

ウィトゲンシュタインの操作概念のある重要な側面について

——『論考』6.1261「論理学においては過程と結果は同等である」

On an Important Aspect of Wittgenstein's Concept of Operation: Tractatus 6.1261 "In logic process and result are equivalent."

入江俊夫

IRIE Toshio

要旨 操作概念を基盤に据えるウィトゲンシュタインの数学の哲学は、しばしば数学の限られた範囲しか扱うことができないと言われてきた。しかしながら、操作概念のどの側面に強調を置くかにより彼の数学の哲学がまったく異なった相貌を呈すことも十分あり得る。本稿では、『論考』以来一貫して繰り返し力説されてきた「過程と結果の同等性」という側面に照明を当て、その重要な点を現実性と命題という観念との関連で特徴付ける。

0. 「修正主義」の疑い？

ウィトゲンシュタインは20世紀の「言語論的転回」を決定付けた哲学者として有名であるが、自らの伝記的項目に自身の主要な貢献は数学の哲学におけるものであった、と書くように指示するほど数学の哲学に打ち込んでいたことはあまり知られていない。数学に関する草稿は、彼が1929年に哲学を再開してから後年の主著『哲学探究』第1部が完成する少し前の1944年までの全草稿のうち実に半数以上を占める。にもかかわらず、彼の数学の哲学は、ウィトゲンシュタイン学者以外は、少数の例外¹⁾を除き、十分に評価されたとは言い難い状況である。

『基礎』²⁾出版当初、ウィトゲンシュタインの数学の哲学は数学の狭い範囲しか顧慮していない、という理解が多数存在していた。構成主義の極端なバージョンという解釈³⁾や、人間が実際に計算を実行できる範囲の数学にのみ有効であるという「厳格有限主義」解釈などである⁴⁾。こうした状況下で、まずFrascollaが「操作」の概念を中核に『論考』の数学の哲学を再構成して見せ、次いでMarionは、(おそらくはFrascollaと独立に)同様の視点から、『論考』における数の定義と“church numeral”との類縁性を強調するなどして、『論考』の数学の哲学を計算論の文脈に位置付け直した。後者はさらに、中期哲学において数学的帰納法を集中的に研究した点に着目し、ウィトゲンシュタインの数学の哲学を「有限

¹⁾ 本稿が掲載されるのが人文社会系の雑誌であるため述べるが、ウィトゲンシュタインの数学の哲学の肯定的な評価が、意外なことに、倫理学の分野に存在している。Wiggins, D. 1998, pp.128-9においては、価値の客観性の問題との連関が啓発的に論じられている。また、Blackburn 1993, pp.60-1では、ウィトゲンシュタインの数学の哲学は、ウィギンズとは違った仕方では援用されている。両氏の立場の違いをウィトゲンシュタインの数学の哲学の解釈上の違いを通じて論じることは興味深い課題である。

²⁾ 略記は末尾の文献表を参照されたい。また、遺稿への参照はフォン・ライトの番号付けに拠る。

³⁾ Dummett 1959.

⁴⁾ cf. Kreisel 1956. 本稿では、Kreiselが指摘する、計算機や人間の学習過程の研究での重要性は否定するわけではない。実際、数学教育に関する文献にウィトゲンシュタインの数学が参照されているケースが散見される。しかしながら、こうした分野への有用性を指摘することと、彼の数学の哲学の射程、個々の所見の狙いを、このような分野に限定してしまうこととは全く別のことである。

主義」と特徴付けた。⁵⁾

以上の解釈上の努力により、ウィトゲンシュタインの数学の哲学は更なる顧慮に値しない、という印象はかなりの程度払拭された。しかしながら、彼の数学の哲学を肯定するならば、現行の数学をそっくりそのまま認めることはできないのではないか、という理解は依然として根強い。こうした印象の背景には、例えば、ウィトゲンシュタイン自身の次のような所見が存在する。

集合による理論は規則の指定による理論よりもいっそう一般的な仕方では無限を捉えることを求める。その理論によれば、実無限は算術的なシンボル体系では決して捉えることができず、従って実無限は記述できるだけであって描出できないのである。⁶⁾

集合論は、存在している（そしてこれのみが可能な）シンボル体系に加えて存在しないシンボル体系を見かけ上前提する故に、誤っている。それは仮想的なシンボル体系、従って無意義なこと、の上に構築されている。⁷⁾

このような所見には「弁解の余地」はもはや存在しないように見える。この上さらにウィトゲンシュタインの数学の哲学を擁護するとすれば、「規則の指定による（*der Vorschriften*）理論」は中期の数学の哲学の立場であり、後期ではこの立場は改められ、「規則の指定」により与えられた体系の中に数学を見るのではなく、体系の外、すなわち、応用との関係で数学を考えるように変わったのだ、と解釈することは極めて自然なことである。⁸⁾

しかしながら、次の所見も「中期」に属している。

集合論が、無限を直接に記号化することは人間には不可能だと言いつつ、それによって、集合論の真の計算は、考えられる限り最も甚だしく曲解される。もちろん、まさにこの曲解こそが、この計算の発明に寄与したのではあるが。しかしだからといって、当の計算自体が、ある間違っただけのものになるわけではない。…数学のこの部分が何らかの哲学的（あるいは数学的）探究によって危険にさらされると考えるのは、おかしなことなのである。⁹⁾

ウィトゲンシュタインの哲学の性格が、数学に改変を迫るような修正主義的な性格を持つものではないことは、『論考』以来、中期、後期を通じて最晩期まで一貫して彼自身により力説されている。もちろん、「言っていることとやっていることが違う」という議論

⁵⁾ Cf. 大野2001.

⁶⁾ PB § 170.

⁷⁾ PB § 174.

⁸⁾ こうした解釈は、Gerrard 1991、Steiner 2009、戸田山和久 1990で提出されている。「中期」と「後期」の違いを際出せることを通じて、後期の数学の哲学の評価を促すこうした解釈傾向に抗して、中期の数学の哲学を見直すことにより、後期の数学の哲学の相貌を捉えようとするのが、筆者の基本的な解釈姿勢である。本稿では第2節で、Steiner 2009に言及している。

⁹⁾ PG S.391（邦訳334項）。

もあるが、私はそうは考えない。問題は修正主義的な相貌が払拭されるくらい鮮明に彼の哲学の性格を提示することである。ところで、「規則の指定による理論」は『論考』の操作概念に起源を持つ。そこで本稿では、ウィトゲンシュタインの数学の哲学の性格を鮮明にするため、操作概念のある側面を際立たせることを通じて、より細緻な研究のための方向性を提示したい。次節第1節では、操作概念の「過程と結果の同等性」と呼びうる側面を提示する。第2節では、「過程と結果の同等性」の問題的な点について、重要な数学的実践である「別証明」を取り上げて検討する。第3節では、「過程と結果の同等性」の重要性はどの点にあるのか、という問題に対して、各時期の所見を関連付けることにより一定の回答を提示する。

重要なのは、現代の優位な視点から彼の技術的な欠点を指摘して満足することではなく、彼の狙っているところを見定めて、それとの関係で技術的な不足を補い、最終的に修正主義的にならざるを得ないのかを判断するといったことであると考えられるのである。

1. 過程と結果の同等性

前節で述べたFrascolla、Marionの仕事は、次のような意味でも『論考』の数学の哲学の見通しを与えている。以前の解釈傾向では、ウィトゲンシュタインがラッセルの近くで仕事をしていたこともあり、『論考』は、ラッセルに近い立場であろうという予測から、数学の真理をトートロジーかそれに近いものとして捉えていたのだろう、と考えられていた。

『論考』の数学の哲学の主命題ともいえる「数学は論理的な方法である」(6.2)は、一見すると論理主義的な立場の表明に見える。しかしながら、Frascollaが「操作」の概念を中核に『論考』の数学の哲学を再構成して拓いた視点から、とりわけMarionは『論考』の数学の哲学は、論理主義の側よりも、非可述性の論点を提出しその抜本的な批判者であったポアンカレの立場にずっと近いものであることが鮮明にされた¹⁰⁾。それゆえ、次の所見は『学団』から採られたものであるが、基本的には『論考』の見解であったと考えられる。

…ラッセルのアイデアで正しいところは、我々は数学においても論理学においてと同様に体系に関係するのだ、ということである。

そこで誤っていることは、数学を論理学の一部として捉えようと試みるところである。

数学と論理学の真の類比はある全く別のものである。：与えられた命題の意義から新しい意義を生み出す操作が、数学においてもある操作、すなわち、与えられた数からある新しい数を生み出す操作に対応しているということ。¹¹⁾

ここで引用箇所の最後に登場している「操作」こそ、「論理的方法」の根幹に据えられたものである。操作は、目的面から一言で述べれば、ラッセルのパラドックスへの対応と

¹⁰⁾ ただし、留保が必要である。数学上の定理を論理的な真理から厳密な「隙間のない」ステップを経て導出するという論理主義の企図は、数学の基礎付けという文脈に局限されてはならず、数学の対象、(何であれ)数学で扱われている事柄、数学の「内容」を“sui generis”なものとして措定せず、直観的な把握を明示化するという言語分析的関心が働いている。『論考』は、基礎付け主義的な動機を持たないが、思考の明晰化を言うこの点はむしろ、直観を措定してしまうポアンカレよりフレーゲと共通する。Cf. (岡本2001)。

¹¹⁾ WWK. S.218.

して「 $\neg$ 」(否定)、「 $\&$ 」(連言)、「 $\vee$ 」(選言)などの論理定項を再規定し、「すべての命題」を定義すべく考案されたカテゴリーであると言える¹²⁾。以下では、本稿で照明を当てたい操作の重要な側面、過程と結果の同等性に向かって説明したい。

まず、上記引用箇所で言われた、操作によって「与えられた命題の意義から新しい意義を生み出す操作が、数学においてもある操作、すなわち、与えられた数からある新しい数を生み出す操作に対応している」とはいかなることだろうか？数のほうから、ウィトゲンシュタインもたびたび用いた分かりやすい例として、「 $+1$ 」(自然数1を加える)という操作を用いて考えてみよう。いま、操作「 $+1$ 」とその基底として「0」が与えられているとしよう。すると、『論考』的な視点では、直ちに自然数に相当する体系が与えられる。すなわち、まず0に「 $+1$ 」を作用させ、1を産出する。次にいま産出された1に再び「 $+1$ 」を作用させ、2を産出する。今度は、その2にまた再び「 $+1$ 」を作用させ、3を産出する…(以下同様に)、といった具合である。

次に、「与えられた命題の意義から新しい意義を生み出す」とはどのようなことか？「 $\neg$ 」(否定)、「 $\&$ 」(連言)、「 $\vee$ 」(選言)という操作を考えよう¹³⁾。

P	
T	F
F	T

P	Q	
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

以上は、“P”と“Q”が変項を表すとき、それぞれ真理値の組を定めることによって真理関数を与えている。これらは、通常、真理表と呼ばれるものだが、『論考』では、“P”、“Q”が具体的な命題を表すとき、上図の構成物はそれぞれ、 $\neg P$ 、 $P \& Q$ 、 $P \vee Q$ に対する命題記号として扱われる。そして、P、Qに関する真理値の配置を上図のように決めておけば、 $\neg P$ は“(P) (FT)”、 $P \& Q$ は“(P, Q) (TFFF)”、 $P \vee Q$ は“(P, Q) (TTTF)”と略記して書くことができる。

現代では真理表は命題論理の意味論の文脈で用いられている。しかしながら、『論考』における眼目は独特である。そもそも、「 $\neg$ 」(否定)、「 $\&$ 」(連言)、「 $\vee$ 」(選言)という諸操作は記号上の操作ではなく、意義上の操作である。彼にとって重要なのは、真理表が複合命題表現そのものである、という点にあった。そして、この点を考察することは、本稿の主題である「過程と結果の同等性」に対する良い導入になるであろう。

『論考』におけるウィトゲンシュタインの問題の一つは、論理的必然性に関する疑問の解決にあった。例えば、「 $\vee$ 」(選言)でいえば、なぜPとQがどちらとも偽のとき、そしてそのときのみ、 $P \vee Q$ が偽になるのか、という疑問である¹⁴⁾。この問いの答えとして、“ $\vee$ ”の表す対象(論理的对象)の内的性質に由来する、というものはどうだろうか？冷静に考

¹²⁾ 操作についての詳細に説明は、入江2013、20-38頁を参照されたい。

¹³⁾ Cf. TLP 5.2341.

¹⁴⁾ Cf. 飯田 1989、60-64頁。

えれば、このような答えにより我々は一步も進んでいず、以前と同じ場所にいることがわかるはずである。我々の問いは事柄にアプローチする我々自身の姿勢に由来する。むしろ、真理表を、ある命題から新しい命題が生み出されること（構成過程）の説明として見るのではなく、新しい命題の表現それ自体として見るのである¹⁵⁾。つまり、真理表における真理値の配分こそが（命題記号ではなく）命題の同一性規準に他ならない。そのとき（構成）過程と結果（新しい命題）は同じものとなり、我々の問いは消滅する。故に、

6.1261 論理学においては過程と結果が等価である。（それゆえ何の驚きもない）

以上が、「過程と結果の同等性」に対する一つの道筋である。ちなみに、1915.4.24付けの『日記』では、

論理学（数学）においては過程と結果は同等である。¹⁶⁾

と記載されている。この見解は、第3節で触れるが、論理と数学のアプリオリ性を解き明かす重要な部分であり、本稿で指摘したい操作概念の重要な側面に他ならない。

ウィットゲンシュタインは『論考』を完成させて哲学と決別した後1929年に哲学を再開するが、一貫してこの見解を抱き続けた。

操作の反復のみが基礎的である。

この反復の各段階がその個別性（individualität）である。

それゆえ、操作によって、ある個から別の個へと前進するというのではないし、操作はある個から別の個へとたどり着くための方法というわけでもない。…そうではなく、+1 という操作を3回で数3を生み出し、かつ、それこそが3なのだ。¹⁷⁾

数学において、記述と対象は同じ価値を持つ。「数列の5番目はこの性質を持つ」は「5はこの性質を持つ」と同じことを語る。一軒の家の性質は、家並みのその位置から帰結するわけではない。これに反し、ある数の性質は、位置の性質である。¹⁸⁾

「過程が結果と同等である」とは、結果は過程の同一性にとって構成的であり、かつ、過程は結果の同一性にとって構成的である、と解される¹⁹⁾。この見解は様々なフェイズでウィットゲンシュタインの見方を表現しており、本稿ではこの見解が彼の数学の哲学にとっていかに基本的であるのかを見るであろう。

次節では、この見解に関し、いま2つに分解したうちの後者の部分、すなわち、「過程は結果の同一性にとって構成的である」の方を検討する。というのも、通常の数学でしば

¹⁵⁾ Cf. LFM p.177.

¹⁶⁾ NB p.58.

¹⁷⁾ PB § 125.

¹⁸⁾ PG S.457. 後期の『基礎』では、「過程と結果の同等性」が第1部第82節で再記述されている。

¹⁹⁾ ここでの「構成的」は、現象学で用いられる用語を念頭においており、法学の「構成要件」における用法に近い。

しば見られる別証明という現象は、一見するとこの部分と真っ向から衝突するように見えるからである。

2. 過程は結果にとって構成的であるか？

2.1

中期のウィトゲンシュタインは、しばしば「何が証明されたのかを知りたいければ、証明を見よ²⁰⁾」と言った。これは、前節で取り上げた「結果の同一性にとって過程は構成的である」という『論考』の見解に由来すると考えられる。しかしながら、この見解は、過程が異なれば結果も異なる、ということを含意する。他方、前節で述べたように、数学では同じ命題が複数の証明を持つということを我々は知っている。この事実をウィトゲンシュタインはどう考えるのだろうか。『考察』に次のように記されている。

1つの数学的命題について2つの独立な証明など存在しえない。²¹⁾

彼の考えは我々の直観と真っ向から衝突するように見える。ここでも中期のウィトゲンシュタインの言いたいことである「規則の指定による理論」は問題的である。

(Steiner 2009) では、この所見と後期における次の所見、

1つの命題が2つ以上の証明を持つことはできない、というのはもちろんナンセンスだろう。まさにわれわれは、できると言うのだから。だがこうはいえないか？この証明は、我々がこれをやると、…が結果することを示し、他の証明は、われわれが何か別のことをやると、この表現が出てくることを示す、と。²²⁾

が対比され、中期から後期にかけてウィトゲンシュタインの数学の哲学に「静かな革命」が起こったと主張された。曰く、1930年代のウィトゲンシュタインは、数学をその応用から鋭く切り離していた。だが、より後年の

ウィトゲンシュタインは、…数学の定理は、規則を表現する命題へと凝固した経験的規則性を表現する命題である、と確信するようになった。彼は、数学の規則は、その適用と内的な関係を有する点で文法的規則とは異なる、と信じるようになった。この関係は、数学的命題をその証明から独立に同定する方法を提供する。そしてこのことは、ある数学的命題について、それは2つ以上の証明を持つということを可能にする²³⁾。

以上がSteinerの見立てである。

しかしながら、中期のウィトゲンシュタインがそれほど単純な誤りを犯したとは考えにくい。私見では、中期から後期への変化は、Steinerの解釈のような抜本的なものではない。

²⁰⁾ PG Teil II § 24の表題より。

²¹⁾ PB § 155.

²²⁾ BGM III-58/MS122, 1940.1.28.

²³⁾ Steiner 2009, 2-3.

「過程と結果の同等性」は、あるチャレンジを受けているとは言えるかもしれないが、捨て去られて「数学的命題をその証明から独立に同定する方法を提供する」とまでは到底言えない。このことは、Steinerが『基礎』第3部58節から引いた箇所の直後に次の所見が続いていることから明白でなかろうか。

いったい、例えば、129が3で割り切れるという数学的事実は、この結果がこの計算において出てくるということから独立であろうか？私の意味しているのは、この割れるという事実は、そこにおいてその事実が生ずるところの計算から独立に存立するのか、それとも、それは、この計算の事実なのか、ということである。

「計算によって我々は数の諸性質を知るようになる」と言われた場合を考えよ。だが数の諸性質は計算の外に存立するのか？²⁴⁾

重要なのは、計算から独立に存在する数学的事実を容認するかどうか、という点である。中期ではこの問いに対して明らかに否定的であった。そして、確かに後期ではある迷いが見受けられる。このことは、本節冒頭で言及した「何が証明されたのかを知りたいければ、証明を見よ」という中期の見解の再吟味にも表れている。

私は、かつて、「数学的命題が何を語っているかを知ろうと思うのなら、その命題の証明が証明するものを見よ」と述べた。ところで、それはある意味では真であり、ある意味では偽であるのではないか？数学的命題の意味、目的は、我々が証明についていけるとすぐさま、実際に明らかになるのか？²⁵⁾

私は「中期」から「後期」にかけて起こったことは、Steinerの言うような「革命」ではなく、洗練化と特徴づけるのが適切であると考え。その内実については、証明（計算）とは独立の数学的命題という観念を、どの程度、いかなる意味で容認するのか、という後期ウィトゲンシュタインの数学の哲学の大問題を扱うことになるため、本稿の範囲を超えた課題となる。本節以下では、先に引用した別証明の存在を否定するかのように見える中期の所見を“only one proof”と呼び、この見解が一見するほど素朴ではないことを、「過程は結果の同一性にとって構成的か」というトピックとの関連で論じたい。

2.2

『考察』にあるウィトゲンシュタインの「数学的命題」の定義をよく見てみれば、直ちに我々の直観と衝突するように見えた彼の見解が案外複雑なものであったことが分かる。

まず、編者により補われた所見から。

本来の数学的命題とは、証明、すなわち、事情が如何にあるかを示すところのものである。²⁶⁾

²⁴⁾ BGM III-58.

²⁵⁾ BGM VII-7.

さらに、“only one proof”の直前には、

数学的命題は散文ではなく、正確な表現である、と私は言いたい。²⁷⁾

と記されている。後者は有名な（悪名高い？）「計算と散文」の区別に言及している。この2つの所見を総合すると次のようになると考えられる。ウィトゲンシュタインにおける「数学的命題」とは、我々の言う「数学的命題」のことではなく、証明に他ならない、我々の言う「数学的命題」は、あくまでも証明を介して正確に理解される必要がある²⁸⁾。

“only one proof”の属する『考察』第155節で論じられている例である「無限に多くの素数が存在する」という「命題」を例にとって説明しよう。この「命題」についてウィトゲンシュタインは「その証明を知らない場合には、私はその命題をも理解してはいない²⁹⁾」と述べている。

その証明を知ったとき、私は全く新しいことを知ったのであって、すでに知られていた目的地への道のみを知ったというのではないのである。³⁰⁾

「全く新しいこと」の重要性という問題は措き、ここでも、過程（道）と結果（目的地）の話が登場していることに留意されたい。証明が存在しないうちは、我々は「無限に多くの素数が存在するか」と言われても（類題すら知らないうちはとりわけ）途方に暮れるだけかもしれない。例えば、エラステネスの篩はある与えられた数までの素数を調べる方法は提供してくれるが、篩をどれほど用いても素数が無限に存在しているかどうかは判明しないのである。しかしながら、素数が与えられればそれよりも大きい素数が存在することを示す「帰納法」を見出した（構成した）とき、我々は無限に多くの素数が存在すると言ったとき「事情が如何にあるか」を納得する。「無限に多くの素数が存在する」という「命題」を理解するのである。この「命題」を、ウィトゲンシュタインは、与えられた帰納的証明の名前³¹⁾と呼んだ。

中期のウィトゲンシュタインは（数学的）帰納法について集中的に研究し、数学における一般化を理解するために事あるごとに参照していた。彼の考える一般命題の証明は同時に個別例の構成も与えるような証明である。“only one proof”が属する『考察』第155節の文脈を考えれば、「2つの独立な証明」で直接念頭に置かれているものは、一般命題が証明される以前の個別的な（場当たりの）構成と何らかの「帰納法」が見出されて一般命題が証明された後の例化といったものと考えるのが適切であろう。

しかしながら、この点と、“only one proof”を数学的一般化や帰納的証明に限定することとは別問題である。問題はあくまでも、結果にとって過程が構成的である、という点で

²⁶⁾ PB S.184.

²⁷⁾ PB § 155.

²⁸⁾ 証明された事柄のポイントを目立たせようとして、結果が日常言語で述べられる場合に、証明を解さない人にとってそれがいかに誤解を招きやすいかを考えよ。

²⁹⁾ Ibid.

³⁰⁾ Ibid.

³¹⁾ Frascollaは、いみじくも、これを「ラッセル的固有名」(Frascolla 1994, p.76)と呼んでいる。

ある。このことはいまの例でも「道」（過程）と「目的地」（結果）が重要な役割を果たしていたことからわかる。むしろ、帰納法による一般化の話は、本稿の問いからすれば、結果にとって過程が構成的であるという点を補強するものと言ってよいであろう。

2.3

前節の議論を受け、「2つの独立な証明」の意味を明らかにすることを通じて、“only one proof”の射程を考えてみよう。ウィトゲンシュタインが明示的に挙げているのは、素数の無限性の証明であった。とすれば、当然ながら、ユークリッド幾何学と代数学とに跨るような正17角形の構成などは、2つの独立な証明（構成）と言ってよいだろう。他方で、日本語で遂行しても英語で遂行しても、同じ証明は同じ証明であることは言うまでもないことであり、これらは「2つの独立な証明」とは言えない。しかしながら、後者に纏わる、証明と証明が遂行される言語との関係という問題は見かけよりずっと難しい。ある証明を別の表記法で表現するだけで俄然見通しがよくなる、といったことがしばしば起こる。その場合、そこで提示されているものが以前の証明と同じ証明と呼べるのか、という問題は、むしろ大変興味深い問題というべきである。

ところで、三平方の定理は一応ユークリッド幾何学の定理といえるが、多くの別証明が存在している。その中で、例えば、三角比による証明と面積を使う証明では着眼点が全く異なっている。この2様の証明は、ウィトゲンシュタイン的な意味で「2つの独立な証明」の部類に数えてよいだろうか？

この問いを考える上で役に立つのが、次の後期の所見である。

…この証明は、他の証明によっては置き換えることのできない一つの数学的存在である。その証明は、他のいかなるものも納得されてくれない何かを我々に納得させることができる、といえる。このことは、我々が他のいかなる証明にも対応させない命題をこの証明に対応させることによって表現することができる。³²⁾

我々はここに、「本来の数学的命題とは、証明である」という中期の見解が受け継がれているのを見る。とりわけ、「その証明は、他のいかなるものも納得されてくれない何かを我々に納得させることができる」点は洞察的である。この点を念頭に置き判断すれば、着眼点の異なる証明であれば、「2つの独立な証明」と呼んでよいと考えられる。

この点に注目すれば、たとえ同一の形式的体系における同一の文字式に対する2つの異なった証明に対してさえ、「2つの独立な証明」と呼びうることがわかる。つまり、証明を達成するに際して別の見方を携えていれば、それは独立な証明といってよいと考えられるのである。

以上の考察により、別証明を顧慮に入れていないかのように見えた中期の“only one proof”は見かけよりもずっと繊細な見解であることが判り、それを通じて、過程は結果の同一性にとって構成的である、という見解の豊かな内実を多少とも示すことができた。

しかしながら、これは難問に挑むための第一歩にすぎない。いまの『基礎』からの引用

³²⁾ BGM III-59.

箇所で述べられていたように（また、中期のウィトゲンシュタインが考えたように）、2つの独立な証明に対して異なった命題を対応させることはどの程度正しいのだろうか？「その証明は、他のいかなるものも納得されてくれない何かを我々に納得させることができる」というときの「納得」は一つの命題に値するほどののだろうか？問題は「納得させる(überzeugen)」の意味である。「納得する」は「理解する」とも「真であると判る」とも、いわば「意味論的」にも「認識論的」にも、解することができる。ちなみに「認識論的な」解し方が我々の通常の解し方であろう。我々は普通、例えばピタゴラスの定理では、どのような事実の存立が問題となっているかは証明とは関係なく理解しており、証明はそれが実際に存立していることを確証する、と考える。それに対して、ウィトゲンシュタインは「証明は相互理解に役立つ。実験は相互理解を前提している」と記している³³⁾。上述したように、以上は後期の数学の哲学における「数学的命題」の取り扱いという最も興味深い問題である³⁴⁾。次節第3節では、この問題にアタックするためにも、まずは本稿の主題である「過程と結果の同等性」に戻り、その狙いについてさらに考察したい。その際に「証明と実験」の対比について再び言及することになるであろう。

3. 過程と結果の間の内的関係 ―現実性ありや？―

1939年に行われた数学の哲学についての講義でウィトゲンシュタインは過程と結果の関係を再び取り上げる。（以下の引用中、過程は「手段」、目的は「結果」と考えられたい。）

私が、あの金庫を開けることができることを君に証明しよう、と言ったとしよう。ここでは、目的（金庫を開けること）と手段（バール）を区別することができる。というのも、我々はみな金庫を開けることがどんなことであるかを知っているのだから。そして我々は、その意味するところを絵に描くとか、あるいは、他のドアを開けさらに金庫を見せるとかして、示すことができる。―しかしながら、正五角形の場合、目的は正五角形であろうか、それとも、正五角形の構成であろうか？³⁵⁾

この質問に対して、チューリングはすかさず、「それは構成のほうです」と答える。この答えに対して、ウィトゲンシュタインの反応はいま一つ歯切れが悪い。「確かに。だが、もちろん、この構成が何の構成かを説明するためにも、正五角形は何かを説明することができなくてはならない³⁶⁾」。続いて彼は次のように述べる。

³³⁾ BGMⅢ-71. もっとも、この引用箇所は“Man könnte sagen”という「フレーム」の中身であるので、彼のコミットの度合いは全面的ではない可能性がある。

³⁴⁾ この文脈で「数学外のもの」のもつ重要性がどの点にあるのかも見かけほど容易ではないと思われる。

2つの証明が同一の命題を証明するとは、両者とも、その命題が同一目的の適切な道具であることを示す、ということである。

そして、その目的は、数学外のものをほのめかすのである。(BGM VII-10)

³⁵⁾ LFM p.49.

正五角形を構成したいとしてみよう。正五角形が我々の望むもので、構成がそれへの手段だ。我々は何が正五角形であるかを、実際に示すか、すべての辺と角が等しい五角形と記述することによって説明するかもしれない。だが、その場合、証明が示すのは、その角と辺が定規と分度器で測ったときに等しいと判った五角形を構成できることだ、と言わねばなくなってしまう。そのように使用されれば、「五角形が構成できる」は物理学の命題である。それは数学の命題ではなく、経験命題である。³⁷⁾

ここで狙われている重要な点は、数学の命題と経験的命題との根本的な違いを浮き彫りにすることである。正五角形が構成過程と切り離されてそれだけで示され、それが正五角形であるのかを定規と分度器で測って確かめられるという場合、正五角形は紙の上に書かれた時空的な物理的対象である。それに対して、「数学的対象」としての正五角形は構成から切り離すことはできない。先にチューリングがはっきりと「それは構成のほうです」と言ったとき、ウィットゲンシュタインの反応が歯切れが悪かったのは、チューリングが余りにも数学者らしい答えをしたからではないか。実はウィットゲンシュタインが「目的は正五角形であろうか、それとも、正五角形の構成であろうか？」という始めの問いに対する答えとして期待していたのは、目的は正五角形である、というものであり、彼はそこから何手かの考察を経て、しかしながら目的の正五角形はその構成と切り離すことはできない、従って、ある意味で目的は正五角形の構成ともいえる、という道筋を見込んでいたと考えられる。それに対し、チューリングの答えは、数学者としての視点から、そうした一歩一歩の分析を一足飛びにしまい、そのため、それに対するウィットゲンシュタインの応答が困惑のトーンを帯びていたのではないだろうか。いずれにせよ、要点は、結果は過程から切り離すことはできない、ということにあると考えられる。

数学に入るや否や、手段と結果は同じ (same) になる。だが、手段と結果を区別するや否や、それは数学ではなくなる。³⁸⁾

過程と結果の同等性という特徴づけのコアを取り出すべく、ここでは問題となっている対比に力点を置いて、もう少し議論の輪郭付けをしてみよう。ここで狙われている対比は、ウィットゲンシュタインが繰り返し考えた「証明と実験」との対比で狙われているものに他ならない。実験では一連の過程を正しく実行することにより所期の条件を整え、その上で期待された結果が出るかを調べる。もし、期待された通りの結果が出なかったとしても、そのことから直ちに所期の条件が整っていなかったということにはならない。それはあり得ることなのであり、またそうでなければ実験のポイントもない。(ちょうど、金庫を開けようとする際にたとえ金庫が開かなくとも手段の実行であることには変わりはないのと同じである。)それに対して、正五角形の構成を教えられた通りに実行したにもかかわらず、正五角形ができないことはあり得るであろうか？ある意味ではあり得る。つまり、上で述べられたように定規や分度器で測って僅かな“ずれ”があったという意味で。しかしなが

³⁶⁾ Ibid.

³⁷⁾ Ibid.

³⁸⁾ LFM p.53.

ら、それはどうでもよいことである。というのも、もしその“ずれ”を有効なものとして認める場合、我々は目の前の正五角形の図を、再び物理的対象として扱っていることになるからである。目の前の正五角形の図を「数学的対象」として扱っている場合、“ずれ”は意味をなさない。(役を持たない) この場合仮に“ずれ”を“ずれ”として認定した場合には作図手順のなかに線の引き違いなどの間違いがあったに違いなく、もし正確に線を引けていたら、すでに正確な正五角形が構成できたに違いないのである。つまり、現実に正確に線を引くことは何の役も持たない。

ここで当面していることは、目の前のものを数学的対象として扱うということはいかなることか、という問題であると予想される。この問題を論じるためには、ウィットゲンシュタインも繰り返し考察したように、数学的命題の無時間性の問題から、我々自身の取る態度に至るまで、様々な相を取り上げる必要がある。そして、過程と結果の同等性はそれら諸相のうちで最も代表的なものであったと考えられる。

ここで、次の、それだけでは一見不可解な所見との連関を指摘することは、過程と結果の同等性のコアを取り出すためにも、次に見る当の所見の理解のためにも有益であろう。所見は、先に述べた「結果は過程から切り離すことができない」という点を狙っていると考えられる。

数学的命題は3脚ではなくて4脚で立っている。それは規定されすぎているのだ。³⁹⁾

この所見は、(Wittgenstein 2000) ではより詳しく、

数学的命題は3脚ではなくて4脚で立っている。それは、経験命題との比較において、いわば規定されすぎているのだ。⁴⁰⁾

と記されており、明らかに数学的命題と経験的命題との対比が狙われている。

関連性をより深く見るために、経験的命題とトートロジーとを比較することが役に立つ。“ $P \vee Q$ ”という命題構成(物)について考えよう。“P”と“Q”が経験的命題の場合、“ $P \vee Q$ ”は一般に経験的命題である。“P”も“Q”もそれぞれの真理条件が限定されているはずであり、“ $P \vee Q$ ”も、真理表をみれば明白であるように、4通りの真理可能性のうち、“P”と“Q”が両方とも偽になったとき偽、残りが真という真理条件を持つ。この場合、命題だけでは真偽が決まらず、現実がどうなっているかが本質的に重要である。逆に言えば、“ $P \vee Q$ ”という命題は、現実にどんな活動の余地を認めるかによって事態(可能的事態)を描出している。しかしながら、(古典論理の)“ $P \vee \neg P$ ”は、そうではない。真理計算をすれば明白であるが、真理表の最後の列はすべて“T”になる。一見すると現実の活動の余地は最大になったかのように見えるが、その反対であり、現実がどうであろうと、(すなわち、現実とは無関係に)この「命題」は真になるのだから、現実には出番がないと述べた方が適切である。つまり、実のところ、世界との描出関係はキャンセルされてしまっているものであり、この「命題」は、矛盾と同様、現実の像ではないのである。⁴¹⁾

³⁹⁾ BGM IV-7. VI-10にも同種の所見がある。

⁴⁰⁾ MS123, 15v.

以上の考察は何を指し示すのだろうか。それは、『論考』のウィトゲンシュタインに、論理的命題や数学的命題という観念に違和感を覚えさせることに大きく寄与したもの、論理学や数学では、過程が既に結果を含んで⁴²⁾しまうため、現実性は「締め出され」てしまう、という特徴である。この点を強調するため、講義でもたびたび用いられた用語を用いて、過程と結果は内的関係にある、と述べることもできる。（それに対して、実験や金庫の場合は、過程と結果は外的関係にある。）⁴³⁾

この点を彼は『論考』以来、最晩年の『色彩論』に至るまで一貫して問題とし続けている。

…数学の命題が証明可能であるということは、その命題の正しさが洞察されうるものであり、命題が表現することを事実と比較して命題の正しさを決定することが不要である、ということに他ならない。⁴⁴⁾

ある言語ゲームがある。ある物体が他の物体より明るいか暗いかについて報告する、というものである。——

ところで、それと似たもう一つの言語ゲームがある。特定の色調の明るさの関係について言明する、というものである。…。——2つの言語ゲームにおける命題の形式は「XはYより明るい」という同じ形式になる。しかし前者においてはそのXとYの関係は外的関係であり、その命題が時間的なものであるのに対して、後者においてはその関係は内的関係であり、その命題は無時間的なものとなる。⁴⁵⁾

以上の考察から、ウィトゲンシュタインにとって決定的に重要であるのは、過程と結果とが内的関係にあるか、外的関係にあるか、という対比である。後者の場合、現実に出番

⁴¹⁾ Cf. PU § 251.

⁴²⁾ 「含む」という語は1939年の講義でも、本稿の主題である「過程と結果の同等性」の文脈で用いられている。（学校などで習う）「 $25 \times 25 = 625$ 」の筆算の表記を指して、次のように述べられている。

私が君に「この掛け算は625という結果を与える」と言ったとしよう。だが、この掛け算はどこで止まるのだろうか。この掛け算はパタンである。そして、もしそれが625を含まなければ、それは不完全であるか誤っている。それゆえ、25による掛け算は625への手段ではなく、625を含むのである。625はパタンの一部である。（LFM p.75. cf. 邦訳135頁）

⁴³⁾ 内的関係については、入江2013、57-61頁を参照されたい。この過程と結果の内的関係という特徴については、以後も（おそらくウィトゲンシュタインが数学の哲学の考察を続ける1944年に至るまで）執拗に考察される。cf. BGM VI-15 荒畑靖宏氏の試訳を参照した。

「もし君がその規則にしたがうなら、これを生むことだろう」が本物の予言でなかったのはなぜなのか？…それが予言でないのは、私はまた「もし君がその規則にしたがうなら、これを生むのでなければならぬ」とも言うことができたからである。それが予言でないのは、規則にしたがうという概念が、結果こそが、その規則が実際にしたがわれたのかどうかの規準となる、というように規定されている場合である。

…それが予言でなかったことになるのは、状況のせいとその文が冗語となった場合だけである。

⁴⁴⁾ TLP 2321.

⁴⁵⁾ BF S.7.

があり、言い換えれば、[・][・]本来の意味で命題（可能的事態の像）が存在する。それに対して、前者の場合、問題は現実の手前で片が付く。外的関係と内的関係の混同（語りうるものと示しうるものの混同）こそはウィトゲンシュタインが生涯を通じて闘い続けた敵であり、彼はあらゆる場所から、この混同を突破して内的関係や内的性質に属する事柄（論理的なもの）を正しく捉えようとする。彼が操作の観念を駆使して論じるときも絶えずこの点を念頭に置く必要がある。そして、この点こそ、一見しただけでは我々の直観に反するように見える、集合論に関する批判の根幹に位置するものなのである。本稿冒頭で引用した「集合論は、存在している（そしてこれのみが可能な）シンボル体系に加えて存在しないシンボル体系を見かけ上前提する故に、誤っている」という所見から始まる『考察』第174節が次の所見で終わっていることは、以上の考察を裏書きしてくれるであろう。

もとより数学が、完全に知ることのできない無限な外延に関する経験科学であったとすれば、原理的に決定不可能な問い、ということも極めて十分に考えられるであろう。⁴⁶⁾

結びに代えて

現実性との対比は、一見そうと分らないところにまで影を落としている。後年の有名な「証明は見渡せるものでなければならない」という所見がそれである。この指摘は唐突に響くかもしれないが、先の『論考』からの引用箇所で「その命題の正しさが洞察される」とあることに注意されたい。後年の1942年9月15日付けの手稿を参照することが助けになる。

ある形象が規則に従って他の形象から引き出されること。（例えば、主題の転回。）

そのとき、結果が操作と等置される。

私が「証明は見渡せるものでなければならない」と記したとき、それは証明では因果性はいかなる役割も持たないという意味であった。⁴⁷⁾

手稿中の「因果性」を本稿の表現での「現実性」と重ねれば、手稿のポイントはここで論じてきたことと重なることが理解されるであろう。

略記と参考文献

- Wittgenstein, L. 1922. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Ogden, C. K. (trans.), Routledge. (奥 雅博訳. 1975. 『論理哲学論考：ウィトゲンシュタイン全集 1』. 大修館. (以下、全集での邦訳は「全集」と略記し、出版社を省略する)) …【TLP, 『論考』】
- 1984. *Notebooks 1914-1916*, The University of Chicago Press. (奥 雅博訳. 「ノートブック 1914-1916」. 上掲全集 1 所収.) …【NB, 『日記』】
- 1984. *Philosophische Bemerkungen : Werkausgabe Band 2*. Suhrkamp. (奥 雅博訳. 1987. 『哲学的考察』, 全集 2) …【PB, 『考察』】
- 1984. *Philosophische Grammatik : Werkausgabe Band 4*. Suhrkamp.
- (山本 信訳. 1975. 『哲学的文法 1』, 全集 3. 坂井 秀寿訳. 1976. 『哲学的文法 2』, 全集 4.) …【PG,

⁴⁶⁾ PB § 174.

⁴⁷⁾ MS 125, 60v. cf. BGM IV-40, 41.

『文法』

- , P. M. S. Hacker, Joachim Schulte (ed.) 2009. *Philosophical Investigations* (4th ed), Wiley-Blackwell. (藤本 隆志訳. 1976. 『哲学探究』, 全集 8.) …【PU, 『探求』】
- 1984. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (3rd ed) : Band 6. Suhrkamp. (この版の初版は同社から 1974 年に出版) (中村 秀吉・藤田 晋吾訳. 1987. 『数学の基礎』, 全集 7.)
- 1984. *Zettel : Werkausgabe Band 8*. Suhrkamp. (菅 豊彦訳. 1975. 『断片』, 全集 9.) …【ZL, 『断片』】
- 1984. *Bemerkungen über die Farben : Werkausgabe Band 8*. Suhrkamp. (中村 昇ほか訳. 1997. 『色彩について』, 新書館.) …【BF, 『色彩』】
- 1984. *Wittgenstein und der Wiener Kreis: Werkausgabe Band 3*. Suhrkamp. (黒崎 宏訳. 1976. 『ウィットゲンシュタインとウィーン学団』, 全集 5.) …【WWK, 『学団』】
- 2000. *Wittgenstein's Nachlass : The Bergen Electric Edition*. Oxford University Press.
- 1976. *Wittgenstein's Lecture on the Foundation of Mathematics Cambridge 1939*, C. Diamond, eds, The Univ. of Chicago. (大谷 弘・古田 徹也訳. 2015. 『ウィットゲンシュタインの講義 数学の基礎篇』, 講談社学術文庫.) …【LFM】
- Blackburn, S. 1993. *Essays in quasi-realism*. Oxford University Press.
- Dummett, M. 1959. "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". Reprinted in *Truth and Other Enigmas*, pp. 166-85. Harvard University Press (1978). (藤田 晋吾訳 1986. 『真理という謎』, 勁草書房.)
- 飯田 隆. 1989. 『言語哲学大全Ⅱ (意味と様相 (上))』, 勁草書房.
- 入江 俊夫. 2012. 「数学における問題と解決との関係と証明概念—『論理哲学論考』から『数学の基礎』に至るウィットゲンシュタインの数学の哲学の展開の意味—」, 『科学哲学』45-2 (日本科学哲学会), 115-129.
- 2013. 『概念形成の哲学のために—ウィットゲンシュタインの数学の哲学—』 (学位論文). 千葉大学大学院社会文化科学研究科.
- Frascolla, P. 1994. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. London : Routledge.
- Gerrard, S. 1991. "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". *Synthese* 87, 125-42.
- Kreisel, Georg. 1958, "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics". *The British Journal for the Philosophy of Science* Vol. 9, No.34, 135-158.
- Marion, M. 1998. *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford : Clarendon Press.
- 岡本賢吾. 2001. 「『論理主義』は何をするのか—フレーゲの場合—」, 『科学哲学』34-1 (日本科学哲学会), 149-151.
- 大野波矢登. 2001. 「ウィットゲンシュタインと有限主義」, 『哲學』52 (日本哲学会), 229-238.
- Steiner, M. 2009. "Empirical Regularities in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". *Philosophia Mathematica* (Ⅲ) 17, 1-34.
- 戸田山和久. 1990. 「数学をめぐる二つの比喩」, 『現代思想』18 (10), 99-129. 青土社.
- Wiggins, D. 1998. "Truth, Invention, and the Meaning of Life", in his *Needs, Values, Truth* (3rd ed.), Clarendon