.990
0.500	1.000	1.002
0.550	0.988	0.990
0.600	0.951	0.953
0.650	0.891	0.893
0.700	0.809	0.811
0.750	0.707	0.709
0.800	0.588	0.589
0.850	0.454	0.455
0.900	0.309	0.310
0.950	0.156	0.157
1.000	0.000	0.000

$err_1 = 0.0065111876$

$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = -3.135129523$

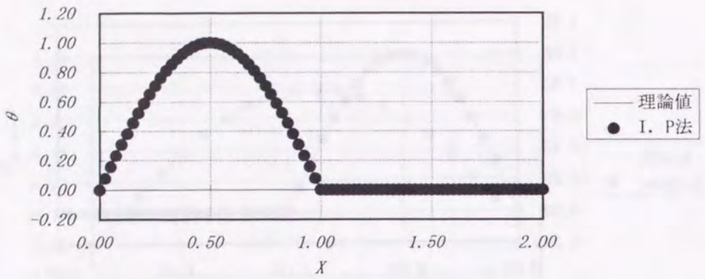


図 2.12　case 2

$$err_2 = 0.002302855$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} = -3.13997614$$

数値的な誤差は、基の問題を差分法で解いた場合と遜色ない程度であり、補助領域法による近似解法は、数値的に何の問題もないといえる。一方、境界における一次導関数の近似は、若干の誤差が見られるものの、計算ポイントを多くとる、あるいは境界近傍において計算格子を密にとる不等間隔格子を用いることによって、精度の向上は可能であるといえる。従って、必要に応じて計算格子を工夫することで、効率的かつ効果的計算が可能である。

以上、本項においては積分ペナルティ法の数値計算精度について、一次元の問題で検証を行った。その結果、差分近似の観点より導出した離散特性関すを用いることによって、非常に精度良く元の問題を近似でき、かつ自由境界における一次導関数の近似も非常に精度が良いことが分かった。

第５節　１次元１相ステファン問題に対する数値計算結果

積分ペナルティ法を併用した補助領域法の境界条件の近似精度に関しては、前項において非常に良いことを示した。本項では、この方法を用いた移動境界問題への適用について、その精度の確認を行う。

今、第３節で示した計算モデルを以下の条件で解く。

$$\theta(0,t) = t + \frac{1}{2} \quad (0 < t \le T) \tag{2.64}$$

$$\theta(s(t),t) = 0 \quad (0 < t \le T) \tag{2.65}$$

$$\theta(x,0) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} \quad \left(0 \le x \le 2-\sqrt{3}\right) \tag{2.66}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{3}\frac{\partial\theta(s(t),t)}{\partial x} + \frac{2t}{3\sqrt{3-2t}} \quad (0 < t \le T) \tag{2.67}$$

$$s(0) = 2-\sqrt{3} \tag{2.68}$$

この問題の厳密解は

$$\theta_{ex}(x,t) = \frac{x^2}{2} - 2x + t + \frac{1}{2} \tag{2.69}$$

$$s(t) = 2-\sqrt{3-2t} \tag{2.70}$$

で与えられる。

この問題を以下のアルゴリズムで解く。

【アルゴリズム】

式(2.13)の非定常項の離散化を陽的 Euler 法により行うと、

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t\left(\frac{\partial\theta^n}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon}\chi\theta^n\right) \tag{2.71}$$

となる。ここで n は計算のステップを示す。ε は非常に小さい正数であるから、式(2.71)を実際に計算する場合には Δt を非常に小さくとらなければ、不安定になってしまう。従って、式(2.71)を

$$\theta^{n+1} = \left(\theta^n + \Delta t\frac{\partial\theta^n}{\partial x^2}\right) / \left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\chi\right) \tag{2.72}$$

として扱うか、あるいは式(2.13)を陰的 Euler 法によって扱うほうが安定となる。

ここでは、θ に関しては陰的 Euler 法を用い、自由境界については陽的 Euler 法により解き、さらに精度を向上させるために、θ と s(t)を連成させた、多段階法を用いて時間進行させる

まず、式(2.67)を $\frac{ds}{dt} = f\left(\frac{\partial\theta(s(t))}{\partial x}\right)$ と記述することにする。

[step.1] 時刻 *n+1* の θ の予測値を時刻 *n* の θ の値を用い陰的に以下の式から求める。

$$\theta^{(0)} = \theta^n + \Delta t\frac{\partial^2\theta^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon}\chi\theta^{(0)} \tag{2.73}$$

[step.2] θ の予測値から、境界 *s(t)* の予測値を求める。

$$s^{(0)} = s^n + \Delta t \cdot f\left(\frac{\partial \theta^{(0)}\left(s^n\right)}{\partial x}\right) \tag{2.74}$$

[step.3] 新たに求まった境界 $s^{(0)}$のもとに、θの予測値を求める。

$$\theta^{(1)} = \theta^n + \Delta t \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon}\chi\theta^{(1)} \tag{2.75}$$

[step.4] θの予測値より境界 s(t)を以下の式により更新する。

$$s^{(1)} = s^n + \Delta t \cdot \left\{(1-\alpha) f\left(\frac{\partial \theta^{(0)}\left(s^n\right)}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial \theta^{(1)}\left(s^{(0)}\right)}{\partial x}\right)\right\} \tag{2.76}$$

ここで、αは時間積分における混合パラメータである。

[step.5] 境界 s(t)の変動量が十分に小さくなるまで、step.3 と step.4 を繰り返す。

[step.6] 最後の予測値を $\theta^{n+1} = \theta^k$, $s^{n+1} = s^k$ として、次時刻の計算(step.1)に戻る。

このアルゴリズムにより $\Delta x = \frac{1}{60}$, $\Delta t = 0.01$, $\varepsilon = 10^{-8}$ で計算した結果を河原田・名取の離散特性関数を用いた場合の結果と共に以下に示す。

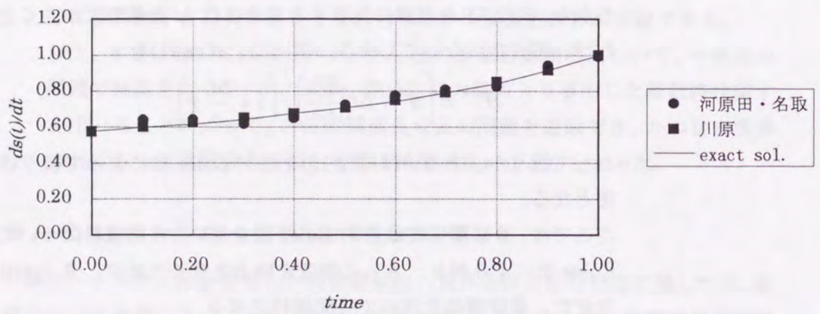


図 2.13　自由境界移動速度

表 2.6　$\frac{ds(t)}{dt}$

time	河原田・名取の方法	川原の方法	exact sol.
0.00	0.577	0.577	0.577
0.10	0.643	0.602	0.598
0.20	0.639	0.623	0.620
0.30	0.619	0.647	0.645
0.40	0.649	0.675	0.674
0.50	0.724	0.709	0.707
0.60	0.775	0.749	0.745
0.70	0.809	0.792	0.791
0.80	0.828	0.846	0.845
0.90	0.938	0.916	0.913
1.00	0.991	1.002	1.000

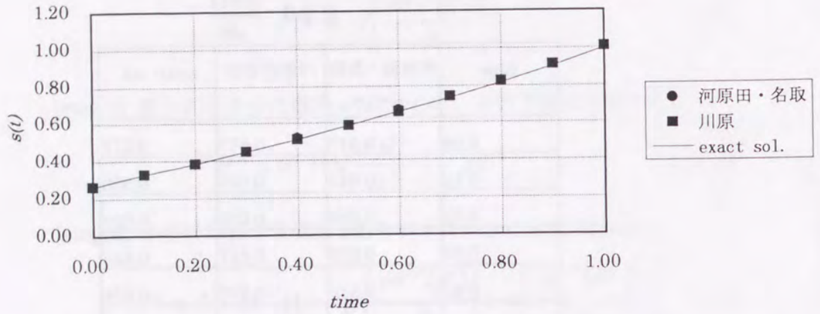


図 2.14　自由境界位置

表 2.7 $s(t)$

time	河原田・名取の方法	川原の方法	exact sol.
0.00	0.268	0.268	0.268
0.10	0.329	0.327	0.327
0.20	0.391	0.389	0.388
0.30	0.455	0.452	0.451
0.40	0.521	0.519	0.517
0.50	0.591	0.588	0.586
0.60	0.665	0.661	0.658
0.70	0.741	0.738	0.735
0.80	0.824	0.821	0.817
0.90	0.912	0.909	0.905
1.00	1.008	1.005	1.000

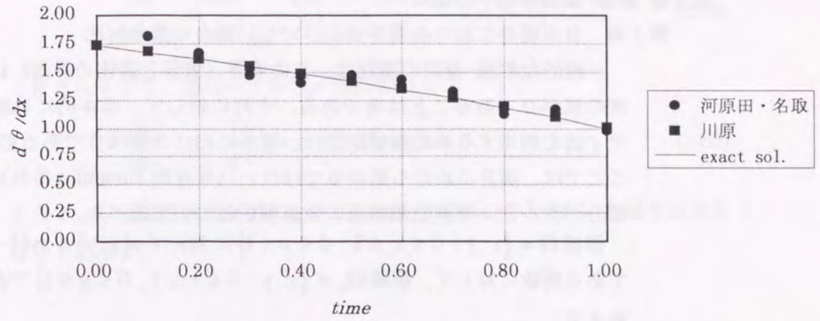


図 2.15　自由境界における熱流

表 2.8 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$

time	河原田・名取の方法	川原の方法	exact sol.
0.00	1.730	1.730	1.730
0.10	1.809	1.688	1.673
0.20	1.670	1.621	1.612
0.30	1.470	1.554	1.549
0.40	1.408	1.487	1.483
0.50	1.465	1.420	1.414
0.60	1.430	1.352	1.342
0.70	1.321	1.270	1.265
0.80	1.131	1.187	1.183
0.90	1.172	1.104	1.095
1.00	0.974	1.005	1.000

以上、図 2.13～2.15 と表 2.6～2.8 で示すとおり、本論文で提案した離散特性関数を用いることによって補助領域法による近似解法は非常に良い精度で計算できていると言える。

第６節 溶融･凝固問題への適用

第１項　自由境界における境界値が０でない場合の数値解法

一般的な溶融･凝固の問題は、自由境界（液体と固体の界面）における温度の値が０であることは希である。それに対して、基本的には積分ペナルティ法を利用する補助領域法では、境界における値は０である必要がある。ここでは、境界における値が０ではない（非斉次 Dirichlet 条件）場合の、積分ペナルティ型補助領域法の数値解法について述べる。

領域 $\Omega=\{x,y:\ 0\le x,\le 3\ ,\ 0\le y\le 1\}$ において $u(x,y)=xy(1-y)(3-x)$ である関数に対して、領域 $\Omega_0=\{x,y:\ 0\le x,\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\}$ で次の問題を考える。

$$-\Delta u=2x(3-x)+2y(1-y)\quad (in\Omega_0) \tag{2.77}$$

$$u(0,y)=0\ ,\ u(x,0)=0\ ,\ u(x,1)=0\ ,\ u(1,y)=2y(1-y) \tag{2.78}$$

ここで $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。

そして、補助領域法によりこの問題を近似する。この時、領域 $\Omega_1=\{x,y:1<x\le 3,0\le y\le 0\}$ は仮想の領域とする。*x=1* においては、値が $u(1,y)=2y(1-y)$ と既知であるため、

$$v(x,y)=2y(1-y)x \tag{2.79}$$

なる u とは独立な関数を導入し、基の問題を次のように定式化する。

$w=u-v$ とすると、（2.77）より

$$\Delta w=\Delta u-\Delta v=\Delta u+4x \tag{2.80}$$

となり

$$-\Delta u=-\Delta w+4x=2x(3-x)+2y(1-y) \tag{2.81}$$

が得られる。従って、もとの問題の解は、

$$-\Delta w=2x(3-x)+2y(1-y)-4x \tag{2.82}$$

を解いて求められた w より、$u=w+v$ の関係を用い得ることができる。

よって、補助領域法による近似は、

$$-\Delta w+\frac{1}{\varepsilon}\chi w=\kappa\{2x(3-x)+2y(1-y)-4x\} \tag{2.83}$$

となる。

また、境界 x=1 における u の一次導関数は、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1}+\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1}+2y(1-y) \tag{2.84}$$

と表されるので、積分ペナルティ法によって

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=-\frac{1}{\varepsilon}\int\chi w dx+2y(1-y) \tag{2.85}$$

となる。この問題を差分法により、$\Delta x=1/10,\varepsilon=10^{-8}$ で解いた場合の結果を以下に示す。

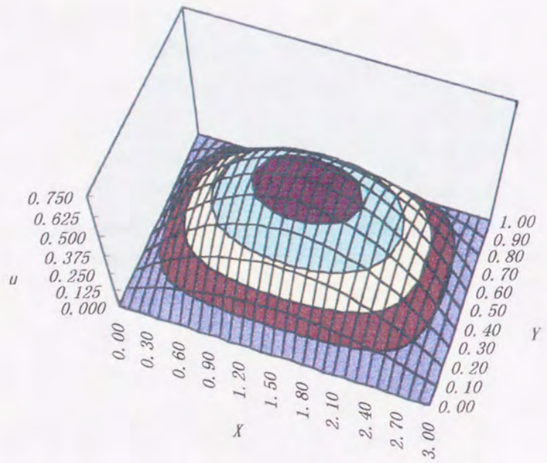


図 2.16　厳密解

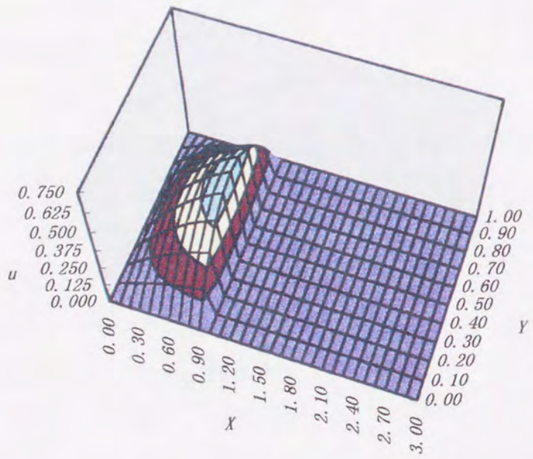


図 2.17　積分ペナルティ型補助領域法による近似解

表 2.9 $\partial u/\partial x\big|_{x=1}$

y	exact sol	I.P法
0. 00	0. 00	0. 00
0. 10	0. 09	0. 09
0. 20	0. 16	0. 16
0. 30	0. 21	0. 21
0. 40	0. 24	0. 24
0. 50	0. 25	0. 25
0. 60	0. 24	0. 24
0. 70	0. 21	0. 21
0. 80	0. 16	0. 16
0. 90	0. 09	0. 09
1. 00	0. 00	0. 00

図 2.16，2.17 及び表 2.9 より、本方法による計算は良い精度で計算が可能であることが分かる。

第２項　２次元２相ステファン問題の数学モデル

一般的に溶融あるいは凝固を伴う伝熱計算を行う場合には、液相あるいは固相のどちらかを単独で扱うことはほとんどない。
つまり、ある対象領域において、存在する液体と固体双方の伝熱場の計算を行い、その過程において、凝固線あるいは溶融線を時系列的に検討することが、一般的である。
すなわち、次のような２相の問題となる。
２次元空間にある液体と固体の温度分布をそれぞれ

$$\theta_0(x_1,x_2,t),\ \theta_1(x_1,x_2,t)$$

と書き、自由境界Γ，液体の領域Ω_0及び固体の領域Ω_1をそれぞれ

$$\Gamma(t)=\{(x_1,x_2)\ ;\ \Phi(x,t)=0\}$$
$$\Omega_0(t)=\{(x_1,x_2)\ ;\ \Phi(x,t)<0\}$$
$$\Omega_1(t)=\{(x_1,x_2)\ ;\ \Phi(x,t)>0\}$$

で表す。

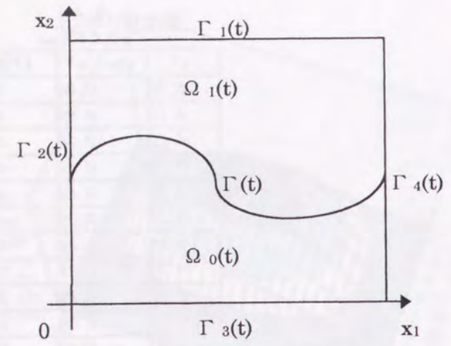


図 2.18　２次元２相ステファン問題

この時θ_iは熱方程式

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \Delta \theta_i \quad (\Omega_i) \quad (i=0,1) \tag{2.86}$$

を満たす。ここで、Δは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \tag{2.87}$$

である。

また、k_0, k_1をそれぞれ、液体の熱伝導率と固体の熱伝導率、Lを潜熱とすると、ステファン条件は、

$$L \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left\{ k_0 \nabla \theta_0 \cdot \nabla \Phi - k_1 \nabla \theta_1 \cdot \nabla \Phi \right\}\Big|_{\Phi=0} \tag{2.88}$$

となる。この時、$\Gamma : \Phi(x,t) = 0$上では自然に

$$\theta_0 = \theta_1 = \alpha \tag{2.89}$$

となる。ここで、αは液体の凝固温度である。

第３項 補助領域法に基づく２次元２相ステファン問題の計算モデル

式 (2.86)～(2.89)の問題を補助領域法により近似する。Ω_0, Ω_1の特性関数は、

$$\chi_0^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & in\ \Omega_0 \\ 1 & in\ \Omega_1 \end{cases} \tag{2.90}$$

$$\chi_1^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1 & in\ \Omega_0 \\ 0 & in\ \Omega_1 \end{cases} \tag{2.91}$$

とする。

伝熱の方程式は式(2.86)より、$\Omega = \bigcup_{0<t\le T} \left\{ \Omega_0(t) \cup \Omega_1(t) \cup \Gamma(t) \right\}$とすると、

$$\frac{\partial \theta_0^{\varepsilon}}{\partial t} = \Delta \theta_0^{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \chi_0^{\varepsilon} \theta_0^{\varepsilon} \quad (in\ \Omega) \tag{2.92}$$

$$\frac{\partial \theta_1^{\varepsilon}}{\partial t} = \Delta \theta_1^{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \chi_1^{\varepsilon} \theta_1^{\varepsilon} \quad (in\ \Omega)$$

となる。ここでステファン条件は積分ペナルティ法を用い、

$\Phi(x_1, x_2, t) = x_2 - \varphi(x_1, t) = 0$とすると、

$$L \frac{\partial \varphi(x_1,t)}{\partial t} = \left\{ k_0 \int \left(\frac{\chi_0^{\varepsilon}}{\varepsilon} \theta_0^{\varepsilon} \right)(x_1, x_2) dx_2 - k_1 \int \left(\frac{\chi_1^{\varepsilon}}{\varepsilon} \theta_1^{\varepsilon} \right)(x_1, x_2) dx_2 \right\} \tag{2.93}$$

となる。

第４項　２次元の離散特性関数の構成

１次元の場合の離散特性関数 式(1.55)を利用し次のように離散化する。

$$\chi_{i,j} = \begin{cases} 1 & , 0 \le i \le I,\ k_i + 1 \le j \le J \\ \varepsilon \left(\dfrac{1}{a_i} - 1 \right) / \Delta y^2 & , 0 \le i \le I,\ k_i = j \\ 0 & , 0 \le i \le I,\ 0 \le j \le k_i\text{-}1 \end{cases} \tag{2.94}$$

ここで、$\alpha_i = \dfrac{h_i}{\Delta y}$である。

但し、$\varphi(i\Delta x, m\Delta t) = {\varphi_i}^m$,　$k_i = \dfrac{{\varphi_i}^m - h_i}{\Delta h_i}$,　$0 < h_i \le \Delta y$である。

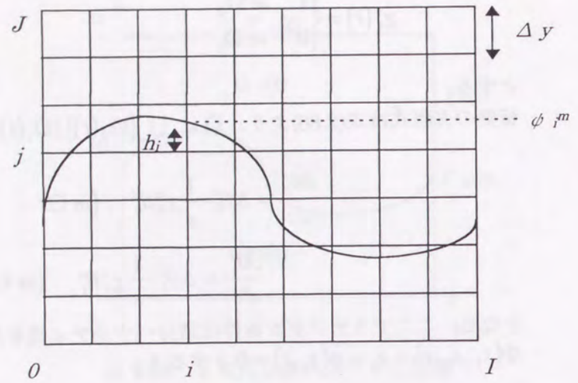


図 2.19　離散特性関数

この離散特性関数の精度を確認するために、次の Poisson 方程式に対して補助領域法に基づく計算モデルを用い、計算を行った結果を示す。

［2次元 Dirichlet 境界値問題　1］

領域 $\Omega_0=\{x,y:\ 0<x<2\ ,\ 0<y<\varphi(x)\}$ で、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$=2x(x-2)+\frac{xy\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x-2)\qquad (in\ \Omega_0)\qquad (2.95)$$
$$+2y(y-1)-\frac{y\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x-1)-\frac{y}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

と

$$u(0,y)=0\ ,\ u(2,y)=0\ ,\ u(x,0)=0\ ,\ u(x,\varphi(x))=0\qquad (2.96)$$

の問題を考える。

ここで $\varphi(x)=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1$ とする。

この問題の厳密解は、

$$u_{ex}=x(x-2)y(y-\varphi(x))\qquad (2.97)$$

$$I_{ex}=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=\varphi(x)}=\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left\{\varphi(x)\left(2(\varphi(x)-1)(x-1)\right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x-1)$$
$$\left.\left.+\frac{\pi x}{8}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x-2)\right)\right\}$$
$$+x\left\{\left(2\varphi(x)-1\right)(x-2)-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(x^2-2\right)\right\}$$
$$(2.98)$$

で与えられる。

［計算モデル　1］

数学モデル 1 に対して、領域 $\Omega=\{x,y\ ;\ 0\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le 2\}$ で補助領域法を用いると計算モデルとして、

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial y^2}-\frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon u^\varepsilon$$
$$=\kappa\left\{2x(x-2)+\frac{xy\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x-2)\qquad (in\ \Omega)\right.\qquad (2.99)$$
$$\left.+2y(y-1)-\frac{y\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x-1)-\frac{y}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}$$

$$u(0,y)=0\ ,\ u(2,y)=0\ ,\ u(x,0)=0\ ,\ u(x,2)=0\qquad (2.100)$$

が得られる。

ここで

$$\chi^\varepsilon=\begin{cases}0 & (in\ \Omega_0)\\ 1 & (in\ \Omega_1)\end{cases}\qquad (2.101)$$

$$\kappa=\begin{cases}1 & (in\ \Omega_0)\\ 0 & (in\Omega_1)\end{cases}\qquad (2.102)$$

但し、$\Omega_1=\{x,y\ ;\ 0\le x\le 2\ ,\ \varphi(x)\le y\le 2\}$ である。

積分ペナルティは

$$I=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=\varphi(x)}=\int_0^2\frac{\chi^\varepsilon}{\varepsilon}u^\varepsilon dy\qquad (2.103)$$

となる。

河原田・名取の離散特性関数を用いて解いた場合の結果と、離散特性関数として式(2.94)を用いて計算した結果を以下に示す。ここで、式(2.102)の離散化は

$$\kappa_{i,j}=\begin{cases}1 & ,\ 0\le i\le I,\ k_i+1\le j\le J\\ 0.5(1+\alpha) & ,\ 0\le i\le I,\ k_i=j\\ 0 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le k_i\text{-}1\end{cases} \tag{2.104}$$

として、河原田・名取の離散特性関数は

$$\chi_{i,j}=\begin{cases}1 & ,\ 0\le i\le I,\ k_i+1\le j\le J\\ (1-\alpha)/\left(1+\alpha\Delta y^2/4\varepsilon\right) & ,\ 0\le i\le I,\ k_i=j\\ 0 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le k_i\text{-}1\end{cases} \tag{2.105}$$

とした。そして、$\varepsilon=10^{-8}$, $\Delta x=\Delta y=0.1$ を用いた。
また、数学モデルに対する近似精度の確認のため、誤差を

$$err=\frac{\sqrt{\sum\left(u_{ex}-u\right)^2}}{\sqrt{u_{ex}^2}} \tag{2.106}$$

として評価した。

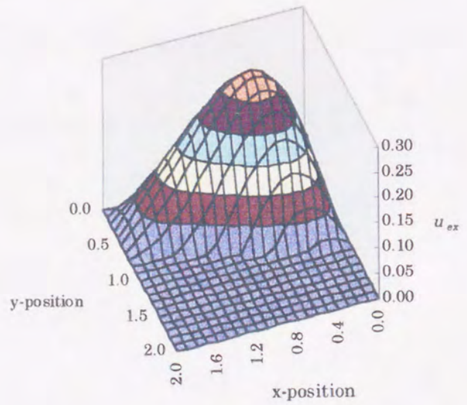
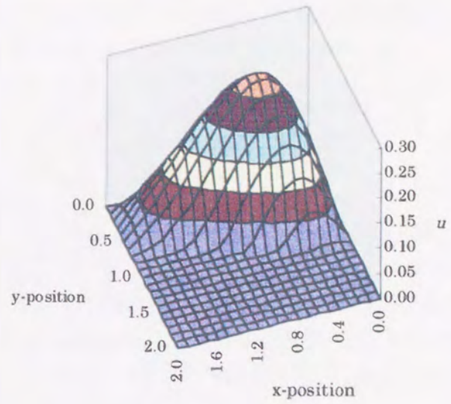
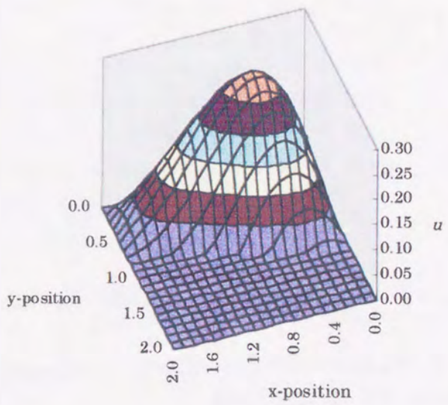


図 2.20　理論解



$$err=\frac{\sqrt{\sum\left(u_{ex}-u\right)^2}}{\sqrt{u_{ex}^2}}=0.053323$$

図 2.21　河原田・名取の離散特性関数による計算結果



$$err=\frac{\sqrt{\sum\left(u_{ex}-u\right)^2}}{\sqrt{u_{ex}^2}}=0.0022463$$

図 2.22　川原の離散特性関数による計算結果

図 20～22 より、もとの数学モデルに対する近似精度としては、本論文にて

提案した離散特性関数を用いたほうが格段に優れていることが分かる。
次に、境界$\varphi(x)$における積分ペナルティの精度についての結果を示す。

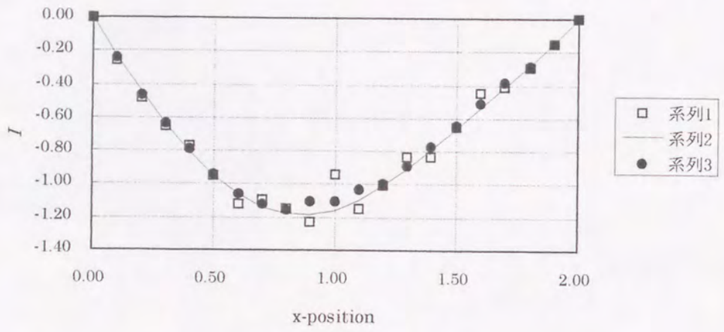


図 2.23　河原田・名取の離散特性関数を用いた場合の積分ペナルティ

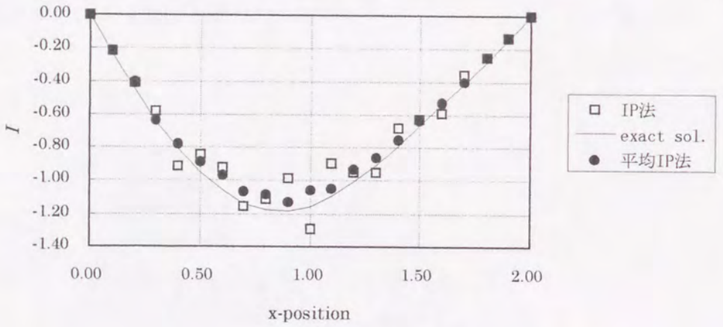


図 2.24 川原の離散特性関数を用いた場合の積分ペナルティ

図 2.23,2.24 の白抜きの四角印が式(2.103)の結果であるが、理論値の近傍で振動しているのが分かる。そこで、式(2.103)より求まる値を次のように移動平均して平滑化する。

$$\bar{I}_i = \frac{I_{i+1} + I_i + I_{i-1}}{3} \tag{2.107}$$

式(2.107)により平滑化された値が図 2.23,2.24 中の黒抜きの丸印である。図 2.23,2.24 より平滑化された積分ペナルティの値は理論値に非常に近い値を示しているのが分かる。この積分ペナルティの挙動と平滑化処理の効果は、条件を変えた場合に対しても同様であることより、何らかの数学的根拠が存

在すると考えられるが、本論文ではこれ以上は触れない。
理論値と平均積分ペナルティの誤差を

$$err_0 = \frac{\sqrt{\sum \left(I_{ex} - \bar{I}\right)^2}}{\sqrt{I_{ex}{}^2}} \tag{2.108}$$

で定義し評価すると、

河原田・名取の離散特性関数による誤差　　$err_0 = 0.053495$

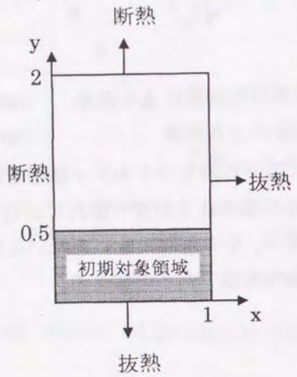
川原の離散特性関数による誤差　　$err_0 = 0.072856$

となり、２次元の問題に関する積分ペナルティ法の近似精度は、河原田・名取の離散特性関数による結果のほうが若干優れているものの、元の問題の近似精度の違いに比べた場合、その差は大きいとはいえない。従って、本論文で提案した離散特性関数は有効であると言える。

第５項 数値計算結果

まず、図 2.25 の条件で計算した２次元１相凝固問題の結果を図 2.26 示す。

２次元１相のステファン問題の計算モデルは、式(2.92)において、固体の熱伝導率 k_1 を０とおくことで容易に得られる。



物性

熱伝導率	λ=1.0
比熱	Cp=1.0
密度	ρ=1.0
凝固潜熱	L=1.0
抜熱条件	熱伝達
熱伝達率	α=1.0
外気温度	Tout=-20.0

図 2.25 計算条件

図 2.26 では凝固界面の時間的な変化を表している。

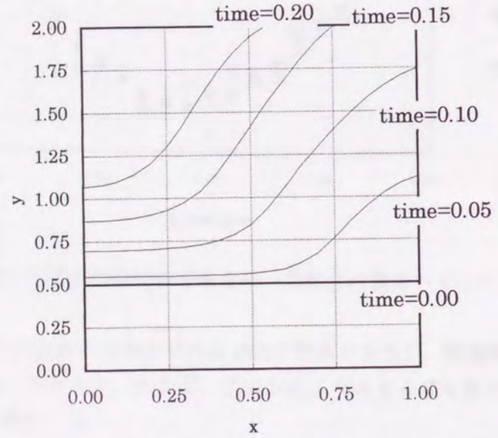
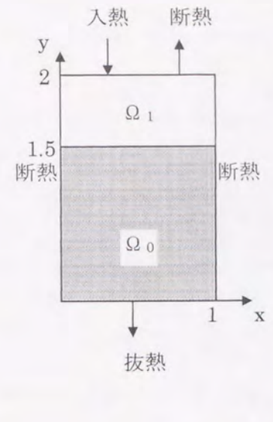


図 2.26　計算結果（凝固界面）

次に図 2.27 の条件で計算した２次元２相凝固問題の結果を図 2.28 に示す。



物性　（Ω 0=Ω 1）

熱伝導率	λ=1.0
比熱	Cp=1.0
密度	ρ=1.0
凝固潜熱	L=1.0
抜熱条件	熱伝達
熱伝達率	α=1.0
外気温度	Tout=-20.0
入熱条件	熱流束
熱流束	q=100.0

図 2.27　計算条件

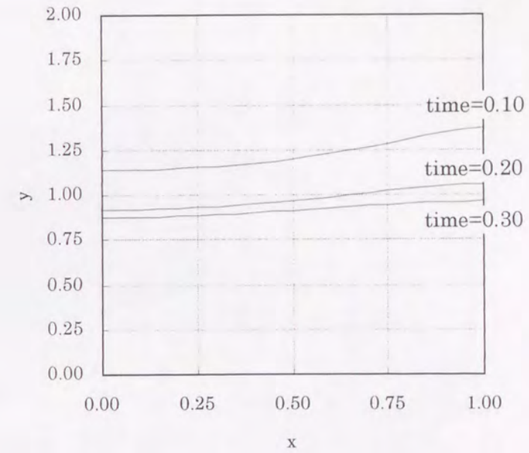


図 2.28　計算結果（凝固界面…二相問題）

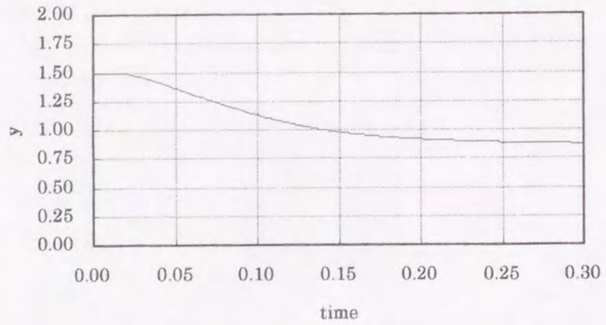


図 2.29　x=0 における自由境界の時間変化

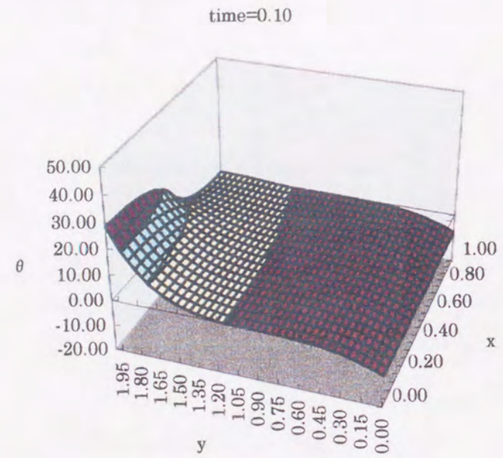


図 2.30　温度分布（time=0.10）

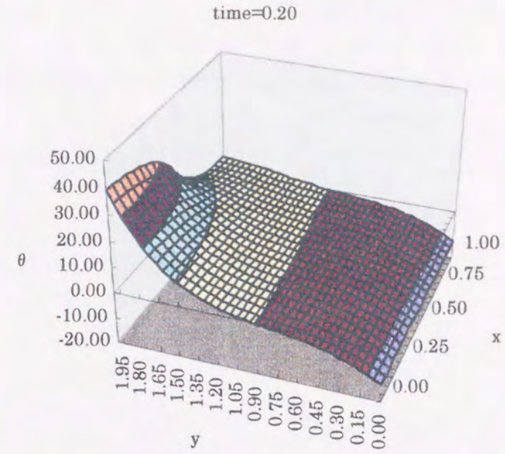


図 2.31　温度分布（time=0.20）

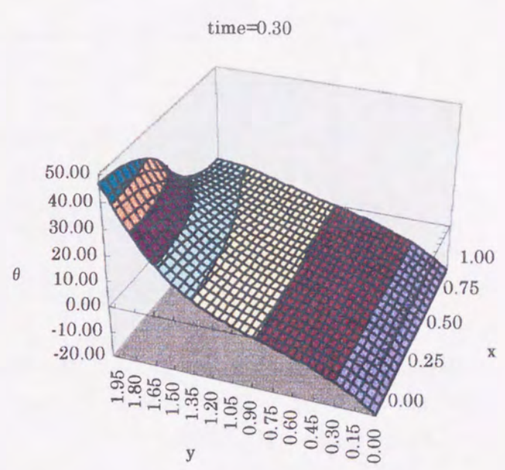


図 2.32　温度分布（time=0.30）

第７節　３次元離散特性関数

本論文で提案する離散特性関数の精度を３次元の問題で検証する。３次元の離散特性関数としては、１、２次元の場合の離散特性関数 式(1.55)を利用し次のように離散化する。

$$\chi_{i,j,k}=\begin{cases}1 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ l_{i,j}+1\le k\le K\\ \varepsilon\left(\dfrac{1}{a_{i,j}}-1\right)/\Delta z^2 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ l_{i,j}=k\\ 0 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,0\le k\le l_{i,j}\text{-}1\end{cases} \tag{2.109}$$

ここで、$\alpha_{i,j}=\dfrac{h_{i,j}}{\Delta z}$である。

但し、$\varphi(i\Delta x,j\Delta y)=\varphi_{i,j}$，$l_{i,j}=\dfrac{\varphi_{i,j}-h_{i,j}}{\Delta h_{i,j}}$，$0<h_{i,j}\le\Delta z$である。

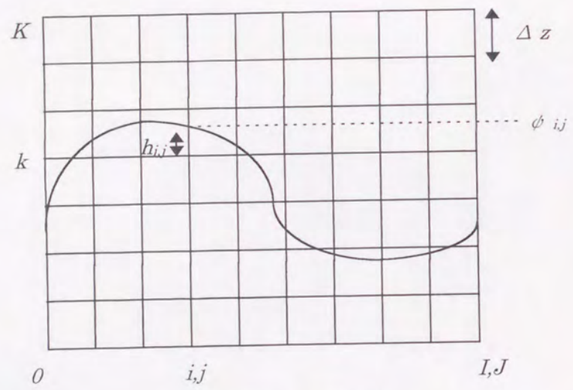


図 2.19　離散特性関数

この離散特性関数の精度を確認するために、次の Poisson 方程式に対して補助領域法に基づく計算モデルを用い、計算を行った結果を示す。

［3 次元 Dirichlet 境界値問題］

領域$\Omega_0=\{x,y,z:\ 0<x<2,\ 0<y<2,\ 0<z<\varphi(x,y)\}$で、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)\qquad (in\ \Omega_0) \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=&2z^2\{x(x-2)+y(y-2)\}+2x(x-2)y(y-2)\\&-y(y-2)z\left\{2\varphi(x,y)+4(x-1)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+x(x-2)\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}\right\}\\&-x(x-2)z\left\{2\varphi(x,y)+4(y-1)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}+y(y-2)\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}\right\}\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{cases}u(0,y,z)=0\\u(2,y,z)=0\\u(x,0,z)=0\\u(x,2,z)=0\\u(x,y,0)=0\\u(x,y,\varphi(x))=0\end{cases} \tag{2.112}$$

の問題を考える。

ここで$\varphi(x,y)=\dfrac{1}{5}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi y}{4}\right)+1$とする。

この問題の厳密解は、

$$u_{ex}=x(x-2)y(y-2)z(z-\varphi(x,y)) \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}I_{ex}&=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\varphi(x,y)}\\&=x(x-2)y(y-2)\varphi(x,y)\left\{\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)^2+1\right\}\end{aligned} \tag{2.114}$$

で与えられる。

［計算モデル］

数学モデルに対して、

領域$\Omega=\{x,y,z;\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 2\}$で補助領域法を用いると計算モデルとして、

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial z^2}-\frac{1}{\varepsilon}\chi^\varepsilon u^\varepsilon=\kappa^\varepsilon f(x,y,z)\qquad (in\ \Omega) \tag{2.115}$$

$$\begin{cases} u(0,y,z)=0 \\ u(2,y,z)=0 \\ u(x,0,z)=0 \\ u(x,2,z)=0 \\ u(x,y,0)=0 \\ u(x,y,2)=0 \end{cases} \tag{2.116}$$

が得られる。

ここで

$$\chi^{\varepsilon}=\begin{cases} 0 & (in\ \Omega_0) \\ 1 & (in\ \Omega_1) \end{cases} \tag{2.117}$$

$$\kappa=\begin{cases} 1 & (in\ \Omega_0) \\ 0 & (in\Omega_1) \end{cases} \tag{2.118}$$

但し、$\Omega_1=\{x,y;\ 0\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le 2\ ,\ \varphi(x,y)\le z\le 2\}$である。

積分ペナルティは

$$I=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\varphi(x,y)}=\int_0^2\frac{\chi^{\varepsilon}}{\varepsilon}u^{\varepsilon}dz \tag{2.119}$$

となる。

河原田・名取の離散特性関数を用いて解いた場合の結果と、離散特性関数として式(2.109)を用いて計算した結果を以下に示す。ここで、式(2.118)の離散化は

$$\kappa_{i,j,k}=\begin{cases} 1 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ l_{i,j}+1\le k\le K \\ 0.5(1+\alpha) & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ l_{i,j}=k \\ 0 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ 0\le k\le l_{i,j}\text{-}1 \end{cases} \tag{2.120}$$

として、河原田・名取の離散特性関数は

$$\chi_{i,j,k}=\begin{cases} 1 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ l_{i,j}+1\le k\le K \\ (1-\alpha)/(1+\alpha\Delta y^2/6\varepsilon) & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ l_{i,j}=k \\ 0 & ,\ 0\le i\le I,\ 0\le j\le J,\ 0\le k\le l_{i,j}\text{-}1 \end{cases} \tag{2.121}$$

とした。そして、$\varepsilon=10^{-8}$, $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0.1$を用いた。

また、積分ペナルティ法の平滑化は、

$$\bar{I}=\frac{I_{i-1,j-1}+I_{i-1,j}+I_{i-1,j+1}+I_{i,j-1}+I_{i,j}+I_{i,j+1}+I_{i+1,j-1}+I_{i+1,j}+I_{i+1,j+1}}{9} \tag{2.122}$$

とした。

もとの問題と計算モデルの近似精度を確認するためのノルムとして、

$$err_1=\frac{\sqrt{\sum(u_{ex}-u)^2}}{\sqrt{u_{ex}{}^2}} \tag{2.123}$$

また、積分ペナルティの精度を確認するためのノルムとして、

$$err_2=\frac{\sqrt{\sum(I_{ex}-\bar{I})^2}}{\sqrt{I_{ex}{}^2}} \tag{2.124}$$

を用いて評価したところ、

・河原田・名取の離散特性関数

$err_1=0.0439167$

$err_2=0.0231228$

・川原の離散特性関数

$err_1=0.0012508$

$err_2=0.0666381$

となり、本論文で提案する離散特性関数による結果は、河原田・名取の離散特性関数を用いた場合の計算結果に比較すると、積分ペナルティ法の精度は若干劣るものの、もとの問題に対する近似精度は格段に良くなると言える。

もとの問題に対する近似精度と自由境界におけるフラックスの近似精度のどちらが重要であるかは一概には言えないが、精度悪化の程度と向上の程度で判断すれば、本論文で提案する離散特性関数は非常に有効であるといえる。

第8節 結言

本章においては、まず１次元１相ステファン問題の数学モデルに対する補助領域法に基づく計算モデルを離散化するにあたり、補助領域法の特徴であるところの場を示す特性関数の離散化を差分近似の観点より行った。そして、本論文で構成した離散特性関数と過去に河原田・名取により提案された離散特性関数を用いた場合の計算精度に関して、１次元常微分方程式を用い比較した。その結果、本論文で提案する離散特性関数による計算は河原田・名取の離散特性関数を用いた計算に対して、数学モデルの近似精度，積分ペナルティの精度ともに格段に向上することが数値実験により確認された。
そして、本離散特性関数を用い１次元１相ステファン問題を解いたところ、非常に良い精度で計算できることを確認した。

次に、２次元２相ステファン問題の数学モデルに対する、補助領域法を用いた計算モデルに対しても同様に、離散特性関数の構成を行った。
精度検証のために、２次元の Poisson 方程式に対する計算モデルで数値実験を行った。その結果、数学モデルの近似については、１次元の場合と同様に、河原田・名取の離散特性関数を用いた計算よりも良い精度で計算できることを確認した。一方、積分ペナルティの近似精度に関しては、本論文で提案する離散特性関数，河原田・名取の離散特性関数ともに、理論値に比較して誤差があるものの、平滑化処理を施すことにより、その精度を格段に向上させることができることを確認した。
また以上の知見をもとに、実際に工業的な問題を扱うために、自由境界において値が０でない場合の計算手法を示した。

本論文で示した方法・知見は、Dirichlet 境界条件が課される自由境界問題、例えば伝熱場において現れる自由境界問題、に対する計算手法として非常に有効であると考えられる。

第３章　自由表面を考慮した流動計算

第１節 緒言

我々のよく目にする流動現象は、特定の場合を除き液体が自由に振る舞うことができる自由表面を含んでいる。例えば、浴槽のお湯を栓を抜いて流す場合の、お湯の流動はまさに流動場における自由表面問題である。
また、葉の上にできる水滴もある種、流動場における自由表面問題といえる。
これら流動場における自由表面問題に対する数値計算では、自由表面上において課される境界条件、具体的には流体の応力に関する非斉次 Neumann 境界条件の扱いと、自由表面の移動の扱いが非常に重要である。
これまでに、自由表面を含む流体の計算手法として幾つかの方法が提案されている。その一つは、流体領域の変化に対応させて計算領域を変化させる方法で Lagrange 法と呼ばれる。この方法は、流れの方程式に移流項が現れないため方程式が解きやすい反面、格子や要素の変形が著しい場合には計算が破綻してしまうことがある。格子点や節点を液体の移動速度ではなく、任意の速度で移動させることによって、格子や要素の急峻な変化を回避する方法として ALE 法 (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method)が考案されている。
一方、空間に固定された計算領域で流体領域の移動を捕らえる方法は Euler 法と呼ばれる。この方法では、計算領域と流体の領域は一般的に一致しないため、液体領域を識別するための方法が必要となる。この識別方法の代表的なものとして、

１）ＭＡＣ法（Marker and Cell Method）
２）高さ関数法（Hight Function Method）
３）ＶＯＦ法（Volum of Fluid Method）

がある。
ＭＡＣ法は、流動計算から得られる速度をもとに、質量０の粒子の運動を計算し、その粒子の分布より流体の占める領域を判別する手法である。元々は差分法を基本としていたが、近年の研究では有限要素法にも応用されている。
高さ関数法は、自由表面の位置を規準となる座標からの距離で $z=\varsigma(x,y,t)$ のように１価関数 f で表す方法である。その距離についての方程式

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t}+u\frac{\partial \varsigma}{\partial x}+v\frac{\partial \varsigma}{\partial y}-w=0 \tag{3.1}$$

を解いて関数 $\varsigma(x,y,t)$ が求まれば、自由表面の時間的な位置の変化が求まる。ここで u,v,w は、それぞれ x,y,z 方向の流速である。この方法は自由表の位置が直接計算できるという利点の反面、自由表面形状が多価関数となる場合には適用できない。

VOF 法では、各セル内で流体が占める体積（または面積）の割合を表す補助変数 F が用いられる。F は $0 \le F \le 1$ の範囲の値をとり、$F=0$ の場合はセル内に流体領域が存在しない場合、$F=1$ はセルが流体で満たされている場合に対応する。また、$0<F<1$ はセル内に流体とそれ以外の領域が $F:(1-F)$ の割合で存在し、自由表面がセル内を通過している場合である。F の時間的空間的変化は、

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0 \qquad (3.2)$$

を解くことによって得られる。VOF 法は自由表面形状に対する制約が少なく、今日では広く用いられている方法である。

これらの方法は、自由表面の時間的空間的変化に対しては一長一短あるが、一様に自由表面における応力の境界条件の扱いは、自由表面形状により場合分けして、境界条件が成立する流速を求めるという方法をとっており、非常に煩雑であるという問題がある。

つまり、固定直交格子を用いた差分法による自由表面の計算では、自由表面において課される流体の応力に関する非斉次 Neumann 境界条件を如何に扱うかが、計算効率とプログラム及びアルゴリズムの簡略化に対して大きな意味を持つ。これまでの手法では、この点の改良に言及した研究例は殆どなく、従来からの方法を踏襲しているのが実状である。

本章では、流動場における自由表面上の非斉次 Neumann 境界条件に対して補助領域を用いることによって近似を行い、効率的かつ効果的な自由表面を含む流動計算手法の構成を行う。その狙いは、補助領域法を用いることによって、従来の自由表面における境界条件の考慮方法を払拭し、全く異なる方法で自由表面の境界条件を考慮することで、従来の煩わしい計算処理を改善することにある。

第 2 節では、典型的な自由表面を含む流動問題に対する定式化を行い、第 3 節で補助領域法を用いた非斉次 Neumann 境界の近似及び、数値的近似精度評価を行う。同時に、流動場における自由境界問題の近似問題を構成する。そして、第 4 節において具体的計算方法を述べ、第 5 節において計算結果及び幾つかの計算例について触れる。

第 2 節 自由表面問題の数学モデル

今、次の 2 次元移動境界問題を考える。時刻 0 で図 3.1 の左側のように柱状にあった流体が重力により底面に沿って流れ出すという問題である。この問題は、SOLA-VOF のテスト問題としても扱われた問題であり、典型的な流動場における自由表面問題と言える。

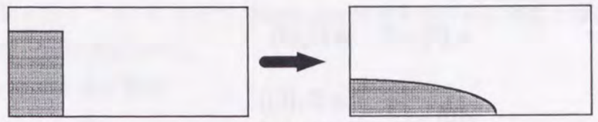


図 3.1 ダム崩壊問題

ここで、それぞれの記号を次のように定義する。

u ：液体の流速
p ：液体の圧力
p_{ex} ：外部圧力
γ ：表面張力係数
$\Gamma(t)$ ：液体の自由表面
$\Gamma_1(t)$ ：垂直壁面
$\Gamma_2(t)$ ：水平壁面
χ ：液体の領域を示す特性関数
n ：自由表面における法線方向ベクトル
τ ：自由表面における接線方向ベクトル
δ_{ij} ：クロネッカーのデルタ記号
υ ：流体の動粘性係数
H ：自由表面（$\Gamma(t)$）の曲率

図 3.1 の問題は次のように記述される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+f_i \quad (i=1,2) \quad in\ \Omega_0(t)\subset R^2 \quad (0<t\le T) \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad in\ \Omega_0(t)\subset R^2 \quad (0<t\le T) \qquad (3.4)$$

$$\sigma_{ij}n_jn_i=g\ ,\ \sigma_{ij}n_j\tau_i=0 \quad on\ \Gamma(t) \quad (0<t\le T) \qquad (3.5)$$

$$u_1=0\ ,\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0 \quad on\ \Gamma_1(t) \quad (0<t\le T) \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=0\ ,\ u_2=0 \quad on\ \Gamma_2(t)\ \ (0<t\le T) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}+u_i\frac{\partial \chi}{\partial x_i}=0\ \ (0<t\le T) \tag{3.8}$$

初期条件として

$$u_i(0)=0 \quad in\ \Omega_0(0) \tag{3.9}$$

$$\chi(0)=\begin{cases}1 & (in\ \Omega_1(0))\\ 0 & (in\ \Omega_0(0))\end{cases} \tag{3.10}$$

ここで

$$\chi(t)=\begin{cases}1 & (in\ \Omega_1(t)\ ,\ (0<t\le T))\\ 0 & (in\ \Omega_0(t)\ ,\ (0<t\le T))\end{cases} \tag{3.11}$$

$$\sigma_{ij}=-\delta_{ij}p+\upsilon\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.12}$$

$$g=-p_{ex}+\gamma H(t) \tag{3.13}$$

である。但し、$\Omega_0(t)$，$\Omega_1(t)$はそれぞれ流体で占められる領域と補助領域を示す。

境界条件や初期条件は問題に応じて様々に変わるが、2次元流動場における自由表面問題は概ね以上のように記述される。

自由表面の動きは、MAC(Marker and cell)法や高さ関数法等様々な扱い方があるが、自由表面形状に対して最も制約が少ないと考えられる VOF(Volum of fluid)法のアイデアを式(3.8)として適用する。(VOF 法については4節で述べる)

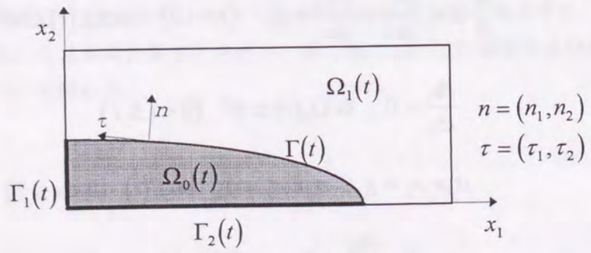


図 3.2 ダム崩壊問題

第3節 補助領域法による計算モデル

第1項 補助領域法による非斉次 Neumann 境界条件の近似

次の領域$\Omega_0=\{x:\ 0<x<1\}$における一次元の常微分方程式に対して、河原田らの考案した特異摂動型補助領域法を用い計算モデルを構成し、数値計算を行うこうとによって、Neumann 境界条件の近似精度と積分ペナルティ法の精度確認を行う。

［Neumann 境界問題］

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0 \quad (0<x<1) \tag{3.14}$$

$$u(0)=1 \tag{3.15}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}=g \tag{3.16}$$

ここで gは $-1\leqq g\leqq 0$ の定数である。

この問題の厳密解は

$$u^0(x)=1+gx \quad (0<x<1) \tag{3.17}$$

である。

この問題の特異摂動型の補助領域法を用いた計算モデルは次のようになる。

［計算モデル］

領域$\Omega_1=\{x:0<x\le 2\}$とるすと、

$$\frac{d}{dx}\left[\left\{\left(1-\chi^\varepsilon\right)+\varepsilon^{2\alpha}\chi^\varepsilon\right\}\frac{du^\varepsilon}{dx}\right]-\varepsilon^{-2\beta}\chi^\varepsilon u^\varepsilon=-g\frac{d\chi^\varepsilon}{dx} \quad in\ \Omega_1 \tag{3.18}$$

$$u^\varepsilon(0)=1 \tag{3.19}$$

$$u^\varepsilon(\infty)=0 \tag{3.20}$$

$$\chi^\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (1<x\le 2)\\ 0 & (0<x\le 1)\end{cases} \tag{3.20}$$

ここで、εは非常に小さい正の定数で、αとβは$\alpha>\beta$かつ$\alpha+\beta>0$の関係を満たす小さな値の定数である。

この計算モデルの近似の妥当性に関して、簡単なチェックを行う。
領域 $D(0,+\infty)$ において任意の ϕ を選び、式(3.17)の両辺に掛け $(0,\infty)$ で積分を行うと以下の式を得る。

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{d}{dx}\left[\left\{\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{2\alpha}\chi^{\varepsilon}\right\}\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right]-\varepsilon^{-2\beta}\chi^{\varepsilon}u^{\varepsilon}+g\frac{d\chi^{\varepsilon}}{dx}\right]\phi dx=0) \tag{3.21}$$

ここで

$$u\equiv u^{\varepsilon}\quad (0<x<1),\ v\equiv u^{\varepsilon}\quad (1\le x<\infty) \tag{3.22}$$

とすると、(3.21)の部分積分の結果として、

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0\quad (0<x<1) \tag{3.23}$$

$$\varepsilon^{2\alpha}\frac{d^2v}{dx^2}-\varepsilon^{-2\beta}v=0\quad (1\le x<\infty) \tag{3.24}$$

$$\frac{du}{dx}(1)-\varepsilon^{2\alpha}\frac{dv}{dx}(1)=g \tag{3.25}$$

$$u(1)=v(1) \tag{3.26}$$

が得られる。式(3.19)(3.20)を用いると

$$u(x)=g^{\varepsilon}x+1\quad (0<x<1) \tag{3.27}$$

$$v(x)=\left(1+g^{\varepsilon}\right)e^{-\frac{(x-1)}{\varepsilon^{\alpha+\beta}}}\quad (1\le x<\infty) \tag{3.28}$$

となる。ここで、

$$g^{\varepsilon}=-1+\frac{1+g}{1+\varepsilon^{\alpha-\beta}} \tag{3.29}$$

である。
今、ε は非常に小さな正の定数であるから、$\varepsilon\to 0$ のとき $\alpha>\beta$、かつ $\alpha+\beta>0$ より、

$$u^{\varepsilon}(x)\to u^{0}(0)\quad in\ (0,1) \tag{3.30}$$

となる。
従って、補助領域法を用いた定式化(3.17)は、基の問題の近似となっていると言える。
さらに、$I^{\varepsilon}=\int_0^{\infty}\varepsilon^{-2\beta}\chi^{\varepsilon}u^{\varepsilon}(x)dx$ とし、積分ペナルティと呼ぶことにする。

$\varepsilon\to 0$ のとき、

$$\varepsilon^{\beta-\alpha}\cdot I^{\varepsilon}\to 1+g=u^{0}(1) \tag{3.31}$$

となり、$\varepsilon^{\beta-\alpha}\cdot I^{\varepsilon}$ が境界での値 $u^{0}(1)$ を近似していることがわかる。
次にこの近似問題を実際に差分法で離散化し数値的に解き、計算による近似精度の確認を行う。

［離散特性関数］
式(3.20)に対して2章で提案した離散特性関数

$$\chi_j=\begin{cases}1 & ,j\ge i+1\\ \varepsilon\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)/\Delta x^2 & ,j=i\\ 0 & ,j\le i-1\end{cases} \tag{3.32}$$

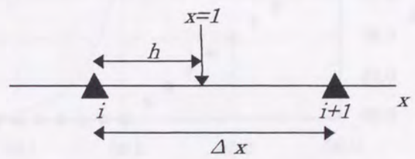


図 3.3　計算ポイント

を用いて
a) $\Delta x=0.1$, $g=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $\alpha=0.70$, $\beta=-0.50$
b) $\Delta x=0.1$, $g=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $\alpha=0.70$, $\beta=0.50$
で計算した結果を次に示す。

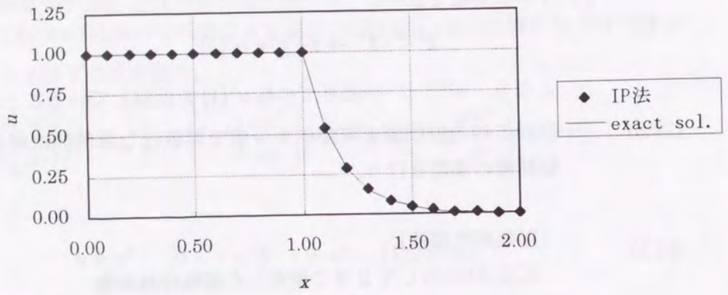


図 3.4　a)

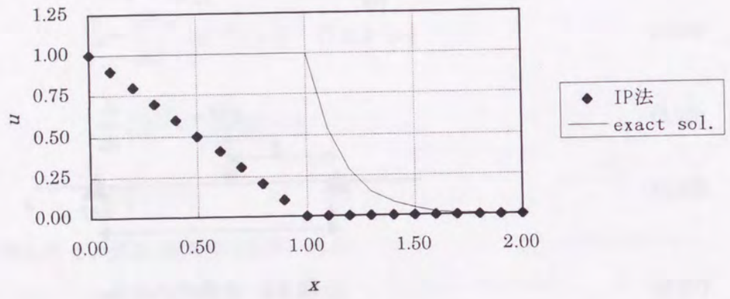


図 3.5　b)

a)の条件ではよい精度で計算できるが、b)の条件では計算された結果は理論値からかけ離れた数値となり、元の問題に対する近似精度は極めて悪くなってしまう。

この原因は式(3.18)中のペナルティ項にある。つまり、ペナルティ項は値を０に漸近させる作用を有するためにペナルティ項にかかるパラメータと特性関数の値によって、解の精度が大きく異なってくるのである。

第２章で提案した離散特性関数を用いる場合には、元の問題に対する近似を損なわぬようパラメータ α，β，ε それに Δx の値を決定せねばならない。

ここでは、元の問題の近似精度を極力保てるよう、ペナルティ項の作用が補助領域においてのみ作用するような以下の離散特性関数を用いる。

$$\chi_i = \begin{cases} 0 & (j \le i) \\ 1 & (j > i) \end{cases} \tag{3.33}$$

以下に、境界を $x = 1$ として、

case 1) $\Delta x = 0.1$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.75$, $\beta = -0.50$

case 2) $\Delta x = 0.1$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.70$, $\beta = -0.50$

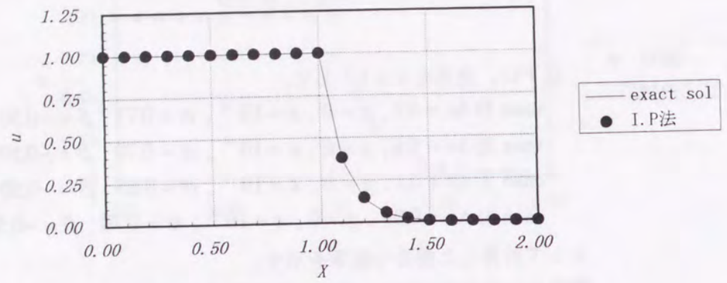
case 3) $\Delta x = 0.1$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.65$, $\beta = -0.50$

case 4) $\Delta x = 0.09$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.70$, $\beta = -0.50$

として計算した場合の結果を示す。

離散化は差分法で行い、連立一次方程式の解法は Gauss-Jordan の消去法を用いた。また、$I^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-2\beta} \chi u(x) dx$ の計算には、台形公式を用いた。

case 1） $\Delta x = 0.1$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.75$, $\beta = -0.50$



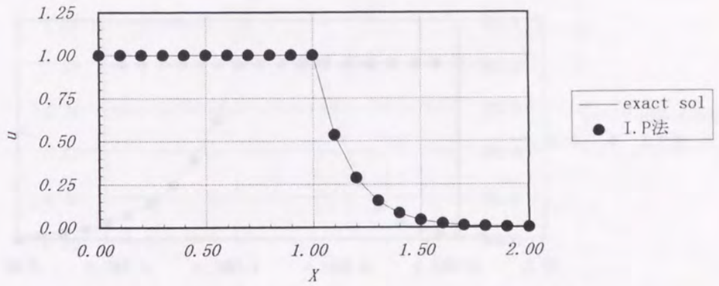
$$u(1) = \varepsilon^{\beta-\alpha} \cdot I^{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha-\beta} \int_0^{\infty} \chi^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x) dx = 1.12$$

図 3.6　case 1

表 3.1 case 1

x	exact sol	I. P法
0. 00	1. 00000	1. 00000
0. 10	1. 00000	1. 00000
0. 20	1. 00000	1. 00000
0. 30	1. 00000	1. 00000
0. 40	1. 00000	1. 00000
0. 50	1. 00000	1. 00000
0. 60	1. 00000	1. 00000
0. 70	1. 00000	1. 00000
0. 80	1. 00000	1. 00000
0. 90	1. 00000	1. 00000
1. 00	1. 00000	1. 00000
1. 10	0. 36788	0. 38200
1. 20	0. 13534	0. 14600
1. 30	0. 04979	0. 05570
1. 40	0. 01832	0. 02130
1. 50	0. 00674	0. 00813
1. 60	0. 00248	0. 00310
1. 70	0. 00091	0. 00118
1. 80	0. 00034	0. 00044
1. 90	0. 00012	0. 00015
2. 00	0. 00005	0. 00000

case 2） $\Delta x = 0.1$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.70$, $\beta = -0.50$



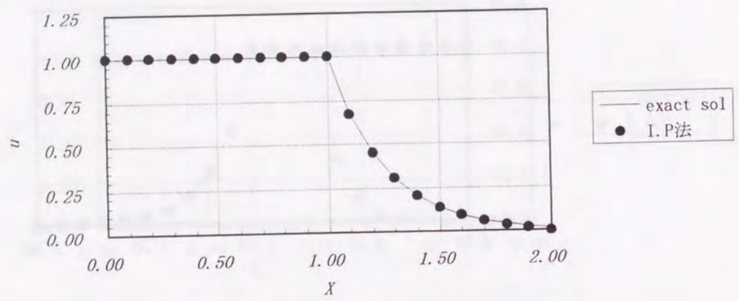
$$u(1) = \varepsilon^{\beta-\alpha} \cdot I^{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha-\beta} \int_0^{\infty} \chi^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x) dx = 1.04$$

図 3.7　case 2

表 3.2　case 2

x	exact sol	I. P法
0. 00	1. 00000	1. 00000
0. 10	1. 00000	1. 00000
0. 20	1. 00000	1. 00000
0. 30	1. 00000	1. 00000
0. 40	1. 00000	1. 00000
0. 50	1. 00000	1. 00000
0. 60	1. 00000	1. 00000
0. 70	1. 00000	1. 00000
0. 80	1. 00000	1. 00000
0. 90	1. 00000	1. 00000
1. 00	1. 00000	1. 00000
1. 10	0. 53208	0. 53700
1. 20	0. 28311	0. 28900
1. 30	0. 15064	0. 15500
1. 40	0. 08015	0. 08340
1. 50	0. 04265	0. 04470
1. 60	0. 02269	0. 02390
1. 70	0. 01207	0. 01260
1. 80	0. 00642	0. 00638
1. 90	0. 00342	0. 00266
2. 00	0. 00182	0. 00000

case 3） $\Delta x = 0.1$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.65$, $\beta = -0.50$



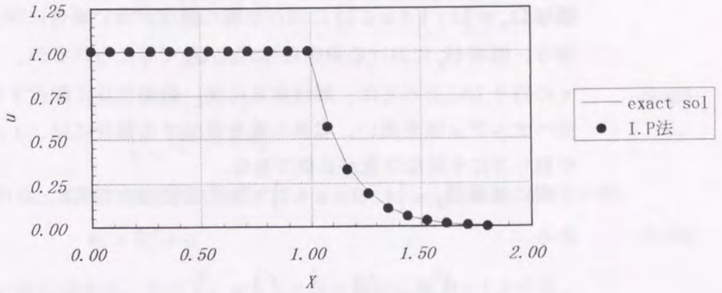
$$u(1) = \varepsilon^{\beta-\alpha} \cdot I^{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha-\beta} \int_0^{\infty} \chi^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x) dx = 0.981$$

図 3.8　case 3

表 3.3　case 3

x	exact sol	I. P法
0. 00	1. 00000	1. 00000
0. 10	1. 00000	1. 00000
0. 20	1. 00000	1. 00000
0. 30	1. 00000	1. 00000
0. 40	1. 00000	1. 00000
0. 50	1. 00000	1. 00000
0. 60	1. 00000	1. 00000
0. 70	1. 00000	1. 00000
0. 80	1. 00000	1. 00000
0. 90	1. 00000	1. 00000
1. 00	1. 00000	1. 00000
1. 10	0. 67159	0. 67300
1. 20	0. 45103	0. 45300
1. 30	0. 30291	0. 30400
1. 40	0. 20343	0. 20400
1. 50	0. 13662	0. 13600
1. 60	0. 09175	0. 08930
1. 70	0. 06162	0. 05690
1. 80	0. 04138	0. 03360
1. 90	0. 02779	0. 01560
2. 00	0. 01867	0. 00000

case 4） $\Delta x = 0.09$, $g = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.70$, $\beta = -0.50$



$$u(1) = \varepsilon^{\beta-\alpha} \cdot I^{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha-\beta} \int_0^{\infty} \chi^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x) dx = 1.03$$

図 3.9　case 4

表 3.4　case 4

x	exact sol	I. P法
0. 00	1. 00000	1. 00000
0. 09	1. 00000	1. 00000
0. 18	1. 00000	1. 00000
0. 27	1. 00000	1. 00000
0. 36	1. 00000	1. 00000
0. 45	1. 00000	1. 00000
0. 54	1. 00000	0. 99999
0. 63	1. 00000	0. 99999
0. 72	1. 00000	0. 99999
0. 81	1. 00000	0. 99999
0. 90	1. 00000	0. 99999
0. 99	1. 00000	0. 99999
1. 08	0. 60365	0. 57087
1. 17	0. 34211	0. 32584
1. 26	0. 19389	0. 18588
1. 35	0. 10988	0. 10586
1. 44	0. 06227	0. 05998
1. 53	0. 03529	0. 03343
1. 62	0. 02000	0. 01767
1. 71	0. 01134	0. 00761
1. 80	0. 00642	0. 00000

これらの結果より、補助領域法による近似は、精度的には何の問題もない程度であることが分かる。また、積分ペナルティの近似については、補助領域$\Omega_2 = \{x : 1 \le x \le 2\}$における解の精度が良い場合には、良好な結果を得る。領域Ω_2における厳密解は式(3.28)で与えられるが、ε，α，β，Δxの取り方によっては、解は非常に狭い範囲で0に漸近する。従って、積分ペナルティ法を用い、境界の値を算出する場合には、ε，α，β，Δxの取り方に十分な注意が必要である。

次に領域$\Omega_0 = \{x : 0 < x < 1\}$で次の常微分方程式についての精度を確かめる。

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \sin\left(\frac{3}{4}\pi \cdot x\right) \tag{3.34}$$

$$u(0) = 0\ ,\ u(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.35}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \frac{3}{4}\pi\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi \tag{3.36}$$

この問題の解析解は、

$$u(x) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi \cdot x\right) \tag{3.37}$$

$$u(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.707106781 \tag{3.38}$$

である。

補助領域法により領域$\Omega_1 = \{x : 0 < x \le 2\}$において近似すれば、

$$\frac{d}{dx}\left[\left\{\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{2\alpha}\chi^{\varepsilon}\right\}\frac{du}{dx}\right] - \varepsilon^{-2\beta}\chi^{\varepsilon}u^{\varepsilon} = -\kappa\left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \sin\left(\frac{3}{4}\pi \cdot x\right) - g\frac{d\chi^{\varepsilon}}{dx} \tag{3.39}$$

$$u^{\varepsilon}(0) = 0\ ,\ u^{\varepsilon}(2) = 0 \tag{3.40}$$

$$g = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi \tag{3.41}$$

ここでχ,κは、

$$\chi = \begin{cases} 0 & (0 < x \le 1) \\ 1 & (1 < x \le 2) \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\kappa = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ 0.5 & (x = 1) \\ 1 & (1 < x < 2) \end{cases} \tag{3.43}$$

である。また、境界が計算ポイントｉとｉ＋１の間にある場合には、

$$\kappa_i = 0.5 + \alpha \tag{3.44}$$

でκを近似する。ただし、$\kappa > 1$となる場合には$\kappa = 1$とする。

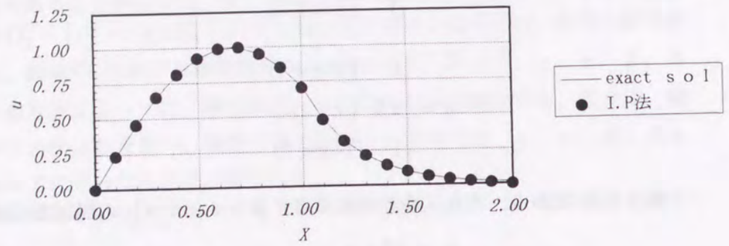
ここで、αは計算ポイントｉから境界までの距離を計算ポイントｉとｉ＋１間の距離で割った値である。

case 5) $\Delta x = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.65$, $\beta = -0.50$

case 6) $\Delta x = 0.095$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.65$, $\beta = -0.50$

として計算した結果を以下に示す。

case 5) $\Delta x = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.65$, $\beta = -0.50$



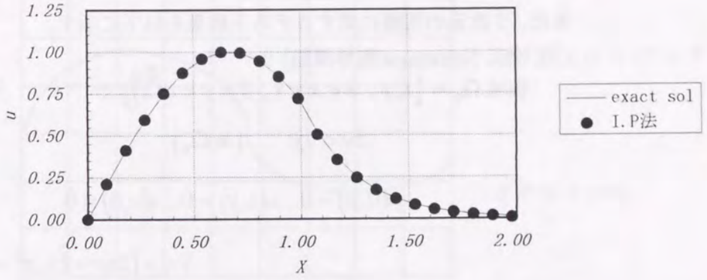
$$u(1) \cong \varepsilon^{\beta-\alpha} \cdot I^{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha-\beta} \chi \int_0^{\infty} u(x)dx = 0.690$$

図 3.10　case 5

表 3.5　case 5

x	exact sol	I. P法
0. 00	0. 00000	0. 00000
0. 10	0. 23345	0. 23376
0. 20	0. 45399	0. 45455
0. 30	0. 64945	0. 65014
0. 40	0. 80902	0. 80968
0. 50	0. 92388	0. 92430
0. 60	0. 98769	0. 98763
0. 70	0. 99692	0. 99613
0. 80	0. 95106	0. 94929
0. 90	0. 85264	0. 84964
1. 00	0. 70711	0. 70266
1. 10	0. 47489	0. 47291
1. 20	0. 31893	0. 31811
1. 30	0. 21419	0. 21373
1. 40	0. 14385	0. 14323
1. 50	0. 09661	0. 09542
1. 60	0. 06488	0. 06274
1. 70	0. 04357	0. 03999
1. 80	0. 02926	0. 02359
1. 90	0. 01965	0. 01093
2. 00	0. 01320	0. 00000

case 6) $\Delta x = 0.95$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.65$, $\beta = -0.50$



$$u(1) \cong \varepsilon^{\beta-\alpha} \cdot I^{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha-\beta} \chi \int_0^{\infty} u(x)dx = 0.712$$

図 3.11　case 6

表 3.6　case 6

x	exact sol	I. P法
0. 00	0. 00000	0. 00000
0. 09	0. 21047	0. 21075
0. 18	0. 41151	0. 41204
0. 27	0. 59412	0. 59482
0. 36	0. 75011	0. 75089
0. 45	0. 87250	0. 87323
0. 54	0. 95579	0. 95633
0. 63	0. 99627	0. 99645
0. 72	0. 99212	0. 99177
0. 81	0. 94351	0. 94247
0. 90	0. 85264	0. 85075
0. 99	0. 72357	0. 72069
1. 08	0. 51424	0. 50451
1. 17	0. 35939	0. 35311
1. 26	0. 25116	0. 24704
1. 35	0. 17553	0. 17268
1. 44	0. 12267	0. 12049
1. 53	0. 08573	0. 08376
1. 62	0. 05991	0. 05779
1. 71	0. 04187	0. 03924
1. 80	0. 02926	0. 02572
1. 89	0. 02045	0. 01551
1. 98	0. 01429	0. 00729
2. 07	0. 00999	0. 00000

以上の結果より、補助領域法による近似と離散特性関すが有効であることがわかる。
また、2次元の問題に関するテスト結果を以下に示す。

［2次元 Neumann 境界問題］

領域 $\Omega_0 = \{x, y : 0 < x < 1,\ 0 < y < \varphi(x)\}$ で

$$\Delta u = 2y \qquad (in\ \Omega_0) \tag{3.45}$$

$$u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,\ u(x,0) = 0$$

$$\nabla u = \left(2xy - 2y, x^2 - 1\right) \quad (on\ \varphi(x))$$

ここで $\varphi(x) = 0.5\sin(2\pi x) + 1.5$ である。

［計算モデル］

補助領域法に基づく計算モデルは、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)+\chi^{\varepsilon}\varepsilon^{2\alpha}\right\}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)+\chi^{\varepsilon}\varepsilon^{2\alpha}\right\}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial y}\right](in\ \Omega)$$

$$-\varepsilon^{-2\beta}\chi^{\varepsilon}u^{\varepsilon} + g\cdot\nabla\chi^{\varepsilon} = 2y \tag{3.46}$$

$$u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,3) = 0$$

$$g = \nabla u = \left(2xy - y, x^2 - x\right) \tag{3.47}$$

となる。

［離散特性関数］

2次元の場合も1次元と同様に、元の問題の近似精度をペナルティ項によって損なうことのないよう、補助領域のみにペナルティ項が作用する離散特性関数を用いる。

$$\chi_{ij} = \begin{cases} 0 & ,\ 0 \le i \le I,\ 0 \le j \le j_i \\ 1 & ,\ 0 \le i \le I,\ j_i < j \le J \end{cases} \tag{3.48}$$

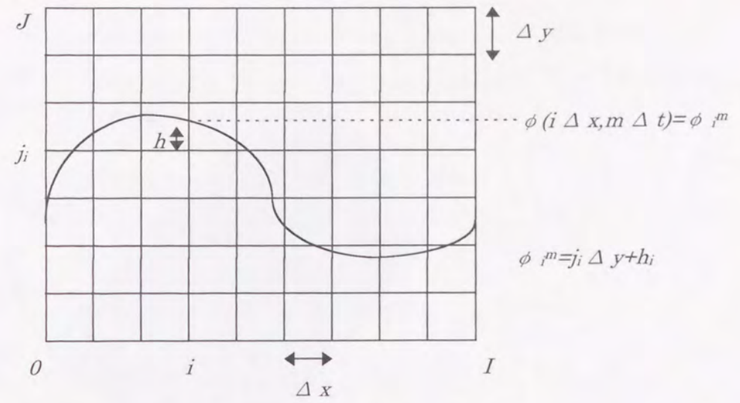


図 3.12　2次元離散特性関数

x 方向刻みを $\Delta x = \frac{1}{20}$、y 方向刻みを $\Delta y = \frac{1}{70}$ として解いた結果を図 3.13,3.14 に示す。

式(3.45)の厳密解は

$$u_{ex} = x(x-1)y \tag{3.49}$$

となる。

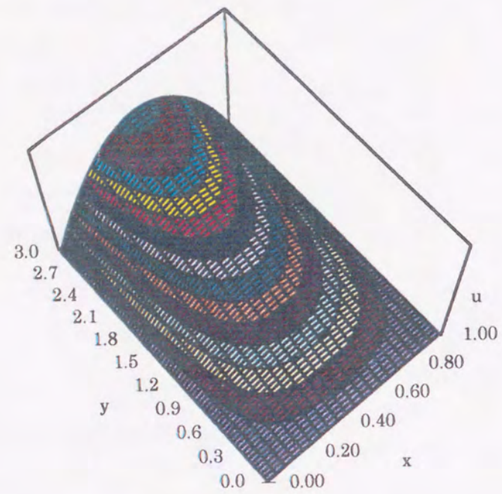


図 3.13　厳密解

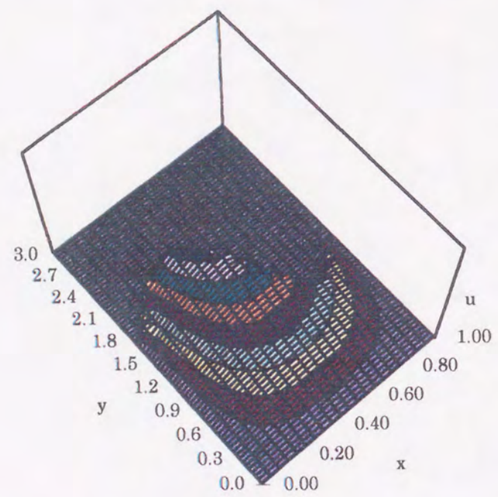


図 3.14　計算結果

ここで、計算結果と厳密解の差を $err = \sqrt{\sum \left(u_{ex} - u\right)^2}$ で定義すると、$err = 7.089339628381791 \times 10^{-4}$ となり、２次元においても非常に精度が良いことがわかる。

第２項　自由表面問題の補助領域法に基づく計算モデル

補助領域法により、ダム崩壊問題を領域 $\Omega(t) = \Omega_0(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_1(t)$ において、流体の速度 u，圧力 p，と χ を求めるという問題に近似する。

今、記号として

$$\nabla\chi = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}, \frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right) \tag{3.50}$$

$$\Sigma\chi = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right) \tag{3.51}$$

を用いれば、元の問題である式(3.2)～(3.13)は以下のように近似できる。

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_i}{\partial t} + \left(1-\chi^{\varepsilon}\right) u^{\varepsilon}{}_j \frac{\partial u^{\varepsilon}{}_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial \sigma^{\varepsilon}{}_{ij}}{\partial x_j} - \varepsilon^{-2\beta} \cdot \chi^{\varepsilon} \cdot u^{\varepsilon}{}_i + \left(1-\chi^{\varepsilon}\right) f_i + g \cdot \left(\nabla\chi^{\varepsilon}\right)_i + h \cdot \left(\Sigma\chi^{\varepsilon}\right)_i$$

$$i, j = 1.,2 \qquad \left(in\ \Omega(t)\right) \quad \left(0 < t \le T\right) \tag{3.52}$$

$$\sigma^{\varepsilon}{}_{ij} = -\delta_{ij}\left(1-\chi\right)p + \left\{\upsilon\left(1-\chi\right) + \varepsilon^{2\alpha}\chi\right\}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.53}$$

$$g = -p_{ex} + \gamma H(t) \qquad \left(0 < t \le T\right) \tag{3.54}$$

$$\left(1-\chi\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \left(in\ \Omega(t)\right)\left(0 < t \le T\right) \tag{3.55}$$

$$u_1 = 0\,,\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad on\ \Gamma_1(t)\left(0 < t \le T\right) \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0\,,\ u_2 = 0 \quad on\ \Gamma_2(t)\left(0 < t \le T\right) \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + u_i \frac{\partial\chi}{\partial x_i} = 0 \quad \left(0 < t \le T\right) \tag{3.58}$$

初期条件として

$$u_i(0) = 0 \quad in\ \Omega\ (0) \tag{3.59}$$

$$\chi^{\varepsilon}(0) = \begin{cases} 1 & (in\ \Omega_1(0)) \\ 0 & (in\ \Omega_0(0)) \end{cases} \tag{3.60}$$

ここで、

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & (in\ \Omega_1(t)\ ,\ (0 < t \le T)) \\ 0 & (in\ \Omega_0(t)\ ,\ (0 < t \le T)) \end{cases} \tag{3.61}$$

hは式(3.5)より０である。

従来の自由表面問題の数値解法に比べて本計算モデルの優れている点は、計算モデル式(3.52)～(3.61)を解くことにより、自由表面において課される応力の境界条件を特に意識して考慮する必要がない点にある。すなわち、この計算モデルを離散化して解くだけで、自ずと自由表面における境界条件を考慮していることになっているのである。

第４節 VOF法、FS法を応用した数値計算アルゴリズム

第１項 自由境界問題に対するVOF法の適用

VOF(Volum of Fluid)法の特徴は、計算セルに閉める流体の割合をFとしたとき、自由表面の時間的空間的変化を式(3.2)を用いて表すことと、式(3.2)を解く手法であるドナー･アクセプター法にある。

補助領域法では領域を表すためのスカラー変数として特性関数χを定義する。このχをVOF法におけるFの代わりに式(3.2)によって解けば、流体の時間的空間的変化が求められる。

また、領域をシャープに識別するために、式(3.2)を数値拡散をおさえるようドナー・アクセプター法により解く。

次の一次元の移流方程式を考えた場合に、

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3.62}$$

解析解は時間が経過しても初期条件のFの形状を保存する。しかし、奇数次の風上差分で近似した場合には、偶数次の微分項が誤差項として残り数値な粘性が発生し、初期の形状からかけ離れた形状となってしまう。

図 3.15 に$u = 1, \Delta t = 0.005, \Delta x = 0.01$として、空間については１次の風上差分法で離散化し前進 Euler 法により時刻$t = 1.0$まで計算した結果を示す。

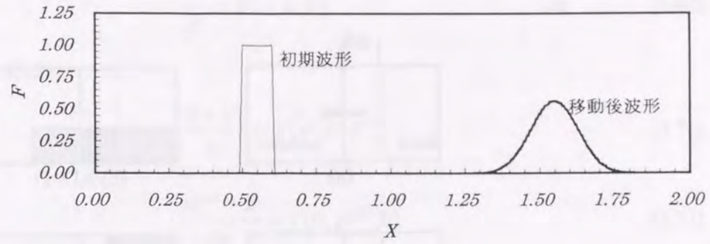


図 3.15　式(3.60)計算結果

この数値粘性が起こらぬよう、物理的な考察から提案されたのが、ドナー・アクセプター法である。

今、速度をuとし、添字DとAはそれぞれドナーとアクセプターとする。ドナー(*donor*)は贈り主であり、アクセプター（*accepter*）は受け主のことである。つまり、流速の向きにより図 3.16 の関係にある。

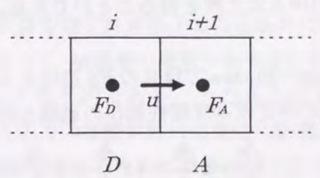


図 3.16　ドナーとアクセプター

δt時間にセル・エッジの単位面積当たりを通過してDからAに輸送される体積Vは

$$V = u\delta t \tag{3.63}$$

である。ドナー・アクセプター法ではこのときのFの輸送量を

$$\begin{aligned} F_{AD}u\delta t &= \mathrm{sgn}(u)\cdot\min\left[F_{AD}|V| + CF, F_D\delta x_D\right] \\ V &= u\delta t \\ CF &= \max\left[(1-F_{AD})|V| - (1-F_D)\delta x_D, 0\right] \end{aligned} \tag{3.64}$$

で求める。

式(3.64)の演算 min はDセルが保有する流体$F_D\delta x_D$以上の流体が輸送されるのを防ぎ、演算 max はDセルが保有するボイド以上のボイドが輸送されるのを禁止している。

ここで添字ADは図 3.17 のように自由表面形状によってAあるいはDとな

る。

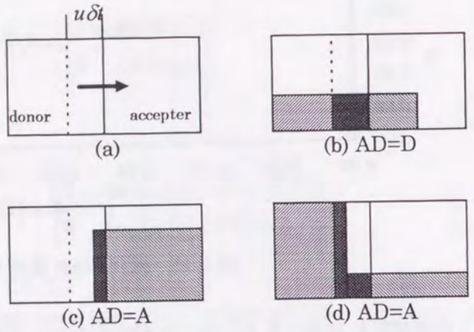


図 3.17 ドナー・アクセプター法のよる VOF スキーム

以上のように、ドナー・アクセプター法では自由表面の形状によって、実際にセルに授受できる量を判定し差分近似を行うため、通常みられる数値拡散を極力押さえた解を得ることができる。

第２項 Navier－Stokes 方程式の FS 法による数値解法

３次元の非定常非圧縮性流体の運動方程式である Navier-Stoke 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}++v\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+F_x \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}++v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial y}+F_y \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}++v\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial z}+F_z \tag{3.67}$$

で表され、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3.68}$$

となる。ここで、u,v,w は x,y,z 方向の流速を示し、υ は流体の動粘性係数を F_x,F_y,F_z は x,y,z 方向の外力を意味する。

この方程式系を解く方法としては、SIMPLE 系の陰解法，MAC 法のような陽解法，SMAC 系の半陰解法がある。ここでは、解法として SMAC 系の手法である FS 法(Fractional Step Method)の適用を考える。

FS 法の骨子は、まず３次元の Navier-Stokes 方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(u,p,F) \tag{3.69}$$

と記述し、

$$\frac{\overline{u}-u^n}{\Delta t}=f\left(u^n,0,F^n\right) \tag{3.70}$$

$$\frac{u^{n+1}-\overline{u}}{\Delta t}=f\left(0,p^{n+1},0\right) \tag{3.71}$$

の二段階に分けて計算を行う。当然式(3.70)の流速 $\overline{u}$ は連続の式を満たさない。そこで、式(3.71)の発散をとると、

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{div\ u^{n+1}-div\ \overline{u}\right\}=-\Delta p \tag{3.72}$$

が得られる。ここで MAC 法同様 $div\ u^{n+1}=0$ とすれば、圧力に関するポアソン方程式が得られる。この圧力 p を用い連続の式を満たすような u^{n+1} を求める。

自由表面を含む流体計算を固定計算格子で行う場合には、計算の対象領域が時々刻々変化する。従って、物理量の履歴が収束性に影響を与える解法は、計算の効率性にとっては不利である。その点この方法は、SMAC 法や HSMAC 法とは異なり圧力の履歴が解の収束性に影響しない。さらに、MAC 法に比較すると、半陰解法であるために計算精度と安定性の点で優れているという利点がある。

この方法を近似された Navier-Stokes 方程式に適用する場合には何の問題もなく、ただ式を

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(u,p,F,\chi) \tag{3.73}$$

と置き換えて考えればよい。

第３項 表面セルの流速

表面セルに隣接する流体以外のセル（$\chi=1$）に注目する。時刻 t において流体以外のセルであっても、時刻 $t+\Delta t$ には表面セルに変わる場合がある。この場合、新たに表面となったセルには $u=0$ *or* $v=0$ の計算ポイントが存在する（図 3.18）。しかし、そのセルに流体が流入してきたということは、流体のそのセルに該当する部分が運動（あるいは移動）の途中にあることを意味するから、自由表面に流速０の部分が存在することは不自然である。中山らの研究によると、MAC 法を FEM に適用した場合にも同様の問題があ

ることが指摘されており、図 3.19 の様な結果となることが報告されている。そこで、この流速 0 の計算ポイントに対しては、何らかの妥当な速度を与える必要がある。

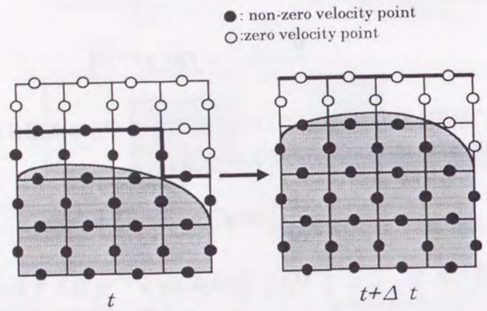


図 3.18　ゼロ流速ポイント

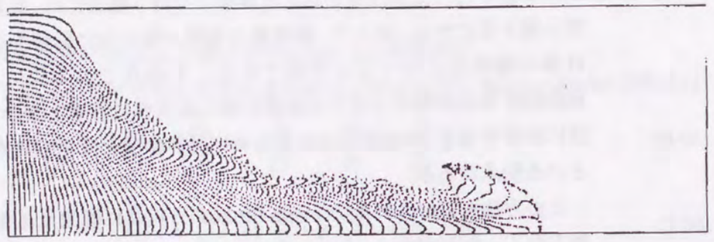


図 3.19　表面セルにおる問題点

本報で提案する特異摂動型補助領域法では、積分ペナルティ法によって境界上の値を近似可能であることは第 3 章 3 節 1 項で示した。従って、新規に表面と認識されたセルにおいて流速 0 の計算ポイントについては、積分ペナルティ法により近似された速度を与えれば良い。

第 4 項 補助領域法を用いて導出された数学モデルの計算アルゴリズム

離散化手法はコントロールボリューム法を基本とする差分法であり、圧力や温度等のスカラー変数についてはセル中心に、流速についてはセル・エッジで定義するスタッガード・メッシュ系を用いる。

時間進行に関しては、流体の速度と圧力に関しては FS 法で、領域を示す特性関数については前進 Euler 法を用いる。

<STEP 0>
u^0, p^0, χ^0 に初期条件を設定

<STEP 1>
式(3.70)(3.73)より

$$\overline{u} = u^0 + \Delta t \cdot f\left(u^0, 0, F, \chi^0\right) \tag{3.74}$$

として速度の中間値を求める

<STEP 2>
式(3.72)より

$$-\frac{1}{\Delta t} div\, \overline{u} = -\Delta p^1 \tag{3.75}$$

として圧力 p^1 を求める。

<STEP 3>
式(3.71)により、

$$\frac{u^1 - \overline{u}}{\Delta t} = f\left(0, p^1, 0, 0\right) \tag{3.76}$$

として速度 u^1 を求める。

<STEP 4>
式(3.58)より

$$\chi^1 = \chi^0 - \Delta t \cdot u^1{}_i \frac{\partial \chi^0}{\partial x_i} \tag{3.77}$$

として χ^1 を求める。

<STEP 5>
積分ペナルティ法により表面流速の算出を行い、新たに流体セルとなた部分に関して流速の設定。

<STEP 6>
所定の時刻となるまで $u^0 = u^1, \chi^0 = \chi^1$ とし、時刻を Δt 進めて、STEP 1 に戻る。

第 5 節 数値計算例

第 1 項 ダム崩壊問題

前節において定義された、問題を以下の条件で解いた結果を図 3.21 に Hirt らの行った実験結果と合わせて示す。図 3.21 においては、縦軸に水平方向の流体の到達距離 z を l で割った無次元距離を、横軸には無次元時間をとっている。

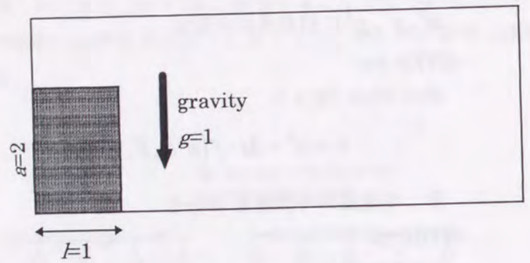
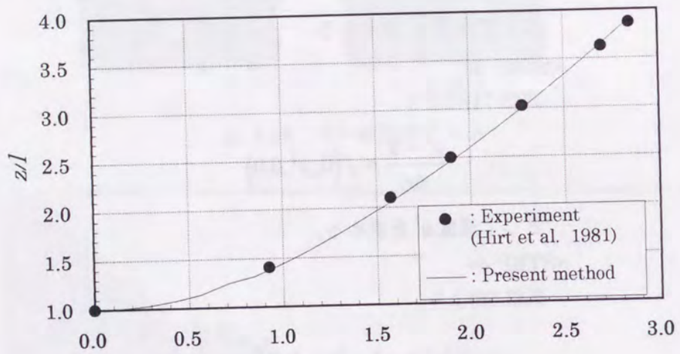


図 3.20　初期条件



$t\sqrt{2g/l}$

図 3.21　計算結果

図 3.21 より明らかなとおり、本方法により得られる解は Hirt らの行った実験結果と良い精度で一致している。次に図 3.22～25 に自由表面形状を、図 26～29 に自由表面形状と流速ベクトル図を示す。これらの結果も、過去に行われた計算例と良く一致している。

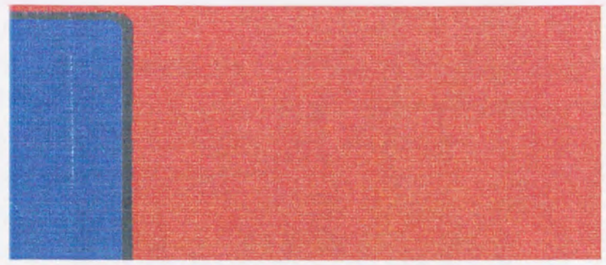


図 3.22　流体形状（t=0.0）



図 3.23　流体形状（t=0.9）

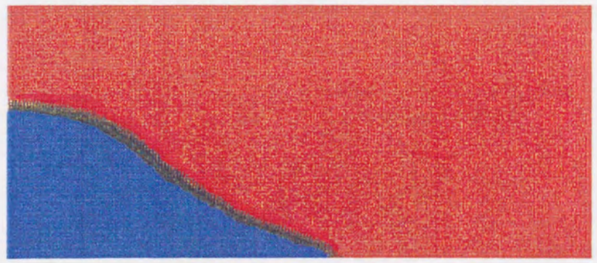


図 3.24　流体形状（t=1.4）

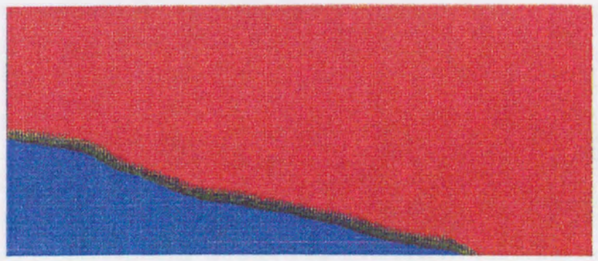


図 3.25　流体形状（t=2.0）

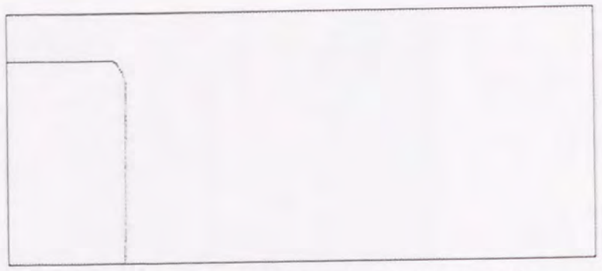


図 3.26　自由表面形状と速度ベクトル（t=0.0）

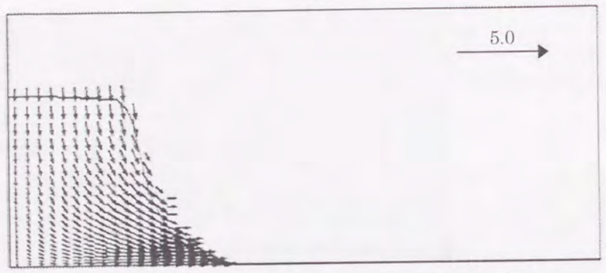


図 3.27　自由表面形状と速度ベクトル（t=0.9）

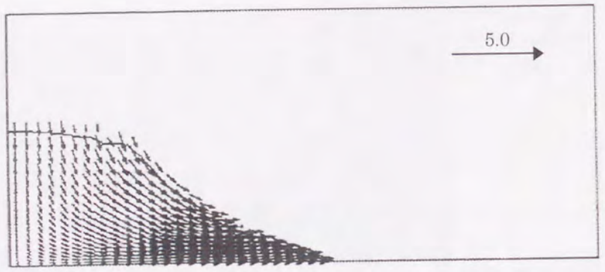


図 3.28　自由表面形状と速度ベクトル（t=1.4）

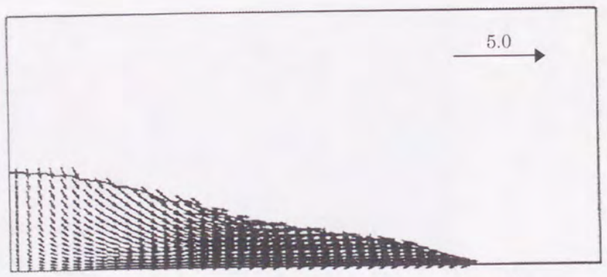


図 3.29　自由表面形状と速度ベクトル（t=2.0）

第２項 液滴振動問題

表面張力の作用する典型的例題として、２次元の液的振動問題を解く。問題は、初期形状が正方形の流体が、表面張力により振動しながら安定な形状である円に収束するまでの過程を求める（図 3.30）。

計算条件とモデルは図 3.31 に示す。

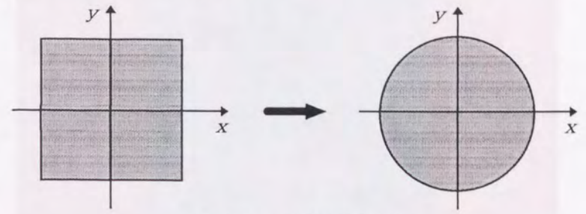


図 3.30　液滴振動問題

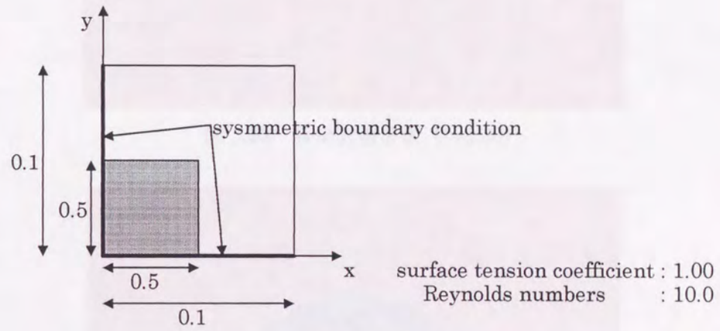


図 3.31　計算条件

この問題では、自由表面の曲率の算出が精度に対して非常に重要である。

VOF 法を用いれば自由表面の座標は、x方向のセル番号を i とし y方向のセル番号を j、x，y方向の刻みをそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ とすると、

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} F_i \cdot \Delta x \tag{3.78}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot \Delta y \tag{3.79}$$

で表される。ここで m,n は x,y方向の分割数である。

式(3.78)(3.79)より求められた自由表面の座標をもとに、曲率の算出は、隣接する３点の座標を通る円の半径を求め、その半径を曲率半径として与えた。

計算結果の自由表面形状を図 3.32～3.35 に速度ベクトルを図 3.33～3.36 に示す。図 3.36～3.39 の青い部分が流体を示す。

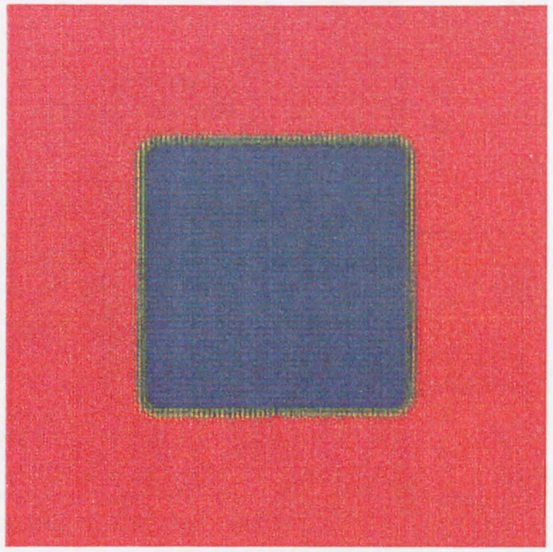


図 3.32　自由表面形状（t=0.00）

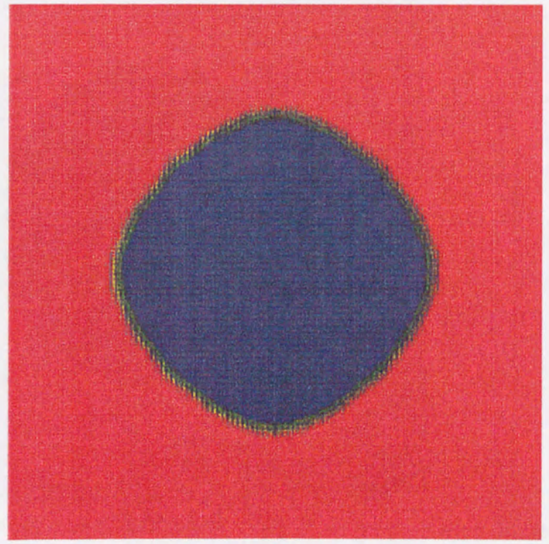


図 3.33　自由表面形状（t=0.01）

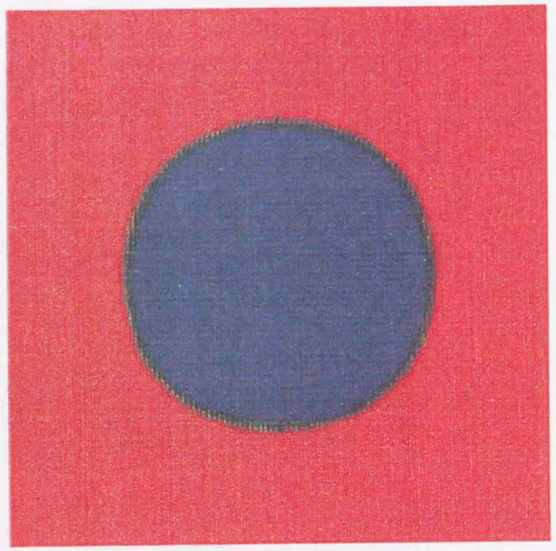


図 3.34　自由表面形状（t=0.02）

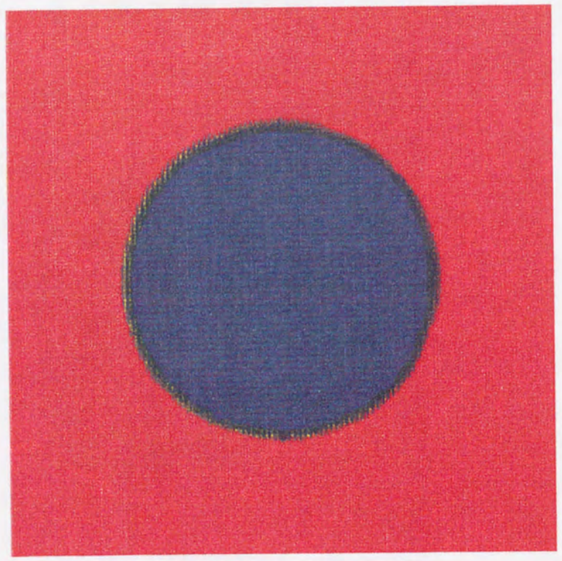


図 3.35　自由表面形状（t=1.00）

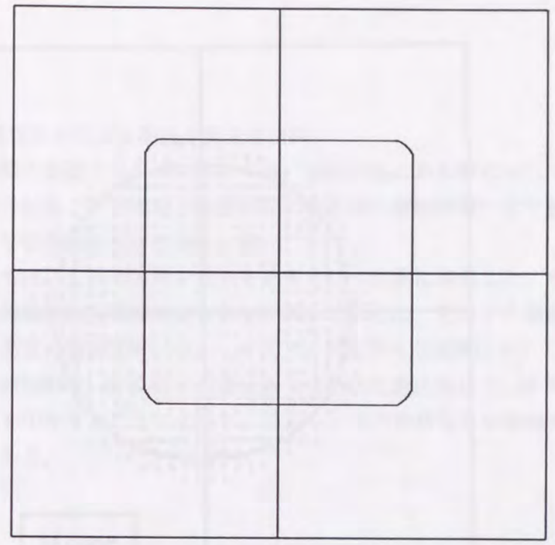


図 3.36　速度ベクトル(t=0.0)

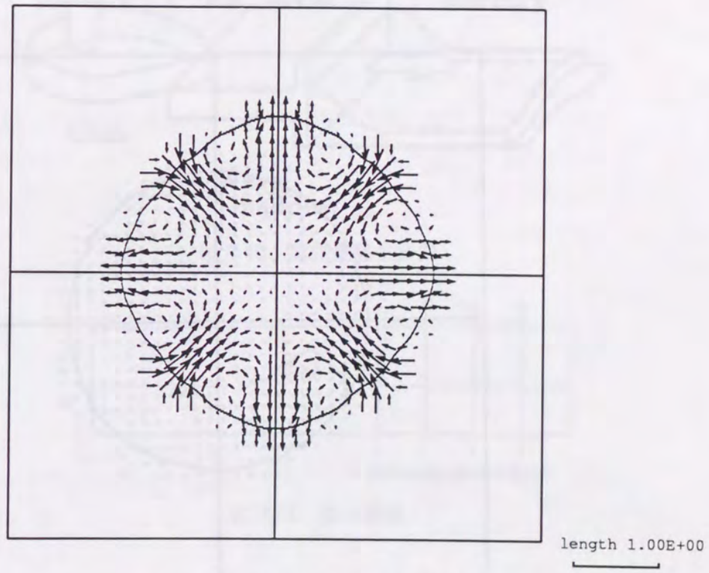


図 3.37　速度ベクトル(t=0.01)

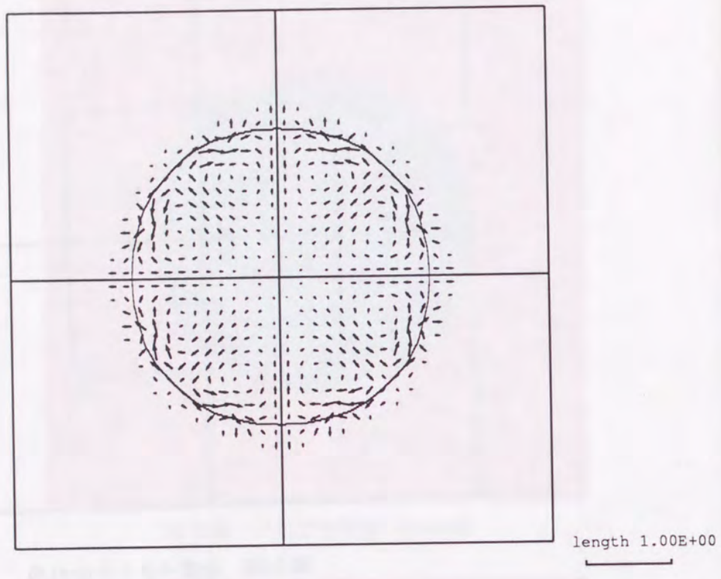


図 3.38　速度ベクトル(t=0.02)

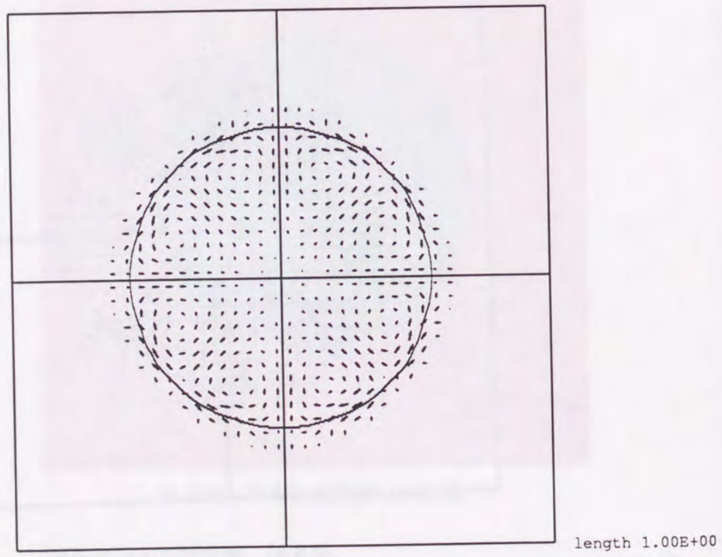


図 3.39　速度ベクトル(t=1.0)

第３項 電磁気力による溶融金属表面制御

鉄鋼の製造プロセスにおいては、溶融状態にある鋼に対して様々な処理が施される。その場合、溶融状態にある鋼の運動制御つまり流動の制御は大きな技術課題となる場合が多い。

今日では、これら液体が電気を通すという性質に着目した、電磁気を利用した流動制御技術が開発されている。ここでは、その中の電磁気を利用した表面波の制御技術についてモデリングを行った結果について記す。

物理現象は、図 3.40 の装置により作られた波に対して、図 3.41 のように磁場を印可することによって、ローレンツ力を発生させ制動するというものである。

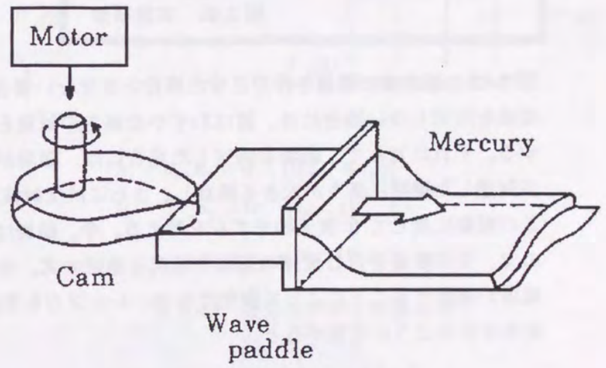


図 3.40　孤立波発生装置

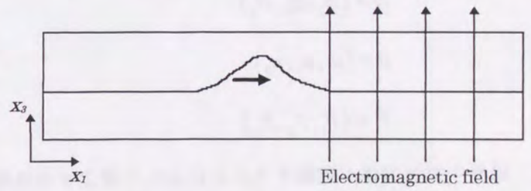


図 3.41　印可磁場

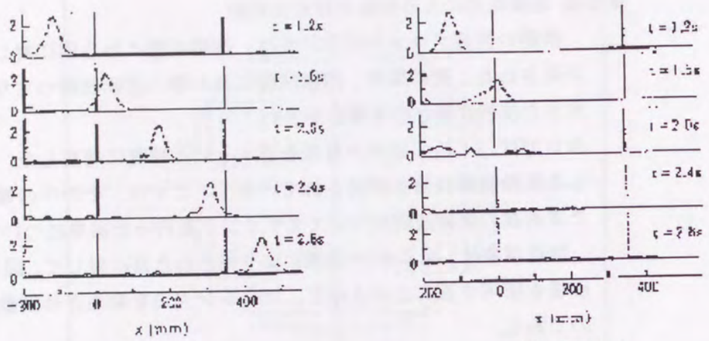


図 3.42　実験結果

図 3.42 に孤立波に磁場を作用させた場合とさせない場合の実験結果を示す。磁場を印可しない場合には、波はわずかな高さの減衰を伴いながら、進行する。それに対して、磁場を印可した場合には、磁場が作用する領域に波が到達した瞬間に高さが大きく減衰し、さらには反射波が発生する。
この現象に対して 2 次元のモデルを考える。今、磁場は一様と考えられるので、自由表面を含む流体の運動方程式と連続の式、それと磁界の中で導電体が運動することによって発生するローレンツ力を考慮すればよい。
記号を次のように定義すると、

$$\vec{J} = (J_1, J_2, J_3) \tag{3.80}$$

$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \tag{3.81}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \tag{3.82}$$

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \tag{3.83}$$

磁界中で導電体が運動することによって発生する渦電流とローレンツ力は、

$$\vec{J} = \sigma(\vec{u} \times \vec{B}) \tag{3.84}$$

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \tag{3.85}$$

と表される。ここで σ は導電体の電気伝導度である。

磁場を $\vec{B} = (0,0,B_3)$ とすると、式(3.84)(3.85)はそれぞれ、

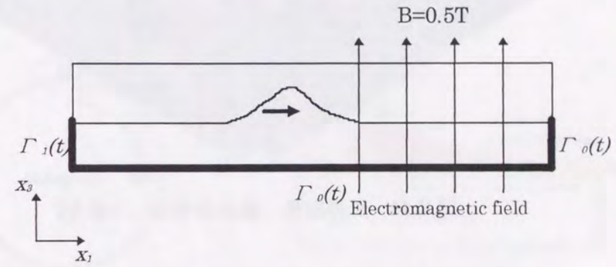
$$\vec{J} = \sigma(u_2 B_3, -u_1 B_3, 0) \tag{3.86}$$

$$\vec{F} = (-u_1 B_3^{\,2}, -u_2 B_3^{\,2}, 0) \tag{3.87}$$

となり、図 3.43 の 2 次元座標で考えた場合、ローレンツ力としては

$$F_1 = -u_1 B_3^{\,2} \tag{3.88}$$

だけを考慮すれば良い。
図 3.43 による条件にて計算した例を図 3.44,3.45 に示す。



$$\left.\begin{aligned} u_1 = u_0, u_2 = 0 \quad (0 \le t \le t_0) \\ u_1 = 0 \ , u_2 = 0 \quad (t_0 < t) \end{aligned}\right\} \ on\ \Gamma_1$$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad (0 \le t) \ on\ \Gamma_0$$

図 3.43　計算モデルと計算条件

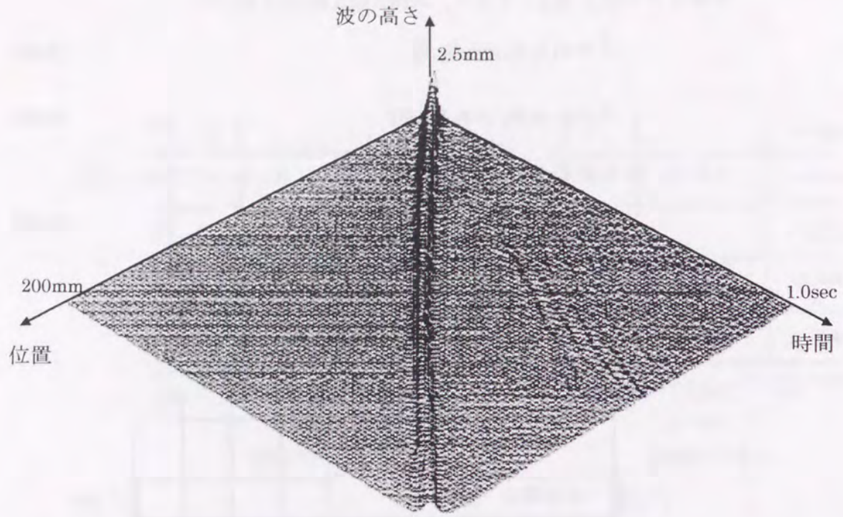


図 3.44　計算結果（磁場印可なしの場合）

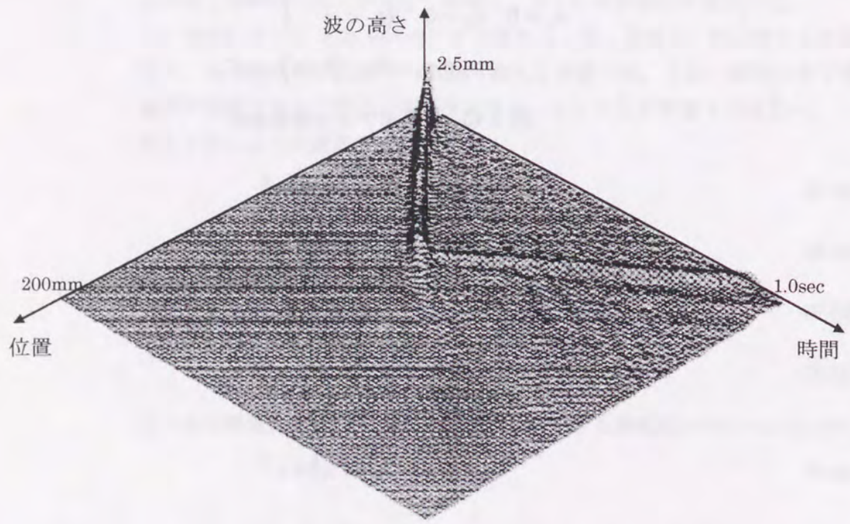


図 3.45　計算結果（磁場印可ありの場合）

図 3.44,3.45 より磁場印可の有無による孤立波の伝播の状態が実験結果と定性的によく一致しているのが分かる。

第４項 微小領域における熱流動問題

単ロール法鋳造と呼ばれる鋳造では、高速に回転している冷却ロール上に至近距離から溶湯を注ぎ、急速冷却を行う。これによって非常に薄いリボンを製造できる。このプロセスにおいては、図 3.46 の非常に微細な領域における流動と伝熱現象が、製品の品質及び鋳造条件決定に対して重要となる場合がある。

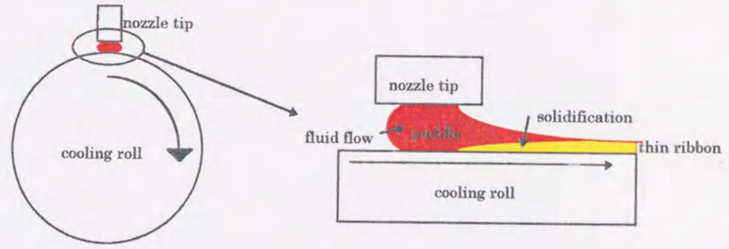


図 3.46　単ロール法鋳造

この問題を計算した例を以下に示す。

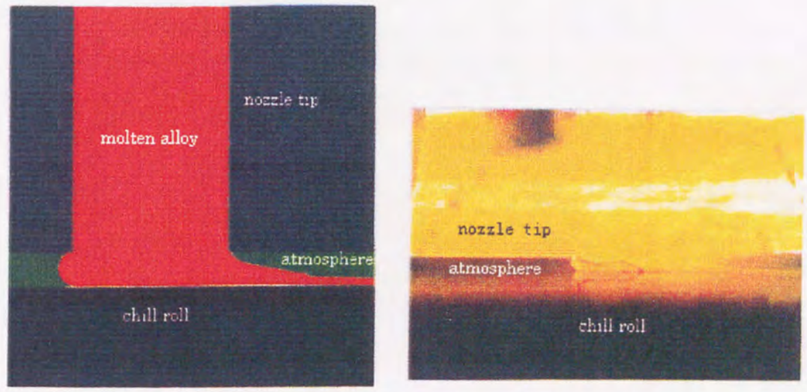


図 3.47　自由表面形状　（計算結果と実測）

図 3.47 には計算により得られた溶融金属の自由表面形状と顕微鏡望遠写真で撮影した実験による実際の溶融金属の形状を示す。図 3.47 の左図は計算結果であり、赤い色で溶融金属を示している。緑の領域は空気を示している。一方、右図は実験によって撮影された冷却ロール上の溶融金属の写真である。非常に高温でかつ冷却ロール表面に光沢があるため反射して見にくくなっているが、計算結果と同様な形状が識別できる。
下の図 3.48 には、計算により得られた温度分布を図 3.49 にはパドル内の流線を示す。

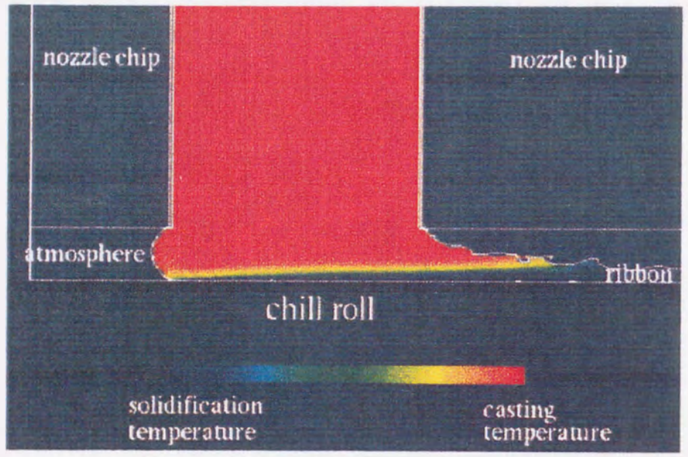


図 3.48　温度分布

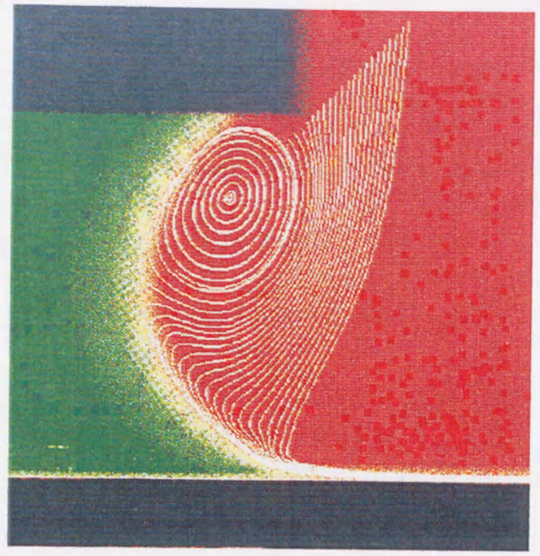


図 3.49　パドル内流線

図 3.48, 3.49 等の結果は、実際には目で確認できない現象に対する知見として物理現象の理解に対して非常に有効なものとして利用されている。
最後に図 3.50,51,52,53 に過去の実験結果による知見と今回計算で得た、リボン厚みに対する各種操業条件の影響を示す。図中の黒丸は本モデルによる計算結果であり、実線は Fiedler らが実験より求めた回帰式で計算した結果である。
これらの図からわかるとおり、過去 Fiedler らによって得られた知見は、今回計算により得た知見と非常に良い精度で一致している。

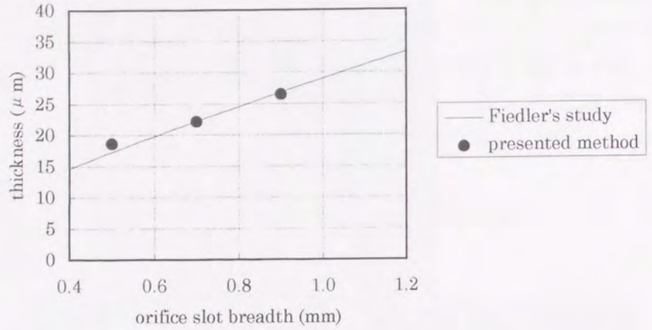


図 4.50　ノズルスリット幅の影響

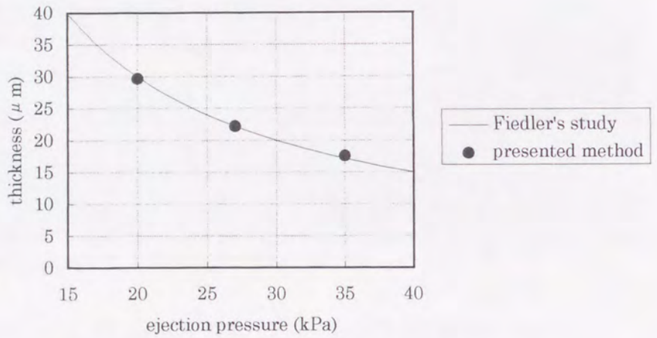


図 4.51　ロール回転速度の影響

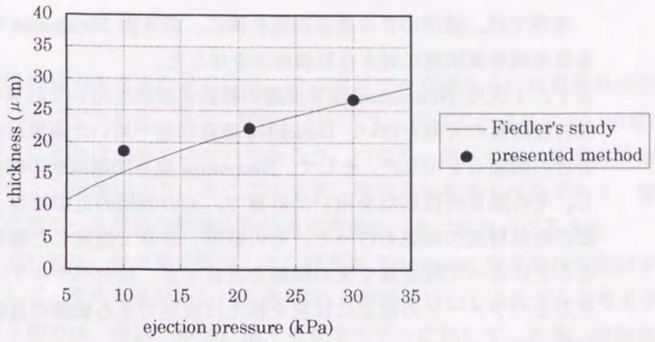


図 4.52　鋳造圧力の影響

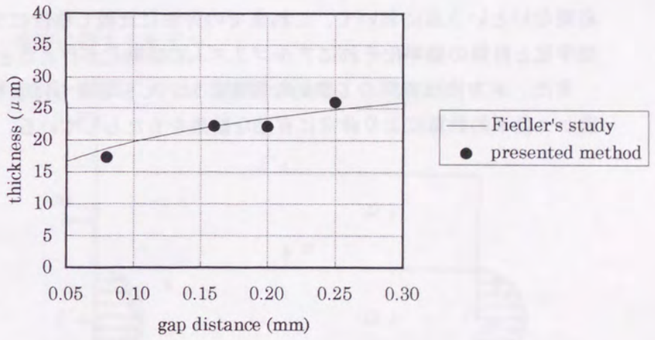


図 3.53　ロール・ノズル間距離の影響

第6節 結言

本章では、液体の自由表面問題を例に、非斉次 Neumann 境界条件が課される自由境界値問題に対する数値解法を示した。

まず、1次元 Neumann 境界問題の補助領域法を用いた計算モデルに対して離散特性関数の考察を行い、Dirichlet 境界問題で用いた離散特性関数を適用した場合の問題点を示した。そして、Neumann 境界問題向きの離散特性関数を提案し、その離散特性関数を用いた計算で，元の問題の近似精度と積分ペナルティ法の近似精度の確認を行った。その結果、本章で提案した離散特性関数を用いることによって精度良く元の問題を近似でき、積分ペナルティも計算格子の取り方とパラメータの設定に注意を払えば満足できる範囲の近似が行えることがわかった。

本方法を自由表面問題の計算モデルとして Navier-Stokes 方程式に適用し計算を行った結果においても、非常に良い精度で計算が可能であり、これまでの方法、例えば MAC 法や VOF 法に比較しても何の遜色もないことが明らかとなった。さらに本方法では、自由境界における応力境界条件に対して何の配慮も必要ないという点において、これまでの方法に比較し格段にプログラミングの効率化と計算の効率化それにアルゴリズムの簡略化が行えたと考える。

また、本方法は実際の工業的な場面においても著者らにより適用され、高精度かつ効率的計算により非常に有効な結果をもたらしている。

第4章　壁面における摩擦･浸透を考慮した流動問題

第1節 緒言

液体の自由表面を考えた場合には、その境界では空気あるいは異物性の流体と接しているはずである。また、壁面においても、流体の透過性のない物質は、我々の周りにそれほど多くはないであろう。つまり、流体における自由表面では他の流体との接触があり、そこには本来、摩擦力を考慮すべきであり、壁面においては然るべき浸透や摩擦係数分布を考慮すべきではないだろうか。

本章においては、第3章で提案した、非斉次 Neumann 境界条件の近似手法の応用として、流体の境界からの浸透･漏れと摩擦についてのモデルを考える。

先ず第2節では、浸透・摩擦に関する数学モデルに対して、笹本，河原田らによって考案された frictional type の境界条件を補助領域法を用い Navier-Stokes 方程式に適用した計算モデルを示す。そして、その計算モデルを数値的に解くためのアルゴリズムを第3節で示し、そのアルゴリズムを用い計算した結果を第4節に示す。

第2節 浸透・摩擦に関するモデル

次の様な領域・境界における問題を考える。

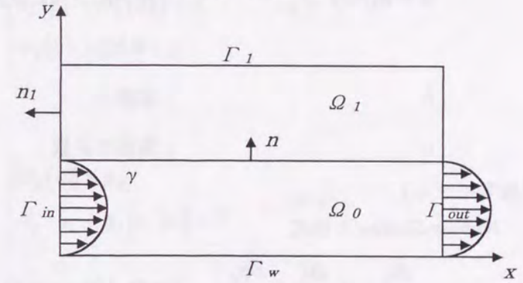


図 4.1 対象領域

ここで、図中の記号はそれぞれ、

Ω_0 ：流体の領域

Ω_1 ：多孔質媒体領域

γ ：接触境界

$\Omega = \Omega_0 \cup \gamma \cup \Omega_1$

$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$

$\Gamma_0 = \Gamma_{in} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{out}$

$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \gamma$

Γ_{in} ：流入境界

Γ_{out}：流出境界

Γ_w, Γ_1：壁面境界

を示す。

図 4.1 の様な領域の問題は、例えば地中における地下水流れの問題が考えられる。

今、記号をそれぞれ以下のように定義する。

u_n ：流速ベクトルuの法線方向成分

u_τ ：流速ベクトルuの接線方向成分

$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \upsilon e_{ij}(u)$ ：応力テンソル

$e_{ij}(u) = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ：ひずみテンソル

$\sigma(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$ ：応力場

$\sigma_i(u) = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1,2)$

$\sigma_n(u) = \sigma(u) \cdot n$ ：法線方向応力

$\sigma_\tau(u) = \sigma(u) \cdot \tau$ ：接線方向応力

$g = g(|u_n|)$ ：平均化された表面張力

$i, j = 1,2$

h ：摩擦力

υ ：動粘性係数

［数学モデル］

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (in\ \Omega_0)\ (0 < t \le T) \tag{4.1}$$

連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (in\ \Omega_0)\ (0 < t \le T) \tag{4.2}$$

流動における境界条件は、壁面Γ_1, Γ_wにおいては、

$$u_n = 0 \qquad (on\ \Gamma_1, \Gamma_w) \qquad (0 < t \le T) \tag{4.2}$$

$$u_\tau = 0 \ \text{(non-slip)} \ \text{or} \ \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0 \ \text{(free-slip)} \quad (on\ \Gamma_1, \Gamma_w)\ (0 < t \le T) \tag{4.3}$$

が、接触境界γにおいては、

$$\sigma_n(u) = g \qquad (on\ \gamma)\ (0 < t \le T) \tag{4.4}$$

$$\sigma_\tau(u) = h \qquad (on\ \gamma)\ (0 < t \le T) \tag{4.5}$$

が成り立つ。

流体の自由表面においてはgは表面張力であり、$h = 0$である。

式(4.4)(4.5)に対する笹本・河原田の frictional type 境界条件は、

$$|\sigma_k(u)| \le g_k \quad on\ \gamma \qquad (k = n, \tau) \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} |\sigma_k(u)| < g_k & u_k = 0 \qquad on\ \gamma \\ |\sigma_k(u)| = g_k & \begin{cases} u_k = 0 \ or \ u_k \ne 0 \\ \sigma_k \cdot u_k < 0 \end{cases} \qquad on\ \gamma \end{cases} \tag{4.7}$$

と表される。ここでg_kは境界γ上で決定される正の滑らかな関数である。

このスリップ境界条件は、整理すると次の三つ式によって表される。

$$\begin{cases} |\sigma_k(u)| \le g_k \\ u_k(g_k - |\sigma_k(u)|) = 0 \qquad on\ \gamma \\ \sigma_k(u) \cdot u_k \le 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

整理すると、

$$\begin{cases} |\sigma_k(u)| \le g_k \\ \sigma_k \cdot u_k + g_k |\sigma_k(u)| = 0 \end{cases} \qquad on\ \gamma \tag{4.9}$$

を得る。

この(4.9)式を正規化して表すと、

$$-\sigma_k(u) = g_k \tanh\left(\frac{u_k}{\varepsilon}\right) \tag{4.10}$$

となる。ここでεはある小さな正の定数であり、u_kは接触境界における流速を表す。

式(4.10)を補助領域法を用い近似された Navier-Stokes 方程式(3.52)に適用することによって 、壁面における浸透･摩擦についての計算モデルが構成される。

［計算モデル］

補助領域法により近似されたNavier-Stokes方程式は式 (3.52)で表される。ここで、応力の境界条件として、式(3.52)の右辺第３項と第４項に対して式(4.10)を適用すると以下の式を得ることができる。

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_i}{\partial t}+\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)u^{\varepsilon}{}_j\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma^{\varepsilon}{}_{ij}}{\partial x_j}-\varepsilon^{-2\beta}\cdot\chi^{\varepsilon}\cdot u^{\varepsilon}{}_i+\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)f_i$$
$$+g\cdot\tanh\left(\frac{u^{\varepsilon}{}_2}{\varepsilon^{-\delta}}\right)\cdot\left(\nabla\chi^{\varepsilon}\right)_i \qquad (4.11)$$
$$+h\cdot\tanh\left(\frac{u^{\varepsilon}{}_1}{\varepsilon^{-\delta}}\right)\cdot\left(\Sigma\chi^{\varepsilon}\right)_i$$
$$\left(in\,\Omega\right)\left(0<t\le T\right)\,i,j=1.,2$$

連続の式は

$$\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \qquad \left(in\,\Omega\right)\left(0<t\le T\right) \qquad (4.12)$$

となる。また、境界条件は、

$$u_n=0 \qquad \left(on\,\Gamma_1\right)\ \left(0<t\le T\right) \qquad (4.13)$$

$$u_\tau=0\ \text{(non-slip) or}\ \frac{\partial u_\tau}{\partial n}=0\ \text{(free-slip)}\quad \left(on\,\Gamma_w\right)\left(0<t\le T\right) \qquad (4.14)$$

ここで、

$$\sigma^{\varepsilon}{}_{ij}=-\delta_{ij}\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)p^{\varepsilon}+\left\{\upsilon\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{2\alpha}\chi^{\varepsilon}\right\}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (4.15)$$

$$\nabla\chi^{\varepsilon}=\left(\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_1},\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_2}\right) \qquad (4.16)$$

$$\Sigma\chi^{\varepsilon}=\left(\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_2},-\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_1}\right) \qquad (4.17)$$

$$\chi(t)=\begin{cases}1 & \left(in\,\Omega_1(t)\,,\,\left(0<t\le T\right)\right)\\ 0 & \left(in\,\Omega_0(t)\,,\,\left(0<t\le T\right)\right)\end{cases} \qquad (4.18)$$

であり、gとhは接触境界上で定義される滑らかな関数である。

式(4.11)の右辺第３項が接触面（接触境界）における浸透に関するモデルであり、第４項が摩擦に関するモデルとなっている。

今、gを定数とすると式(4.10)の右辺は図 4.2 の関係を示す。この関係から明らかなとおり、εは正の小さな定数であるから、境界における流速の向きと大きさによって接触境界において外力が作用することになる。

境界における摩擦を例にとれば、接触境界における接線方向流速 u_0によるせん断応力が$g\cdot\tanh\left(\frac{u_o}{\varepsilon}\right)$よりも小さい場合にはnon-slip境界条件となり、せん断応力が$g\cdot\tanh\left(\frac{u_o}{\varepsilon}\right)$を超えた場合には$g\cdot\tanh\left(\frac{u_o}{\varepsilon}\right)$の抵抗力が作用するslip境界条件となる。

つまりg,hとεによって、多様な摩擦・浸透の境界条件を表すことができるといえる。

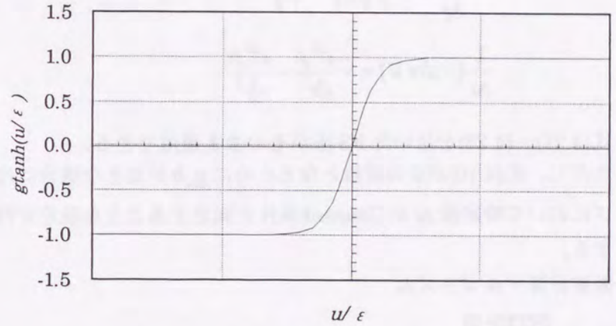


図 4.2 式(4.10)概略

第3節　数値計算アルゴリズム

本章で示した数学モデルを差分法で解く場合には、3章で説明したアルゴリズムが殆どそのまま適用できる。

つまり式(4.11)は

$$F=(1-\chi)f_i+g\cdot\tanh\left(\frac{u_2}{\varepsilon^{-\delta}}\right)\cdot(\nabla\chi)_i+h\cdot\tanh\left(\frac{u_1}{\varepsilon^{-\delta}}\right)\cdot(\Sigma\chi)_i \quad (4.19)$$

とすれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(u,p,F) \quad (4.20)$$

と表すことができ、

$$\frac{\overline{u}-u^n}{\Delta t}=f(u^n,0,F^n) \quad (4.21)$$

$$\frac{u^{n+1}-\overline{u}}{\Delta t}=f(0,p^{n+1},0) \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(-div\,\overline{u})=-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (4.23)$$

式(4.21)～(4.23)を用いたFS法がそのまま適用できる。

ただし、式(4.10)が$\overline{u}$の関数となるためにg,hが大きな場合には、各計算ステップにおいて時定数ΔtがCourant条件を満足するような設定を行うよう注意を要する。

数値計算アルゴリズム

[STEP 0]

$\chi(x,y)$の設定とu^0,p^0に初期条件を設定

[STEP 1]

式(4.13)より

$$\overline{u}=u^0+\Delta t\cdot f(u^0,0,F) \quad (4.24)$$

として速度の中間値を求める

[STEP 2]

式(4.23)より

$$-\frac{1}{\Delta t}div\,\overline{u}=-\Delta p^1 \quad (4.25)$$

として圧力p^1を求める。

[STEP 3]

式(4.22)により、

$$\frac{u^1-\overline{u}}{\Delta t}=f(0,p^1,0) \quad (4.26)$$

として速度u^1を求める。

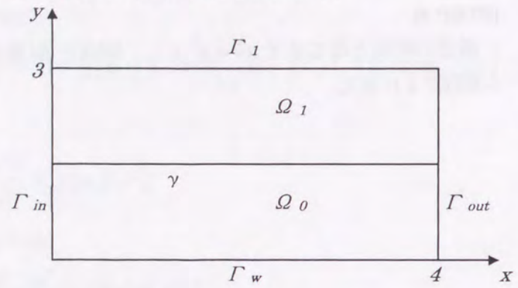
[STEP 4]

所定の時刻となるまで$u^0=u^1$とし、時刻をΔt進めて、

STEP 1に戻る。

第４節 数値計算例

浸透・摩擦を考慮した数学モデルに対して、実際にFS法を用いた計算アルゴリズムにより以下の条件で計算した結果を示す。



Boundary conditions

$$P = 0 \ \left(in\ \Omega_1\right)$$
$$P = 0 \ \left(on\ \Gamma_{out}\right)$$
$$u_x = 1 \ \left(on\ \Gamma_{in}\right)$$
$$u_x = 0\ ,\ u_y = 0 \ \left(on\ \Gamma_w\right)$$
$$u_x = 0\ ,\ u_y = 0 \ \left(on\ \Gamma_1\right)$$

Property

$$\mathrm{Re} = 10.0 \ \left(in\ \Omega_0\right)$$

図 4.3 計算条件

(case 1) $g = k, h = 0, k = 0.001$
(case 2) $g = k, h = 0, k = 0.01$
(case 3) $g = k, h = 0, k = 0.1$
(case 4) $g = k, h = 0, k = 1.0$
(case 5) $g = k, h = 0, k = 10.0$
(case 6) $g = k, h = 0, k = 100.0$
(case 7) $g = 100.0, h = k, k = 0.001$
(case 8) $g = 100.0, h = k, k = 0.01$
(case 9) $g = 100.0, h = k, k = 0.1$
(case 10) $g = 100.0, h = k, k = 1.0$
(case 11) $g = 100.0, h = k, k = 10.0$
(case 12) $g = 100.0, h = k, k = 100.0$
(case 13) $g = 0.0, h = k, k = 0.001$
(case 14) $g = 0.0, h = k, k = 0.01$
(case 15) $g = 0.0, h = k, k = 0.1$
(case 16) $g = 0.0, h = k, k = 1.0$
(case 17) $g = 0.0, h = k, k = 10.0$
(case 18) $g = 0.0, h = k, k = 100.0$
(case 19) $g = k, h = 0.0$ （kの値は図中に示す）
(case 20) $g = k, h = 0.0$ （kの値は図中に示す）
(case 21) $g = 100.0, h = k$ （kの値は図中に示す）

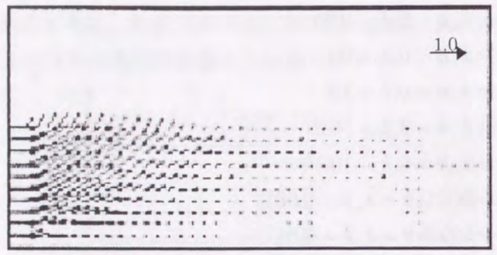


図 4.4　(case 1)　$g = k, h = 0, k = 0.001$

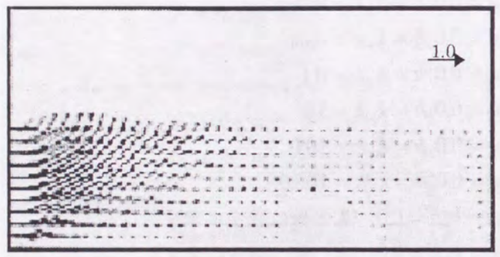


図 4.5　(case 2)　$g = k, h = 0, k = 0.01$

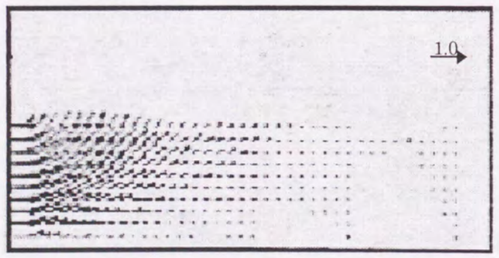


図 4.6　(case 3)　$g = k, h = 0, k = 0.1$

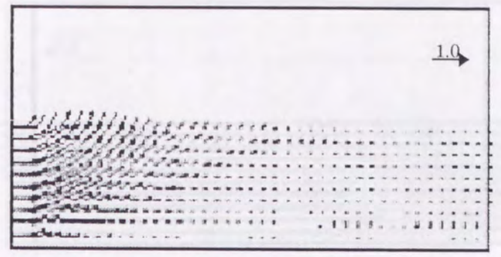


図 4.7　(case 4)　$g = k, h = 0, k = 1.0$

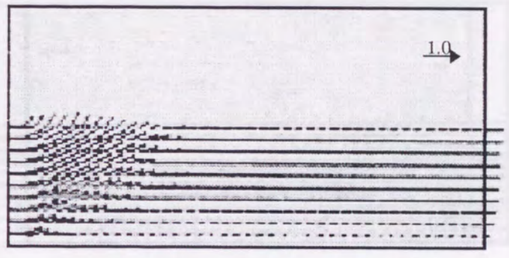


図 4.8　(case 5)　$g = k, h = 0, k = 10.0$

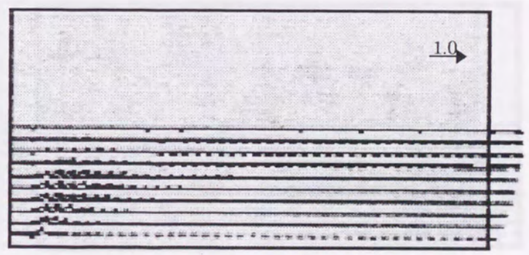


図 4.9　(case 6)　$g = k, h = 0, k = 100.0$

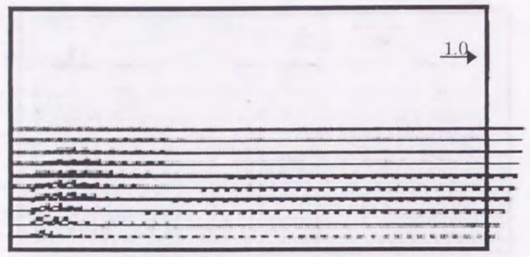


図 4.10　(case 7)　$g = 100.0, h = k, k = 0.001$

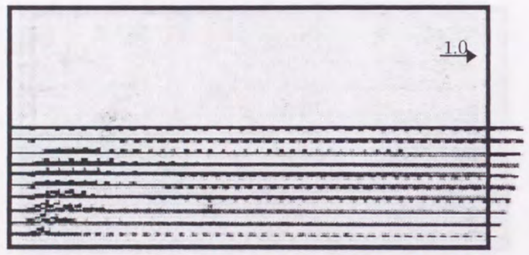


図 4.11　(case 8)　$g = 100.0, h = k, k = 0.01$

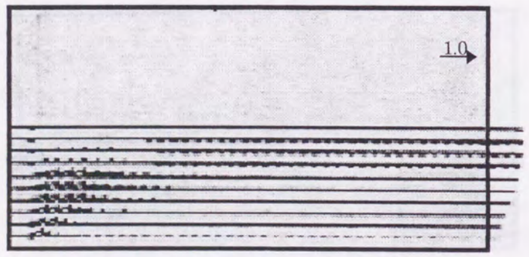


図 4.12　(case 9)　$g = 100.0, h = k, k = 0.1$

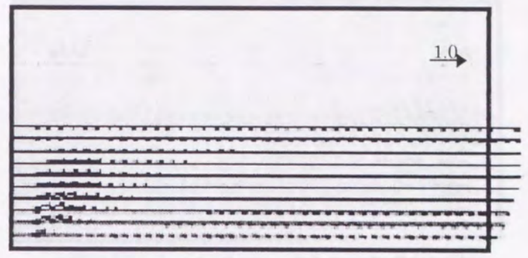


図 4.13　(case 10)　$g = 100.0, h = k, k = 1.0$

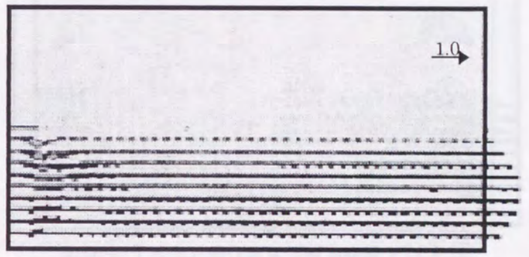


図 4.14　(case 11)　$g = 100.0, h = k, k = 10.0$

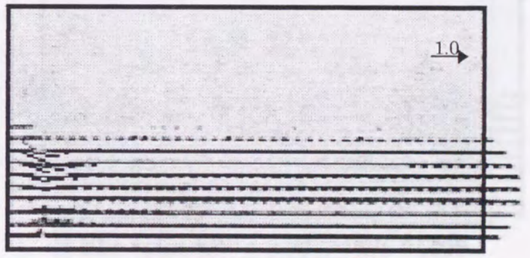


図 4.15　(case 12)　$g = 100.0, h = k, k = 100.0$

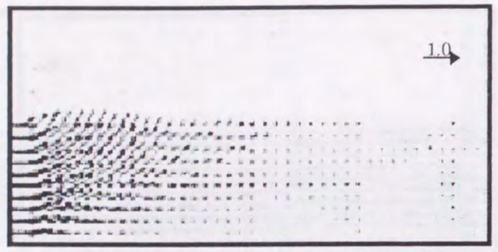


図 4.16 (case 13) $g = 0.,h = k,k = 0.001$

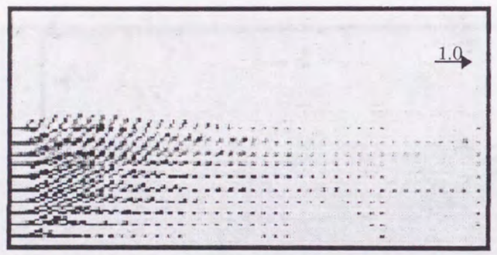


図 4.17 (case 14) $g = 0.0,h = k,k = 0.01$

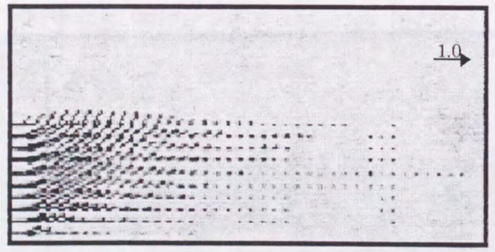


図 4.18 (case 15) $g = 0.0,h = k,k = 0.1$

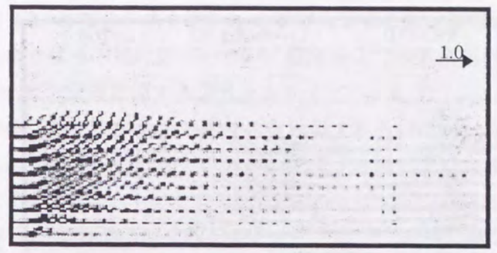


図 4.19 (case 16) $g = 0.0,h = k,k = 1.0$

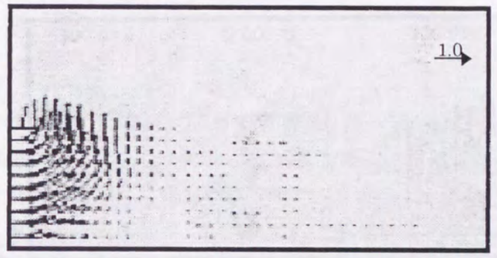


図 4.20 (case 17) $g = 0.0,h = k,k = 10.0$

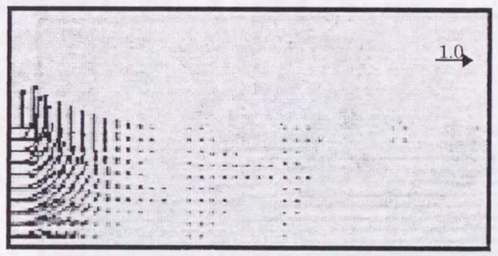


図 4.21 (case 18) $g = 0.0,h = k,k = 100.0$

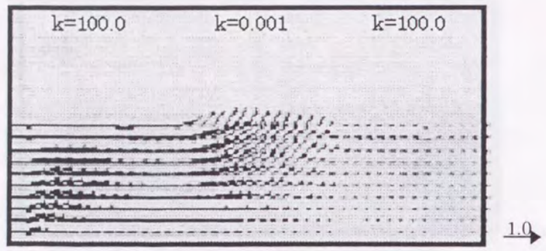


図 4.22　(case 19)　$g = k, h = 0.0$

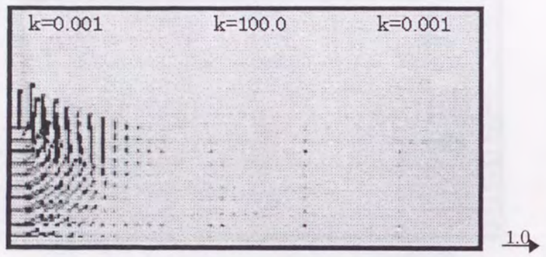


図 4.23　(case 20)　$g = k, h = 0.0$

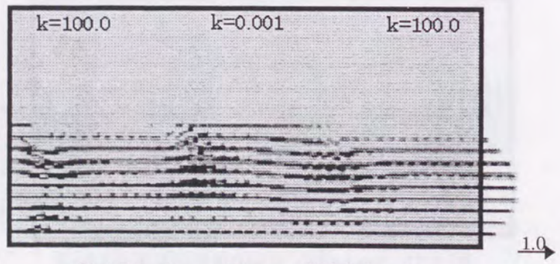


図 4.24　(case 21)　$g = 100.0, h = k$

・ case 1～6 は摩擦力を 0 とし、浸透に関する係数を変えた場合のケースである。図 4.3～8 で分かるとおり g の値が大きくなり、浸透の抵抗が大きくなるに連れてクエット流に近づいていく様子がよくとらえられている。

・case6～12 は浸透に関する係数を大きくとり、境界からの浸透を抑制したうえでの摩擦に関する係数を変化させた計算である。h の値が大きくなるに連れて摩擦に対する抵抗が増加し、クエット流からポアゾイユ流に近づいていく様子がよくわかる。

・case13～18 は浸透に関する係数を 0 とした上で摩擦に関する係数を変化させた計算である。摩擦に関する係数が小さい場合でも、入り口近傍で浸透が見られるが、摩擦係数を大きくとることにより浸透は入り口直近まで近づく。

・case19～21 は境界における条件に分布を持たせた場合の計算結果である。それぞれ、境界における浸透・摩擦力の影響を良く表した結果となっている。

第 5 節　結言

本章では、笹本・河原田によって考案された frictional type の境界条件を特異摂動型補助領域法を用い Navier-Stokes 方程式に適用することにより、流動場における浸透・摩擦を考慮した数学モデルを示した。そして、その数学モデルに対して補助領域法に基づく計算モデルと数値計算アルゴリズムを示した。本モデルを用いることによって、境界における様々な条件が再現できることが数値実験により確認された。本モデルを実際に数値的に解く場合には、非圧縮性流体の解析で用いられるアルゴリズム、例えば MAC 法，SMAC 法，HSMAS 法，FS 法，SIMPLE 法，SIMPLER 法，SIMPLEST 法の何れを用いても簡単に計算が可能である。但し、外力を陽的に扱う解法に対しては、浸透或いは摩擦に対する抵抗力を大きくとる場合に時定数 Δt を小さくとる必要があることに注意を要する。

第５章　多孔質媒体に接する流れの数値解析モデル

第１節　緒言

近年、砂漠の緑化のために高吸収ポリマーシート等の保湿材料が役立てられている。

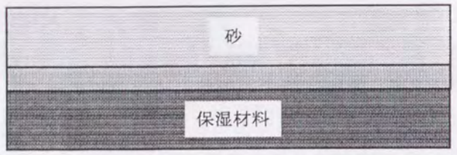


図 5.1 ポリマーシート利用技術

この原理は、砂漠の砂の下に保湿材料を敷き水をまくと保湿材料は飽和量以上の水分を吸収できないので、まく水の量がある一定量を超えると水分は砂漠の乾いた砂を潤していくことにある。つまり保湿材料と砂との境界において、保湿材料内の流体による力（応力）が境界の抵抗より大きくなることによって、砂にしみだしていく現象である。また、この物理現象は地震時の液状化現象とも共通する部分を有している。図 5.2 のように液状化現象とは、地震によって地盤の浸透率が大きくなることによって地下水が地盤層に浸透していく現象であるから、ポリマーシート等の利用と同じく、異なる媒質が接するところでの境界における抵抗に関する流動現象と捉えることができる。

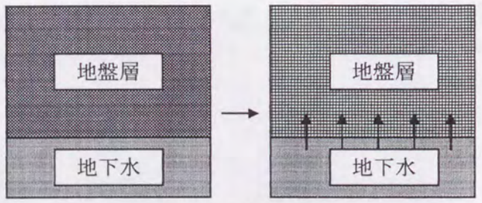


図 5.2 液状化現象

これまで、異なる媒質が接するところでの現象を扱うモデルとしては、壁面における乱流モデルや気体と液体の摩擦に関するモデルが報告されているのみであり、保湿材と砂や液状化のような異なる媒質間における浸透や摩擦に関するモデルはほとんどない。まして、異媒質間の境界における現象を考慮し、さらに異媒質双方の流れを同時に扱った例はない。

そこで、本章ではこういった現象を考察するための数学モデルとして、第 4 章

で提案した笹本・河原田の fraction type の境界条件を用いた計算モデルの拡張として、多孔質媒体内の流動をも考慮した計算モデルを考える。そして、そのモデルを計算するための数値計算アルゴリズムを構成し、最後に幾つかの計算結果について示す。

先ず、第 2 節では、笹本・河原田の farction type の境界条件を用いた 2 相の流動を考慮した計算モデルを示し、そして、第 3 節でその計算モデルに対する数値計算アルゴリズムを構成する。第 4 節では、その数値計算アルゴリズムを用いた計算結果について示す。

第２節　数学モデル

図 5.3 の領域において、多孔質媒体に接触する流動層の流れと多孔質媒体中の流れを、接触境界 γ での境界条件を考慮した上で同時に考える。

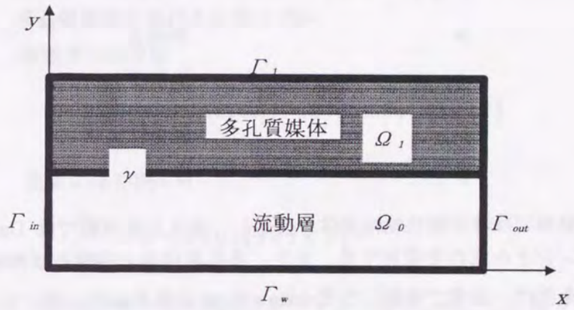


図 5.3 対象領域

図中の記号はそれぞれ、

Ω_0 ：流体の領域
Ω_1 ：多孔質媒体領域
γ ：接触境界
$\Omega = \Omega_0 \cup \gamma \cup \Omega_1$
$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$
$\Gamma_0 = \Gamma_{in} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{out}$
$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \gamma$
Γ_{in} ：流入境界
Γ_{out} ：流出境界
Γ_w, Γ_1 ：壁面境界

を示す。

また、記号をそれぞれ以下のように定義する。

u_n ：流速ベクトルuの法線方向成分

u_τ ：流速ベクトルuの接線方向成分

$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \upsilon e_{ij}(u)$ ：応力テンソル

$e_{ij}(u) = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ：ひずみテンソル

$\sigma(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$ ：応力場

$\sigma_i(u) = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1,2)$

$\sigma_n(u) = \sigma(u) \cdot n$ ：法線方向応力

$\sigma_\tau(u) = \sigma(u) \cdot \tau$ ：接線方向応力

h ：摩擦力

g ：表面張力

υ ：動粘性係数

p ：圧力

流動層では非圧縮性粘性流体を仮定し、多孔質媒体層では Darcy 則に基づくポテンシャル流れを仮定する。また、多孔質媒体と接する接触境界γにおける境界条件は、前章で提案した Friction Type の境界条件を用いる。

それぞれの層における数学モデルを以下に示す。

[数学モデル]

a) **流動場における計算モデル**

運動量の保存則

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (in\ \Omega_0)\ (0 < t \le T),\ i, j = 1,2 \tag{5.1}$$

質量の保存則

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (in\ \Omega_0)\ (0 < t \le T) \tag{5.2}$$

境界条件

$$u_n = 0 \quad (on\ \Gamma_1, \Gamma_w)\ \ (0 < t \le T) \tag{5.3}$$

$$u_\tau = 0 \ \text{(non-slip)} \ \text{or} \ \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0 \ \text{(free-slip)}$$

$$(on\ \Gamma_1, \Gamma_w) \qquad (0 < t \le T) \tag{5.4}$$

$$u_n = u_{in} \quad (on\ \Gamma_{in})\ \ (0 < t \le T) \tag{5.5}$$

$$p = 0 \quad (on\ \Gamma_{\text{out}})\ \ (0 < t \le T) \tag{5.6}$$

接触境界γにおいては、

$$\sigma_n(u) = g \qquad (on\ \gamma)\ (0 < t \le T) \tag{5.7}$$

$$\sigma_\tau(u) = h \qquad (on\ \gamma)\ (0 < t \le T) \tag{5.8}$$

b) **多孔質媒体における計算モデル**

運動量の保存則

$$u_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (in\ \Omega_1)\ \ (0 < t \le T)\ \ (i = 1,2) \tag{5.9}$$

質量の保存則

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (in\ \Omega_1)\ (0 < t \le T) \tag{5.10}$$

$\phi = p + y$ ：圧力ポテンシャル（以下 *y=0* として扱う）

p ：圧力

[計算モデル]

a) **流動場における計算モデル**

運動量の保存則

$$\frac{\partial u^\varepsilon{}_i}{\partial t} + (1 - \chi^\varepsilon) u^\varepsilon{}_j \frac{\partial u^\varepsilon{}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma^\varepsilon{}_{ij}}{\partial x_j} - \varepsilon^{-2\beta} \cdot \chi^\varepsilon \cdot u^\varepsilon{}_i + (1 - \chi^\varepsilon) f_i$$
$$+ g \cdot \tanh\left(\frac{u_2}{\varepsilon^{-\delta}}\right) \cdot (\nabla \chi^\varepsilon)_i$$
$$+ h \cdot \tanh\left(\frac{u_1}{\varepsilon^{-\delta}}\right) \cdot (\Sigma \chi^\varepsilon)_i$$
$$(in\ \Omega)\ (0 < t \le T)\ (i = 1,2) \tag{5.11}$$

ここで$\sigma^{\varepsilon}{}_{ij} = -\delta_{ij}\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)p^{\varepsilon} + \left\{\upsilon\left(1-\chi^{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{2\alpha}\chi^{\varepsilon}\right\}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_{i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u^{\varepsilon}{}_{j}}{\partial x_i}\right)$

である。

質量の保存則

$$\left(1-\chi^{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_{i}}{\partial x_i} = 0 \qquad \left(in\ \Omega_0\right)\ \left(0 < t \le T\right) \tag{5.12}$$

b) 多孔質媒体における計算モデル

運動量の保存則

$$u^{\varepsilon}{}_{i} = -\chi^{\varepsilon}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \left(in\ \Omega_1\right)$$

$$\left(i = 1,2\right) \tag{5.13}$$

$\phi = p + y$ ：圧力ポテンシャル（以下 $y=0$ として扱う）

p ：圧力

質量の保存則

$$\chi^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}{}_{i}}{\partial x_i} = 0 \quad \left(in\ \Omega_1\right) \tag{5.14}$$

ここで、

χ ： $\chi = \begin{cases} 0 & \left(in\ \Omega_0\right) \\ 1 & \left(in\ \Omega_1\right) \end{cases}$ （領域を示す特性関数）

u ： 速度ベクトル

υ ： 流体の動粘性係数

ε ： 小さい正の定数

である。

ここで用いたモデルの範囲では、流動層と多孔質媒体の運動量保存則の方程式の実質的な違いは流動層における移流と拡散だけであるので、流動層と多孔質媒体を統一的に扱う解法を用いることもできる。しかし、個別に新たなモデルを組み込む場合のことを想定するならば、それぞれを個別に解くことができる解法であるほうが便利であると考えられる。そこで、ここでは共通の境界γで物理量が連続となる様にそれぞれの領域を別々に解く方法（領域分割法）を用いる。

また、ここでは、流動層と多孔質媒体の領域は時間的・空間的に変化しないと仮定する。

流動層と多孔質媒体との間の境界γでは、流速と圧力が連続である必要がある。図 5.3 の流動層（Ω_0）におけるγでの境界条件としては圧力か流速による条件が必要であり、多孔質媒体（Ω_1）では圧力による境界条件が必要である。

そこで、流動層を解く際のγにおける境界条件としては、多孔質媒体を計算することにより得られる圧力を条件とし、

$$p_{out} = p_1 \quad \left(on\ \gamma\right) \tag{5.15}$$

また一方の、多孔質媒体を解く際のγにおける境界条件としては、流動層を解くことによって得られる流速を用いると、式(5.6)から

$$\vec{u} = \left(u_1, u_2\right) = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \tag{5.16}$$

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial n}\right| = -u_2 \tag{5.17}$$

となる。

ここで、

u_0 ： 流動層における流速

p_0 ： 流動層における圧力

u_1 ： 流動層における流速

p_1 ： 流動層における圧力

とする。

第１項　多孔質媒体境界にディリクレ境界条件が課された場合のアルゴリズム

多孔質媒体の境界（γ以外）のどこかにディリクレ境界条件が課された場合のアルゴリズムについて示す。

[STEP 1]

流動層、多孔質媒体における物理量に初期値$u_0^0, p_0^0, u_1^0, p_1^0$を設定する。

[STEP 2]

γにおける圧力の境界条件を$p|_\gamma = p_1^0$として、式(5.1)をFS法により解き流動層における流速と圧力u_0^1, p_0^1を求める。

[STEP 3]

u_0^1のγにおける法線方向成分をu_nとして、次のLaplace方程式を解く

$$\Delta\phi = 0 \quad (in\ \Omega_1) \tag{5.18}$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = u_n \quad (on\ \gamma) \tag{5.19}$$

[STEP 4]

所定の時刻になるまで、$u_0^0 = u_0^1, u_1^0 = u_1^1, p_0^0 = p_0^1, p_1^0 = \phi$として

STEP 2へ戻る。

第２項　多孔質媒体境界にノイマン境界条件が課された場合のアルゴリズム

多孔質媒体の領域において以下の境界条件が課された場合の数値解法について示す。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad on\ \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6 \tag{5.20}$$

多孔質媒体のγ以外の境界において(5.10)の境界条件が課された場合の数値計算では次の２点に留意したアルゴリズムが必要となる。

一つは、Ω_1では連続の式を満たす必要があるが、式(5.10)の境界条件が与えられたとき、Ω_1で連続の式を満たすためには、境界γにおけるフラックス（u_F）は

$$u_F = \int_\gamma u_n ds = 0 \tag{5.21}$$

でなければならないことである。

また、もう一つは領域のすべての境界において Neumann 境界条件が課された場合には、解に一意性がなくなることである。これに対しては、流動場においては多孔質媒体における圧力が流動場の境界条件となるため、何らかの方法により解の一意性を持たせる必要がある。

ここでは、図5.4の条件でγにおける流速、圧力それぞれをγ上で平均化したスカラー量として、物理的な見地からアルゴリズムを考える。

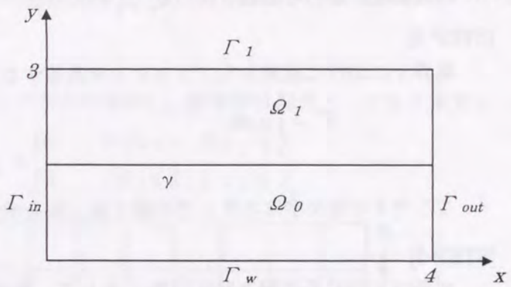


図5.4　条件

今、γでの流速が式(5.12)であったとすれば、

$$u_n|_\gamma = a \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + b \tag{5.22}$$

γにおけるフラックスは、

$$u_F = \delta = b \cdot x = 4b \tag{5.23}$$

となり、$b \neq 0$の場合には式(5.11)の条件を満足しない。そこで、γにおける流速（Ω_1における境界条件）を式(5.11)を満足するよう次のように修正する。

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = u_n - \delta \quad (on\ \gamma) \tag{5.24}$$

こうすることにより、Ω_1における数学的モデルの条件は満足される。

またΩ_1において解に任意性があることを利用して、式(5.14)の右辺を０に近づけるようにΩ_1における解ϕの平均値を操作する。

つまり、Ω_0とΩ_1の平均的な圧力差がγにおいてδだけあると解釈して、フラックスの不釣り合い量を修正するための圧力増分として、Ω_1にδだけ加えていく。この操作を繰り返すことにより、γにおけるフラックスは０に漸近していくとともに、Ω_1においては解が特定されていく。

以下に具体的アルゴリズムを示す。

[STEP 1]
初期値 $u_0^0, p_0^0, u_1^0, p_1^0$ の設定

[STEP 2]
γ における圧力の境界条件を $p|_\gamma = p_1^0$ として、式(5.1)を FS 法により解き流動層における流速と圧力 u_0^1, p_0^1 を求める。

[STEP 3]
境界 γ における流速からフラックスを計算する。

$$\delta^n = \int_\gamma u_1 ds \tag{5.25}$$

ここで δ の肩文字はステップの繰り返し数を示す。

[STEP 3]
u_0^1 の γ における法線方向成分を u_n として、次の Laplace 方程式を解く

$$\Delta\phi = 0 \quad (in\ \Omega_1) \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (on\ \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6) \tag{5.27}$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = u_n - \delta^n \quad (on\ \gamma) \tag{5.28}$$

解を ϕ^1 として、以下の式で正規化する。

$$\tilde{\phi}^1 = \phi^1 - \frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1} \phi^1 d\Omega \tag{5.29}$$

[STEP 4]
以下の式で Ω_1 の圧力を修正する。

$$\phi = \tilde{\phi}^1 + k^n \tag{5.30}$$

ここで

$$k^1 = \delta^o \tag{5.31}$$

$$k^n = k^{n-1} + \delta^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \delta^j \tag{5.32}$$

である。

[STEP 5]
所定の時刻になるまで、$u_0^0 = u_0^1, u_1^0 = u_1^1, p_0^0 = p_0^1, p_1^0 = \phi$ として STEP 2 へ戻る。

以上が、多孔質媒体の境界において Neumann 境界条件が課された場合のアルゴリズムである。
式(5.22)は解の一意性のために付与された式で、式(5.15)(5.18)が境界 γ における制約条件（フラックスが０）を満たすために付与された式である。

第４節　計算結果

離散化手法として差分法を用い、離散特性関数として第３章で示した。

$$\chi_{ij} = \begin{cases} 0 & , 0 \le i \le I\ ,\ 0 \le j \le j_i \\ 1 & , 0 \le i \le I\ ,\ j_i < j \le J \end{cases} \tag{5.33}$$

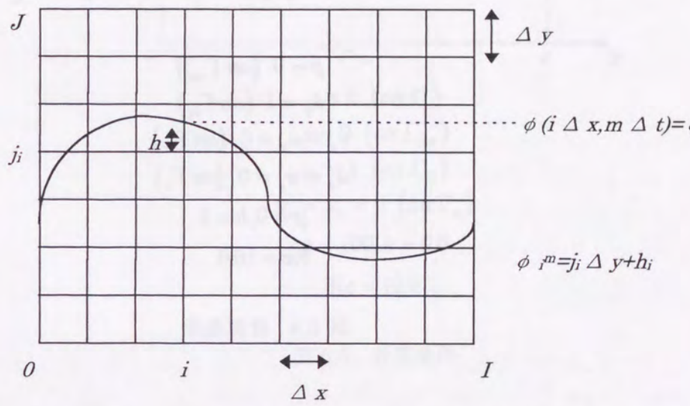
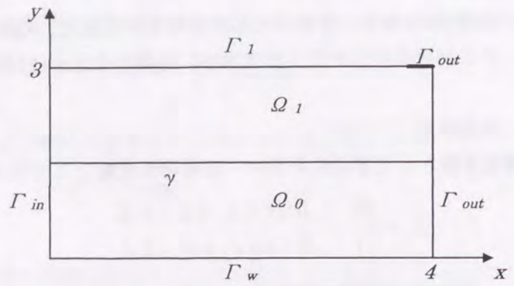


図 5.5　２次元離散特性関数

を用いて計算した結果を次項以下に示す。

第１項 ディリクレ境界条件の場合

第３節で示したアルゴリズムを用い、図 5.6 の条件で計算した結果を図 5.5 に示す。



$$p = 0 \ \left(on\, \Gamma_{out}\right)$$
$$u_x = 1 \ \left(on\, \Gamma_{in}\right)$$
$$u_x = u_y = 0 \ \left(on\, \Gamma_w\right)$$
$$u_x = u_y = 0 \ \left(on\, \Gamma_1\right)$$
$$g = 0, h = 0$$
$$\mathrm{Re} = 10.0$$

図 5.6　計算条件

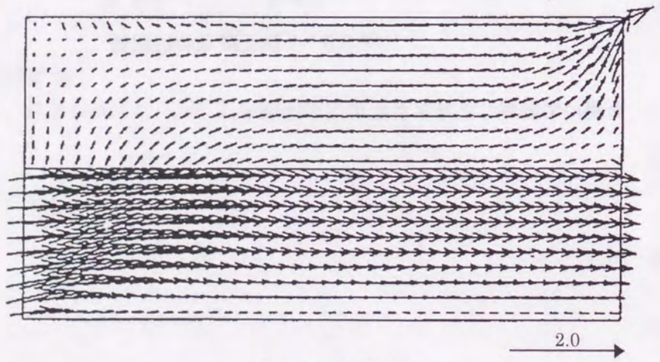
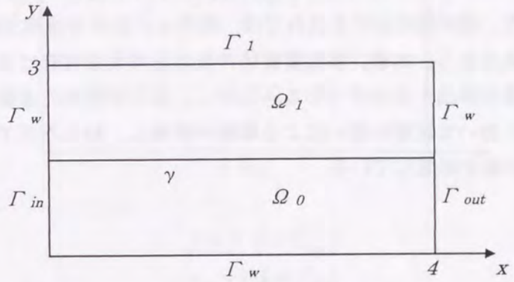


図 5.7　計算結果

多孔質媒体を考慮しない場合の流動層の流れ場は、本条件の場合、第４章に示したとおり流入境界近傍での境界γの法線方向抵抗力がないために、

右端部まで流れが到達しない。しかし、多孔質媒体を考慮すると、多孔質媒体における出口の条件によっては、多孔質媒体内で圧力が流動層とほぼ同等となるために、境界γにおいて流動層に見かけ上の応力が作用する。これの影響によって、流動層では右端部に向かう流れを形成する。

次に図 5.8 の条件で計算した結果を図 5.9 に示す。



$$p = 0 \ \left(on\, \Gamma_1\right)$$
$$p = 0 \ \left(on\, \Gamma_{out}\right)$$
$$u_x = 1 \ \left(on\, \Gamma_{in}\right)$$
$$u_x = u_y = 0 \ \left(on\, \Gamma_w\right)$$
$$g = 100, h = 0.0$$
$$\mathrm{Re} = 10.0$$

図 5.8　計算条件

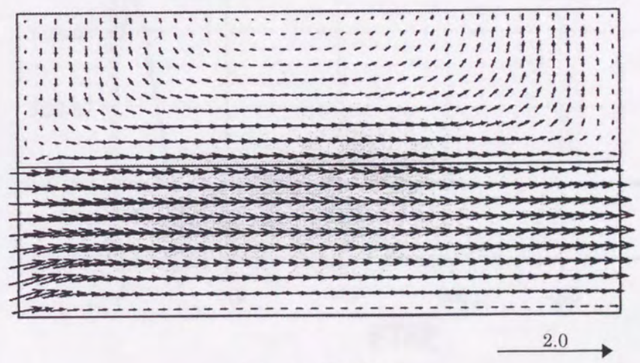


図 5.9　計算結果

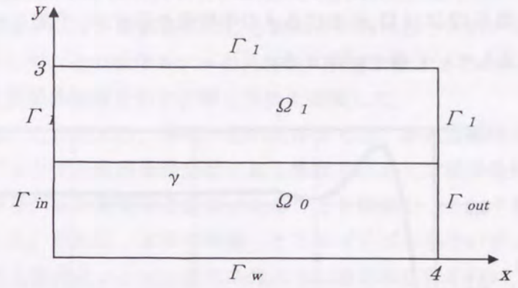
本計算は、境界γにおける法線方向の抵抗力係数 g を大きくした場合の計算で

ある。流入口は流動層の左端であるために、境界における抵抗力は当然、左端が最も大きくなり右に向かって次第に小さくなってくる。つまり、流動層における圧力は左から右に向かって小さくなってくる。その影響によって多孔質媒体内の圧力も境界γの近傍では、左から右にむかって小さくなる圧力勾配が形成され、その圧力勾配よって多孔質媒体内の流体が駆動されている。

一方、流動層における流れでは、境界γにおける接線方向の抵抗力係数 h が0であるから、本来、多孔質媒体の流れを考えなければクエット流に近い形の流れ場を形成するはずである。しかし、多孔質媒体の運動を考慮したために境界γにおいて流速の違いによる摩擦が作用し、むしろポアゾイユ流れに近い形の流れ場を形成している。

第2項　ノイマン境界条件の場合

図5.10の条件で計算した結果を図5.11～5.12に示す。



$$p = 0 \ \left(on\, \Gamma_{out}\right)$$
$$u_x = 1 \ \left(on\, \Gamma_{in}\right)$$
$$u_x = u_y = 0 \ \left(on\, \Gamma_w\right)$$
$$u_x = u_y = 0 \ \left(on\, \Gamma_1\right)$$
$$g = 0, h = 0$$
$$\mathrm{Re} = 10.0$$

図5.10　計算条件

図5.11には境界γにおけるフラックスの時系列的な変化を示す。

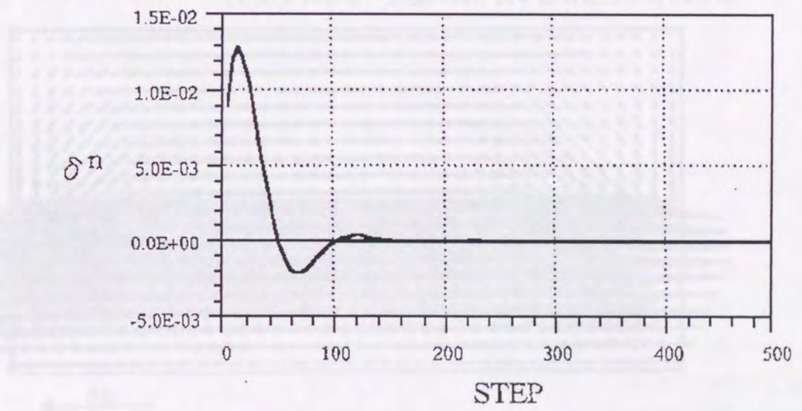


図5.11　境界γにおけるフラックス変化

本アルゴリズムで計算した結果では、境界γにおけるフラックスは、多孔質媒体における質量保存則を満足するよう0に漸近していく様子が現れている。
また図5.12にはΩ_1におけるϕの平均値を示すが、予測したとおりある特定の値に収束していく様子が伺える。

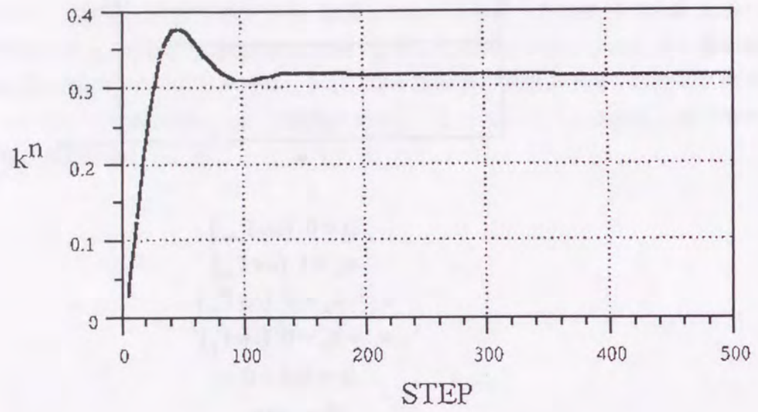


図5.12　Ω_1の平均圧力の変化

図5.13には計算により得られた速度ベクトルを示す。

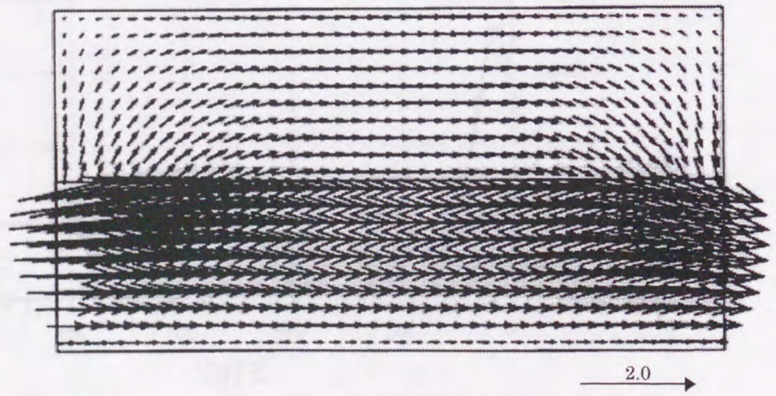


図5.13　速度ベクトル

第5節　結言

本章においては、笹本・河原田のFraction typeの境界条件を利用した流れ場のモデルの拡張として、異媒質における流れを同時に扱うための数学モデルを提案した。そして、その数学モデルを具体的に数値計算するための方法として、流動層と多孔質媒体領域を別々に解く方法を提案した。

本章で提案した方法では、体積一定の条件下では、多孔質媒体における境界条件としてディリクレ境界条件が課される場合とノイマン境界条件のみの場合とではアルゴリズムを変更する必要があることを指摘し、それぞれのアルゴリズムを構築した。さらに、本章で構築したアルゴリズムを用いディリクレ境界条件が課される場合とノイマン境界条件のみの場合の計算を行い、妥当な結果が得られることを数値実験により示した。

本章で示した数学モデルは異媒質における流動と、さらにその境界における流体の挙動をモデル化しており、パラメータの同定によっては非常に汎用性のあるモデルであるといえる。
例えば、保湿材料の応用や液状化現象だけでなく、温度場を連成させることによって、デンドライトを形成する凝固過程を含む流動現象などにも応用できる。
また、拡張性を考慮した上での解法を用いることによって本数学モデルの適用範囲の拡充がはかられたと同時に、それに対応したアルゴリズムを構築したことによって、安定した数値計算が可能であることを示すことができた。

第６章　浸透･自由表面を考慮した流動計算

第１節 緒言

自然に存在する流体の流動現象は、例えば波打ち際の海水の流れや河川における水の流れなど、図 6.1 のように様々な場所で様々な流れが有機的に関連し複合的に存在している。

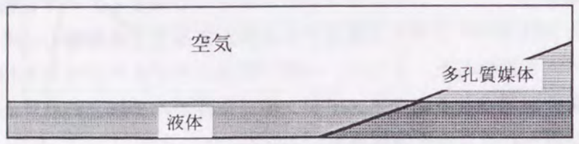


図 6.1 自然界における流れ

また、工業的にも同様のことが言える。

鉄鋼製造プロセスにおいては、高炉内部の流れや、転炉内部，連続鋳造機の鋳型内部の流れは、ガス＋スラグ＋溶鋼，空気＋パウダー（潤滑剤）＋溶鋼＋凝固殻（特に凝固初期）といった多種多様の流体が複雑にからみあって一つのシステムを形成しており、個別要素の相互バランスが製品品質に重要な影響を与える。

例えば、連続鋳造機鋳型内の流動では、パウダーと呼ばれる潤滑剤の挙動によっては鋳型と凝固殻との摩擦力によって製品の表面品質が大きく影響を受ける。また、パウダーは一般的に溶鋼よりも比重が軽いため、鋳型内では溶鋼・鋳型間のみならず溶鋼表面にも存在する。この溶鋼表面のパウダーは、溶鋼中に巻き込まれると不純物として最終的には表面欠陥あるいは、内部欠陥として大きな問題となる。さらに凝固殻と溶鋼流れの関係では、溶鋼が凝固する際にはデンドライトと呼ばれる非常に小さな樹枝状の形状を形成するが、この樹枝突起の隙間の流れが中心偏析と呼ばれる欠陥の原因と考えられている。

これら複合的かつ複雑な流動現象に対して、これまで一般的に用いられている数学モデルは複雑なシステムのある特定の領域に着目したものが大半である。それら数学モデルは実験や実機からの知見によって現象が物理的にある程度理解されたうえでは非常に有効である。しかし、現象が殆ど未知なものに対する検討や、既存のモデルからさらに精度を向上させた検討を行うためには、複合的かつ複雑な現象を総括的に考慮できるモデルが必要となる。

本性ではかかる観点より、分離多相流体の流れを摩擦・浸透を考慮した境界条件のもとで扱うことのできる数学モデルに対して、数値的に解くためのアルゴリズムを提案する。

第２節では砂浜における波の挙動を例に、自由表面と摩擦・浸透の境界条件を考慮した液体及び気体の流れに対して、多孔質媒体をも考慮した形の数学モデルを示した。数値計算モデルとしては、摩擦・浸透に関するモデルは４，５章で用いた Friction Type の境界条件を、液体と気体の流れを同時に扱う方法としては、密度の違いを利用した分離二相流のモデルとした。

そして、第３節では第２節で提案した流動に関する計算モデルを数値計算する場合に重要となる密度に関する移流方程式の解法について、幾つかのスキームを一次元の移流方程式を実際に解くとこにより精度検証した。

第４節では第３節で検討したスキームのうち精度の比較的よかった CIP（Cubic Interpolated Pseude-particle Method）スキームを用いた数値計算アルゴリズムを構築した。

第５節では、構築した数値計算アルゴリズムを用いて計算した、多孔質媒体への浸透を考慮した孤立波の伝播問題の計算結果を示す。

第２節　数学モデル

次の領域における空気，水の流動を考える。

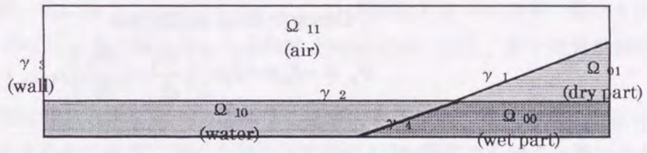


図 6.2 対象領域

γ_1, γ_4は固定として、それぞれの領域では、運動量，質量の保存則として以下のモデルを考える。

$$\rho_{air}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho_{air}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad in\ \Omega_{11} \tag{6.1}$$

$$\rho_{water}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho_{water}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad in\ \Omega_{10} \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\varepsilon_{01}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) \qquad in\ \Omega_{01} \tag{6.3}$$

$$\rho_{water}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho_{water}cu_i=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\varepsilon_{00}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$in\ \Omega_{00} \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial \rho_{air}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_{air}}{\partial x_i} = 0 \qquad in\ \Omega\left(=\Omega_{11}\cup\Omega_{10}\cup\Omega_{01}\cup\Omega_{00}\right) \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial \rho_{water}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_{water}}{\partial x_i} = 0 \qquad in\ \Omega\left(=\Omega_{11}\cup\Omega_{10}\cup\Omega_{01}\cup\Omega_{00}\right) \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad in\ \Omega\left(=\Omega_{11}\cup\Omega_{10}\cup\Omega_{00}\right) \tag{6.7}$$

ここで

ρ_{air} ：空気の密度
ρ_{water} ：水の密度
u ：流体の速度
p ：圧力
σ_{ij} ：応力テンソル
μ ：粘性係数
$\varepsilon_{00}, \varepsilon_{01}$ ：小さな正数
c ：Darcy の drag coefficient

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\mu \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

である。
次の領域を表す特性関数を用い

$$\chi_{kl} = \begin{cases} 1 & in\ \Omega_{kl} \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (k,l = 0,1) \tag{6.8}$$

これらを補助領域法により近似すると

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + c\chi_{00} u_i$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\chi_{11}+\chi_{10}\right)p\right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\mu + \chi_{00}\varepsilon_{00} + \chi_{01}\varepsilon_{01}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}$$
$$-\left\{1-\left(\chi_{01}+\chi_{11}\right)\right\}\cdot g_n \cdot \tanh\left(\frac{u_n}{\varepsilon_g}\right)\frac{\partial\left(\chi_{10}+\chi_{11}\right)}{\partial x_i}$$

$$in\ \Omega \tag{6.9}$$

$$\left(\chi_{11}+\chi_{10}+\chi_{00}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad in\ \Omega\left(=\Omega_{11}\cup\Omega_{10}\cup\Omega_{01}\cup\Omega_{00}\right) \tag{6.11}$$

と表される。
ここで、

$$\rho = \chi_{11}\rho_{air} + \left(\chi_{10}+\chi_{00}\right)\rho_{water} + \chi_{01} \tag{6.12}$$

$$\mu = \chi_{11}\mu_{air} + \chi_{10}\mu_{water} \tag{6.13}$$

である。

第３節　移流項に関する高精度スキーム

水と空気のように物性の異なる分離二相流体に対しては、水と空気の密度を計算セルに占める空気の割合 Fによって

$$\rho = \rho_{air}F + \rho_{water}\left(1-F\right) \tag{6.14}$$

として統一的に扱うことができる。ここで Fは計算セルが空気で満たされた場合には $F=1$で、水で満たされた場合は $F=0$をとる。また、水と空気が混在する場合には $0<F<1$の値をとる。
この方法は空気と水を統一的に扱うことができる反面、空気と水の界面の移動を考慮するために密度に関する移流方程式(6.11)を精度良く解く必要がある。
式(6.11)の移流項の近似が得られる解の精度に対して非常に重要なことは、第３章で１次風上差分を用いて計算した例で示した。そして、３章では数値拡散を抑制し精度の良い計算を行うための方法として、ドナー･アクセプター法を移流項の差分近似スキームとして用いた。
本節では、この移流方程式を解く際に現れる数値拡散をおさえて解く方法の検討を加える。
移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{6.15}$$

をuが一定として

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{6.16}$$

として考える。

（1）１次精度風上スキーム

１次精度風上スキームにより式(6.16)を離散化すると

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+\frac{1}{2\Delta x}\left\{u\left(\phi_{i+1}^n+\phi_i^n\right)-|u|\left(\phi_{i+1}^n+\phi_i^n\right)\right\} -\frac{1}{2\Delta x}\left\{u\left(\phi_i^n+\phi_{i-1}^n\right)-|u|\left(\phi_i^n+\phi_{i-1}^n\right)\right\}=0 \tag{6.17}$$

となる。これを書き直すと、

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+u\frac{\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n}{2\Delta x}-\frac{|u|\Delta x}{2}\frac{\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}=0 \tag{6.18}$$

となる。つまり１次精度の風上スキームは、２次精度の中心差分に数値粘性 $\mu=\frac{|u|\Delta x}{2}$ が付与されたスキームであると言える。

この数値粘性が１次精度の風上スキームは安定であるが精度が悪い所以である。

（2）Lax-Wendroff スキーム

Lax-Wendroff スキームは評価点近傍の関数を２次関数で近似する方法である。この方法を用いた式(6.16)の離散化式は、

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+u\frac{\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n}{2\Delta x}-\frac{u^2\Delta t}{2}\frac{\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}=0 \tag{6.19}$$

となる。

１次精度風上スキームに比較すると数値粘性の項が異なるだけである。

（3）流束修正スキーム

流束修正スキームは圧縮性流体で用いられる MUSCL 型の TVD スキームとともに良く用いられている方法で、高次スキームと低次スキームを数値振動の発生しないよう使いわける方法である。

手順としては、まず

(a) １次精度風上スキーム

(b) ３次精度風上スキーム

を用意し、

$$\text{(i)}\ \frac{\overline{\phi}_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+\frac{\widetilde{f}_{i+1/2}-\widetilde{f}_{i-1/2}}{\Delta x}=0 \tag{6.20}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{\Phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+\frac{\widetilde{F}_{i+1/2}-\widetilde{F}_{i-1/2}}{\Delta x}=0 \tag{6.21}$$

$$\text{(iii)}\ \frac{\phi_i^{n+1}-\overline{\phi}_i}{\Delta t}+\frac{\delta f_{i+1/2}-\delta f_{i-1/2}}{\Delta x}=0 \tag{6.22}$$

と離散化する。ここで $\widetilde{f}_{i+1/2}$ は１次精度風上スキーム，$\widetilde{F}_{i+1/2}$ は３次精度風上スキーム，$\delta f_{i+1/2}=\widetilde{F}_{i+1/2}-\widetilde{f}_{i+1/2}$ である。

計算手順は

[STEP 1]

高次精度スキームで Φ_i^{n+1} を計算する

[STEP 2]

制限関数（minmod 関数）を用いΦの振動状況を調べる。

振動しない（minmod≠0）ならば、(iii)により ϕ_i^{n+1} を計算し STEP 1 に戻る。

[STEP 3]

振動している（ minmod=0）ならば、$\phi_i^{n+1}=\overline{\phi}_i^{n+1}$ とし STEP 1 に戻る。

ここで

$$\min\mathrm{mod}(x,y,z)=\mathrm{sgn}(y)\max\left\{0,\min\left[x\ \mathrm{sgn}(y),|y|,z\ \mathrm{sgn}(y)\right]\right\}$$

である。

（4）CIP（Cubic Interpolated Pseude-particle Method）スキーム

CIP 法は、移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{6.23}$$

に対して、ある一つの計算格子区間における f のプロファイルの近似関数を３次関数を用いて

$$F_i(x)=a_i(x-x_i)^3+b_i(x-x_i)^2+f'_{i-1}+f_{i-1} \tag{6.24}$$

とおく。通常のスプライン法では係数 a_i,b_i,f_i' を x_i における解の連続性，一階微分の連続性，二階微分の連続性より決定するが、CIP 法では f の一次導関数 f' についての移流方程式

$$\frac{\partial f'}{\partial t}+u\frac{\partial f'}{\partial x}=0 \tag{6.25}$$

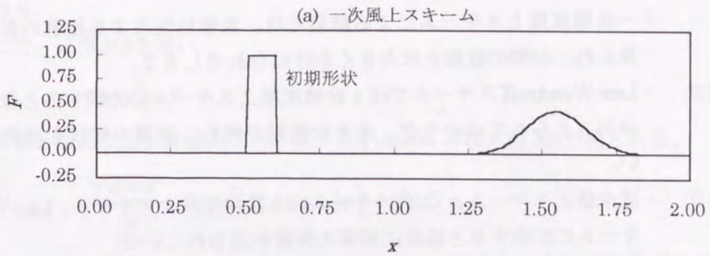
を(6.23)と同時に解くことによって f' を決定する。そして、a_i,b_i は f とその一階微分の連続性 $F_i(x_i)=F_{i+1}(x_i)\equiv f_i, F_i'(x_i)=F_{i+1}'(x_i)\equiv f_i'$ より求める。こうして、

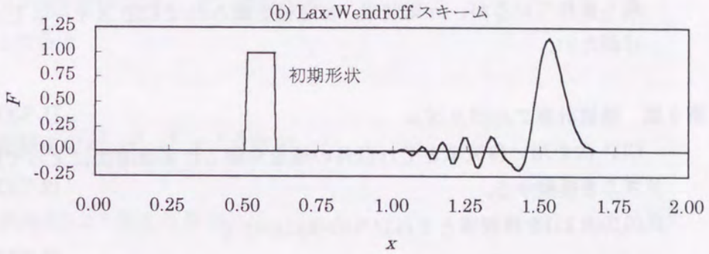
$$f_i^{n+1} = F_i(x_i - u\Delta t), \quad f_i'^{n+1} = F_i'(x_i - u\Delta t) \quad (c > 0) \quad (6.26)$$

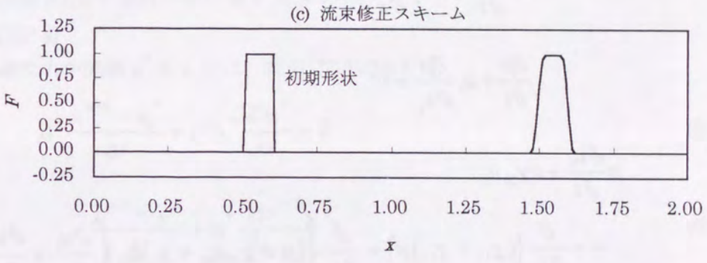
として f_i, f_i' の時間発展を求める。

図 6.3 にそれぞれのスキームを用い移流方程式を解いた数値計算結果をならべて示す。

計算は多くの周波数成分の波の合成と考えられる矩形波を初期条件として与え、$u = 1, \Delta t = 0.001, \Delta x = 0.01$ として 1000step まで行った。







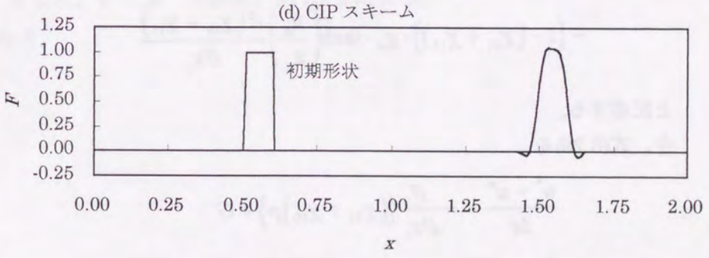


図 6.3　計算結果

・一次精度風上スキームによる結果では、数値粘性による拡散の影響が顕著に見られ、初期の波形とは大きくかけはなれてしまう。
・Lax-Wendroff スキームでは 1 次精度風上スキームに比較すると数値拡散は随分おさえられてはいるが、大きな振動が現れ、初期の形状を維持してはいない。
・流束修正スキームと CIP スキームは 1 次精度風上スキーム，Lax-Wendroff スキームに比較すると格段に精度の改善が図られている。
計算結果から得られる波形の形状のみから判断すれば、流束修正スキームが最も優れているが、計算効率，安定性を鑑みれば CIP スキームとの優劣はつけがたい。

第 4 節　数値計算アルゴリズム

CIP 法を用い移流項とそれ以外の項を分離した多段階法によって解くアルゴリズムを提案する。

式(6.9)(6.11)を移流項とそれ以外の項にわけて

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=0 \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=0 \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+c\chi_{00}u_i\\&=-\frac{\partial}{\partial x_i}\{(\chi_{11}+\chi_{10})p\}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\mu+\chi_{00}\varepsilon_{00}+\chi_{01}\varepsilon_{01})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\\&\quad-\{1-(\chi_{01}+\chi_{11})\}\cdot g_n\cdot\tanh\left(\frac{u_n}{\varepsilon_g}\right)\frac{\partial(\chi_{10}+\chi_{11})}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{6.29}$$

と記述する。

今、式(6.29)を

$$\frac{u^*-u^n}{\Delta t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\{(\chi_{11}+\chi_{10})p\}+G \tag{6.30}$$

と記述する。

式(6.30)の発散をとると、

$$\frac{div\,u^*-div\,u^n}{\Delta t}=-\Delta\{(\chi_{11}+\chi_{10})p\}+div\,G \tag{6.31}$$

を得る。

ここで、式(6.10)を用い

$$div\,u^*=0 \tag{6.32}$$

とすると MAC 法と同様の圧力に関する Poisson 方程式(6.33)が得られる。

$$\frac{-div\,u^n}{\Delta t}=-\Delta\{(\chi_{11}+\chi_{10})p\}+div\,G \tag{6.33}$$

この方程式を解くことによって圧力を求め、式(6.30)より速度の中間値 u^* を求め、式(6.27)(6.28)より u^{n+1},ρ^{n+1} を求める。

まとめると

[STEP 1]
　初期値の $u^0,\rho^0,p^0,\chi_{kl}{}^0$ を設定

[STEP 2]
　式(6.33)より圧力を算出

[STEP 3]
　式(6.30)より速度の中間値 u^* を求める

[STEP 4]
　速度の中間値 u^* をもとに、式(6.27)(6.28)を

$$\rho^n\frac{u_i{}^{n+1}-u_i{}^*}{\Delta t}+\rho^n u_i{}^*\frac{\partial u_i{}^*}{\partial x_j}=0 \tag{6.34}$$

$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\Delta t}+u_i{}^*\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=0 \tag{6.35}$$

　として、u^{n+1},ρ^{n+1} を求め、STEP 2 に戻る。

となる。

第５節　計算結果

図 6.4 に計算条件を示す。

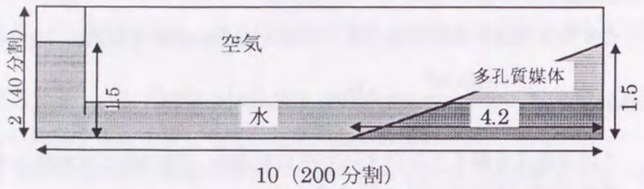


図 6.4 計算条件

空気

$\rho = 1.0$

$\upsilon = 1.0^{-5}$

水

$\rho = 1000.0$

$\upsilon = 1.0^{-6}$

$g = 100, h = 0.0$

また、図 6.5～6.9 に水の領域の時系列的な変化を示す。

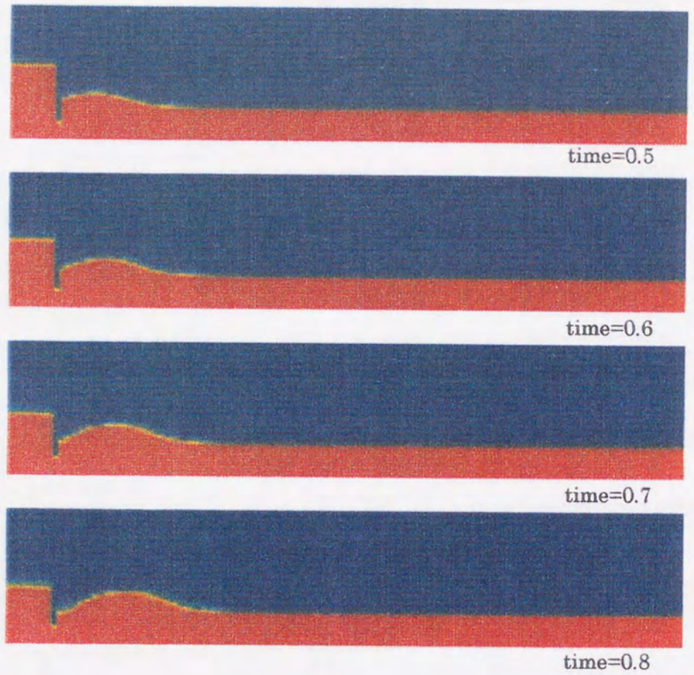


図 6.5　計算結果 1



図 6.6　計算結果 2

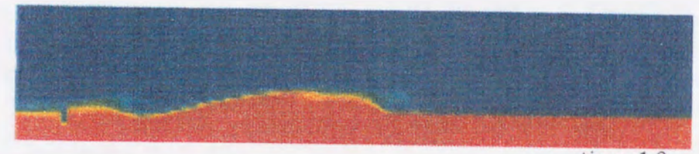
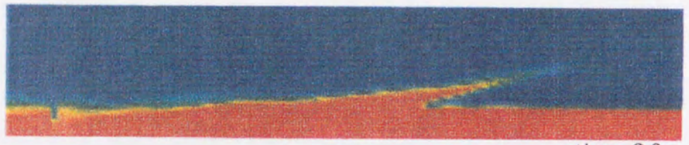


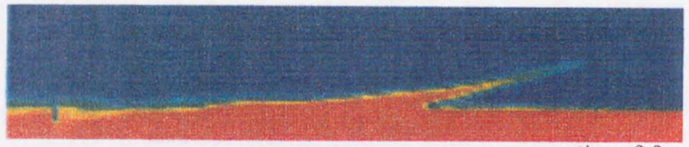
図 6.7　計算結果 3



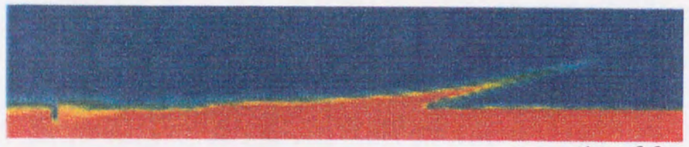
time=2.6



time=2.8



time=3.0

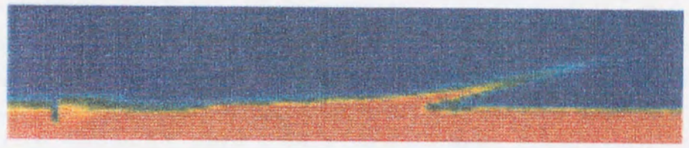


time=3.2

図 6.8　計算結果 4



time=3.4



time=3.6



time=3.8



time=4.0

図 6.9　計算結果 5

時間とともに、孤立波が伝播していく様子が良くとらえられている。また、孤立波が多孔質媒体近傍に乗り上げて進行していく様子もよくとらえられている。時刻 3.6～4.0 では多孔質媒体に乗り上げた水が引き初めているのが伺え、同時に多孔質媒体中に浸透している様子がわかる。

第６節　結言

本章では、まず多相流体を摩擦・浸透を考慮した境界条件のもとで解くための数学モデルを示した。摩擦・浸透の境界条件には笹本・河原田の Friction Type の境界条件を用い。流体の密度の違いを利用した方法により多相流体を考慮した。さらに構築した数学モデルを数値的に計算するためのアルゴリズムを提案した。また、精度良く多相流体を扱うために必要な移流方程式を解くためのスキームについて検討を行った。その結果、基本的には圧縮性流体における圧力波を高精度にとらえるために考案されてスキームである流束修正スキームと CIP スキームは１次元の矩形波の伝播に対しては精度が良いことが確認された。そして、最後に砂浜における波の挙動を例に孤立波の伝播問題を、本章で説明した数学モデルと数値計算アルゴリズムによって計算した結果を示した。

本数学モデルは、自然界に存在するおおよその流れや工業における流れにおいて、特別な流れ，一般的な流れ，双方に対して適用できると考えられる。

第７章　総括

本研究は、伝熱場及び流動場に現れる自由境界値問題の数学モデルに対して、それに対する計算モデルと数値計算アルゴリズムの構築を行うとともに、構築した計算モデルを精度良くかつ効率的に解くための個別技術について検討を加え、計算モデルを提案した数値計算アルゴリズムで実際に解き、その有効性の確認を行った。得られた結果は、課題ごとに各章の結言にまとめてあるが、本章においてそれらを総括する。

第１章においては、本研究の目的、取り上げた課題を概説した。

第２章においては、固定計算格子において Dirichlet 境界条件が課される自由境界問題を効率的かつ精度良く解くための数値解法を構築することを目的に、ステファン問題を定式化した上で、特異摂動型の補助領域法を用いた近似問題を構築し、その近似問題を解くための手法とアルゴリズムを構成した。そして、実際に数値実験を行いその有効性を示した。

まず一次元の常微分方程式に対する特異摂動型補助領域法に基づき構成された計算モデルに関して、１次元の離散特性関数を差分近似の観点より導出し、数値実験することによって、その計算精度を確認するとともに、本方法の特徴である積分ペナルティ法による境界における一次導関数の近似精度の確認を行った。その結果、境界が計算格子上にある場合には、特異摂動型補助領域法を用いた近似問題の解は、元の問題を対象領域において、差分法を用いて解いた場合と同等の精度で計算できることが確認された。また、積分ペナルティ法による境界上での一次導関数の近似も、非常に精度が良いことが確認された。一方、境界が固定計算格子上にない場合には、河原田・名取の方法による対処方法に対して、今回提案した離散特性関数は河原田・名取の方法に比較して境界が計算格子間にある場合でも、厳密解に比較して遜色ない精度で計算できることを数値実験によって確認した。

次に、一次元一相ステファン問題を実際に解くためのアルゴリズムを構成し、提案した手法と本アルゴリズムを併用し、計算した結果を厳密解と比較した。その結果、本手法とアルゴリズムによる計算は、非常に精度が良く、かつ安定的に効率良く計算できることを確認した。

次に、二次元の Poisson 方程式に本方法を適用し、一次元と同様精度良い結果が得られることを示した。また、実現象への適用のため、境界における境界値が０でない場合の対処方法を示した。

そして、実問題への適用例の一つとして、二次元二相ステファン問題の計算結果を示した。

第３章では、非斉次 Neumann 境界条件が課される自由境界値問題に対する、固定格子を用いた数値解法の構築を目的に、流動場における移動境界問題を定式化し、特異摂動型補助領域法を用い近似問題を構成した。そして、その近似問題を数値的に解くため

に、非斉次 Neumann 境界条件が課された場合の積分ペナルティ法による、境界値の近似精度の確認と数値計算アルゴリズムの構成を行った。
先ず、非斉次 Neumann 境界条件が課される一次元の常微分方程式に対して、特異摂動型補助領域法を用いた近似を行い、離散特性関数の構成を行った上で差分法によりその近似問題を数値的に解いた。そして、次の点を確認した。

① 得られた解は厳密解に比較して良い精度で一致する
② Dirichlet 境界問題で提案した離散特性関数を用いる場合には、パラメータの取り方によって、元の問題の近似精度が大きく異なる場合がある。
③ 積分ペナルティ法による境界値の近似精度は、パラメータの取り方に
に依存するところがあるものの、概ね良い精度である

次に、流動場における移動境界問題として C.W.Hirt らの扱ったダム崩壊問題を取り上げ、近似問題を構築し、その近似問題に対して特異摂動型補助領域法と VOF 法を用いた近似問題を構成した。そして、構成した近似問題を解くための数値計算アルゴリズムを提案し、そのアルゴリズムを用いた計算結果を示した。本手法とアルゴリズムによる計算結果は良い精度で実験値や過去の知見と一致していることを確認した。
そして最後に、実際の適用例として、筆者の行った鉄鋼製造プロセスへの応用例を幾つか示した。

第４章では、第３章のさらに発展形として、自由境界（自由表面）や壁面における境界条件として浸透や摩擦を考慮するためのモデルについて検討した。
先ず、笹本・河原田の Friction Type の境界条件を特異摂動型補助領域法に適用した流動場における浸透・摩擦の境界条件に関する計算モデルを示した。そして、そのモデルに対するアルゴリズムを提案し、あわせて、そのアルゴリズムを用いた計算結果を示した。

第５章では、地震時の液状化を例に媒質の異なる領域における流れを扱うためのモデルとして、第４章で提案した浸透・摩擦の境界条件を考慮した数学モデルを示した。さらに、その境界条件を考慮した上で、流動層と多孔質媒体内の流れを同時に考慮した計算モデルを示した。
始めに、流動層と多孔質媒体が接する境界で浸透・摩擦の境界条件を考慮した計算モデルを示した。そして、その計算モデルの解法として、モデル拡張の容易性と並列計算機向きの高速解法であるところの領域分割法を提案した。
本章で示した計算モデルを領域分割法を用い解く場合には、多孔質媒体における境界条件として Dirichlet 境界条件が課される場合には、数値計算アルゴリズムに対して特に工夫は必要とされないが、Neumann 境界条件のみが課される場合には、流動層と多孔質媒体が接するところの境界において、フラックスが０となるよう圧力を修正する必要があることがわかった。そして、Dirichlet 境界条件が課される場合のアルゴリズムと Neumann 境界条件が課される場合のアルゴリズムを各々構築し、数値実験によりその有効性の確認を行った。

本モデルと解法を用いることによって、異なる媒質が存在する領域において、様々な境界条件が課される流動の問題に対して、固定格子を用いあらゆる効率的な計算が可能となった。

第６章では、異なる媒質を有する領域における複数の流体の挙動に対する数学モデルについて検討を行った。解法としては、物性の異なる複数の流体を統一的に扱う手法として、密度の違いを利用した方法を拡張し、特性関数を用いた手法を提案した。本方法を用いることによって、複数の流体の分離流れを簡便に扱うことができる。また、提案した方法を精度良く数値計算するための方法として、特性関数に関する移流方程式を数値拡散を抑制しながら解くスキームの検討を行った。その結果、圧縮性流体における圧力波を精度良くとらえるための手法である流束修正スキームと CIP スキームの精度が優れていることが分かった。
また、流体の境界条件としては浸透・摩擦を考慮し、さらに多孔質媒体内の流れを考慮した計算モデルに対して、提案した手法，スキームを用いたアルゴリズムの構成を行った。そして、構成したアルゴリズムと手法・スキームにより、海岸における波の進行に関する計算を行い、本モデルの有効性と計算手法の有効性を確認した。
本モデルと解法は、あらゆる製造プロセスにおいて存在する多種多様な流れと境界条件に対して適用が可能であり、従来の流動解析とは異なる観点での流動計算を可能とするものであると言える。

以上述べたように、本研究は伝熱場，流動場に現れる自由境界値問題の数学モデルに対して、直行格子による差分を用いて計算する場合の計算モデルの構築と、その具体的数値計算アルゴリズムの構成に関して、効率的かつ高精度な方法を構築することを主題として行ったものである。
本研究では自由境界値問題に焦点を絞り検討を行ったが、自由境界に限らず、すべての境界条件に対しても本研究の成果は適用できる。また、本研究で提案した、数値計算モデルとアルゴリズムを応用することによって、領域分割法における領域接合境界における境界条件近似にも適用できる。そういう意味において、本研究は境界条件の近似方法に対して多大な効果をもたらす。

謝辞

本研究を遂行するに当たり御懇切なる御指導を賜りました千葉大学 河原田 秀夫教授に深く感謝の意を表します。

本研究は川鉄情報システム株式会社千葉事業所において行ったものであり、発表を許可された川鉄情報システム株式会社 平井 信恒 社長、富島 正 副社長ほか最高幹部の方々に感謝致します。本研究の遂行に当たり、御指導御鞭撻戴きました川鉄情報システム株式会社千葉事業所 馬場 佐喜二 所長，宮嶌 明 副所長，市原 勲 部長に感謝致します。

参考文献

1）矢川 元基他：有限要素法（培風館，1991）
2）村田 健朗、小国 力、唐木 幸比古：スーパーコンピュータ（丸善株式会社，1985）
3）日本物理学界編：スーパーコンピュータ（培風館，1985）
4）高橋 亮一、棚町 芳弘：差分法（培風館，1991）
5）第129,130回西山記念講座「電磁気を利用したマテリアルプロセッシング」（社団法人 日本鉄鋼協会，1993）
6）高谷 幸司：自由表面を考慮した連続鋳造機鋳型内溶鋼流動解析（第6回 材料電磁プロセシング部会 資料）
7）沢田 郁夫、谷 雅弘：鉄・非鉄製造プロセスにおける計算流体力学の現状と可能性（鉄と鋼、第8号, pp. 22-30, 1991）
8）鳥井 清司：MAC 法による自由表面をもつ流れの数値解析（日本機会学会関西支部第36回特別講義会 テキスト、1979）
9）姫野 龍太郎、高木 通俊：自動車における計算流体力学（日産技法 第22号, pp. 48-55）
10）J. H. Ferziger : Numerical Methods for Engineering Application (John Willey & Sons, 1981)
11）C. W. Hirt, J. L. Cook and T. D. Butler : A Lagragian Method for Calculating the Dynamics of an Incompressible Fluid with Free Surface (Journal of computaional physics 5, pp. 103-124, 1970)
12）数値流体力学編集委員会 編：移動境界流れ解析（東京大学出版会）
13）登坂 宣好、矢川 元基：計算力学における自由・移動境界問題（養賢堂，1994）
14）河村 哲也、高見 穎朗：数値流体力学の現状（鉄と鋼 第11号、1981）
15）河原田 秀夫：自由境界問題（東京大学出版会，1989）
16）L.I.Rubinstein : The Stefan Problem, Am, Math. Soc., Transl., Vo. 27, American Mathematical Society, Providence, RI(1971)
17）山口 昌哉、野木 達夫：ステファン問題（産業図書，1977）
18）Hideo Kawarada and Makoto Natori : On numerical methods for the Stefan problem by means of the finite difference and the penalty (Functional analysis and numerical analysis, pp. 183-201, 1978)
19）R. D. Richtmyer and K. W. Morton : Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd ed. (John Willey & Sons,1967)
20）C.M.Elliot and J.R. Ockendon, Weak and Variational Method for Moving Boundary Problems（Pitman Publishing,London,1982）
21）井上 一郎、山口 賢治：流れ学（培風館，1974）
22）島 章：水力学（丸善株式会社，1980）

２３）日本機会学会編：流れの数値シミュレーション（コロナ社，1988）
２４）棚橋 隆彦：CFD（アイシーピー）
２５）保原 充、大宮 司久：数値流体力学（東京大学出版会）
２６）J.J コナー、C.A.ブレビア（奥村 敏恵 監訳）：流体力学への有限要素法の応用（サイエンス社，1978）
２７）H.Fujita, H.Kawahara, H.Kawarada : Distribution theoretic approch to fictitious domain method for Neumann problems (East-West J.Numer. Math., Vol. 3, No. 2, pp.111-126(1995))
２８）Nichols, B. D. and Hirt, C. W. : Improved free-surface boundary conditions for numerical incompressible-flow calculations (J. Comp. Phys.,8:434-448, 1971)
２９）C. W. Hirt and B. D. Nichols : A Computational Method for Fress Surface Hydrodynamics (Transactions of the ASME Vol. 103, pp. 136-141)
３０）Hirt, C. W. , Nichols, B. D.,and Romero, N. C. : SOLA-A numerical solution algorithm for transient fluid flows (Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-5852, 1975)
３１）Hirt, C. W. , Nichols, B. D. : Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. (J.Comp. Phys.,39:201-225, 1981)
３２）Hirt, C. W. , Amsden, A.A., and Cook, J. L. : An arbitrary Lagragian-Eulerian computing method for all flow speeds. (J. Comp. Phys., 14:227-253,1972)
３３）C. W. Hirt and J. P. Shannon : Free-Surface Stress Conditions for Incompressible-Flow Calculations (Journal of computational physics 2, 403-441, 1968)
３４）河村 哲也、高見 穎朗、海老 豊：流体ジェットの滴生成に関する数値的研究（ながれ、第１巻、第３号、pp. 285-298, 1982）
３５）千葉 賢、桑原 邦朗：鉛直円柱回りの自由表面流の解析（第３回数値流体力学シンポジウム講演論文集、1989）
３６）鵜飼 修：VOF 法を利用した FEM による自由表面流解析法（日本機会学会論文集 B 編、No. 90-0027 A: 3248-3256, 1990）
３７）登坂 宣好、杉野 隆三郎：境界要素法による孤立波の数値シミュレーション（BEM・テクノロジーコンファレンス論文集, 1:95-100, 1991）
３８）杉野 隆三郎、登坂 宣好：液的振動の境界要素解析（第５回計算力学講演会講演論文集、日本機会学会計算力学部門, 355-356,1992）
３９）Roache, P. J. : コンピュータによる流体力学（上）（構造計画研究所、1978）
４０）Roache, P. J. : コンピュータによる流体力学（下）（構造計画研究所、1978）

４１）矢川 元基：流れと熱伝導の有限要素法入門（培風館、1983）
４２）J.J コナー／C.A. ブレビア：流体解析への有限要素法の応用（サイエンス社、1978）
４３）ランダウ リッツ：流体力学１（東京図書株式会社、1971）
４４）ランダウ リッツ：流体力学２（東京図書株式会社、1971）
４５）高橋 亮一、秋山 守：α-FLOW による熱と流れのシミュレーション（朝倉書店、1992）
４６）名取 亮、野寺 隆：bit 臨時増刊スーパーコンピュータと大型数値計算（1987）
４７）Amsden,A.A. and Harlow,F.H. : The SMAC Method-A Numerical Technique for Calculating
４８）Patankar,S.V. and Spalding,D.B. : Int. J. Heat Mass Transfer（1972）
４９）Patankar,S.V. and Numerical Heat Transfer and Fluid Flow (McGraw-Hill,1980)
５０）富山 明男、平野 雅司：SOLA 法の改良（日本機会学会論文集 B 編、58-55,2171,1992）
５１）Yenenko,N.N. : The Method of Fractional Steps (Springer-Verlarg,1971)
５２）戸川 隼人：マトリックスの数値計算（オーム社、1983）
５３）戸川 隼人：共役勾配法（教育出版、1977）
５４）中山 司：自由表面及び移動境界を有する粘性流体の動的挙動の解析とその映像化に関する研究（平成４年度科学研究費補助金研究成果報告書、1993）
５５）Crank,J. : Free and Moving Boundary Problems (Clarendon Press, Oxford,1984)
５６）Chan, R.K.C. : A generalized arbitrary Lagrangian-Eulerian method for incompressible flows with sharp interfaces (Journal of Computational Physics, Vol. 58, pp.311-331,1975)
５７）Stoker,J.J. : Water Waves (Interscience Publishers,New York,1957)
５８）Liu,W.K. , Chang, H., Chen,J.S. and Belytschko,t. : Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua(Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,Vol.68,pp.259-310,1988)
５９）Welch,J.E., Harlow,F.H., Shannon,J.P. and Daly,B.J. : THE MAC METHOD-A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surface(Los Alamos Scientific Laboratry Report,LA-3425,The University of California,1966)
６０）H.Kawarada : Numerical Simulation of Wave Motions in Sloping Porous Media Using Variational Inequalities, Singular Perturbations and Fictitious Domain Method (ENUMATH '95, The First European Conference on

Numerical Mathematics and Advanced Applications, 1995)
６１）Akira Sasamoto and Hideo Kawarada：Numerical Simulation of the Flow in a Vessel with the Free Boundary and the Sliding Wall (Nonlinear Mmathematical Problems in Industry Vol.1,pp.175-187, GAKKO TOSHO TOKYO JAPAN, 1993)
６２）H. Kawahara, I. Ichihara, T.Shiraishi, T.Ishiyama, T. Tamiya, M.Sakurai：The Numerical Method of Fluid Flow with Free Surface by Means of the ADM (Nonlinear Mmathematical Problems in Industry Vol.1,pp. 101-112, GAKKO TOSHO TOKYO JAPAN, 1993)
６３）川原 仁志、河原田 秀夫：偏微分方程式の補助領域法・領域分割法を用いた数値解法（日本応用数理学会講演大会論文集、pp.214-215, 1994）
６４）河原田 秀夫：ペナルティ法を用いた領域分割法の提案（日本応用数理学会講演大会論文集、pp.218-219, 1994）
６５）G. I. Marchuk, Yu. A. Kuznetsov and A. M. Matsokin：Fictitious domain method and domain decomposition methods (Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. Vol.1, No.1, pp.3-35,1986)
６６）Takao Hanada, Hitoshi Imai and Hideo Kawarada：Numerical Computation for Solidification Problems with Moving Surface (Nonlinear Mmathematical Problems in Industry Vol.1, pp. 17-38, GAKKO TOSHO TOKYO JAPAN, 1993)
６７）Hisamitsu Hashidate,et al：Finite Element Approximation for Free Boundary Problems with Surface Tension (NCTAM, Preprint,1991)
６８）John Chadam：Reactive Flows in Porous Media: Applications and Rigorous Results (Nonlinear Mmathematical Problems in Industry Vol.1, pp.87-100,1993)
６９）Antonio Fasano and Mario Primicerio：Mathematical Models for Filtration through Porous Media Interacting with the Flow (Nonlinear Mmathematical Problems in Industry Vol.1, pp. 61-85,1993)
７０）Alexander Bespalov and Yuri Kuznetsov：Fictitious Domain with Separable Preconditioners versus Unstructured Adapted Meshes (Impact of computing in science and engineering 4,pp. 217-249,1992)
７１）日本機会学会編：伝熱工学資料（1983）
７２）日本数学会編：岩波数学辞典第３版（岩波書店、1985）
７３）山口 昌哉、野木 達夫：数値解析の基礎（共立出版、1969）
７４）V. Vemuri, W. J. Karplus：Digital compluter treatment of partial-differential equations (Prentice-Hall, 1981)
７５）登坂 宣好、大西 和栄：偏微分方程式の数値シミュレーション（東大出版会、

1991)
７６）H. Kawarada, H. Fujita, H. Kawahara：Variational Inequalities for Navier-Stokes Flows couples with Potential Flow through Porous media:Theory and Numerical Simulation (Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering, pp. 403-410, 1997)
７７）C. Bonachina , G. Comini , A. Fasano and M. Primicerio：Numerical solution of phase-change problems (Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 1825-1832, 1973)
７８）R. Glowinski, J. Periaux Q. V. Dihn：Domain decomposiyion methods for nonlinear problems fluid dynamics (INRIA Reports de Recherche, No.147,1982)
７９）M. Costa, A. Oliva, C. D. Perez Segarra and R. Alba：Numerical simulation of solid-liquid phase change phenomena (Computer Methods in Applied Mechanisc and Engineering 91, pp. 1123-1134, 1991)
８０）Makoto Natori and Hideo Kawarada：Numerical Solutions of Free Boundary Problem for Fluid Flow through Porous Media (Pre. Compt. Centre, 5, pp. 1-6,1976)
８１）C. Bonacina and G. Comini：On the solution of the nunlinear heat condition equations by numerical method (Int. J. Heat Transfer, Vol. 16, pp. 581-589,1973)
８２）Ralph Ta-Shun Cheng and Chih-Yen Li：On thesolution of transient free-surface flow problems in porous media by the finite element method (Journal of Hydrolory 20, pp. 49-63, 1973)
８３）Yu.A.Kuznetsov and A.M.Matsokin：A matrix analog of the method of fictitious domains(Preprint, Novosibirsk Computing Center, 1974)
８４）J.-L.Lions：Singular perturbations and some non linear boundary value problems(MRC Technical Summary Report No.421,1963)
８５）B. E. Launder and D. B. Spalding：The Numerical Complutation of Turbulent Flows (Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3 ,pp.269-289, 1974)
８６）Ikuo Sawada and Hidenori Harada：NUMERICAL SIMULATIONS OF FORCED AND NATURAL CONVECTIONS BY THE USE OF NE CFD ALGORITHM NSMAC (Computer Aided Innovation of New Materials, pp. 557-560, 1991)
８７）H. Kawahara, T. Shiraishi, I. Ichihara：A Mathematical Model of Molten Alloy Flow in Planar Flow Casting (Modeling of Casting, Welding and

Advanced Solidification Processes Ⅶ, pp. 833-840, 1995)
８８）川原 仁志、河原田 秀夫、他：静・動磁場下における流動解析（材料とプロセス、Vol.5, No.4 , 1992)
８９）川原 仁志、河原田 秀夫、他：補助領域法による非圧縮粘性流体の自由境界値問題への適用（日本応用数理学会講演大会予稿集、pp. 77-78, 1993)
９０）沢田 郁夫：新しい数値流体解析アルゴリズム NSMAC（日本機会学会論文集B編、55巻、516号、1989)
９１）河村 哲也：差分法による流体方程式の数値解法（数理科学、No. 314, 1989)
９２）山崎 昇：自由表面を含む非圧縮性流体解析モジュール（富士総研技法、Vol.3 , No. 1, 1992)
９３）H. Fiedler, et al : The effect of the main processing parameters on the geometry of amorphous metal ribbons during planar flow casting(PFC) (JOUNAL OF MATERIALS SCIENCE 19, pp. 3229-3235, 1984)
９４）L. A. Anestiev : An Analysis of the Dependence Between the Ribbon Dimensions and the Technological Parameters for the Planar Flow Casting Method (Matericals Science and Engineering. pp. 115-121, 1991)
９５）Shyh-Chin Huang and Howard C. Fiedler : Effects of Wheel Surface Conditions on the Casting of Amorphous Metal Ribbons (Metallurgical transactions, Vol.12 , pp. 1107-1112, 1981)
９６）高山 新司、大井 澈：非晶質合金の凝固条件（日本金属学会誌、第２号, pp. 113-117, 1980)
９７）J. K. Carpenter : Planar-flow spin-casting of molten metals: process behaviour (JOURNAL OF MATEIALS SCIENCE , 27 , pp. 215-225, 1992)
９８）Robert K.-C. Chan and Robert L. Street : A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves (Journal of computational physics 6, 68-94, 1970)
９９）H. Kawarada, H. Kawahara and H. Suito : Numerical Simulation of Wave Motion on Sloping Beach (Preprint,1995)
１００）岡永、他：差分法による移流方程式の高精度計算について（日本機会学会論文集B編、56-522, 433, 1990)
１０１）桜木 卓也、石井 克哉、安達 静子：補正項を用いた C-CUP 法の一般座標系への拡張（日本機会学会論文集B編、134-141, 583,1995)
１０２）矢部 孝：面倒臭がり屋の数値流体入門（日本物理学会誌, Vol.47, No.1, 1992)
１０３）矢部 孝：パソコンによるシミュレーション物理（朝倉書店、1992)

