

## 目次

<b>1</b>	<b>基本的な知識</b>	<b>1</b>
1.1	テイラー級数	1
1.2	複素数	3
1.3	ベクトル	6
1.4	レビ・チビタの記号	8
<b>2</b>	<b>微分</b>	<b>12</b>
2.1	偏微分	12
2.2	多変数関数のテイラー級数	14
2.3	多変数関数の合成微分	16
2.4	ベクトルの微分	20
2.5	曲線	22
2.6	ベクトル場とベクトル演算子	24
2.7	ナブラ演算子の極座標表示	30
<b>3</b>	<b>積分</b>	<b>38</b>
3.1	多重積分	38
3.2	変数変換	41
3.3	線積分	47
3.4	平面でのグリーンの定理	50
3.5	曲面と面積分	55
3.6	ガウスの定理	58
3.7	デルタ関数	63
3.8	ストークスの定理	70
<b>4</b>	<b>常微分方程式</b>	<b>77</b>
4.1	1階常微分方程式	77
4.2	2階線形微分方程式	82
4.3	定数係数の2階線形微分方程式	85
4.4	演算子法	88
4.5	独立変数を含まない2階微分方程式	94
4.6	べき級数と2階線形微分方程式	95
<b>5</b>	<b>複素関数</b>	<b>105</b>
5.1	複素関数	105
5.2	複素関数の微分	108
5.3	複素積分	110
5.4	コーシーの積分定理	111
5.5	テイラー展開とローラン展開	117

5.6	留数定理 . . . . .	120
5.7	実関数の定積分 . . . . .	121
5.8	無限級数和 . . . . .	129
5.9	コーシーの主値 . . . . .	131
5.10	べき級数 . . . . .	133
5.11	解析接続 . . . . .	136
5.12	鞍点法 . . . . .	141
5.13	複素積分と2階線形微分方程式 . . . . .	145
<b>6</b>	<b>フーリエ解析</b>	<b>151</b>
6.1	フーリエ級数 . . . . .	151
6.2	波動方程式 . . . . .	156
6.3	フーリエ変換 . . . . .	161
6.4	フーリエ変換と微分方程式 . . . . .	167
6.5	ラプラス変換 . . . . .	169
6.6	ラプラス変換と微分方程式 . . . . .	174
<b>7</b>	<b>2階偏微分方程式</b>	<b>176</b>
7.1	代表的な偏微分方程式 . . . . .	176
7.2	波動方程式 . . . . .	178
7.3	波動方程式と境界条件 . . . . .	181
7.4	ポアソン方程式とラプラス方程式 . . . . .	186
7.5	ポアソン・ラプラス方程式とグリーン関数 . . . . .	187
7.6	極座標によるラプラス方程式の解法 . . . . .	192
7.7	拡散方程式 . . . . .	194
7.8	1次元拡散方程式と境界条件 . . . . .	195
<b>8</b>	<b>行列</b>	<b>200</b>
8.1	行列 . . . . .	200
8.2	行列式 . . . . .	203
8.3	余因子展開と逆行列 . . . . .	207
8.4	行列に関する幾つかの性質 . . . . .	209
8.5	正方行列の固有値と固有ベクトル . . . . .	212
8.6	エルミート行列の対角化 . . . . .	213
8.7	正方行列の対角化 . . . . .	216
8.8	連成振動 . . . . .	218
8.9	座標系の回転 . . . . .	221
8.10	曲線座標 . . . . .	226

## 参考書

- 和達三樹 物理入門コース 10 物理のための数学 (岩波書店)  
薩摩順吉 岩波基礎物理シリーズ 10 物理の数学 (岩波書店)  
松下貢 裳華房テキストシリーズ 物理数学 (裳華房)  
寺澤寛一 自然科学者のための数学概論 (岩波書店)  
岩波講座 応用数学

# 1 基本的な知識

## 1.1 テイラー級数

$x = c$  近傍における関数  $F(x)$  の様子を調べる場合,  $F(x)$  を簡単な関数で近似することは有効な方法である。最も簡単な近似は,  $x = c$  における  $F(x)$  の接線, つまり

$$F(x) \approx F(c) + F'(c)(x - c)$$

で近似することである。これを一般化して,  $x - c$  のべき級数 (power series) で展開して

$$F(x) = F(c) + F'(c)(x - c) + f_2(x - c)^2 + \cdots + f_n(x - c)^n + \cdots$$

としてみる。ここで,  $f_2, \dots, f_n, \dots$  は定数である。 $x$  で順次微分すると

$$F'(x) = F'(c) + 2f_2(x - c) + 3f_3(x - c)^2 + \cdots + nf_n(x - c)^{n-1} + \cdots$$

$$F''(x) = 2f_2 + 3 \cdot 2f_3(x - c) + \cdots + n(n-1)f_n(x - c)^{n-2} + \cdots$$

$$F'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1f_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2f_4(x - c) + \cdots + n(n-1)(n-2)f_n(x - c)^{n-3} + \cdots$$

⋮

$x = c$  とすると, 一般に  $F^{(n)}(c) = n!f_n$  になる。ただし,  $F^{(n)}(x)$  は  $F(x)$  を  $n$  回微分した  $n$  次導関数である。したがって,  $F(x)$  は

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (1.1)$$

と展開できる。これを**テイラー級数** (Taylor series) という。あるいは  $x \rightarrow x + c$  と置き換えれば

$$F(x + c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

である。更に,  $c$  と  $x$  を交換すると

$$F(x + c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x)}{n!} c^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( c \frac{d}{dx} \right)^n F(x) \quad (1.2)$$

と表せる。(1.1) で  $c = 0$  とした

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

を**マクローリン級数** (Maclaurin series) という。これらの級数は収束するとは限らない。代表的なマクローリン級数と収束範囲を示す。

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad |x| < \infty \quad (1.3)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad |x| < \infty \quad (1.4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad |x| < \infty \quad (1.5)$$

$$\log(1 + x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1 \quad (1.6)$$

- $F(x) = e^x$  とすると  $F^{(n)}(x) = e^x$  であるから  $F^{(n)}(0) = 1$  になる。したがって, (1.3) が成り立つ。
- $F(x) = \sin x$  の場合

$$F'(x) = \cos x, \quad F''(x) = -\sin x, \quad F^{(3)}(x) = -\cos x, \quad F^{(4)}(x) = \sin x, \quad \dots$$

であるから

$$F^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, & k = 1, 5, 9, \dots \\ -1, & k = 3, 7, 11, \dots \\ 0, & k = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad \text{つまり} \quad F^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^n, & k = 2n + 1 \\ 0, & k = 2n \end{cases}$$

したがって

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

になり (1.4) が成り立つ。(1.4) の両辺を微分すれば (1.5) を得る。

$\tan x$  のマクローリン級数は複雑であり (1.17) で与えられる。

- $F(x) = \log(1+x)$  の場合

$$F'(x) = (1+x)^{-1}, \quad F''(x) = (-1)(1+x)^{-2}, \quad F'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad \dots$$

一般に  $n \geq 1$  のとき

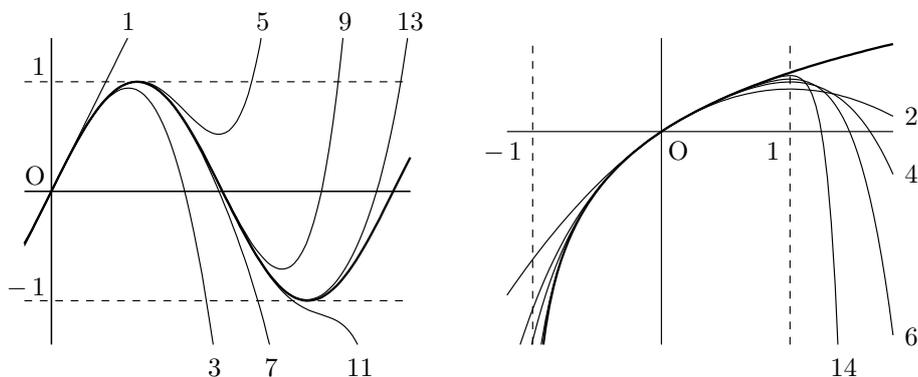
$$F^{(n)}(x) = (-1)(-2)\dots(-n+1)(1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n} (1+x)^{-n}$$

$F(0) = 0$  であるから

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

になる。

上の無限級数の部分和が元の関数に収束する様子を,  $\sin x$  と  $\log(1+x)$  について示したのが次の図である。細い曲線がそれぞれに付けた整数  $N$  の  $x^N$  までの和を表す。 $\sin x$  の部分和は項数が増すにつれて近似の精度がよくなる。一方,  $\log(1+x)$  の部分和は収束範囲  $-1 < x \leq 1$  では同様であるが, 収束範囲外では全く近似していない。



部分和は元の関数の近似式として使える。 $F'(c) = 0$  の場合,  $x = c$  近傍を

$$F(x) \approx F(c) + \frac{F''(c)}{2}(x-c)^2$$

で近似することはよく使う。

問題 1.1 次のマクローリン級数を示せ。

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n, \quad \text{ただし } a > 0$$

(1.5) と比較すると  $\cosh(ix) = \cos x$  である。

問題 1.2  $x$  を与えたとき  $x = \tan y$ ,  $|y| < \pi/2$  を満たす  $y$  を  $y = \tan^{-1} x$  または  $y = \arctan x$  で表わす。  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$  を示せ。これを積分して

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \text{ただし } |x| < 1$$

を求めよ。

## 1.2 複素数

$x$  と  $y$  を実数とするととき、複素数  $z$  を

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.7)$$

で定義する。ここで  $i^2 = -1$  である  $i$  を**虚数単位** (imaginary unit),  $x$  を複素数  $z$  の**実部** (real part),  $y$  を複素数  $z$  の**虚部** (imaginary part) といい

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

で表す。 $z = iy$  を(純) **虚数** (imaginary number) という。 $z = x + iy$  に対して  $x - iy$  を  $z$  の**共役** (conjugate) 複素数といい、 $\bar{z}$  または  $z^*$  で表す。共役複素数を使うと、実部と虚部は

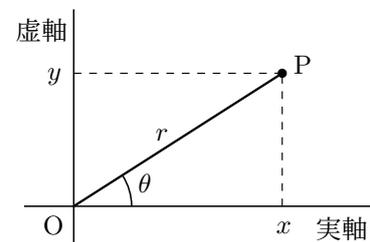
$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z^* = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z^* = \frac{z - z^*}{2i}$$

と表せる。 $z$  が実数である条件は  $z = z^*$  である。 $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  のとき

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2 \quad (1.8)$$

である。 $z = x + iy$  の**絶対値**  $|z|$  を  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  で定義する。 $|z|^2 = zz^*$  である。

実数は直線上の点で表せる。これと同様に、2つの実数からなる複素数は平面上の点で表せる。 $x$  軸と  $y$  軸からなる直交座標を考え、点  $P(x, y)$  に対して複素数  $z = x + iy$  を対応させる。複素数を表示するために用いられる  $xy$  平面を**複素平面** (complex plane) または**ガウス平面** (Gaussian plane) という。また、 $x$  軸は**実軸**,  $y$  軸は**虚軸** と呼ばれる。 $z$  の共役複素数  $z^* = x - iy$  は、複素平面上において実軸 ( $x$  軸) に関して対称の位置にある。原点  $O$  から点  $z = x + iy$  までの距離  $r$  は  $z$  の絶対値  $|z|$  に等しい。OP と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とすると



$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.9)$$

と書ける。これを複素数の**極形式**という。 $\theta$  を  $z$  の**偏角** (argument) といい  $\arg z$  と書く。

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = y/x$$

であるから,  $x, y$  を与えると  $r$  は一意に決まる。一方,  $n$  を整数とすると  $\tan \theta = \tan(\theta + 2n\pi)$  であるから  $\theta$  には  $2n\pi$  の不定性がある。  $2\pi$  の区間に制限すれば  $\theta$  は一意に決まる。これを偏角の**主値**といい  $\text{Arg } z$  で表わす。通常,  $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$  または  $0 \leq \text{Arg } z < 2\pi$  とする。  $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$  の場合,  $\tan x$  の逆関数  $\tan^{-1} x, (-\pi/2 < \tan^{-1} x < \pi/2)$  で表すと

$$x \geq 0 \text{ のとき } \text{Arg } z = \tan^{-1}(y/x), \quad x < 0 \text{ のとき } \text{Arg } z = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) + \pi, & y \geq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) - \pi, & y < 0 \end{cases}$$

である。

**オイラー (Euler) の公式** マクローリン級数 (1.3) の実数  $x$  を複素数  $z$  で置き換えて

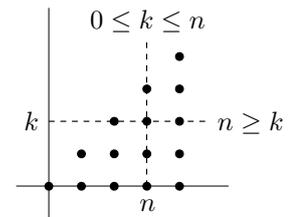
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.10}$$

により複素変数の指数関数  $e^z$  を定義する。複素数  $z_1, z_2$  に対して

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

右図より  $n \geq 0, 0 \leq k \leq n$  は  $k \geq 0, n \geq k$  と同じであるから

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{z_1} e^{z_2}$$



になる。実数と同様に  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$  が成り立つ。  $t$  が実数のとき

$$\frac{d}{dt} e^{zt} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n t^{n-1}}{(n-1)!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} = z e^{zt}$$

である。複素数  $z$  に関する微分は 108 ページ。

純虚数  $z = i\theta$  の場合,  $n$  が偶数 ( $n = 2k$ ) と奇数 ( $n = 2k + 1$ ) に分ければ

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

になる。この実部と虚部はそれぞれ  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  のマクローリン級数であるから

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{1.11}$$

を得る。これを**オイラーの公式**という。

- $(e^{i\theta})^* = e^{-i\theta}, |e^{\pm i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- 極形式 (1.9) は  $z = r e^{i\theta}, z^* = r e^{-i\theta}$  になる。
- $n$  を整数とすると  $e^{in\pi} = (-1)^n$  より  $e^{i\theta} = e^{i\theta_0}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = \theta_0 + 2n\pi$  である。
- オイラーの公式を使うと三角関数のいろいろな等式を簡単に導ける。例えば

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.8) より加法定理が求まる。

- $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$  より

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

これをド・モアブルの公式という。

マクローリン級数を用いてオイラーの公式を導いたが、次のようにしてもよい。 $e^{i\theta}$  は複素数であるから  $F(\theta), G(\theta)$  を実数の関数とすると

$$e^{i\theta} = F(\theta) + iG(\theta) \quad (1.14)$$

とおける。 $\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = ie^{i\theta}$  より ( $F' = dF/d\theta$  など)

$$F' + iG' = i(F + iG) = -G + iF, \quad \text{したがって } F' = -G, \quad G' = F \quad (1.15)$$

になる。これから  $F'' = -G' = -F$  である。微分方程式  $F'' = -F$  を満たす関数は  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  であるから  $A, B$  を任意の実数として

$$F = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad G = -F' = A \sin \theta - B \cos \theta$$

になる。(1.14) で  $\theta = 0$  とすると  $1 = F(0) + iG(0) = A - iB$  より  $A = 1, B = 0$  になるから  $F = \cos \theta, G = \sin \theta$  である。

**問題 1.3** ド・モアブルの公式より  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$  を示せ。

**問題 1.4**  $z^3 = 8i$  の解は  $z^3 - 8i = z^3 + (2i)^3$  を因数分解すれば求まるが,  $z = re^{i\theta}$  とおいて求めよ。求まった  $z$  を複素平面上の点として図示せよ。

**問題 1.5**  $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  より ( $z = 1$  は  $z \rightarrow 1$  の極限と見なす)

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\cos(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \quad \sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

を示せ。

**問題 1.6**  $f(x) = x/(e^x - 1) + x/2 - 1$  は  $f(-x) = f(x), f(0) = 0$  を満たすから

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{ただし } |x| < 2\pi$$

とおける。これで定義される正の有理数  $B_n$  をベルヌーイ数という。右表に具体的な値を示す。 $x$  は複素数でもよい。 $x = 2\pi i$  で  $x/(e^x - 1)$  は発散するから収束範囲は  $|x| < 2\pi$  になる。

$n$	$B_n$
1	1/6
2	1/30
3	1/42
4	1/30

$$x \cot x = ix + \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < \pi \quad (1.16)$$

$$\tan x = \cot x - 2 \cot 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \quad (1.17)$$

を示せ。

### 1.3 ベクトル

速度, 加速度, 力のように大きさと方向で指定される量をベクトルという。一方, 大きさだけの量をスカラーという。ベクトルは矢印を付けて  $\vec{A}$  と書いたり, 太文字 (ボールド体)  $\mathbf{A}$  で表す。  $x, y, z$  軸方向の単位ベクトル (大きさ 1 のベクトル) を  $e_x, e_y, e_z$  とする。  $x, y, z$  成分が  $A_x, A_y, A_z$  であるベクトル  $\mathbf{A}$  は

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_k$$

と表せる。  $A_x, A_y, A_z$  をそれぞれ  $A_1, A_2, A_3$  とし,  $e_x, e_y, e_z$  を  $e_1, e_2, e_3$  と書く。  $\mathbf{A}$  の大きさを  $|\mathbf{A}|$  で表す。つまり

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

である。2つのベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角を  $\theta$  とするとき

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

でスカラー積 (内積)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  を定義する。  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が直交する場合 ( $\theta = \pi/2$ ),  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  になる。なお,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$  を単に  $A^2$  と書く。

単位ベクトル  $e_x, e_y, e_z$  は大きさ 1 で互いに直交するから

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (1.18)$$

である。これをまとめて書くと ( $i, j$  は 1, 2, 3 のどれかを指す)

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \text{ただし} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (1.19)$$

である。  $\delta_{ij}$  をクロネッカーのデルタ記号といい, 非常に便利な記号である。

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{i3} = a_1 \delta_{13} + a_2 \delta_{23} + a_3 \delta_{33} = a_3, \quad \text{一般に} \quad \sum_{i=1}^3 a_i \delta_{ij} = a_j \quad (1.20)$$

になる。スカラー積  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  を2つのベクトルの成分で表すと

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left( \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 B_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 A_i \sum_{j=1}^3 B_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 A_i \sum_{j=1}^3 B_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (1.21)$$

つまり  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$  である。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 A_k \delta_{ik} = A_i \quad \therefore \quad \mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A}) \quad (1.22)$$

である。

$\sum$  の演算に関して次の点に注意せよ。

- $\sum_{k=1}^3 = \sum_k$ ,  $\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 = \sum_{kj}$  など簡略化して書く。
- 和をとる変数は何でもよい, 例えば

$$\sum_i a_i = \sum_k a_k, \quad \sum_{ij} a_i b_j = \sum_{mn} a_m b_n$$

である。もちろん, 和を取らない変数は勝手に変更してはいけない。

$$\bullet \left(\sum_i a_i\right)^2 = \left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_i a_i\right) = \sum_i a_i a_i = \sum_i a_i^2 \quad ???$$

などとしてはいけない。 $i$  についての2つの和は独立に行うからである。混乱しないためには、別の変数を用いて

$$\left(\sum_i a_i\right)^2 = \left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j a_j\right) = \sum_{ij} a_i a_j$$

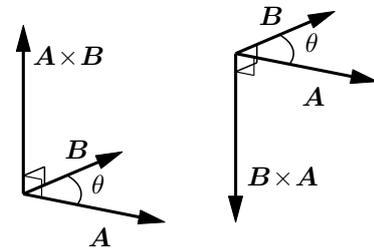
である。(1.21)では

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\sum_i A_i \mathbf{e}_i\right) \cdot \left(\sum_i B_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_i A_i B_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \sum_i A_i B_i$$

としても正しいが、これは  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  の結果である。

### ベクトル積

2つのベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の間のなす角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とするとき、大きさが  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$  で、方向が  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  に垂直で  $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  へ  $\theta$  の角で回すとき右ネジが進む方向のベクトルを考える。このベクトルを  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のベクトル積 (vector product) あるいは外積 (outer product) といい  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  と書く。



### ベクトル積の基本的性質

- 定義から  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$  は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  を2辺とする平行四辺形の面積である。
- $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  の方向は、 $\mathbf{B}$  から  $\mathbf{A}$  へ回すとき右ネジが進む向きである。これは  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の方向とは逆であるから  $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  になる。掛ける順序には注意を要する。
- $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が平行な場合、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が同じ向きなら  $\theta = 0$ 、逆向きなら  $\theta = \pi$  であり、どちらにしても  $\sin\theta = 0$  である。したがって  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  になる。特に  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  である。
- ベクトル  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  に対して分配則  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$  が成り立つ。
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  に垂直であるから、内積は  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$  になる。

ベクトル積を成分で表す。ベクトル積の定義から  $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$  の方向は  $\mathbf{e}_z$  の方向であり、大きさは  $|\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_y|\sin(\pi/2) = 1$  であるから、 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$  になる。同様にして

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1.23)$$

これと  $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$  などを使うと

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + A_x B_z \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z + A_y B_x \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x + A_y B_z \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + A_z B_y \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.24)$$

になる。したがって、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の成分は

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (1.25)$$

である。添字  $x, y, z$  は  $x \rightarrow y \rightarrow z$  の循環で現れる。3×3 の行列式 (8.10) を用いれば

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

と表せる。

**ベクトル積の例** 電荷  $q$  の粒子が磁場  $\mathbf{B}$  中を速度  $\mathbf{v}$  で運動する場合を考える。 $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角を  $\theta$  とすると、粒子が磁場から受けるローレンツ力 (Lorentz's force)  $\mathbf{F}$  の大きさは  $q|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin\theta$  である。その方向はフレミングの左手の法則 (左手の中指, 人差指をそれぞれ  $\mathbf{v}, \mathbf{B}$  の方向とすると親指が力の方向) で決まる。以上をベクトル積で表せば  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  と簡単に表せる。

## 1.4 レビ・チビタの記号

ベクトル積を含む公式を、成分を書き下して導出するのは非常に面倒であるが、レビ・チビタの記号  $\varepsilon_{ijk}$  を用いると簡潔に導ける。 $\varepsilon_{ijk}$  は便利な記号である。

### 定義

$i, j, k$  を 1, 2, 3 のどれかとする。 $i, j, k$  がすべて異なる 3 つの並び  $ijk$  を考える ( $n$  個の並びについては 203 ページ)。具体的には,  $3! = 6$  個の

$$\underline{123}, \underline{132}, \underline{231}, \underline{213}, \underline{312}, \underline{321}$$

である。下線部を互換 (2 つの数を入れ替えること) すると、次の並びになる。互換を繰り返すと、ある並び  $ijk$  から別の並び  $i'j'k'$  が得られる。このとき、繰り返す互換の組み合わせは、一意には決まらない。例えば 123 から 213 を得るには  $\underline{123} \rightarrow 213$ ,  $\underline{123} \rightarrow \underline{321} \rightarrow \underline{231} \rightarrow 213$  など、いろいろある。しかし、現れる互換の回数が偶数回か奇数回かは定まる。偶数回必要な置換  $ijk \rightarrow i'j'k'$  を偶置換、奇数回必要な置換を奇置換という。 $\varepsilon_{ijk}$  を

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{2つの添字が等しいとき} \\ +1 & \text{ijk が 123 の偶置換であるとき} \\ -1 & \text{ijk が 123 の奇置換であるとき} \end{cases} \quad (1.26)$$

で定義する。これをレビ・チビタ (Levi-Civita) の記号という。具体的には

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \quad \text{その他の } \varepsilon_{ijk} = 0$$

である。 $\underline{ijk}$  を 1 回互換すると  $ikj$  になるから  $\underline{123} \rightarrow \underline{ijk}$  が偶 (奇) 置換なら  $123 \rightarrow ikj$  は奇 (偶) 置換である。これから

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kij}$$

になる。 $ijk$  の順番を入れ替えるときには符号に注意する。

### 有用な関係式

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (1.27)$$

が成り立つ。

証明

$i = j$  または  $m = n$  のとき両辺ともに 0 になり成り立つ。 $i \neq j$  かつ  $m \neq n$  の場合、 $\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \neq 0$  になるのは、4 個の  $i, j, m, n$  が  $k$  と異なる 2 つ整数になる場合である。これが可能なのは  $i \neq j, m \neq n$  であるから  $i = m, j = n$  または  $i = n, j = m$  だけである。したがって

$$\sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} \sum_k \varepsilon_{kij}^2 + \delta_{in} \delta_{jm} \sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kji} = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \sum_k \varepsilon_{kij}^2$$

$i \neq j$  のとき  $\varepsilon_{kij}^2 = 1$  になる  $k$  が 1 つだけ必ず存在するから (1.27) が成り立つ。

### ベクトル積

$x, y, z$  軸方向の単位ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  で表す。(1.23) は一つの式

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (1.28)$$

で表せる。これは具体的に  $i, j$  を指定してみれば容易に確かめられる。また  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$  であるから (1.28) には性質  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i$  も含まれる。 $\varepsilon_{ijk}$  は  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$  の  $k$  成分になるから (1.27) の左辺の和は内積  $(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n)$  である。

ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の外積は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{ij} A_i B_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{ijk} A_i B_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \sum_k \left( \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} A_i B_j \right) \mathbf{e}_k$$

であるから、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の  $k$  成分は

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{kij} A_i B_j = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} A_i B_j \quad (1.29)$$

になる。例えば  $k = 3$  のとき  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 = \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{321} A_2 B_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1$  であり (1.25) に一致する。なお、1 つの項の中で 2 度現れる添字の和に対して、和の記号を省略することがある (**アイ**ンシュタインの規約)。これに従えば  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{kij} A_i B_j$  である。

**問題 1.7** (1.29) を用いて  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$  を示せ。

ベクトル積を含む公式の導出で (1.27), (1.29) は有用である。具体例を 3 つ示す。

公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.30)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.31)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \quad (1.32)$$

• (1.30)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_1(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_1 + A_2(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_2 + A_3(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_3 \\ &= A_1(B_2 C_3 - B_3 C_2) + A_2(B_3 C_1 - B_1 C_3) + A_3(B_1 C_2 - B_2 C_1) \\ &= B_1(C_2 A_3 - C_3 A_2) + B_2(C_3 A_1 - C_1 A_3) + B_3(C_1 A_2 - C_2 A_1) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

である。(1.33) より

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

とも書ける。これをスカラー 3 重積という。

$\varepsilon_{ijk}$  を使うと

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \sum_k A_k (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k = \sum_{ijk} A_k \varepsilon_{kij} B_i C_j$$

$\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}$  であるから

$$\sum_{kj} \varepsilon_{kij} A_k C_j = \sum_{kj} \varepsilon_{ijk} C_j A_k = (\mathbf{C} \times \mathbf{A})_i, \quad \therefore \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = B_i (\mathbf{C} \times \mathbf{A})_i = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

$\varepsilon_{ijk}$  を用いると、添字  $ijk$  の入れ替えだけである。

• (1.31)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_1 &= A_2 (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_3 - A_3 (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_2 \\ &= A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) \\ &= B_1 (A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_2 B_2 + A_3 B_3) \\ &= B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) \\ &= B_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - C_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

他の成分についても同様である。 $\varepsilon_{ijk}$  で表すと

$$(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_k = \sum_{ij} \varepsilon_{kij} A_i (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_j = \sum_{ijmn} \varepsilon_{kij} A_i \varepsilon_{jmn} B_m C_n = \sum_{imn} A_i B_m C_n \sum_j \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jmn}$$

(1.27) を用いて  $j$  の和を行うと

$$(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_k = \sum_{imn} A_i B_m C_n (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im})$$

第 1 項で  $m$  の和をとると  $\delta_{km}$  より  $m = k$  だけ、 $n$  の和をとると  $\delta_{in}$  より  $n = i$  だけ残る。第 2 項では  $m = i$ ,  $n = k$  だけ残るから

$$(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_k = B_k A_i C_i - C_k \sum_i A_i B_i = B_k \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - C_k \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

である。

• (1.32)

成分を具体的に書き下して示すのは、非常に煩雑になるから行わない。

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \sum_k (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k (\mathbf{C} \times \mathbf{D})_k = \sum_{kijmn} \varepsilon_{kij} A_i B_j \varepsilon_{kmn} C_m D_n \\ &= \sum_{ijmn} A_i B_j C_m D_n \sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \end{aligned}$$

(1.27) より

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \sum_{ijmn} A_i B_j C_m D_n (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \\ &= \sum_{ij} A_i B_j (C_i D_j - C_j D_i) \\ &= \sum_i A_i C_i \sum_j B_j D_j - \sum_i A_i D_i \sum_j B_j C_j \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\end{aligned}$$

になる。

**問題 1.8** (1.30), (1.31) より (1.32) を証明せよ。

**問題 1.9**  $\mathbf{n}$  を単位ベクトルとする。

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$$

を示せ。ベクトルは  $\mathbf{n}$  方向のベクトル (第1項) とこれに直交するベクトル (第2項) に分解できる。

## 2 微分

### 2.1 偏微分

幾つかの独立な変数 (互いに無関係に値を変えられる変数) の関数を**多変数関数**という。以下では、簡単のため2つの独立変数  $x, y$  の関数  $f(x, y)$  を扱う。

関数  $f(x, y)$  は、例えば  $y$  を固定すると、1変数  $x$  の関数と見なせるから、 $x$  についての微分を考  
えることができる。これを  $x$  に関する**偏導関数**といい

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad (2.1)$$

で定義する。同様にして、 $y$  に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad (2.2)$$

である。偏導関数の書き方としては

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$$

などがある。最後の表現は一定に保つ変数を明示した書き方で、熱力学でよく用いられる。

高階の偏導関数も1変数と同様に定義できる。2階の偏導関数は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

などである。 $f_{xy}$  と  $f_{yx}$  が存在し連続であれば  $f_{xy} = f_{yx}$  である。つまり、偏微分の順序には依らない。物理の問題では、特別な断りのない限り、偏微分の順序は問題にしない。

2変数以上の場合も同様にして偏微分を定義できる。 $f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$  のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k+h, \dots) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)}{h}$$

である。

微積の教科書では余り用いないが、以下では、表記を簡単のため

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

などで表すこともある。例えば

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial_x \partial_y f = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

である。

**例題**  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$  のとき  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - x \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$y, z$  についても同様にすると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \quad (2.6)$$

である。

**問題 2.1** 次の関数  $f(x, y)$  について 1 階の偏微分を求めよ。

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2), \quad f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

**問題 2.2**  $f(x, y) = g(y/x)$  のとき  $xf_x(x, y) + yf_y(x, y)$  を求めよ。

**全微分**  $xy$  平面上での極限をとる方向は, (2.1), (2.2) のように  $x, y$  方向だけに限らない。任意の方向から  $(x, y)$  に近づく場合, 2 点  $(x, y)$  と  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  における関数の差  $\Delta f$  は

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y \end{aligned}$$

であるから,  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  のとき

$$\Delta f \rightarrow \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

になる。通常,  $\Delta$  を  $d$  で書いて

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

と表す。これを**全微分**という。 $x$  軸とのなす角が  $\theta$  で表される方向から  $(x, y)$  に近づく場合,  $\Delta x = h \cos \theta, \Delta y = h \sin \theta$  とおけるから, 偏微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

になる。

任意の 2 つの関数  $P(x, y), Q(x, y)$  について

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

を考える。これが関数  $f(x, y)$  の全微分であるとする。つまり

$$df = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (2.7)$$

である。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

であるから

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

したがって

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.8)$$

である。 $Pdx + Qdy$  が全微分ならば (2.8) を満たす。逆に, (2.8) ならば  $Pdx + Qdy$  は全微分になる。この証明は 52 ページ参照。

## 2.2 多変数関数のテイラー級数

$f(x+a, y+b)$  を  $x, y$  のまわりで展開する。 $y+b$  を固定すれば  $f(x+a, y+b)$  は  $x$  だけの関数と見なせる。このときテイラー展開 (1.2) を使うと

$$f(x+a, y+b) = f(x, y+b) + a \partial_x f(x, y+b) + \frac{a^2}{2!} \partial_x^2 f(x, y+b) + \cdots$$

同様に  $f(x, y+b)$  を  $y$  のまわりでテイラー展開すると

$$f(x, y+b) = f(x, y) + b \partial_y f(x, y) + \frac{b^2}{2!} \partial_y^2 f(x, y) + \cdots$$

これを  $f(x+a, y+b)$  の展開式に代入すると ( $a, b$  の3次以上は無視)

$$\begin{aligned} f(x+a, y+b) &= f(x, y) + b \partial_y f(x, y) + \frac{b^2}{2!} \partial_y^2 f(x, y) + \cdots \\ &\quad + a \partial_x \left( f(x, y) + b \partial_y f(x, y) + \cdots \right) + \frac{a^2}{2!} \partial_x^2 \left( f(x, y) + \cdots \right) \\ &= f(x, y) + a \partial_x f(x, y) + b \partial_y f(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left( a^2 \partial_x^2 f(x, y) + 2ab \partial_x \partial_y f(x, y) + b^2 \partial_y^2 f(x, y) \right) + \cdots \\ &= f(x, y) + \left( a \partial_x + b \partial_y \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left( a \partial_x + b \partial_y \right)^2 f(x, y) + \cdots \end{aligned}$$

になる。ここで  $(a \partial_x + b \partial_y)$  などは式を簡略に表すために導入した記法で、例えば

$$\left( a \partial_x + b \partial_y \right)^2 f(x, y) = \left( a^2 \partial_x^2 + 2ab \partial_x \partial_y + b^2 \partial_y^2 \right) f(x, y) = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

である。一般には (1.2) より

$$f(x+a, y+b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a \partial_x)^k f(x, y+b), \quad f(x, y+b) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (b \partial_y)^\ell f(x, y)$$

であるから

$$f(x+a, y+b) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k! \ell!} (a \partial_x)^k (b \partial_y)^\ell f(x, y)$$

$n = k + \ell$  とする。 $n$  を与えると  $\ell = n - k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) であるから

$$\begin{aligned} f(x+a, y+b) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (a \partial_x)^k (b \partial_y)^{n-k} f(x, y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ただし、 $k$  の和に対して2項定理を使った。3変数以上の場合への拡張も容易である。例えば

$$f(x+a, y+b, z+c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z) \quad (2.10)$$

である。

**多変数関数の極大・極小** 2変数関数  $f(x, y)$  の場合を考える。点  $(a, b)$  の近傍の任意の点  $(x, y) \neq (a, b)$  に対して  $f(a, b) > f(x, y)$  が成り立つとき、 $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で極大であるといい、 $f(a, b)$  を極大値という。 $f(a, b) < f(x, y)$  の場合、 $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で極小であるといい、 $f(a, b)$  を極小値という。極大値、極小値を総称して極値という。ここでは  $f_x(x, y) = \partial f(x, y)/\partial x$  などの記法を用いる。

$(a, b)$  で極大になる条件を求める。 $y = b$  に固定すれば  $f(x, b)$  が極大になるためには

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_{xx}(a, b) < 0, \quad \text{ただし} \quad f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ など}$$

である。同様に  $x$  を固定すれば

$$f_y(a, b) = 0, \quad f_{yy}(a, b) < 0$$

になる。これらの条件を満たすとき  $x$  軸及び  $y$  軸に沿った方向に対しては  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で極大になるが、任意の方向に対しては極大とは限らない。 $f(a+t, b+s)$  を  $(a, b)$  のまわりでテイラー展開すると  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  であるから

$$f(a+t, b+s) = f(a, b) + \frac{1}{2} \left( f_{xx}(a, b)t^2 + 2f_{xy}(a, b)ts + f_{yy}(a, b)s^2 \right) + \dots$$

$(a, b)$  の近傍を考えるから  $t, s$  は微小である。

$$g_{xx} = f_{xx}(a, b) < 0, \quad g_{xy} = f_{xy}(a, b), \quad g_{yy} = f_{yy}(a, b) < 0$$

とおくと

$$2 \left( f(a+t, b+s) - f(a, b) \right) = g_{xx} \left[ \left( t + \frac{g_{xy}}{g_{xx}} s \right)^2 + \frac{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}{g_{xx}^2} s^2 \right] + \dots \quad (2.11)$$

$f(a+t, b+s) - f(a, b) < 0$  であるためには、 $g_{xx} < 0$  であるから [ ] 内が正でなければならない。したがって  $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 > 0$  である。 $g_{xx} < 0, g_{yy} < 0$  であっても  $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 < 0$  ならば  $(a, b)$  では極大にならない。例えば、直線  $t + (g_{xy}/g_{xx})s = 0$  上の点  $(a+t, b+s)$  に対しては

$$2 \left( f(a+t, b+s) - f(a, b) \right) = \frac{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}{g_{xx}} s^2 > 0$$

になるから直線  $t + (g_{xy}/g_{xx})s = 0$  の方向では極小である。また、 $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = 0$  の場合、極値の判断をするには  $t, s$  の3次以上を考慮する必要がある。

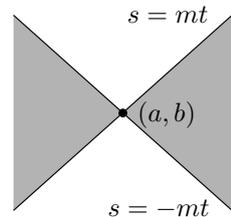
$(a, b)$  で極小になる必要条件是  $g_{xx} > 0, g_{yy} > 0$  である。 $f(a+x, b+y) - f(a, b) > 0$  であるためには、(2.11) より、やはり、[ ] 内が正であるから  $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 > 0$  である。以上から、 $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で極値をとる条件は

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0, \quad f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \left( f_{xy}(a, b) \right)^2 > 0 \quad (2.12)$$

であり、 $f_{xx}(a, b)$  あるいは  $f_{yy}(a, b)$  が負のとき極大、正のとき極小になる。

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  ではあるが、極大でも極小でもない点を**停留点**という。例えば、 $g_{xx} < 0, g_{xy} = 0, g_{yy} > 0$  のとき  $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = g_{xx}g_{yy} < 0$  である。 $m = \sqrt{-g_{xx}/g_{yy}}$  とおくと

$$\begin{aligned} \Delta f &= 2 \left( f(a+t, b+s) - f(a, b) \right) = g_{xx}t^2 + g_{yy}s^2 + \dots \\ &= g_{yy}(s - mt)(s + mt) + \dots \end{aligned}$$



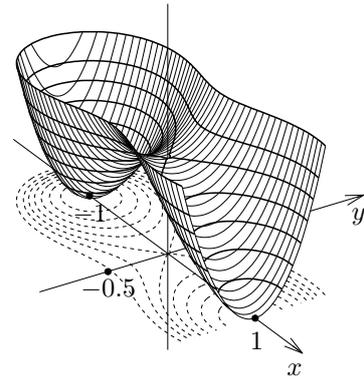
になる。影付きの領域では  $\Delta f < 0$  であり、付けていない領域では  $\Delta f > 0$  になる。また、2直線  $s = \pm mt$  上では  $\Delta f = 0$  である。影付きの領域は谷、付けていない領域は山になり、 $(a, b)$  が峠になっている。 $f(x, y)$  の曲面の形状が馬の鞍に似ているため、点  $(a, b)$  を**鞍点** (あんてん) という。

(2.11) は行列を用いて

$$2(f(a+t, b+s) - f(a, b)) = (t \ s) \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} + \dots$$

と表せるが,  $n$  変数の場合  $n \times n$  行列になる。この行列の固有値が全て正 (負) ならば極小 (極大) になるが, ここでは扱わない。

**問題 2.3**  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$  の極大, 極小を求めよ。右図は  $f(x, y)$  の 3 次元プロットである。



### 2.3 多変数関数の合成微分

$x, y$  が他の 2 つの変数  $r, s$  の関数

$$x = x(r, s), \quad y = y(r, s)$$

で与えられる場合を考える。

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds$$

である。これらを  $x, y$  の関数  $f(x, y)$  の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

に代入すると

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

になる。一方,  $f(x(r, s), y(r, s))$  を  $r, s$  の関数として見れば

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial s} ds$$

である。したがって

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.13)$$

である。これは 1 変数の関係式

$$\frac{dg(x(t))}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dg}{dx}$$

の拡張である。

繰り返しになるが, 偏微分の定義より  $\partial f / \partial r$  は  $s$  を固定したときの変化率であるから

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(r+h, s), y(r+h, s)) - f(x(r, s), y(r, s))}{h}$$

である。簡単のため

$$x = x(r, s), \quad y = y(r, s), \quad x_r = \frac{\partial x}{\partial r}, \quad y_r = \frac{\partial y}{\partial r}$$

と書くことにする。  $h \rightarrow 0$  のとき

$$x(r+h, s) = x(r, s) + h \frac{\partial x}{\partial r} + O(h^2) = x + hx_r + O(h^2)$$

$$y(r+h, s) = y(r, s) + h \frac{\partial y}{\partial r} + O(h^2) = y + hy_r + O(h^2)$$

である。ここで、 $O(h^2)$  は  $h \rightarrow 0$  のとき 定数  $\times h^2$  の量であることを表す (ランダウの記号という)。

$$\begin{aligned} f(x(r+h, s), y(r+h, s)) &= f(x+hx_r, y+hy_r) + O(h^2) \\ &= f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}hx_r + \frac{\partial f}{\partial y}hy_r + O(h^2) \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f}{\partial x}x_r + \frac{\partial f}{\partial y}y_r + O(h) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}x_r + \frac{\partial f}{\partial y}y_r = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y}$$

である。 $s$  を固定して  $r$  を変化させたとき、 $x = x(r, s)$  と  $y = y(r, s)$  の両方とも変化する。 $x$  の変化による  $f(x, y)$  の変化率が  $\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x}$  であり、 $y$  の変化による  $f(x, y)$  の変化率が  $\frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y}$  である。全体ではこの2つの和になる。 $\partial f / \partial s$  についても同様である。

(2.13) で  $f$  を省略して

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y}$$

と書くこともある。これは任意の関数に作用したとき、右辺と左辺が同じ結果を与えるということである。微分の記号は右側に演算する関数が出て初めて実際的な意味をもつが、あたかも1つの独立なものとして扱うと便利ことが多い。微分の記号を**微分演算子**という。

特別な場合について考える。 $x$  と  $y$  が1つの変数  $r$  の関数である場合、 $f(x(r), y(r))$  は  $r$  だけの関数である。(2.13) より

$$\frac{d}{dr} f(x(r), y(r)) = \frac{dx}{dr} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dr} \frac{\partial f}{\partial y}$$

になる。 $f$  は  $r$  だけの関数であるから (2.13) の  $\partial f / \partial r$  を一変数の微分  $df / dr$  で置き換えた。 $\partial x / \partial r$ 、 $\partial y / \partial r$  も同様である。

次に、 $x = x(r, s)$  のとき  $f(x)$  も  $r$  と  $s$  の関数である。(2.13) より

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{df}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{df}{dx} \quad (2.14)$$

になる。

3変数以上の場合

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1 = x_1(r_1, r_2, \dots, r_n), \dots, x_n = x_n(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

のとき

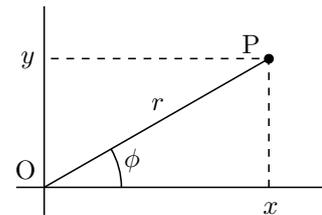
$$\frac{\partial F}{\partial r_k} = \frac{\partial x_1}{\partial r_k} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial r_k} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial r_k} \frac{\partial F}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial r_k} \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (2.15)$$

である。

**例題 1** 図のように、原点からの距離を  $r$ 、 $x$  軸とのなす角を  $\phi$  とする。2次元平面上の点を  $r$  と  $\phi$  で指定する座標を(2次元)極座標という。

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad r \geq 0$$

である。 $\partial_x^2 f + \partial_y^2 f$  を  $r, \phi$  の微分で表そう。



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \quad \text{つまり} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

になるから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \phi \quad (2.16)$$

$\tan \phi = y/x$  の両辺を  $x$  で微分すると ( (2.14) 参照 )

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d \tan \phi}{d \phi} = -\frac{y}{x^2}, \quad \therefore \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \phi = -\frac{\sin \phi}{r}, \quad \text{同様に} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{x} \cos^2 \phi = \frac{\cos \phi}{r}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r f + \frac{\partial \phi}{\partial x} \partial_\phi f = \cos \phi \partial_r f - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi f \\ \partial_y f &= \frac{\partial r}{\partial y} \partial_r f + \frac{\partial \phi}{\partial y} \partial_\phi f = \sin \phi \partial_r f + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi f \end{aligned} \quad (2.17)$$

これから

$$\partial_x f \pm i \partial_y f = e^{\pm i \phi} \left( \partial_r f \pm \frac{i}{r} \partial_\phi f \right) \quad (2.18)$$

になる。ここで

$$F = \partial_x f - i \partial_y f = e^{-i \phi} \left( \partial_r f - \frac{i}{r} \partial_\phi f \right)$$

とすると

$$\partial_x F + i \partial_y F = \partial_x (\partial_x f - i \partial_y f) + i \partial_y (\partial_x f - i \partial_y f) = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$$

である。一方, (2.18) で  $f$  を  $F$  に置き換えれば

$$\partial_x F + i \partial_y F = e^{i \phi} \left( \partial_r F + \frac{i}{r} \partial_\phi F \right)$$

になる。

$$\begin{aligned} e^{i \phi} \partial_r F &= e^{i \phi} \partial_r \left[ e^{-i \phi} \left( \partial_r f - \frac{i}{r} \partial_\phi f \right) \right] = \partial_r \left( \partial_r f - \frac{i}{r} \partial_\phi f \right) = \partial_r^2 f + \frac{i}{r^2} \partial_\phi f - \frac{i}{r} \partial_r \partial_\phi f \\ \frac{i}{r} e^{i \phi} \partial_\phi F &= \frac{i}{r} e^{i \phi} \partial_\phi \left[ e^{-i \phi} \left( \partial_r f - \frac{i}{r} \partial_\phi f \right) \right] = \frac{1}{r} \left( \partial_r f - \frac{i}{r} \partial_\phi f \right) + \frac{i}{r} \partial_\phi \left( \partial_r f - \frac{i}{r} \partial_\phi f \right) \end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (2.19)$$

である。

**問題 2.4**  $x, y$  の関数を極座標で表すと  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  だけの関数  $f(r)$  になる場合を考える。 $f$  は  $\phi$  に依存しないから

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{df}{dr}$$

である。これから

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

を求め (2.19) と比較せよ。なお,  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$  は  $\phi$  にも依存する。

例題 2  $c$  を正の定数として

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$

を満たす 2 変数  $x, t$  の関数  $w(x, t)$  を求める。  $u = x + ct, v = x - ct$  とすると

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} = c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v}$$

であるから

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

したがって

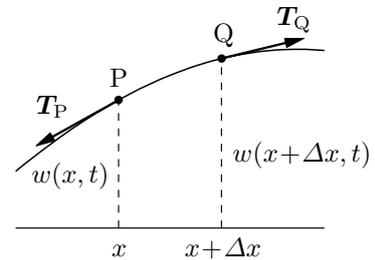
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w = 4 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$$

になる。  $\partial w / \partial v$  を  $u$  で偏微分すると 0 ということは、  $\partial w / \partial v$  は  $u$  に依存せず  $v$  だけの関数を意味する。したがって、  $\partial w / \partial v = f(v)$  とおける。これを  $v$  について積分する。  $G$  を積分定数とすると ( $G$  は  $v$  について定数であればよいから  $u$  に依存してよい)

$$w(x, t) = F(v) + G(u) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad F(v) = \int dv f(v) \quad (2.21)$$

になる。  $F(x), G(x)$  は任意の関数である。一般に、2 つ以上の独立な変数をもつ未知関数とそれらの偏微分を含む方程式を偏微分方程式という。偏微分方程式 (2.20) を特に波動方程式といい、解 (2.21) をダランベールの解という。

波動方程式 (2.20) を弦の振動を例にして導出しておく。単位長さあたりの質量が  $\sigma$  である一様な弦を張力  $T$  で張る。弦の平衡位置を  $x$  軸とし、弦を  $x$  軸に垂直な方向に振動させる。振動している弦の平衡位置からの変位  $w$  は位置  $x$  と時間  $t$  によるから  $w = w(x, t)$  と表せる。弦の  $x$  と  $x + \Delta x$  の間の微小部分 PQ を質点と見なし、運動方程式を求める。PQ に働く力  $\mathbf{F}$  は P における張力  $\mathbf{T}_P$  と Q における張力  $\mathbf{T}_Q$  の合力  $\mathbf{F} = \mathbf{T}_P + \mathbf{T}_Q$  である。



$\mathbf{T}_P$  と  $\mathbf{T}_Q$  は大きさは等しいが、向きがわずかに違うので  $\mathbf{F}$  は 0 にならない。位置  $x$  における弦の接線と  $x$  軸のなす角を  $\theta(x)$  とすると、  $\mathbf{T}_P, \mathbf{T}_Q$  の  $x$  方向の成分と  $w$  方向の成分は

$$(\mathbf{T}_P)_x = -T \cos \theta(x), \quad (\mathbf{T}_P)_w = -T \sin \theta(x)$$

$$(\mathbf{T}_Q)_x = T \cos \theta(x + \Delta x), \quad (\mathbf{T}_Q)_w = T \sin \theta(x + \Delta x)$$

である。変位は小さく  $\theta$  の 2 次以上が無視できるとし、  $\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \tan \theta$  で近似すると

$$F_x = (\mathbf{T}_P)_x + (\mathbf{T}_Q)_w \approx 0, \quad F_w = (\mathbf{T}_P)_w + (\mathbf{T}_Q)_w \approx T (\tan \theta(x + \Delta x) - \tan \theta(x))$$

になる。PQ に働く力の  $x$  成分は無視できる。  $\tan \theta$  は弦の接線の傾きであるから

$$\tan \theta(x) = w_x(x, t), \quad \text{ただし } w_x(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$$

である。これから

$$F_w = T \Delta x \frac{w_x(x + \Delta x, t) - w_x(x, t)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} T \Delta x \frac{\partial w_x}{\partial x} = T \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

になる。PQ の質量は  $\sigma \Delta x$  であり、 $w$  方向の加速度は  $\partial^2 w / \partial t^2$  であるから、運動方程式より

$$\sigma \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_w = T \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \therefore \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \text{ただし } c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

である。ダランベールの解 (2.21) において、 $F(x - ct)$  は  $F(x)$  を  $x$  軸正方向に  $ct$  だけ移動したものであるから、波形  $F(x)$  が速さ  $c$  で  $x$  軸正方向に進む波を表す。 $G(x + ct)$  は波形  $G(x)$  が速さ  $c$  で  $x$  軸負方向に進む波である。 $F(x)$ 、 $G(x)$  の具体形は初期条件と境界条件を与えると決まる。

$x = r \cos \phi$  を  $r$  で微分すると  $\partial x / \partial r = \cos \phi$  であるが、これを (2.16) と比較すると

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.22)$$

1 変数の微分と異なり  $\partial x / \partial r \neq (\partial r / \partial x)^{-1}$  である。これは両辺で一定にする変数が異なるからである。固定する変数を明示すれば (2.22) は

$$\left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)_\phi = \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_y$$

である。一定にする変数を同じにすると、例えば  $r$  を  $x$  と  $\phi$  の関数  $r(x, \phi) = x / \cos \phi$  と見なせば (このようなことは通常考えないが)

$$\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)_\phi = \frac{1}{\cos \phi} = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)_\phi \right]^{-1}$$

であり、1 変数の場合と同じ関係が成り立つ。通常、独立な変数として  $x, y$  の組か  $r, \phi$  の組を考えるので、一定にする変数は明示しない。

**問題 2.5**  $\alpha$  を定数として  $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha$ 、 $y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$  のとき

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

を示せ。

**問題 2.6**  $f(x, y) = 2x + y$  のとき  $f_x = 2$  である。 $u = x$ 、 $v = x + y$  とすると  $f = u + v$  であるから  $f_u = 1$  になる。 $u = x$  であるが  $f_x \neq f_u$  である。何故このような違いが生じるのか。

## 2.4 ベクトルの微分

ベクトル  $\mathbf{A}$  が変数  $t$  の関数  $\mathbf{A}(t)$  であるとき、ベクトル  $\mathbf{A}$  の微分を

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

で定義する。成分で表して

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t) \mathbf{e}_x + A_y(t) \mathbf{e}_y + A_z(t) \mathbf{e}_z = \sum_k A_k(t) \mathbf{e}_k$$

ならば

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_k \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_k(t + \Delta t) - A_k(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_k = \sum_k \frac{dA_k}{dt} \mathbf{e}_k$$

である (ここでの単位ベクトル  $e_k$  は  $t$  に依らない)。高次の微分も同様に定義できる。なお,  $t$  が時間のとき  $t$  に関する微分を  $\dot{\quad}$  で表す (ニュートンの記号)。  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  などである。

微分の定義から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{A}(t)) &= \frac{df}{dt}\mathbf{A} + f\frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t)) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} \end{aligned}$$

が成り立つ。例えば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t)\mathbf{A}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t)\mathbf{A}(t+\Delta t) - f(t)\mathbf{A}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\mathbf{A}(t+\Delta t) + f(t)\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \right) = \frac{df}{dt}\mathbf{A} + f\frac{d\mathbf{A}}{dt} \end{aligned}$$

である。

ベクトルには大きさと方向があるから,  $t$  が変化すると, 一般には  $\mathbf{A}(t)$  の大きさと方向が変化する。  $A(t) = |\mathbf{A}(t)|$ ,  $e_A(t)$  を  $\mathbf{A}(t)$  方向の単位ベクトルとすると  $\mathbf{A} = A e_A$  であるから

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}e_A + A\frac{de_A}{dt}$$

になる。右辺第1項が大きさの変化, 第2項が方向の変化である。単位ベクトル  $e_k$ , ( $k = x, y, z$ ) は大きさ及び方向が  $t$  に依存しない定数ベクトルであるが,  $e_A(t)$  は方向が  $t$  に依存する。ただし, 大きさは  $t$  に依存しないから

$$e_A \cdot e_A = 1, \quad \therefore \frac{d}{dt}(e_A \cdot e_A) = 2e_A \cdot \frac{de_A}{dt} = 0 \quad (2.23)$$

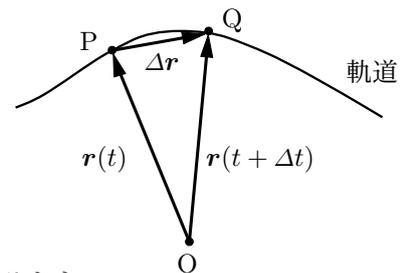
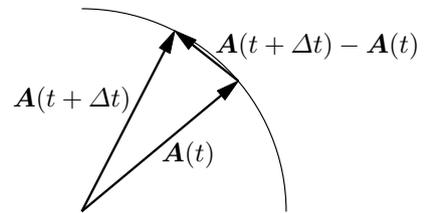
になり,  $de_A/dt$  は  $e_A$  に直交する。一般に,  $|\mathbf{A}| = \text{一定}$  ならば  $\mathbf{A}$  と  $d\mathbf{A}/dt$  は直交する。これを図で表したのが上図である。図から  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき  $\mathbf{A}(t)$  と  $\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)$  は直交するから  $\mathbf{A}(t)$  と  $d\mathbf{A}/dt$  は直交する。

時刻  $t$  における質点の位置を  $\mathbf{r}(t)$  とする。時刻  $t$  での位置を P, 微小時間  $\Delta t$  経過した  $t + \Delta t$  における位置を Q とし,  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$  とする。速度の大きさである速さは, 軌道 (orbit) に沿った P から Q までの距離  $\Delta s$  を  $\Delta t$  で割ったものである。また, 速度の方向は軌道の接線方向である。  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき, Q は P に限りなく近づき,  $\Delta\mathbf{r}$  の大きさはほぼ  $\Delta s$  に等しく, その向きは P における軌道の接線方向になるから

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.24)$$

が速度である。位置ベクトルの時間変化が速度であるが, これと同様にして, 速度の時間変化として **加速度** (acceleration) を定義する。加速度を  $\mathbf{a}$  とすると  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$  である。速度の変化は, 大きさ (速さ) の変化だけでなく, 方向の変化もある。速さを  $v(t)$  とし,  $\mathbf{v}$  の方向を向く単位ベクトルを  $e_v(t)$  とすると,  $\mathbf{v} = v e_v$  であるから

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}e_v + v\frac{de_v}{dt} \quad (2.25)$$



と表せる。 $e_x, e_y, e_z$  と違い,  $e_v(t)$  は質点の運動とともに方向が変わるから時間の関数である。

$de_v/dt$  について考える。時刻  $t$  と微小時間経過後の  $t + \Delta t$  における質点の位置を A, B とし,  $\Delta e_v = e_v(t + \Delta t) - e_v(t)$  とする。また,  $e_v(t + \Delta t)$  と  $e_v(t)$  の間の角を  $\Delta\theta$  とする。 $\Delta e_v$  の大きさは半径 1, 角度  $\Delta\theta$  の円弧の長さで近似できるから  $|\Delta e_v| = \Delta\theta$  である。A と B における軌道の垂線の交点を C とする。 $\overline{AC}$  と  $\overline{BC}$  はほぼ等しいから, AB 間の軌道は中心を C, 半径  $\rho(t) = \overline{AC}$  の円と見なせる。 $\angle ACB = \Delta\theta$  より AB 間の軌道の長さ  $\Delta s$  は  $\Delta s = \rho\Delta\theta$  になるから  $|\Delta e_v| = \Delta\theta = \Delta s/\rho$  である。 $\Delta t \rightarrow 0$  のとき  $\Delta s/\Delta t \rightarrow v$  であるから

$$\left| \frac{de_v}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta e_v}{\Delta t} \right| = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{\rho}$$

$\Delta e_v$  の方向は,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき,  $e_v(t)$  に垂直な  $\overline{AC}$  の向きになる。この向きの単位ベクトル

を  $e_n(t)$  とすると  $\frac{de_v}{dt} = \frac{v}{\rho} e_n$  になるから

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_v + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (2.26)$$

である。速さの変化  $dv/dt$  は軌道の接線方向

(速度の方向) の加速度を生じ, 一方, 速度の方向の変化は, 接線に垂直な方向の加速度をもたらす。

**問題 2.7**  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ,  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  とする。 $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$  を示せ。円運動 (等速とは限らない)

$$\mathbf{r} = R(\mathbf{e}_x \cos \theta(t) + \mathbf{e}_y \sin \theta(t)), \quad R = \text{定数}$$

のとき  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{L}$  を求め  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{v}$  が直交することを確かめよ。

## 2.5 曲線

3次元空間内の曲線である質点の軌道  $\mathbf{r}(t)$  は1つの変数  $t$  の関数になる。これと同様に, 一般に曲線は適当な1つの変数で表すことができる。曲線上にある基準点 A をとり, 曲線に沿った A からの距離  $s$  で曲線を表すことにする (A から一方の方向を  $s > 0$  とし, 逆向きには  $s < 0$  とする)。つまり, 曲線上の点の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y + z(s)\mathbf{e}_z$$

とする。 $\mathbf{r}(0)$  は基準点 A の位置ベクトルである。

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)$  とすると,  $\Delta s \rightarrow 0$  のとき  $|\Delta \mathbf{r}/\Delta s| \rightarrow 1$  であり,  $\Delta \mathbf{r}$  の向きは曲線の接線方向になるから

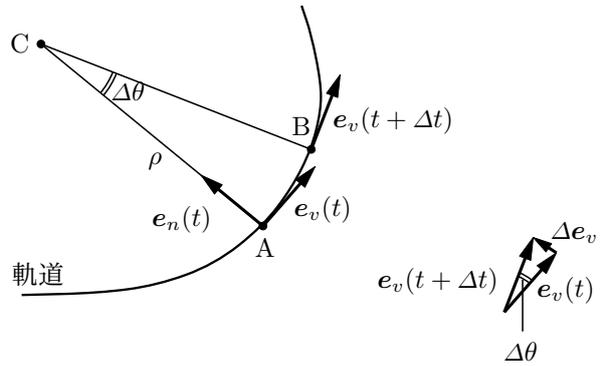
$$\mathbf{t}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

は曲線の接線方向を向く単位ベクトルである。 $\mathbf{t}$  を接線ベクトルという。 $\mathbf{n}$  を単位ベクトルとして

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho(s)} \mathbf{n}(s), \quad \rho(s) \geq 0 \quad (2.27)$$

とおく。 $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$  を  $s$  で微分すると  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}/\rho = 0$  になるから,  $\mathbf{n}$  は接線ベクトル  $\mathbf{t}$  と直交するベクトルである。 $\mathbf{n}$  を法線ベクトルという。(2.26) と同様に  $\rho$  は曲線に滑らかに接する円の半径を表す。これは, 次のようにしても示せる。

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} (\Delta s)^2 + \cdots = \mathbf{r}(s) + \Delta s \mathbf{t} + \frac{(\Delta s)^2}{2\rho} \mathbf{n} + \cdots$$



であるから,  $s$  近傍の曲線は  $r(s)$  を通り  $t(s)$  と  $n(s)$  で張られる平面上にある。この平面を**接触平面**という。 $r(s)$  を原点とし  $t$  の方向に  $X$  軸,  $n$  の方向に  $Y$  軸をとると, 上式は

$$X = \Delta s, \quad Y = \frac{(\Delta s)^2}{2\rho} = \frac{X^2}{2\rho}$$

になり放物線を表す。ところで, 中心が  $(0, R)$  である半径  $R$  の円は, 原点近傍では

$$Y = R - \sqrt{R^2 - X^2} = R - R \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{R^2} + \dots \right) = \frac{X^2}{2R} + \dots$$

になるから  $\rho = R$  である。 $\rho$  を**曲率半径**,  $\kappa = 1/\rho$  を**曲率**という。

$t, n$  に直交する単位ベクトル  $b$  が存在するが,  $b$  として  $b = t \times n$  を採用する。この  $b$  を**陪法線ベクトル**という。 $t, n, b$  は互いに直交する単位ベクトルである。

$$\frac{db}{ds} = \frac{dt}{ds} \times n + t \times \frac{dn}{ds} = \kappa n \times n + t \times \frac{dn}{ds} = t \times \frac{dn}{ds}$$

であるから  $db/ds$  は  $t$  と直交する。また,  $b \cdot b = 1$  を  $s$  で微分すれば  $b \cdot (db/ds) = 0$  になるから  $db/ds$  は  $b$  と直交する。したがって

$$\frac{db}{ds} = -\tau n \quad (2.28)$$

とおける。上図から分かるように, 接触平面に垂直な  $b$  が  $s$  の変化とともに  $n$  方向に変化することは, 接触平面が曲線の接線ベクトル  $t$  を軸として回転する (ねじれる) ことを表す。 $\tau$  はねじれの度合いを与えることになり**ねじれ率**という。(1.31) より

$$t \times b = t \times (t \times n) = t n \cdot t - n t \cdot t = -n, \quad n \times b = t$$

になるから

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{dt}{ds} \times b - t \times \frac{db}{ds} = -\kappa n \times b + \tau t \times n = \tau b - \kappa t \quad (2.29)$$

(2.27), (2.28), (2.29) を**フレネ・セレの公式**という。

**例題**  $\theta$  を変数とする螺旋 (らせん) 曲線

$$x(\theta) = R \cos \theta, \quad y(\theta) = R \sin \theta, \quad z(\theta) = b \theta, \quad R, b \text{ は定数}$$

を考える。

$$t = \frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \frac{dr}{d\theta} = \frac{d\theta}{ds} \left( -R \sin \theta e_x + R \cos \theta e_y + b e_z \right)$$

$ds/d\theta > 0$  となるように  $s$  の向きをとれば,  $|t| = 1$  より

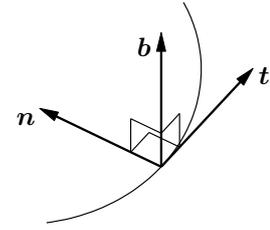
$$\frac{d\theta}{ds} = \left| -R \sin \theta e_x + R \cos \theta e_y + b e_z \right|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}}$$

したがって

$$t = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} \left( -R \sin \theta e_x + R \cos \theta e_y + b e_z \right)$$

になる。更に微分すると

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{R}{R^2 + b^2} \left( \cos \theta e_x + \sin \theta e_y \right) = \kappa n$$



絶対値をとれば  $\kappa > 0$  より

$$\kappa = \frac{R}{R^2 + b^2}, \quad \mathbf{n} = -\cos\theta \mathbf{e}_x - \sin\theta \mathbf{e}_y$$

である。

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} (b \sin\theta \mathbf{e}_x - b \cos\theta \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z)$$

を  $s$  で微分すると

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \frac{d\mathbf{b}}{d\theta} = \frac{b}{R^2 + b^2} (\cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y) = -\frac{b}{R^2 + b^2} \mathbf{n}, \quad \therefore \tau = \frac{b}{R^2 + b^2}$$

になる。  $b = 0$  のとき

$$\mathbf{t} = -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{R}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_z, \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \tau = 0$$

になるが、曲線は  $xy$  平面上の円になるから当然の結果である。

**問題 2.8**  $xy$  平面上の曲線が  $t$  を変数として  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = 0$  で与えられるとき

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

になることを示せ。

**問題 2.9**  $\tau = \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right)$  を示せ。

## 2.6 ベクトル場とベクトル演算子

3次元空間の点  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  に依存する量を場という。場所  $\mathbf{r}$  の関数  $F(x, y, z)$  をスカラー場という。また、各成分が  $\mathbf{r}$  の関数であるベクトル関数  $\mathbf{A}(x, y, z)$  をベクトル場という。ベクトル場を成分で表すと

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + A_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + A_z(x, y, z) \mathbf{e}_z$$

である。これらを  $F(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  と書くが、3変数  $x, y, z$  の関数である。また、ベクトル演算子

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z$$

を定義する ( $\partial_x$  などの記法は (2.3) を見よ)。これを**ナブラ演算子**という。17ページでも述べたように、微分演算子は右側に演算する関数がきて初めて実的な意味をもつが、あたかも1つの独立な量として扱うと便利である。

**勾配 (グラジエント)** スカラー関数  $F(\mathbf{r})$  の勾配 (グラジエント, gradient) は

$$\text{grad } F(\mathbf{r}) = \nabla F(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \partial_x F + \mathbf{e}_y \partial_y F + \mathbf{e}_z \partial_z F = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \partial_k F$$

で定義される。グラジエントはスカラー関数  $F(\mathbf{r})$  から  $x$  成分,  $y$  成分,  $z$  成分がそれぞれ  $\partial_x F$ ,  $\partial_y F$ ,  $\partial_z F$  であるベクトル関数を生成する。

点  $\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z$  と近傍の点  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = (x + \Delta x)e_x + (y + \Delta y)e_y + (z + \Delta z)e_z$  での関数の差

$$\begin{aligned}\Delta F = F(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - F(\mathbf{r}) &= \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x \\ &+ \frac{F(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y \\ &+ \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z\end{aligned}$$

は  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  の2次以上を無視すると

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{F(x + \Delta x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x} \Delta x + \frac{F(x, y + \Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y} \Delta y \\ &+ \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z\end{aligned}$$

になるから  $\Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta x \partial_x F + \Delta y \partial_y F + \Delta z \partial_z F \\ &= (\Delta x e_x + \Delta y e_y + \Delta z e_z) \cdot (e_x \partial_x F + e_y \partial_y F + e_z \partial_z F) = \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla F(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (2.30)$$

と表せる。なお、テイラー展開 (2.10) を用いれば

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = F(x, y, z) + \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) F(x, y, z) + \dots$$

になるから, (2.30) は直ちに求まる。

$\nabla F(\mathbf{r})$  と  $\Delta\mathbf{r}$  のなす角を  $\theta$  とすると

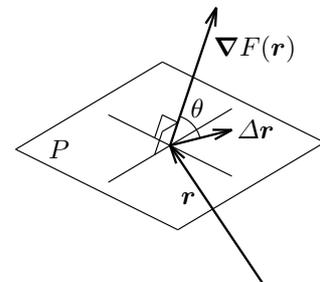
$$\Delta F = |\nabla F(\mathbf{r})| |\Delta\mathbf{r}| \cos \theta$$

である。 $|\Delta\mathbf{r}|$  を一定にして  $\Delta\mathbf{r}$  の方向を変えると,  $\Delta F$  が最も大きく変化する方向は  $\theta = 0, \pi$ , つまり,  $\Delta\mathbf{r}$  を  $\nabla F(\mathbf{r})$  の方向, あるいはその逆向きにとったときである。したがって, ベクトル  $\nabla F(\mathbf{r})$  の方向は  $F(\mathbf{r})$  が最も大きく変化する方向, 勾配が最大の方向である。

$F(\mathbf{r}) = \text{一定} = C$  である点  $\mathbf{r}$  を考える。 $x, y$  を与えると  $F(x, y, z) = C$  を満たすように  $z$  が決まる。この点  $(x, y, z)$  を3次元空間でプロットすると曲面になる。この曲面  $S$  上の近傍の2点  $\mathbf{r}, \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  では  $F(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})$  であるから

$$\Delta F = \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla F(\mathbf{r}) + \dots = 0$$

$\Delta\mathbf{r}$  は曲面  $S$  上の点を  $\mathbf{r}$  を始点として表したベクトルであるが, このベクトルは  $\mathbf{r}$  近傍では  $\nabla F(\mathbf{r})$  に直交する。したがって,  $\nabla F(\mathbf{r})$  は  $F(\mathbf{r}) = \text{一定}$  の曲面  $S$  に直交するベクトル (法線ベクトル) であり,  $\nabla F(\mathbf{r})$  に直交する平面  $P$  は曲面  $S$  の接平面になる。2次元の場合  $F(x, y) = \text{一定}$  は曲線になり  $\nabla F$  はこの曲線に直交するベクトルである。



例題 1  $F(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$  の場合,  $C$  の値を適

当に変えて  $F(x, y) = C$  の曲線を右図に実線で示す。

$F(x, y) = C$  を  $y$  について解くと

$$y = \pm \sqrt{(x/C)^{2/3} - x^2}$$

になる。破線は、接線の方向が

$$\nabla F(x, y) = \frac{-2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \mathbf{e}_x - \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \mathbf{e}_y$$

の方向になる曲線である。破線の曲線を  $y = y(x)$  とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial_y F}{\partial_x F} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2} \quad (2.31)$$

である。この微分方程式は解析的に解け

$$\varphi(x, y) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \text{一定} = D \quad (2.32)$$

になる (78 ページ参照)。破線は  $D$  の値を適当に変えたときの  $\varphi(x, y) = D$  の曲線である。実線と破線は直交する。

例題 2  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2}} \\ &= -\frac{x - a_x}{\left((x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2\right)^{3/2}} = -\frac{x - a_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \end{aligned}$$

$y, z$  についても同様にすると

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = -\frac{(x - a_x)\mathbf{e}_x + (y - a_y)\mathbf{e}_y + (z - a_z)\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \quad (2.33)$$

になる。 $-(\mathbf{r} - \mathbf{a})/|\mathbf{r} - \mathbf{a}|$  は大きさ 1 で点  $\mathbf{r}$  から点  $\mathbf{a}$  に向かうベクトルであるから、 $\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$  は大きさが  $|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-2}$  で常に  $\mathbf{a}$  に向かうベクトルである。 $|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1} = \text{一定}$  は  $\mathbf{a}$  を中心とした球面であり  $\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$  はこれに直交する。

ポテンシャルエネルギー  $U(x, y, z)$  が  $k$  を定数として

$$U(x, y, z) = \frac{k}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

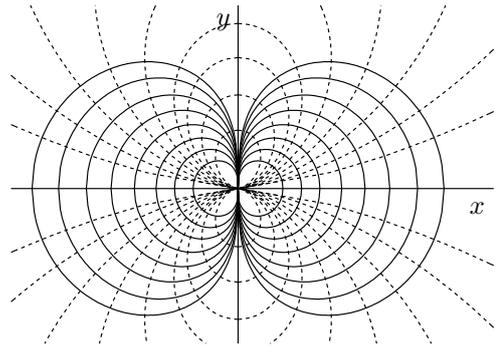
で与えられる場合を考える。 $k < 0$  のとき引力,  $k > 0$  のとき斥力である。

- 原点に質量  $M$  の物体があるとき, 質量  $m$  の物体の位置エネルギーは, 万有引力定数を  $G$  として  $k = -GMm$  である。
- 原点に電荷  $Q$  があるとき, 電荷  $q$  の物体の位置エネルギーは, 真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とすると  $k = Qq/(4\pi\epsilon_0)$  である。

(2.33) より  $-\nabla U = -k\nabla \frac{1}{r} = \frac{k}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$  であるから, 物体に働く力  $\mathbf{F}$  は大きさと方向を含めて

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (2.34)$$

になる。 $\mathbf{F}$  は  $U(\mathbf{r}) = \text{一定}$  の等ポテンシャル面に直交し,  $U(\mathbf{r})$  が最も大きく変化する方向に向く。



問題 2.10 次の関数の  $\nabla F(x, y, z)$  を求めよ。

$$F(x, y, z) = f(r), \quad F(x, y, z) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}, \quad (\mathbf{a} \text{ は定数ベクトル})$$

問題 2.11  $U(x, y, z)$  において  $x, y, z$  が  $t$  の関数とすると  $U(x, y, z)$  も  $t$  だけの関数になる。

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla U, \quad \text{ただし } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

を示せ。 $U(x, y, z)$  を位置エネルギーとすると、物体に働く力  $\mathbf{F}$  は  $\mathbf{F} = -\nabla U$  である。運動方程式から力学的エネルギー  $E = mv^2/2 + U(x, y, z)$  が保存する、つまり、 $dE/dt = 0$  を示せ。

発散 (ダイバージェンス) ベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の発散 (ダイバージェンス, divergence) を

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z) \cdot (A_x(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

で定義する。言うまでもないが、 $A_k$  はベクトル  $\mathbf{A}$  の  $k$  成分を表す。

$\mathbf{j}(\mathbf{r})$  を点  $\mathbf{r}$  において  $\mathbf{j}$  の方向に単位面積あたり  $|\mathbf{j}|$  の電荷が流れる量とする。点  $P(x, y, z)$  を頂点とする 1 辺  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  の直方体を考える。 $y$  軸に垂直な面積  $\Delta x \Delta z$  の平面  $QRR'Q'$  では

$$j_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z$$

の電荷が直方体から流れ出る。一方、平面  $PSS'P'$  では  $j_y(x, y, z) \Delta x \Delta z$  の流入がある。したがって、差し引き

$$(j_y(x, y + \Delta y, z) - j_y(x, y, z)) \Delta x \Delta z = \frac{j_y(x, y + \Delta y, z) - j_y(x, y, z)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial j_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

が直方体から流出する。 $x$  軸に垂直な 2 面、 $z$  軸に垂直な 2 面についても同様にすると、直方体からは

$$\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \mathbf{j} \Delta x \Delta y \Delta z$$

が流出する。 $\nabla \cdot \mathbf{j}$  は単位体積あたりの出ていく (発散する) 量なので  $\mathbf{j}$  の発散という。

例題  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$  のとき

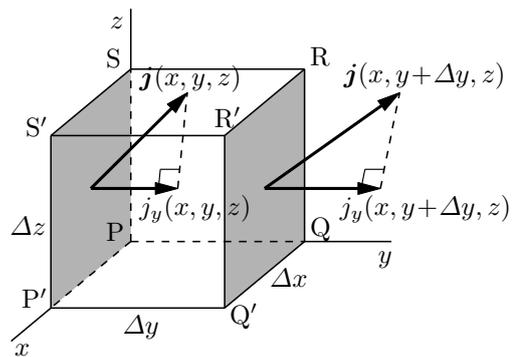
$$\frac{\partial}{\partial x} A_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} + x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3} + x \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

であるから

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

になる。ところで (2.33) より  $\mathbf{A} = -\nabla \frac{1}{r}$  であるから

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r} = 0$$



これは (2.6) である。

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = (\mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z) \cdot (\mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z) = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (2.35)$$

をラプラシアンという。

**回転 (ローテーション)** ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の回転 (rotation) を

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z) \times (A_x(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_x (\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \mathbf{e}_y (\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \mathbf{e}_z (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \end{aligned}$$

で定義する。(1.29) を使うと  $\nabla \times \mathbf{A}$  の  $k$  成分は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{kij} \partial_i A_j \quad (2.36)$$

とも書ける。

### 問題 2.12

1.  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$  を示せ。
2.  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$  のとき  $\nabla \cdot \mathbf{A} = rf'(r) + 3f(r)$  を示せ。 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  になる  $f(r)$  を求めよ。
3.  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(r) \times \mathbf{r}$  のとき  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を示せ。 $\mathbf{F}(r)$  は  $F_x, F_y, F_z$  が  $r$  の関数を表す。
4.  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$  のとき  $\nabla \times \mathbf{A}$  を求めよ。

**各種の公式**  $F(r)$  をスカラー場,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})$  をベクトル場とする。

$$\nabla \times (\nabla F) = 0 \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2.38)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.39)$$

$$\nabla \cdot (F \mathbf{A}) = (\nabla F) \cdot \mathbf{A} + F \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.40)$$

$$\nabla \times (F \mathbf{A}) = (\nabla F) \times \mathbf{A} + F \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.42)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.43)$$

公式を覚える必要はない。公式集などを見ながら上手に応用できればよい。ただし、導出はできなければならない。以下の証明から分かるように、ベクトル積を含む場合でも、 $\varepsilon_{ijk}$  を用いれば導出は面倒ではない。( ) や内積を表す  $\cdot$  の位置に注意せよ。

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} = (B_x \partial_x + B_y \partial_y + B_z \partial_z) \mathbf{A} = k \text{ 成分が } B_x \partial_x A_k + B_y \partial_y A_k + B_z \partial_z A_k \text{ のベクトル}$$

$$\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} (\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) = k \text{ 成分が } B_k (\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) \text{ のベクトル}$$

である。 $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  はベクトル  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の回転であるが、 $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$  はベクトル  $\nabla \times \mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のベクトル積である。

**証明**

- (2.37)  $(\nabla \times (\nabla F))_x = \partial_y(\nabla F)_z - \partial_z(\nabla F)_y = \partial_y \partial_z F - \partial_z \partial_y F = 0$ , 他の成分も同様

$\nabla \times \mathbf{A} = 0$  ならば  $\mathbf{A} = \nabla F$  となる  $F$  が存在する。この証明は 76 ページを見よ。

- (2.38)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \partial_x(\nabla \times \mathbf{A})_x + \partial_y(\nabla \times \mathbf{A})_y + \partial_z(\nabla \times \mathbf{A})_z \\ &= \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= (\partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y)A_x + (\partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z)A_y + (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x)A_z = 0 \end{aligned}$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ならば  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  となる  $\mathbf{A}$  が存在する。証明は **問題 2.14** 参照。

- (2.40)

$F\mathbf{A}$  は  $x, y, z$  成分がそれぞれ  $FA_x, FA_y, FA_z$  のベクトルであるから

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (F\mathbf{A}) &= \partial_x(FA_x) + \partial_y(FA_y) + \partial_z(FA_z) \\ &= (\partial_x F)A_x + F\partial_x A_x + (\partial_y F)A_y + F\partial_y A_y + (\partial_z F)A_z + F\partial_z A_z \\ &= (\nabla F) \cdot \mathbf{A} + F\nabla \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

あるいは

$$\nabla \cdot (F\mathbf{A}) = \sum_i \partial_i(FA_i) = \sum_i (\partial_i F)A_i + F \sum_i \partial_i A_i = (\nabla F) \cdot \mathbf{A} + F\nabla \cdot \mathbf{A}$$

- (2.42)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_k \partial_k (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \sum_{kij} \partial_k (\varepsilon_{kij} A_i B_j) = \sum_{kij} \varepsilon_{kij} ((\partial_k A_i) B_j + A_i \partial_k B_j)$$

ところで  $\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$ ,  $\varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$  であるから

$$\sum_{ki} \varepsilon_{kij} \partial_k A_i = \sum_{ki} \varepsilon_{jki} \partial_k A_i = (\nabla \times \mathbf{A})_j, \quad \sum_{kj} \varepsilon_{kij} \partial_k B_j = -(\nabla \times \mathbf{B})_i$$

したがって

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_j B_j (\nabla \times \mathbf{A})_j - \sum_i A_i (\nabla \times \mathbf{B})_i = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$\varepsilon_{ijk}$  を用いなくても証明できるが、以下に示すように煩雑である。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_x(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x + \partial_y(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y + \partial_z(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z \\ &= \partial_x(A_y B_z - A_z B_y) + \partial_y(A_z B_x - A_x B_z) + \partial_z(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= B_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + B_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + B_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &\quad - A_x(\partial_y B_z - \partial_z B_y) - A_y(\partial_z B_x - \partial_x B_z) - A_z(\partial_x B_y - \partial_y B_x) \\ &= (2.42) \text{ の右辺} \end{aligned}$$

- (2.43)

$$(\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))_k = \sum_{ij} \varepsilon_{kij} \partial_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j = \sum_{ijmn} \varepsilon_{kij} \partial_i (\varepsilon_{jmn} A_m B_n) = \sum_{ijmn} \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jmn} \partial_i (A_m B_n)$$

(1.27) を使い  $j$  の和を実行すると

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))_k &= \sum_{imn} (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) \partial_i (A_m B_n) \\ &= \sum_i (\partial_i (A_k B_i) - \partial_i (A_i B_k)) \\ &= \sum_i ((\partial_i A_k) B_i + A_k \partial_i B_i - (\partial_i A_i) B_k - A_i \partial_i B_k) \\ &= \mathbf{B} \cdot \nabla A_k + A_k \nabla \cdot \mathbf{B} - B_k \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla B_k \end{aligned}$$

これは (2.43) を成分で表したものである。

**問題 2.13** 他の公式を証明せよ。ベクトル積を含む場合  $\varepsilon_{ijk}$  を用いる。

**問題 2.14** ベクトル場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  に対して  $A_z(x, y, z) = 0$  及び

$$A_x(x, y, z) = \int_{z_0}^z dz' B_y(x, y, z') - \int_{y_0}^y dy' B_z(x, y', z_0), \quad A_y(x, y, z) = - \int_{z_0}^z dz' B_x(x, y, z')$$

で定義される  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  を考える。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ならば  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$  になることを示せ。

## 2.7 ナブラ演算子の極座標表示

**2次元** 2次元の場合、ラプラシアン  $\nabla^2$  を極座標で表すと (2.19) になる。ここではベクトル演算子  $\nabla = e_x \partial_x + e_y \partial_y$  を極座標で表す。微分を  $r, \phi$  の微分にするだけでなく、ベクトルの成分も図の単位ベクトル  $e_r$  と  $e_\phi$  の方向の成分で表す。図から

$$\mathbf{e}_r = e_x \cos \phi + e_y \sin \phi, \quad \mathbf{e}_\phi = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi$$

$e_x$  と  $e_y$  は空間に固定されたベクトルであるが、 $e_r$  と  $e_\phi$  は  $x, y$  が変わると方向を変える。上式から

$$\partial_\phi \mathbf{e}_r = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi = \mathbf{e}_\phi, \quad \partial_\phi \mathbf{e}_\phi = -e_r, \quad \partial_r \mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{e}_\phi = 0 \quad (2.44)$$

である。21 ページと同様に  $\mathbf{e}(\phi + \Delta\phi) - \mathbf{e}(\phi)$  の大きさと向きから求めることもできる。 $e_x, e_y$  を  $e_r, e_\phi$  で表すと

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi \quad (2.45)$$

になるから

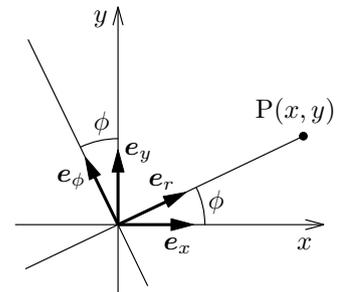
$$\nabla = e_x \partial_x + e_y \partial_y = \mathbf{e}_r (\cos \phi \partial_x + \sin \phi \partial_y) + \mathbf{e}_\phi (-\sin \phi \partial_x + \cos \phi \partial_y)$$

$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$  より

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y = \cos \phi \partial_x + \sin \phi \partial_y, \quad \partial_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \phi} \partial_y = r (-\sin \phi \partial_x + \cos \phi \partial_y)$$

したがって

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \partial_\phi \quad (2.46)$$



である。これは次のようにしても導ける。全微分

$$dF = F(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - F(\mathbf{r}) = dx \partial_x F + dy \partial_y F = d\mathbf{r} \cdot \nabla F, \quad d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y \quad (2.47)$$

を考える。 $\mathbf{r}$  を極座標で表すと  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r(\phi)$  になるから

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{d\phi} d\phi = dr \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\phi d\phi$$

したがって

$$dF = dr \partial_r F + d\phi \partial_\phi F = (dr \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\phi d\phi) \cdot \left( \mathbf{e}_r \partial_r F + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \partial_\phi F \right) = d\mathbf{r} \cdot \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \partial_\phi \right) F$$

これと (2.47) を比較すれば (2.46) を得る。

ベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y$  に (2.45) を代入すると

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r \mathbf{e}_r + A_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad \text{ただし} \quad A_r = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi, \quad A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

になる。(2.44) より

$$\partial_r \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \partial_r A_r + \mathbf{e}_\phi \partial_r A_\phi$$

$$\partial_\phi \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \partial_\phi A_r + A_r \partial_\phi \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\phi \partial_\phi A_\phi + A_\phi \partial_\phi \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r (\partial_\phi A_r - A_\phi) + \mathbf{e}_\phi (A_r + \partial_\phi A_\phi)$$

であるから、発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \cdot \partial_r \mathbf{A} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi \cdot \partial_\phi \mathbf{A} = \partial_r A_r + \frac{1}{r} (A_r + \partial_\phi A_\phi)$$

になる。特に

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{ただし} \quad \mathbf{A} = \nabla F = \mathbf{e}_r \partial_r F + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \partial_\phi F$$

であるから  $A_r = \partial_r F$ ,  $A_\phi = \partial_\phi F / r$  とすると

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}) = \partial_r^2 F + \frac{1}{r} \left( \partial_r F + \partial_\phi \frac{\partial_\phi F}{r} \right) = \partial_r^2 F + \frac{1}{r} \partial_r F + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 F \quad (2.48)$$

これは (2.19) である。

**3次元** 右図に示した2つの角度  $\theta$ ,  $\phi$  と原点からの距離  $r$  で点を表す。図より

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.49)$$

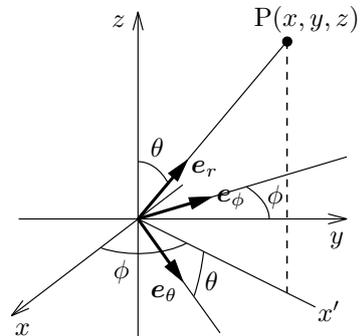
ただし  $r, \theta, \phi$  の範囲は

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

である ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  とすると  $(x, y, z)$  と  $(r, \theta, \phi)$  は

一対一対応しない)。右図に示した互いに直交する単位ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  を考える。 $\mathbf{e}_\phi$  は  $xy$  平面上にある。 $x'$  軸の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_{x'}$  とすると

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_{x'} \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta, \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{x'} \cos \theta - \mathbf{e}_z \sin \theta, \quad \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_y \cos \phi - \mathbf{e}_x \sin \phi$$



である。これに  $e_{x'} = e_x \cos \phi + e_y \sin \phi$  を代入すると

$$\begin{aligned} e_r &= e_x \sin \theta \cos \phi + e_y \sin \theta \sin \phi + e_z \cos \theta \\ e_\theta &= e_x \cos \theta \cos \phi + e_y \cos \theta \sin \phi - e_z \sin \theta \\ e_\phi &= -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi \end{aligned} \quad (2.50)$$

$e_x, e_y, e_z$  は空間固定であるが,  $e_r, e_\theta, e_\phi$  は  $\mathbf{r}$  の変化とともに向きを変える。(2.50) より

$$\begin{aligned} \partial_\theta e_r &= e_\theta, & \partial_\theta e_\theta &= -e_r, & \partial_\theta e_\phi &= 0 \\ \partial_\phi e_r &= e_\phi \sin \theta, & \partial_\phi e_\theta &= e_\phi \cos \theta, & \partial_\phi e_\phi &= -e_r \sin \theta - e_\theta \cos \theta \end{aligned}$$

である。 $d\mathbf{r} = dx e_x + dy e_y + dz e_z$  を極座標で表すと  $\mathbf{r} = r e_r(\theta, \phi)$  より

$$d\mathbf{r} = dr e_r + r(d\theta \partial_\theta e_r + d\phi \partial_\phi e_r) = dr e_r + d\theta r e_\theta + d\phi r \sin \theta e_\phi$$

になるから

$$\begin{aligned} dF &= dr \partial_r F + d\theta \partial_\theta F + d\phi \partial_\phi F \\ &= (dr e_r + d\theta r e_\theta + d\phi r \sin \theta e_\phi) \cdot \left( e_r \partial_r + \frac{e_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi \right) F \\ &= dr \cdot \left( e_r \partial_r + \frac{e_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi \right) F \end{aligned}$$

一方,  $dF = d\mathbf{r} \cdot \nabla F$  であるから

$$\nabla = e_r \partial_r + \frac{e_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi \quad (2.51)$$

になる。前図から  $\theta = \text{一定} = \pi/2$  とすれば2次元の極座標になり, 上式は(2.46)に一致する。

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r})e_r + A_\theta(\mathbf{r})e_\theta + A_\phi(\mathbf{r})e_\phi$  とすると

$$\begin{aligned} \partial_r \mathbf{A} &= e_r \partial_r A_r + e_\theta \partial_r A_\theta + e_\phi \partial_r A_\phi \\ \partial_\theta \mathbf{A} &= e_r \partial_\theta A_r + A_r \partial_\theta e_r + e_\theta \partial_\theta A_\theta + A_\theta \partial_\theta e_\theta + e_\phi \partial_\theta A_\phi + A_\phi \partial_\theta e_\phi \\ &= e_r (\partial_\theta A_r - A_\theta) + e_\theta (\partial_\theta A_\theta + A_r) + e_\phi \partial_\theta A_\phi \\ \partial_\phi \mathbf{A} &= e_r (\partial_\phi A_r - A_\phi \sin \theta) + e_\theta (\partial_\phi A_\theta - A_\phi \cos \theta) + e_\phi (\partial_\phi A_\phi + A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= e_r \cdot \partial_r \mathbf{A} + \frac{1}{r} e_\theta \cdot \partial_\theta \mathbf{A} + \frac{1}{r \sin \theta} e_\phi \cdot \partial_\phi \mathbf{A} \\ &= \partial_r A_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta A_\theta + A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\phi A_\phi + A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (A_\theta \sin \theta) + \partial_\phi A_\phi) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$e_\theta \times e_\phi = e_r, e_\phi \times e_r = e_\theta, e_r \times e_\theta = e_\phi$  より

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= e_r \times \partial_r \mathbf{A} + \frac{1}{r} e_\theta \times \partial_\theta \mathbf{A} + \frac{1}{r \sin \theta} e_\phi \times \partial_\phi \mathbf{A} \\ &= \frac{e_r}{r \sin \theta} (\partial_\theta (A_\phi \sin \theta) - \partial_\phi A_\theta) + \frac{e_\theta}{r \sin \theta} (\partial_\phi A_r - \sin \theta \partial_r (r A_\phi)) \\ &\quad + \frac{e_\phi}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \end{aligned} \quad (2.53)$$

になる。

$\mathbf{A} = \nabla F$  とすると

$$A_r = \partial_r F, \quad A_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta F, \quad A_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi F \quad (2.54)$$

である。これを (2.52) に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r F) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta F) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 F \\ &= \left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) F + \frac{1}{r^2} \left( \partial_\theta^2 + \cot \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) F \end{aligned} \quad (2.55)$$

になる。 $\theta = \text{一定} = \pi/2$  としても 2次元極座標の結果 (2.48) にはならない (理由を考えよ)。なお,  $r$  の微分を

$$\left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) F = \frac{1}{r} \partial_r^2 (rF)$$

とすると便利な場合がある。(2.54) を (2.53) に代入すれば, 当然ながら  $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla F = 0$  である。極座標は**曲線座標**の特別な場合である。曲線座標については 226 ページで考察する。

### (2.55) の適用例

$z$  軸方向の一様電場  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$  の中に半径  $a$  の導体球を置くと, 導体表面上に電荷が誘導され, 電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{E}_0$  になる。静電ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  を求める。球面上を除くと  $V(\mathbf{r})$  はラプラス方程式  $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$  の解であり, 「導体球面上では  $V(\mathbf{r}) = \text{一定}$ 」及び  $\mathbf{E} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}_0$  の境界条件を満たす必要がある。

この系は  $z$  軸に関して軸対称であり,  $V$  は  $z$  軸まわりの角度  $\phi$  に依存しないから

$$\nabla^2 V(r, \theta) = \partial_r^2 V + \frac{2}{r} \partial_r V + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta V) = 0 \quad (2.56)$$

$q = \cos \theta$  とおくと  $\partial_\theta = -\sin \theta \partial_q$  より

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta V) = \partial_q (\sin^2 \theta \partial_q V) = \partial_q \left( (1 - q^2) \partial_q V \right) = (1 - q^2) \partial_q^2 V - 2q \partial_q V$$

したがって

$$r^2 \partial_r^2 V + 2r \partial_r V + (1 - q^2) \partial_q^2 V - 2q \partial_q V = 0$$

になる。まず, **変数分離法**の解  $V(r, q) = R(r)P(q)$  を求める。これを上式に代入すると

$$\frac{1}{R} \left( r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{P} \left( (q^2 - 1) \frac{d^2 P}{dq^2} + 2q \frac{dP}{dq} \right)$$

になる。左辺は  $r$  だけの関数, 右辺は  $q$  だけの関数である。 $q$  を固定すると右辺は定数になるから, 任意の  $r$  について左辺は定数, 右辺も任意の  $q$  について定数になる。この定数を  $K$  とおくと

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - KR = 0, \quad (1 - q^2) \frac{d^2 P}{dq^2} - 2q \frac{dP}{dq} + KP = 0$$

$P$  の方程式はルジャンドルの微分方程式 (4.40) になるが, ここでは  $P(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^2$  とする。これを  $P$  の微分方程式に代入すると

$$2c_2 + Kc_0 + (K - 2)c_1 q + (K - 6)c_2 q^2 = 0$$

これが任意の  $|q| \leq 1$  で成り立つためには

$$2c_2 + Kc_0 = 0, \quad (K-2)c_1 = 0, \quad (K-6)c_2 = 0 \quad (2.57)$$

$K \neq 2, 6$  ならば  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $Kc_0 = 0$  であり, 更に  $K \neq 0$  なら  $c_0 = 0$  になるから,  $P(q)$  は恒等的に 0 という無意味な解だけである。したがって,  $K = 0, 2, 6$  になり

$$\begin{aligned} K = 0, \quad c_0 \neq 0, \quad c_1 = c_2 = 0 \\ K = 2, \quad c_1 \neq 0, \quad c_0 = c_2 = 0 \\ K = 6, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -3c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

である。あるいは (2.57) を行列で表せば

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 2 \\ 0 & K-2 & 0 \\ 0 & 0 & K-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

になる。  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  以外の解が存在するには

$$\text{左辺の } 3 \times 3 \text{ 行列の行列式} = K(K-2)(K-6) = 0$$

でなければならない ((8.28) 参照)。ゼロでない定数  $c_0$  または  $c_1$  を  $R$  に含めることにすれば

$$K = \ell(\ell+1), \quad P(q) = P_\ell(q) = \begin{cases} 1, & \ell = 0 \\ q, & \ell = 1 \\ 1 - 3q^2, & \ell = 2 \end{cases}$$

になる。  $K = \ell(\ell+1)$  の場合,  $R$  の微分方程式に  $R(r) \propto r^k$  を代入すると

$$\left( k(k-1) + 2k - \ell(\ell+1) \right) r^k = (k-\ell)(k+\ell+1)r^k = 0, \quad \therefore k = \ell, -\ell-1$$

になるから,  $A_\ell, B_\ell$  を任意定数として  $R_\ell(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell / r^{\ell+1}$  である。変数分離型の解  $R_\ell(r)P_\ell(q)$  が求めたが, これらの和も (2.56) を満たすから,  $P(q)$  を  $q$  の 2 次式に制限した範囲内では

$$V(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) q + \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right) (1 - 3q^2), \quad q = \cos \theta$$

が最も一般的な (2.56) の解になる。

係数  $A_\ell, B_\ell$  を境界条件から決める。導体球面上 ( $r = a$ ) では

$$V(a, \theta) = R_0(a) + R_2(a) + R_1(a)q - 3R_2(a)q^2$$

である。境界条件  $V(a, \theta) = \text{一定} = V_a$  より  $R_0(a) = V_a$ ,  $R_1(a) = R_2(a) = 0$  になるから

$$A_0 + \frac{B_0}{a} = V_a, \quad A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0, \quad A_2 a^2 + \frac{B_2}{a^3} = 0$$

これから  $A_0 = V_a - B_0/a$ ,  $B_1 = -a^3 A_1$ ,  $B_2 = -a^5 A_2$  になり

$$V(r, \theta) = V_a - \frac{B_0}{a} + \frac{B_0}{r} + A_1 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) r q + A_2 \left( 1 - \frac{a^5}{r^5} \right) r^2 (1 - 3q^2)$$

$B_0, A_1, A_2$  は任意定数である。球の内側の解と外側の解は  $r = a$  で連続であるが、滑らかに接続するとは限らない。そこで

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_a - \frac{A_0}{a} + \frac{A_0}{r} + A_1 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r q + A_2 \left(1 - \frac{a^5}{r^5}\right) r^2 (1 - 3q^2), & r < a \\ V_a - \frac{B_0}{a} + \frac{B_0}{r} + B_1 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r q + B_2 \left(1 - \frac{a^5}{r^5}\right) r^2 (1 - 3q^2), & r > a \end{cases}$$

とする。 $r < a$  の場合、原点で  $V$  は有界であるから  $A_0 = A_1 = A_2 = 0$  であり  $V(r, \theta) = V_a$  になる。 $r > a$  の場合

$$V(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} V_a - \frac{B_0}{a} + B_1 r q + B_2 r^2 (1 - 3q^2)$$

であるが、これが一様電場  $E_0 e_z$  の静電ポテンシャル  $-E_0 z + \text{定数} = -E_0 r q + \text{定数}$  になるためには  $B_1 = -E_0, B_2 = 0$  である。したがって  $r > a$  では

$$V(r, \theta) = V_a - \frac{B_0}{a} + \frac{B_0}{r} - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r \cos \theta$$

になる。外場がない場合 ( $E_0 = 0$ ),  $V(r, \theta) = B_0/r + V_a - B_0/a$  は電荷  $4\pi\epsilon_0 B_0$  に帯電した導体球の  $r > a$  における静電ポテンシャルである。帯電していない場合を考えると  $B_0 = 0$  になるから

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_a, & r < a \\ V_a - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r \cos \theta, & r > a \end{cases} \quad (2.58)$$

であり、導体外部での電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) V(r, \theta) = \mathbf{e}_r E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta - \mathbf{e}_\theta E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta$$

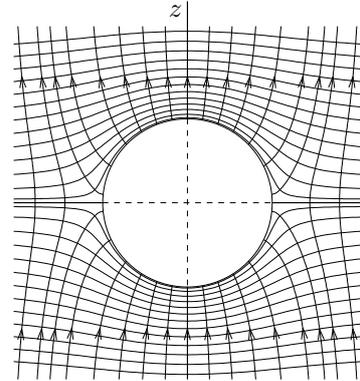
になる。無限遠方では、確かに

$$\mathbf{E} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} E_0 (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) = E_0 \mathbf{e}_z$$

である。導体球面上では

$$\mathbf{E}(a, \theta) = 3E_0 \cos \theta \mathbf{e}_r$$

になり球面に直交する。右図に静電ポテンシャル (2.58) の等電位面 (矢印なしの曲線を  $z$  軸まわりに回転してできる曲面) を示す。矢印付きは  $E_0 > 0$  での電気力線であり等電位面と直交する。一様電場  $\mathbf{E}_0$  の等電位面は  $z$  軸に直交する平面である。



以下は 3.5, 3.6 節参照。導体球面の単位面積あたりの電荷を  $\sigma(\theta)$  とする。ガウスの法則

$$\int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r})$$

を球面近傍の微小面積  $\Delta S$  の領域に適用すると

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\theta) \Delta S$$

球の内部では  $\mathbf{E} = 0$ , 球の外部では  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  になるから

$$\int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(a, \theta) \Delta S, \quad \therefore \sigma(\theta) = \epsilon_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(a, \theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2.59)$$

である。この誘導電荷による電場と  $E_0$  が重なり、導体内部では  $E = 0$ 、外部の導体表面では  $E$  は球面に直交する (問題 3.12)。上半面の球面 ( $z \geq 0$ ) の全誘導電荷  $Q_+$  は

$$Q_+ = a^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \sigma(\theta) = 6\pi a^2 \varepsilon_0 E_0 \int_0^1 dq q = 3\pi a^2 \varepsilon_0 E_0$$

同様に、下半面の球面 ( $z \leq 0$ ) の電荷  $Q_-$  を求めれば  $Q_- = -Q_+$  になり、全電荷は  $Q_+ + Q_- = 0$  である。電位の低い方に正電荷、高い方に負電荷が誘導される。

**問題 2.15** 任意の  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  に対して  $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{A}$  を直角座標及び 3 次元極座標で示せ。

### 速度と加速度の極座標成分

力学で中心力の問題を扱う場合、質点の位置  $\mathbf{r}$  を極座標で表した方が扱いが簡単になる。質点の位置  $r, \theta, \phi$  は時間  $t$  の関数である。 $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta(t), \phi(t))$  の時間微分は

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \partial_\theta \mathbf{e}_r + \frac{d\phi}{dt} \partial_\phi \mathbf{e}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

同様にすると

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta)$$

になる。質点の位置  $\mathbf{r}$  は  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$  であるから

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

したがって、速度の  $r, \theta, \phi$  方向成分をそれぞれ  $v_r, v_\theta, v_\phi$  とすると

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\phi = r \dot{\phi} \sin \theta$$

である。もう一回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \frac{dr \dot{\theta}}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta + \frac{dr \dot{\phi} \sin \theta}{dt} \mathbf{e}_\phi + r \dot{\phi} \sin \theta \dot{\mathbf{e}}_\phi \\ &= \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r + \left( r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left( r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

これから加速度の  $r, \theta, \phi$  方向成分をそれぞれ  $a_r, a_\theta, a_\phi$  とすると

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, & a_\theta &= r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

になる。運動が  $xy$  平面に限られる場合  $\theta = \text{一定} = \pi/2$  であるから  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$  より

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r \dot{\phi}, \quad a_r = \ddot{r} - r \dot{\phi}^2, \quad a_\phi = r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\phi} \right)$$

である。

ある方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}$  とし、この方向の速度、加速度の成分を  $v_e, a_e$  とすると

$$v_e = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}, \quad a_e = \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

である。

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} \cdot \mathbf{v} + a_e$$

であるから、 $\mathbf{e}$  が時間に依存しない場合には  $a_e = dv_e/dt$  である。したがって、空間に固定された直角座標  $x, y, z$  軸については、例えば、速度の  $x$  成分を時間微分すれば加速度の  $x$  成分になる。しかし、極座標のように方向が質点の運動とともに変化する場合には  $a_e \neq dv_e/dt$  である。

### 3 積分

#### 3.1 多重積分

はじめに、1変数の関数  $f(x)$  の積分の復習をする。 $a \leq x \leq b$  の区間を  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  の  $n$  個に分割し  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  とする。このとき

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k, \quad x_{k-1} \leq \eta_k \leq x_k$$

とする。 $f(x) > 0$  ならば長方形の面積の和である ( 図は等間隔にし  $\eta_k = x_k$  とした場合である )。全ての  $\Delta x_k \rightarrow 0$  になるように  $n \rightarrow \infty$  としたとき  $S_n$  の極限值が存在するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad \text{または} \quad \int_a^b dx f(x)$$

で表す。

1変数の区分求積法を2変数の関数  $f(x, y)$  に拡張し、 $xy$  平面上の領域  $D$  における  $f(x, y)$  の積分を定義する。 $D$  を面積  $\Delta x_k \Delta y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の  $n$  個の微小な長方形の領域  $\Delta D_k$  に分割する。 $D$  で定義された連続な関数  $f(x, y)$  に対して和

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta x_k \Delta y_k \tag{3.1}$$

を考える。 $f(x, y)$  を求める点  $(x_k, y_k)$  は  $\Delta D_k$  内の適当な点である。 $n \rightarrow \infty$  とし全ての  $\Delta x_k \Delta y_k \rightarrow 0$  になる極限を考える。この極限における  $S_n$  の極限値を

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{または} \quad \iint_D dx dy f(x, y)$$

と書き  $f(x, y)$  の領域  $D$  における **2重積分** という。2重とは、2つの独立な変数  $x, y$  について和を取る、つまり、積分するからである。必要のない限り積分記号を2つ書かずに

$$\int_D f(x, y) dx dy \quad \text{または} \quad \int_D dx dy f(x, y)$$

で表す。 $dx dy$  があるから2重積分であることは分かる。 $f(x, y) = 1$  の場合、2重積分は領域  $D$  の面積を表す。

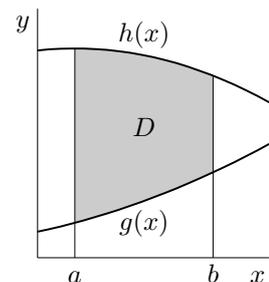
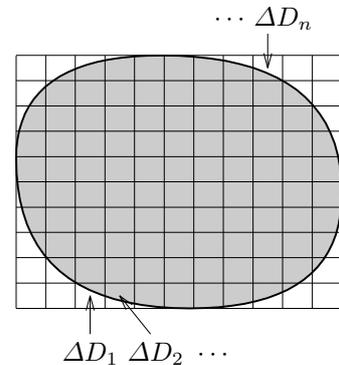
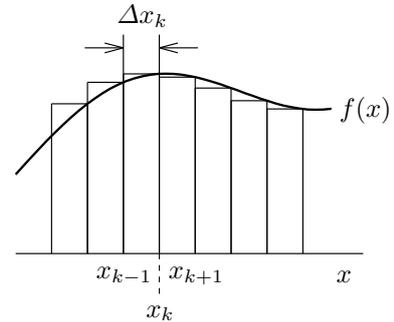
#### 累次積分

具体的に積分を求める場合、積分領域を数式で表す必要がある。1重積分では単に  $a \leq x \leq b$  などで済むが、2重積分の場合、積分領域  $D$  の表現は、それほど単純ではない。 $D$  が

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x) \tag{3.2}$$

の場合を考える。 $y$  の積分領域は  $x$  に依存する。 $a \leq x \leq b$  を

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

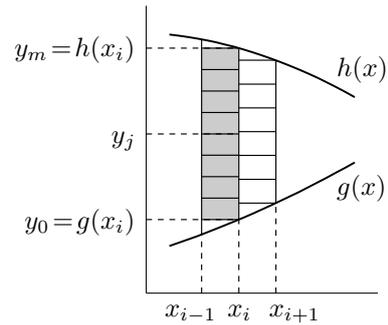


の  $n$  個に分割し,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  とおく。  $x = x_i$  のとき  $y$  は  $g(x_i) \leq y \leq h(x_i)$  の範囲をとる。この範囲を

$$y_0 = g(x_i), y_1, \dots, y_{m-1}, y_m = h(x_i)$$

の  $m$  個に分割して  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$  とおく。和 (3.1) は

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n F_m(x_i) \Delta x_i \quad (3.3)$$



ただし

$$F_m(x) = \sum_{j=1}^m f(x, y_j) \Delta y_j, \quad g(x) \leq y_j \leq h(x)$$

である。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} dy f(x, y) \equiv F_\infty(x)$$

になるから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{nm} = \sum_{i=1}^n F_\infty(x_i) \Delta x_i$$

したがって

$$\int_D dx dy f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} S_{nm} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_\infty(x_i) \Delta x_i = \int_a^b dx F_\infty(x)$$

であり

$$\int_D dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy f(x, y) \quad (3.4)$$

になる。積分は右の積分から左の積分の順に行う。  $x$  を固定して、つまり、  $x$  を定数と見なして  $y$  について  $g(x) \leq y \leq h(x)$  で積分する。積分した結果は  $x$  だけの関数になる。この関数を  $x$  について  $a \leq x \leq b$  で積分して 2 重積分を求める。この方法を累次積分という。

領域  $D$  が

$$p(y) \leq x \leq q(y), \quad c \leq y \leq d$$

と表せるならば

$$\int_D dx dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} dx f(x, y) \quad (3.5)$$

である。最初に  $x$  で積分する。

⚠ (3.2) の場合  $y$  の積分領域は  $x$  に依存するから、(3.4) の積分に順番を入れ替え

$$\int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_a^b dx f(x, y) \quad (3.6)$$

としてはいけない。最初に  $x$  で積分すると  $y$  の関数になるが、これを  $y$  について  $g(x) \leq y \leq h(x)$  で積分すると  $x$  の関数が求まる。(3.6) は積分としての意味はあるが、領域 (3.2) の積分ではない。(3.5) の場合も積分の順番は交換できない。ただし、積分領域が  $x, y$  に依存しなければ、積分する順番は任意で

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

である。

**例題 1** 右図のような半径  $a$  の半円の領域  $D$  を考える。  $D$  は

$$D = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\} \quad (3.7)$$

と表せる。この場合、 $y$  の領域は  $x$  に依存するから、最初  $y$  について積分する。例えば  $f(x, y) = y$  の場合

$$I = \int_D dx dy y = \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy y = \int_{-a}^a dx \frac{a^2 - x^2}{2} = \frac{2}{3} a^3$$

である。右図より  $g(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$  とすると  $D$  は

$$0 \leq y \leq a, \quad -g(y) \leq x \leq g(y) \quad (3.8)$$

とも表せる。 $x$  の領域が  $y$  に依存するから、最初  $x$  の積分を行い

$$I = \int_0^a dy \int_{-g(y)}^{g(y)} dx y$$

である。 $x$  で積分するとき  $y$  は定数と見なすから

$$I = \int_0^a dy y \int_{-g(y)}^{g(y)} dx = 2 \int_0^a dy y \sqrt{a^2 - y^2} = \left[ -\frac{2}{3} (a^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3$$

になる。当然ながら、積分は領域  $D$  の表現の仕方には依存しない。

$f(x, y) = 1$  とすれば半円の面積が求まる。(3.7) の場合

$$\int_D dx dy = \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_{-a}^a dx \sqrt{a^2 - x^2}$$

$x = a \sin \theta$ ,  $|\theta| \leq \pi/2$  とおける。 $\theta$  がこの範囲のとき  $\cos \theta \geq 0$  より  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$  である。

$$\int_D dx dy = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (1 + \cos 2\theta) = \frac{\pi a^2}{2}$$

(3.8) を使っても同じ結果になる。

**例題 2**  $a < b$  のとき右図の三角形の領域  $D$  は

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq x \quad \text{または} \quad a \leq y \leq b, \quad y \leq x \leq b$$

と表せ

$$\begin{aligned} \int_D dx dy f(x, y) &= \int_a^b dx \int_a^x dy f(x, y) = \int_a^b dy \int_y^b dx f(x, y) \quad (3.9) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dx \int_a^x dy f(x, y) + \frac{1}{2} \int_a^b dy \int_y^b dx f(x, y) \end{aligned}$$

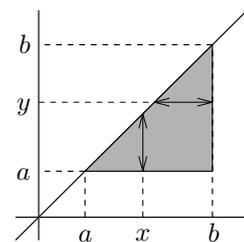
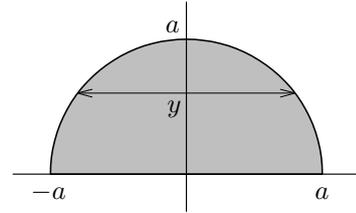
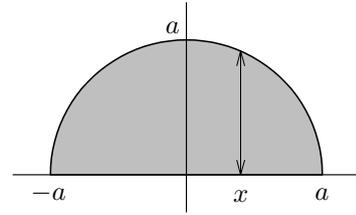
である。積分変数名は変えてもよいから、右辺第 2 項で  $x$  と  $y$  を入れ替えると

$$\int_D dx dy f(x, y) = \frac{1}{2} \int_a^b dx \left( \int_a^x dy f(x, y) + \int_x^b dy f(y, x) \right)$$

になる。 $f(x, y)$  が対称性  $f(y, x) = f(x, y)$  を満たす場合

$$\int_D dx dy f(x, y) = \frac{1}{2} \int_a^b dx \int_a^b dy f(x, y)$$

と簡単になる。



問題 3.1  $a$  を正の定数として  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$  のとき

$$\int_D dx dy x^2 |y| = \frac{4}{15} a^5$$

を示せ。積分する順序は  $x \rightarrow y, y \rightarrow x$  の両方で行ってみよ。

問題 3.2 積分領域を図示して、下記の関係を示せ。

$$\int_0^1 dx \int_x^{x+1} dy f(x, y) = \int_0^1 dy \int_0^y dx f(x, y) + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 dx f(x, y)$$

問題 3.3 積分の順序を変更し

$$\int_0^\pi dx \int_0^x dy \frac{\sin y}{\sqrt{(\pi-x)(x-y)}} = 2\pi$$

を示せ。 $\sqrt{\quad}$  内を  $x$  について平方完成する。

### 3 重積分

2重積分と同様にして3重積分(一般には4重積分, 5重積分, ...)を定義できる。3次元の領域  $D$  を体積  $\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の  $n$  個の微小直方体  $\Delta D_k$  に分割する。 $D$  で定義された連続な関数  $f(x, y, z)$  に対して和

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k \quad (3.10)$$

を考える。 $(x_k, y_k, z_k)$  は  $\Delta D_k$  内の適当な点である。 $n \rightarrow \infty$  として全ての  $\Delta D_k$  の体積が 0 になる極限を考える。この極限における  $V_n$  の極限値を

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

と書き  $f(x, y, z)$  の領域  $D$  における **3重積分** という。必要のない限り積分記号を3つ書かずに

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{または} \quad \int_D dx dy dz f(x, y, z)$$

で表す。また、点  $(x, y, z)$  をベクトル  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  で表すことに対応して  $f(x, y, z)$  を  $f(\mathbf{r})$ ,  $dx dy dz$  を  $d^3r$  で表して

$$\int_D d^3r f(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

と簡略化して書く。 $f(x, y, z) = 1$  の場合, 3重積分は領域  $D$  の体積を表す。

## 3.2 変数変換

### 2変数の場合

積分する領域によっては、直角座標系  $(x, y, z)$  ではなく別の座標系を用いた方が簡単に積分できる場合がある。よく用いる座標系としては極座標がある。2次元の極座標

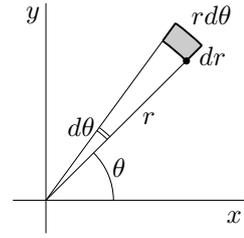
$$\mathbf{r}(r, \theta) = x(r, \theta)\mathbf{e}_x + y(r, \theta)\mathbf{e}_y, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3.12)$$

を考え、2重積分を  $r$  と  $\theta$  の積分に変換する。これまでは積分領域  $D$  を  $x = \text{一定}$  の直線  $x = x_k$ ,  $x = x_k + \Delta x_k$  と  $y = \text{一定}$  の直線  $y = y_k$ ,  $y = y_k + \Delta y_k$  で囲まれた微小領域に分割した。これと同様に、 $r = \text{一定}$  の円  $r = r_k$ ,  $r = r_k + \Delta r_k$  と  $\theta = \text{一定}$  の半直線  $\theta = \theta_k$ ,  $\theta = \theta_k + \Delta \theta_k$  で囲まれた微小領域に、 $xy$  平面上の領域  $D$  を分割する。この微小領域の面積を  $\Delta S_k$  とすれば

$$\int_D dx dy f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k) \Delta S_k$$

である。 $r, \theta$  を微小変化  $dr, d\theta$  させたとき、図より、微小領域は辺の長さが  $dr, rd\theta$  の長方形と見なせるから  $\Delta S = r dr d\theta$  である。したがって

$$\int_D dx dy f(x, y) = \int_{\Omega} dr d\theta r f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (3.13)$$



ただし、 $\Omega$  は  $x, y$  での領域  $D$  を  $r, \theta$  で表した領域である。例えば、40 ページの例題 1 の場合

$$\Omega = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi \}$$

である。

一般に  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  の場合、 $u, v$  が微小変化  $du, dv$  したときの  $xy$  平面上の面積  $dS$  を求める。極座標の場合、 $\mathbf{r}(r, \theta), \mathbf{r}(r + dr, \theta), \mathbf{r}(r + dr, \theta + d\theta), \mathbf{r}(r, \theta + d\theta)$  を結んだ領域の面積であるが、これと同様に 4 点

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{e}_x + y(u, v)\mathbf{e}_y, & \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}(u + du, v) \\ \mathbf{r}_C &= \mathbf{r}(u + du, v + dv), & \mathbf{r}_D &= \mathbf{r}(u, v + dv) \end{aligned} \quad (3.14)$$

からなる 4 角形 ABCD の面積  $dS$  を求める。(3.14) を  $du, dv$  についてテイラー展開する。 $du, dv$  は微量量であるから  $du, dv$  の最低次だけ考慮すると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= x(u + du, v)\mathbf{e}_x + y(u + du, v)\mathbf{e}_y \\ &= \left( x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du \right) \mathbf{e}_x + \left( y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du \right) \mathbf{e}_y + \dots \\ &= \mathbf{r}_A + \mathbf{u} du + \dots \\ \mathbf{r}_C &= x(u + du, v + dv)\mathbf{e}_x + y(u + du, v + dv)\mathbf{e}_y \\ &= \left( x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{e}_x + \left( y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{e}_y + \dots \\ &= \mathbf{r}_A + \mathbf{u} du + \mathbf{v} dv + \dots \\ \mathbf{r}_D &= x(u, v + dv)\mathbf{e}_x + y(u, v + dv)\mathbf{e}_y = \mathbf{r}_A + \mathbf{v} dv + \dots \end{aligned}$$

ただし

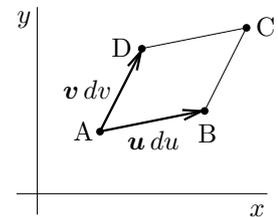
$$\mathbf{u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{e}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{e}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (3.15)$$

である。上式では  $du, dv$  の最低次は 1 次であり、2 次以上の  $\dots$  の部分は無視する。 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$  で  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  の向きは異なるとする。ABCD は平行四辺形になるから、その面積  $dS$  はベクトル積を用いて

$$dS = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| du dv = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \quad (3.16)$$

である。 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = 0$  より

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{e}_z$$



になるから

$$dS = |J(u, v)| dudv, \quad J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

したがって

$$\int_D dx dy f(x, y) = \int_{\Omega} dudv |J(u, v)| f(x(u, v), y(u, v)) \quad (3.18)$$

になる。 $\Omega$  は  $x, y$  での領域  $D$  に対応する  $u, v$  の領域である。 $J$  をヤコビアンまたはヤコビの行列式という。(3.12) の場合

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

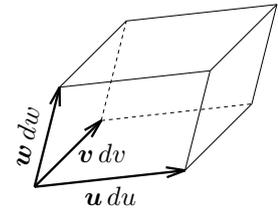
であるから、図を用いて求めた結果に一致する。

### 3 変数の場合

$x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  の場合, 2 変数と同様に

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

とすると  $\mathbf{u} du, \mathbf{v} dv, \mathbf{w} dw$  が作る微小平行 6 面体の体積  $dV$  を求めればよい。 $\mathbf{u} du, \mathbf{v} dv$  が作る平行四辺形  $S_{uv}$  の面積  $dS$  は  $dS = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| dudv$  である。 $S_{uv}$  に直交する単位ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$  である。 $S_{uv}$  を底面とする平行 6 面体の高さ  $dh$  は  $\mathbf{w} dw$  の  $\mathbf{n}$  方向の大きさ, つまり  $dh = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dw|$  になるから



$$dV = dS dh = |J| dudvdw, \quad J = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \quad (3.19)$$

であり

$$\int_D d^3 r f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} dudvdw |J| f(\mathbf{r}(u, v, w)) \quad (3.20)$$

になる。 $\Omega$  は領域  $D$  に対応する  $u, v, w$  の領域である。スカラー 3 重積 (1.34) より  $J$  は行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

で表せる。これは 3 変数のヤコビアンである。

3 次元の極座標 (2.49) の場合

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

3 行目について余因子展開すれば

$$\begin{aligned} J &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta \sin^2 \theta = r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

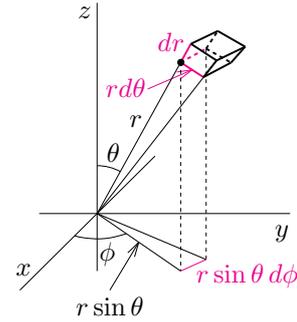
したがって

$$\int_D d^3r f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} dr d\theta d\phi r^2 \sin\theta f(\mathbf{r}(r, \theta, \phi)) \quad (3.22)$$

である。2次元極座標の場合 42 ページの図の長方形の面積を求めたが、これと同様に  $r, \theta, \phi$  を微小変化させたときの直方体の体積  $dV$  を求めてもよい。右図より直方体の各辺は  $dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi$  になるから

$$dV = dr d\theta d\phi r^2 \sin\theta$$

であり、ヤコビアンの結果を再現する。



**例題 1** 40 ページの例題 1 を 2次元極座標で求める。例題の領域  $D$  に対応する  $r, \theta$  の領域  $\Omega$  は  $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi$  であるから (3.13) より

$$\int_D dx dy y = \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta = \frac{2}{3} a^3, \quad \int_D dx dy = \int_0^a dr r \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$$

領域  $D$  が半円であるため、極座標を用いると積分領域を簡単に表せる。

領域  $D$  を半径  $R$  の球の内部とする。3次元極座標で表せば  $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$  である。(3.22) で  $f(\mathbf{r}) = 1$  とすれば球の体積

$$\int_D d^3r = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta = 4\pi \int_0^R dr r^2 = \frac{4\pi}{3} R^3$$

が求まる。

**例題 2**  $a, b$  を正の定数とする。任意の点  $(x, y)$  は

$$x = ar \cos\theta, \quad y = br \sin\theta \quad \text{ただし} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.23)$$

と表せる。ヤコビアン  $J$  は

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos\theta & -ar \sin\theta \\ b \sin\theta & br \cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

である。楕円  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  の面積を求める。楕円内部の領域  $D$  を (3.23) の  $r, \theta$  で表すと

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = r^2 \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

になるから

$$\int_D dx dy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta |J| = ab \int_0^1 dr r \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab$$

である。

**例題 3** ガウス積分

$a$  を正の定数として  $xy$  平面全体での積分

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ay^2} = I_1^2, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}$$

を考える。 $I_2$  を 2次元極座標で表せば

$$I_2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-ar^2} = 2\pi \left[ -\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} \quad (3.24)$$

である。  $a > 0$  より  $e^{-ar^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  であるから  $I_2 = \pi/a$  になる。  $I_1 > 0$  より  $I_1 = \sqrt{I_2}$ , つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = 2 \int_0^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (3.25)$$

これをガウス積分という。この積分は物理ではよく用いる。

$e^{-ax^2}$  の不定積分は初等関数で表せないから、直接 (3.25) を求めることは困難である。一方、(3.24) ではヤコビアン  $J = r$  が被積分関数に現れるため不定積分が求まる。3次元極座標では  $J$  に  $r^2$  が出てくるから  $e^{-a(x^2+y^2+z^2)} = e^{-ar^2}$  の積分  $I_3 = I_1^3$  から求めようとしても無理である。

(3.25) の両辺を  $a$  で微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \quad \text{再び微分すると} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-ax^2} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

一般に  $n = 0, 1, 2, \dots$  として

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-ax^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}, \quad (2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (3.26)$$

である。

#### 例題 4 一様に帯電した球による静電ポテンシャル

点  $\mathbf{r}_k$  に点電荷  $q_k$  があるとき、静電ポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  は  $U(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  とすると

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k| = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2} \quad (3.27)$$

である。電荷が連続的に分布する場合、 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  での電荷密度を  $\rho(\mathbf{r}')$  とすると、 $\mathbf{r}'$  近傍の微小体積  $d^3r' = dx'dy'dz'$  の電荷は  $\rho(\mathbf{r}') d^3r'$  である。 $\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}'$ ,  $q_k \rightarrow \rho(\mathbf{r}') d^3r'$  とし、 $k$  の和を積分で置き換えれば

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.28)$$

になる。積分領域は全空間である。 $U$  を求める点  $\mathbf{r}$  と区別するため、積分変数を  $\mathbf{r}'$  とした。

原点を中心とした半径  $a$  の球内部  $D$  に一様な電荷密度  $\rho_0$  で分布する場合、 $r > a$  では  $\rho = 0$ ,  $r < a$  では  $\rho = \rho_0$  になるから

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_D d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad D = \{(x', y', z') \mid \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \leq a\}$$

である。 $\mathbf{r}'$  の極座標を  $r', \theta', \phi'$  とする。 $D$  に対応する  $r', \theta', \phi'$  の積分領域  $\Omega$  は

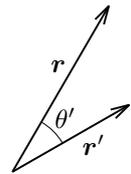
$$0 \leq r' \leq a, \quad 0 \leq \theta' \leq \pi, \quad 0 \leq \phi' \leq 2\pi$$

になる。通常、 $\theta'$  の基準軸は  $z$  軸であるが  $\mathbf{r}$  方向にとる。

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$$

になるから (3.22) より

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{r'^2 \sin \theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}$$



被積分関数は  $\phi'$  を含まないから  $\phi'$  の積分は  $2\pi$  になる。  $t = \cos \theta'$  とすると

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_0^a dr' r'^2 \int_{-1}^1 dt \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_0^a dr' r'^2 \left[ -\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't} \right]_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r} \int_0^a dr' r' (r + r' - |r - r'|) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$r + r' \geq 0$  であるが  $r - r'$  の正負は定まらないから  $\sqrt{(r - r')^2} = |r - r'|$  である。

$r \geq a$  の場合,  $r' \leq a$  より  $r \geq r'$  になるから  $|r - r'| = r - r'$  であり

$$U(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r} \int_0^a dr' r'^2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 = \text{全電荷} \quad (3.30)$$

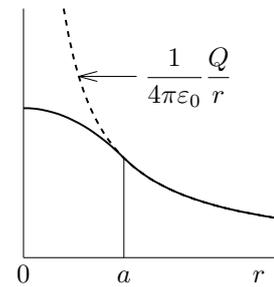
球外 ( $r \geq a$ ) では球の中心に電荷  $Q$  の点電荷がある場合と同じになる。  $r \leq a$  の場合

$$|r - r'| = \begin{cases} r - r', & 0 \leq r' \leq r \\ r' - r, & r \leq r' \leq a \end{cases}$$

になるから

$$U(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r} \left( \int_0^r dr' r'^2 + r \int_r^a dr' r' \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3a^2 - r^2}{2a^3} \quad (3.31)$$

である。  $Q > 0$  のとき  $U(r)$  を右図に示す。破線は電荷  $Q$  の点電荷によるポテンシャルである。



電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -e_x \frac{\partial U}{\partial x} - e_y \frac{\partial U}{\partial y} - e_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

を求める。  $U(x, y, z)$  が  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  だけの関数の場合

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dU}{dr} = \frac{x}{r} \frac{dU}{dr}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{dU}{dr}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{dU}{dr}$$

になる。(3.30), (3.31) より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e_r E(r), \quad E(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \times \begin{cases} 1, & r \geq a \\ r^3/a^3, & r \leq a \end{cases} \quad (3.32)$$

である。  $e_r = \mathbf{r}/r$  は  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトルを表す。

**問題 3.4** 積分領域を 3次元の全空間とするととき極座標を用いて

$$\int d^3r e^{-a(x^2+y^2+z^2)} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2}, \quad \int d^3r \frac{e^{-a(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2\pi}{a}$$

を示せ。最初の積分は直角座標を用いれば明らかである。

**問題 3.5** 3次元空間の点  $(x, y, z)$  を  $(\rho, \theta, z)$

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad \text{ただし } \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

で表す (円柱座標)。ヤコビアン  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho$  を示せ。また、底面の半径が  $a$ , 高さが  $h$  の円

柱の内部を  $D$  とし、円柱の中心軸を  $z$  軸とすると

$$\int_D d^3r (x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2} ha^4$$

なることを示せ。

問題 3.6  $xy$  平面上の全領域に単位面積当たり  $\sigma$  の電荷が分布する場合

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_z \quad (3.33)$$

を示せ。 $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$  は  $xy$  平面上の点である。

### 3.3 線積分

3次元空間の経路  $C$  を考える。この経路上の点 A, B の間を経路に沿って  $n$  個に分割し,  $k$  番目の点を  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$  とする。ただし,  $A = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $B = (x_n, y_n, z_n)$  である。 $\Delta\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$ , つまり

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

とする。 $\Delta\mathbf{r}_k$  の方向は, 曲線に沿って A から B に向かう方向である。各成分が 3 変数  $x, y, z$  の関数であるベクトル

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + A_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + A_z(x, y, z)\mathbf{e}_z$$

を簡略化して

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$$

で表す。点  $\mathbf{r}_k$  での  $\mathbf{A}$  と  $\Delta\mathbf{r}_k$  の内積の和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}(\mathbf{r}_k) \cdot \Delta\mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n \left( A_x(\mathbf{r}_k) \Delta x_k + A_y(\mathbf{r}_k) \Delta y_k + A_z(\mathbf{r}_k) \Delta z_k \right) \quad (3.34)$$

を考える。すべての  $|\Delta\mathbf{r}_k| \rightarrow 0$  になるように  $n \rightarrow \infty$  とするとき,  $S_n$  の極限值  $S$  を

$$S = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \left( A_x(\mathbf{r}) dx + A_y(\mathbf{r}) dy + A_z(\mathbf{r}) dz \right) \quad (3.35)$$

で表す。これを線積分という。線積分は始点 A, 終点 B だけでなく, 一般に A と B を結ぶ経路の取り方にも依存する。どの経路かを明記する必要があるため, 積分記号の下に経路  $C$  を書く。

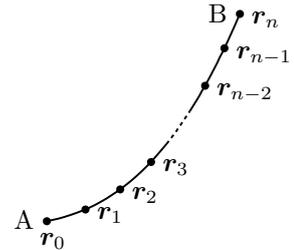
- (3.35) において,  $\mathbf{r}$  は空間の任意の点ではなく経路  $C$  上の点である。また, 微小変位ベクトル  $d\mathbf{r}$  は  $C$  の接線方向で, 始点 A から終点 B に向かう方向である。
- 経路  $C$  が閉曲線を 1 周する場合, 積分記号に  $\circ$  を付けて  $\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  と書くこともある。
- 経路  $C$  が A から B への経路であるとき, 同じ曲線に沿った B から A への経路を  $-C$  で表すことにする。(3.34) において  $\Delta\mathbf{r}_k$  を  $-\Delta\mathbf{r}_k$  で置き換えれば B から A へ経路になるから

$$\int_{-C} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

#### 媒介変数表示

具体的に線積分を行うには, 経路  $C$  を適当な変数  $t$  で表す。 $C$  上の点  $\mathbf{r}$  が

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \quad (3.36)$$



と表せ、始点 A は  $t = a$ 、終点 B は  $t = b$  とする。このとき

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b dt \left( A_x(\mathbf{r}(t)) \frac{dx}{dt} + A_y(\mathbf{r}(t)) \frac{dy}{dt} + A_z(\mathbf{r}(t)) \frac{dz}{dt} \right) \quad (3.37)$$

になり、1変数  $t$  の関数である内積  $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}/dt$  を普通に積分すればよい。問題は経路  $C$  をいかに変数で表現するかである。 $xy$  平面上の経路  $C$  が  $y = y(x)$  と表せる場合、 $t = x$  として

$$\int_C \left( A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy \right) = \int_a^b dx \left( A_x(x, y(x)) + A_y(x, y(x)) \frac{dy}{dx} \right) \quad (3.38)$$

になる。

Ⓢ 線積分の  $\mathbf{r}$  は経路  $C$  上の点であるから、例えば (3.35) の右辺第 1 項  $\int_C A_x(x, y, z) dx$  は、一般に、 $x$  についてだけ積分するわけではない。 $x$  が変化すれば、点が経路  $C$  上にあるように  $y, z$  も変化する。変数  $t$  で表せば

$$\int_C A_x(x, y, z) dx = \int_a^b A_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

であり、一般には  $y, z$  は定数ではない。

### 途中の経路に依存しない線積分

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})$  の場合

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t))$$

になるから、始点 A、終点 B を結ぶ任意の経路  $C$  に対して

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b dt \frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt} = \left[ U(\mathbf{r}(t)) \right]_a^b = U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A}) \quad (3.39)$$

である。 $\nabla U(\mathbf{r})$  の線積分は途中の経路に依存せず始点と終点だけで決まる。逆に、 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の線積分が途中の経路に依存しないならば、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})$  である  $U(\mathbf{r})$  が存在する。これについては 76 ページで証明する。なお、経路  $C$  が閉曲線の場合、始点と終点は同じになるから

$$\oint_C (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

である。例えば  $U = r^2/2$  の場合  $\nabla U = \mathbf{r}$  になるから  $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$  である。

### 力のなす仕事

線積分で表される代表的な物理量は力のなす仕事である。一定の力  $\mathbf{F}$  が作用して物体が  $s$  だけ直線的に変位したとき、力のなす仕事  $W$  は  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$  で定義される。曲線  $C$  に沿って物体が運動し、また、力が物体の位置  $\mathbf{r}$  に依存する場合に、仕事を一般化する。曲線  $C$  を  $n$  個の微小区間に分割すると、 $\mathbf{r}_{k-1}$  から  $\mathbf{r}_k$  の間は一定の力  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_k)$  が働いて直線的な変位  $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$  を行ったとしてよい。したがって、この区間での力のなす仕事は  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_k) \cdot \Delta \mathbf{r}_k$  である。これをすべての微小区間について足し合わせたものが、曲線  $C$  に沿って力がなす仕事  $W$  であるから

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_k) \cdot \Delta \mathbf{r}_k = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.40)$$

になる。 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が保存力  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$  の場合、経路  $C$  に沿って点  $\mathbf{r}_A$  から点  $\mathbf{r}_B$  の間に力がなす仕事  $W$  は (3.39) より

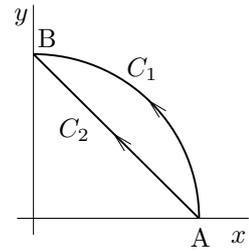
$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_C (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$$

であり、途中の経路に依存しない。点  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$  での質点の運動エネルギーをそれぞれ  $K_A, K_B$  とすると  $K_B = K_A + W$  であるから  $K_A + U(\mathbf{r}_A) = K_B + U(\mathbf{r}_B)$  になり力学的エネルギーは保存する。

**問題 3.7**  $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  を示せ。

**例題 1**  $A(a, 0)$  を始点,  $B(0, a)$  を終点とする 2 つの経路を考える。 $C_1$  は半径  $a$  の円周に沿った経路,  $C_2$  は  $A, B$  を直線で結ぶ経路である。

$$\int_C (-y dx + x dy) \quad (3.41)$$



を求める。 $C_1$  上の点は  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta$  は 0 から  $\pi/2$  に変化するから

$$\int_{C_1} (-y dx + x dy) = \int_0^{\pi/2} \left( -y \frac{dx}{d\theta} + x \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$$

$C_2$  では  $y = -x + a$  で  $x$  は  $a$  から 0 に減少するから

$$\int_{C_2} (-y dx + x dy) = \int_a^0 \left( -y + x \frac{dy}{dx} \right) dx = a \int_0^a dx = a^2$$

になる。この場合、線積分は経路に依存する。

次に

$$\int_C ((2x + y) dx + x dy) \quad (3.42)$$

の場合

$$\int_{C_1} ((2x + y) dx + x dy) = a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta = -a^2$$

$$\int_{C_2} ((2x + y) dx + x dy) = \int_a^0 a dx = -a^2$$

になり、線積分は同じになる。(3.42) の場合  $U(x, y) = x^2 + xy$  とすれば

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y = A_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x = A_y$$

になるから、線積分は経路に依存しない。(3.39) より

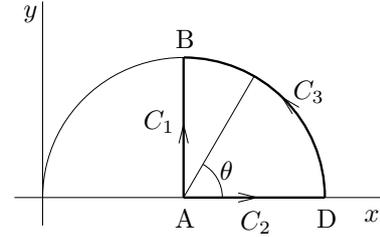
$$\int_C ((2x + y) dx + x dy) = U(B) - U(A) = U(0, a) - U(a, 0) = -a^2$$

であり、具体的に計算した線積分に一致する。一方、(3.41) の場合

$$A_x = -y = \frac{\partial U}{\partial x} \implies \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -1, \quad A_y = x = \frac{\partial U}{\partial y} \implies \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 1$$

になるから、 $U$  は存在しない。

**問題 3.8**  $xy$  平面上で座標が  $(a, 0), (a, a)$  である点をそれぞれ  $A, B$  とする。  $A$  を始点,  $B$  を終点とする経路として,  $A, B$  を直線で結ぶ経路  $C_1$ , 直線  $AD$  と半径  $a$  の円周  $DB$  からなる経路  $C_2$  を考える。



$$A_x = \frac{x}{r^3}, \quad A_y = \frac{y}{r^3} \quad \text{ただし} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

とする。線積分を具体的に実行して

$$\int_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}a}$$

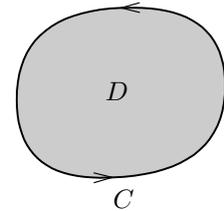
を示せ。弧  $DB$  に沿った線積分は図の  $\theta$  を用いて求めよ。また,  $\mathbf{A} = \nabla U$  となる  $U(\mathbf{r})$  を用いて線積分を求めよ。

### 3.4 平面でのグリーンンの定理

$xy$  平面上の閉曲線に沿って反時計回りに一周する経路を  $C$  とすると

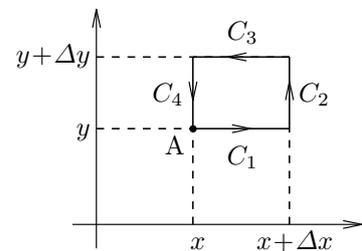
$$\oint_C (A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy) = \int_D \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.43)$$

である。  $D$  は  $C$  で囲まれる  $xy$  平面上の領域である。



Ⓢ 左辺の  $(x, y)$  は経路  $C$  上の点, 右辺の  $(x, y)$  は領域  $D$  内の点である。

**証明 1** まず, 各辺が  $x$  軸あるいは  $y$  軸に平行な微小長方形を反時計回りに一周する経路  $\Delta C$  を考えよう。始点  $A$  の座標を  $(x, y)$  とする。始点と区別するため, 積分変数は  $x', y'$  で表わす。  $C_1, C_3$  上では  $dy' = 0$  であり  $C_2, C_4$  上では  $dx' = 0$  であるから



$$\oint_{\Delta C} (A_x(x', y') dx' + A_y(x', y') dy') = I_1 + I_2$$

ただし

$$I_1 = \int_{C_1+C_3} A_x(x', y') dx', \quad I_2 = \int_{C_2+C_4} A_y(x', y') dy'$$

$C_1$  は  $x' = x + t, y' = y$  ( $t$  は  $0$  から  $\Delta x$  まで変化) であり,  $C_3$  は  $x' = x + t, y' = y + \Delta y$  ( $t$  は  $\Delta x$  から  $0$  まで変化) であるから

$$I_1 = \int_0^{\Delta x} A_x(x + t, y) dt + \int_{\Delta x}^0 A_x(x + t, y + \Delta y) dt = \int_0^{\Delta x} (A_x(x + t, y) - A_x(x + t, y + \Delta y)) dt$$

$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  のとき

$$A_x(x + t, y) = A_x(x, y) + \frac{\partial A_x}{\partial x} t, \quad A_x(x + t, y + \Delta y) = A_x(x, y) + \frac{\partial A_x}{\partial x} t + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y$$

としてよいから

$$I_1 = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y \int_0^{\Delta x} dt = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

同様にして

$$I_2 = \int_0^{\Delta y} A_y(x + \Delta x, y + t) dt + \int_{\Delta y}^0 A_y(x, y + t) dt = \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

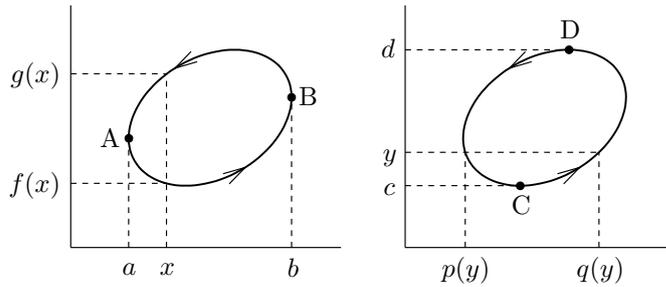
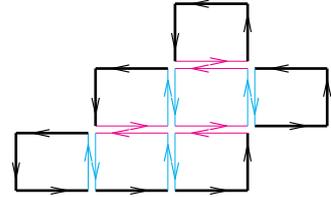
したがって

$$\oint_{\Delta C} (A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy) = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

である。任意の閉曲線に対しては、これが囲む領域  $D$  を  $n$  個の微小長方形  $\Delta C_k$  に分割する (38 ページの図参照)。各々の長方形に上の結果を適用すると

$$\sum_{k=1}^n \oint_{\Delta C_k} (A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_{(x_k, y_k)} \Delta x_k \Delta y_k \quad (3.44)$$

右図から分かるように、2つの長方形の共通する辺 (少しずらして表示) では、経路は互いに逆向きになるから、共通する辺の線積分は打ち消しあう。したがって、太い線で示した最も外側の経路の線積分だけが残る。 $n \rightarrow \infty$  のとき最も外側の経路は積分路  $C$  になるから、(3.44) は (3.43) に他ならない。 ■



**証明 2** 別の方法で証明する。領域  $D$  が上図のように

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x) \quad \text{または} \quad c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

で表せるとする。左側の図から

$$\begin{aligned} - \int_D \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \frac{\partial A_x}{\partial y} = - \int_a^b dx [A_x(x, y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} \\ &= \int_a^b dx (A_x(x, f(x)) - A_x(x, g(x))) \end{aligned}$$

$A \rightarrow B$  の線積分は  $x: a \rightarrow b, y = f(x)$  であり、 $B \rightarrow A$  では  $x: b \rightarrow a, y = g(x)$  になるから

$$\oint_C A_x(x, y) dx = \int_a^b dx A_x(x, f(x)) + \int_b^a dx A_x(x, g(x)) = - \int_D \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy \quad (3.45)$$

である。同様にして、右側の図から

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} dx \frac{\partial A_y}{\partial x} = \int_c^d dy (A_y(q(y), y) - A_y(p(y), y)) \\ &= \oint_C A_y(x, y) dy \end{aligned} \quad (3.46)$$

になる。(3.45) と (3.46) をたし合わせれば (3.43) である。 ■

- (3.43) をガウスの定理 (3.68) と同じ形式にしておく。  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ,  $d\mathbf{r}$  方向の単位ベクトルを  $\mathbf{u}$  とすれば  $d\mathbf{r} = \mathbf{u} ds$  である。反時計回りの閉曲線  $C$  の外向き単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  とする。  $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{e}_z$  は  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  と同じ右手系の単位ベクトルの組であり  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}$  になるから

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n} ds, \quad \text{つまり} \quad dx = -n_y ds, \quad dy = n_x ds$$

である。したがって、(3.43) は

$$\oint_C ds (n_x A_y(x, y) - n_y A_x(x, y)) = \int_D \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$B_x = A_y, B_y = -A_x$  とすれば

$$\oint_C ds \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \int_D \nabla \cdot \mathbf{B} dx dy \quad (3.47)$$

である。

- (2.8)  $\Rightarrow$  (2.7) を証明する。2点 A と B を結ぶ任意の経路を  $C_1, C_2$  とすると

$$\int_{C_1} (A_x dx + A_y dy) - \int_{C_2} (A_x dx + A_y dy) = \oint_{C_1 - C_2} (A_x dx + A_y dy) = \int_D \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

ここで  $C_1 - C_2$  は経路  $C_1$  と経路  $C_2$  を逆向きにたどる閉曲線である。したがって、 $\partial A_y / \partial x = \partial A_x / \partial y$  である領域では

$$\int_{C_1} (A_x dx + A_y dy) = \int_{C_2} (A_x dx + A_y dy)$$

であり、線積分は経路に依らず始点と終点だけで決まる。A と B を結ぶ任意の経路  $C$  に沿った線積分は A と B の座標だけの関数になる。点 A の座標を  $(a, b)$ , 点 B の座標を  $(x, y)$  とする。経路  $C$  上の点を  $(x', y')$  とすれば

$$U(x, y) = \int_C (A_x(x', y') dx' + A_y(x', y') dy') \quad (3.48)$$

である。ただし、 $(a, b)$  は固定して  $(x, y)$  を変化させる場合を考える。

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y) - U(x, y) = \int_{\Delta C} (A_x(x', y') dx' + A_y(x', y') dy')$$

$\Delta C$  は  $(x, y)$  と  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  を結ぶ経路であるが、 $\Delta x$  と  $\Delta y$  が微小の場合

$$\int_{\Delta C} (A_x(x', y') dx' + A_y(x', y') dy') = A_x(x, y) \Delta x + A_y(x, y) \Delta y$$

になるから

$$\Delta U = A_x(x, y) \Delta x + A_y(x, y) \Delta y, \quad \text{つまり} \quad dU = A_x(x, y) dx + A_y(x, y) dy$$

である。 $\partial A_y / \partial x = \partial A_x / \partial y$  を満たすとき、 $A_x dx + A_y dy$  は (3.48) で定義される関数の全微分である。したがって、(2.8)  $\Rightarrow$  (2.7) が証明された。

**例題 1** 直線  $y = x$  と曲線  $y = x^2$  で囲まれた領域を  $D$  とし,  $D$  の境界となる閉曲線を反時計回りに一周する経路を  $C$  とする。

$$A_x(x, y) = xy, \quad A_y(x, y) = x^2 + y^2$$

のとき

$$I = \oint_C (A_x dx + A_y dy), \quad J = \int_D dx dy \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

を求める。  $C$  は  $y = x^2$ , ( $x: 0 \rightarrow 1$ ) と  $y = x$ , ( $x: 1 \rightarrow 0$ ) の部分に分けられるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \left( x x^2 + (x^2 + (x^2)^2) \frac{dx^2}{dx} \right) + \int_1^0 dx \left( x x + (x^2 + x^2) \frac{dx}{dx} \right) \\ &= \int_0^1 (2x^5 + 3x^3 - 3x^2) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

である。一方

$$J = \int_D dx dy \left( \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} xy \right) = \int_D dx dy x$$

$D$  は  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x^2 \leq y \leq x$  であるから

$$J = \int_0^1 dx x \int_{x^2}^x dy = \int_0^1 dx x (x - x^2) = \frac{1}{12} = I$$

になり平面でのグリーンの定理が成り立つ。

**例題 2**  $a$  を実数とするとき (3.25) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+a)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (3.49)$$

である。(3.43) を用いて  $a$  が複素定数の場合でも上式が成り立つことを示す。

実数  $x$  を複素数  $z = x + iy$  で置き換えて ( $x, y$  は実数)

$$e^{-z^2} = e^{-x^2+y^2-2ixy} = e^{-x^2+y^2} (\cos(2xy) - i \sin(2xy))$$

を考える。これの実部  $\operatorname{Re} e^{-z^2}$  と虚部  $\operatorname{Im} e^{-z^2}$  をそれぞれ  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  とすると

$$u(x, y) = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy), \quad v(x, y) = -e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) \quad (3.50)$$

である。複素定数  $a = b + ic$  に対して ( $b, c$  は実数)

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+a)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+b+ic)^2}$$

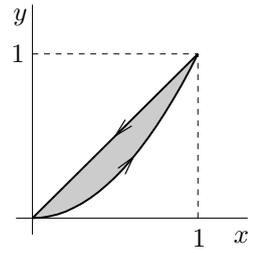
を求める。実数  $x + b$  を  $x$  と置き換えれば

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+ic)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (u(x, c) + iv(x, c)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, c)$$

ただし,  $v(x, c)$  は  $x$  の奇関数であるから  $v(x, c)$  の積分は 0 である。また,  $u(x, c)$  は  $c$  の偶関数になるから  $c > 0$  の場合を考えれば十分である。(3.50) より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{-x^2+y^2} (x \cos(2xy) + y \sin(2xy)) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{-x^2+y^2} (y \cos(2xy) - x \sin(2xy)) \quad (3.52)$$



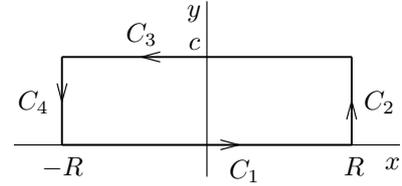
である。  $A_x = u$ ,  $A_y = -v$  として平面でのグリーンの定理 (3.43) を適用すると, (3.52) より任意の閉曲線の経路  $C$  に対して

$$\oint_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) = \int_D dx dy \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.53)$$

が成り立つ。  $C$  は何でもよいのだが, 右図の経路の場合

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad I_k = \int_{C_k} (u(x, y) dx - v(x, y) dy)$$

である。



$$C_1 \text{ は } x: -R \rightarrow R, y = 0, \quad C_2 \text{ は } x = R, y: 0 \rightarrow c$$

$$C_3 \text{ は } x: R \rightarrow -R, y = c, \quad C_4 \text{ は } x = -R, y: c \rightarrow 0$$

になるから

$$I_1 = \int_{-R}^R dx u(x, 0) = \int_{-R}^R dx e^{-x^2}, \quad I_3 = \int_R^{-R} dx u(x, c) = - \int_{-R}^R dx u(x, c)$$

$$I_2 = - \int_0^c dy v(R, y) = e^{-R^2} \int_0^c dy e^{y^2} \sin(2Ry), \quad I_4 = - \int_c^0 dy v(-R, y) = I_2$$

したがって

$$\int_{-R}^R dx e^{-x^2} - \int_{-R}^R dx u(x, c) + 2e^{-R^2} \int_0^c dy e^{y^2} \sin(2Ry) = 0$$

$R \rightarrow \infty$  とすると  $e^{-R^2} \rightarrow 0$  より第3項は0になるから

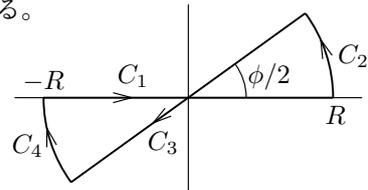
$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x, c) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \text{あるいは} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \cos(2cx) = \sqrt{\pi} e^{-c^2}$$

任意の複素定数  $a$  に対して (3.49) が成り立つ。第2式は  $\cos(2cx)$  をマクローリン展開し (3.26) を使っても求まる。なお, (3.51), (3.52) はコーシー・リーマンの微分方程式 (5.7) である。

**問題 3.9** 実部が負でない複素定数  $a$  を  $a = |a|e^{i\phi}$ ,  $|\phi| \leq \pi/2$  とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \text{ただし} \quad \sqrt{a} = \sqrt{|a|} e^{i\phi/2} \quad (3.54)$$

を示す。(3.53) を右図の積分路  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  に適用する。各経路は



$$C_1 \text{ } x: -R \rightarrow R, y = 0, \quad C_2 \text{ } x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow \phi/2$$

$$C_3 \text{ } x = t \cos \frac{\phi}{2}, y = t \sin \frac{\phi}{2}, t: R \rightarrow -R$$

と表せる。  $R \rightarrow \infty$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2 \cos \phi} \cos \left( t^2 \sin \phi - \frac{\phi}{2} \right) = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2 \cos \phi} \sin \left( t^2 \sin \phi - \frac{\phi}{2} \right) = 0$$

を示し (3.54) を求めよ。

**問題 3.10**  $xy$  平面上の反時計回りの閉曲線を  $C$  とし,  $C$  で囲まれた領域を  $D$  とする。  $D$  の面積を  $C$  に沿った線積分で表せ。具体例を1つ求める。

### 3.5 曲面と面積分

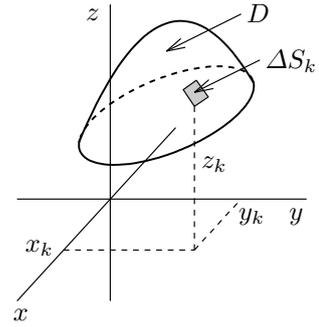
曲面の表現形式はいろいろあるが、ここでは曲面を  $z = f(x, y)$  で表す。 $(x, y)$  を与えると  $z$  が定まり曲面になる。この曲面上の領域  $D$  を考える。 $D$  を面積が  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  である  $n$  個の微小部分に分割する。領域  $\Delta S_k$  における点を  $(x_k, y_k, z_k)$  とする。ただし  $z_k = f(x_k, y_k)$  である。このとき、曲面  $S$  上における関数  $G(x, y, z)$  の和

$$V_n = \sum_{k=1}^n G(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k, \quad z_k = f(x_k, y_k)$$

を考える。 $\Delta S_k \rightarrow 0$  になるように  $n \rightarrow \infty$  とした極限における  $V_n$  を

$$\iint_D dS G(x, y, z) \quad \text{または} \quad \int_D dS G(x, y, z) \quad (3.55)$$

と書き、 $D$  上における  $G(x, y, z)$  の**面積分**という。 $(x, y, z)$  は曲面  $D$  上の点、 $dS$  はこの点における  $D$  の微小面積である。 $G(x, y, z) = 1$  の場合、面積分は曲面上の領域  $D$  の面積である。



#### 媒介変数表示

曲面上の微小面積  $dS$  を求める必要がある。曲面を  $z = f(x, y)$  ではなく、別の表現にした方が簡単になる場合がある。例として、 $D$  が原点を中心とした半径  $a$  の球面上の領域の場合、球面上の点は

$$z = f(x, y) = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$$

であるが、3次元極座標で表せば

$$x = a \sin \theta \cos \phi, \quad y = a \sin \theta \sin \phi, \quad z = a \cos \theta \quad (3.56)$$

この表現では  $x, y, z$  は2変数  $\theta, \phi$  の関数になる ( $r = \text{定数} = a$ )。  $dS$  は  $\theta$  と  $\phi$  が微小変化したときの  $D$  上の微小面積であるが、44ページの図より

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.57)$$

になるから

$$\iint_D dS G(x, y, z) = a^2 \int_{\Omega} d\theta d\phi \sin \theta G(a \cos \phi \sin \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \theta) \quad (3.58)$$

ここで  $\Omega$  は  $D$  に対応する  $\theta, \phi$  の領域である。 $D$  が球面全体の場合  $\Omega$  は  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$  であり、 $G(x, y, z) = 1$  とすれば球の表面積  $4\pi a^2$  が求まる。

一般に、曲面  $D$  上の点は適当な2つの変数  $u, v$  を用いて

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (3.59)$$

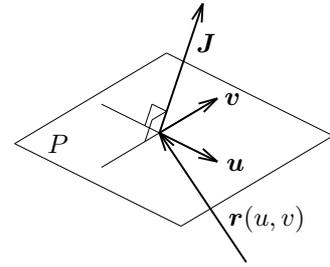
と表せる(曲線上の点は(3.36)のように1変数の関数)。(3.56)は  $u = \theta, v = \phi$  であり、 $z = f(x, y)$  は  $u = x, v = y$  という特別な場合である。点  $\mathbf{r}(u, v)$  近傍では曲面上の点は、テイラー展開すると

$$\mathbf{r}(u + du, v + dv) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{u} du + \mathbf{v} dv + \dots \quad (3.60)$$

ただし

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{e}_z \quad (3.61)$$

である。 $u, v$  を固定し  $du, dv$  を変化させると, (3.60) は  $\mathbf{r}(u, v)$  を通り 2つのベクトル  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  で張られる平面  $P$  上の点である。ただし,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$  で  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  の向きは異なるとする。 $du, dv$  が微小なら曲面は平面で近似できる。 $u, v$  が微小変化  $du, dv$  したときの平面  $P$  上の面積  $dS$  を求める。(3.15) の  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  は  $xy$  平面上のベクトルであり  $xy$  平面上の微小面積  $dS$  は (3.16) で与えられる。 $xy$  平面が平面  $P$  に置き換わるだけであるから, 平面  $P$  上の  $dS$  は



$$dS = |\mathbf{J}(u, v)| du dv, \quad \mathbf{J}(u, v) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (3.62)$$

になる。したがって,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  である曲面上の領域  $D$  での面積分は

$$\int_D dS G(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} du dv |\mathbf{J}(u, v)| G(\mathbf{r}(u, v)), \quad \mathbf{J}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (3.63)$$

である。ただし  $\Omega$  は曲面上の領域  $D$  に対応する  $u, v$  の領域である。

$dv = 0$  として  $v$  を一定にすると,  $\mathbf{s}(u) = \mathbf{r}(u, v)$  は曲面上の曲線を表す。このとき (3.60) は平面  $P$  上の  $\mathbf{u}$  方向の直線になるが, この直線は曲線  $\mathbf{s}(u)$  の接線である。 $du = 0$  とすると (3.60) は  $\mathbf{s}(u)$  とは別の曲線  $\mathbf{s}(v) = \mathbf{r}(u, v)$  の接線で  $\mathbf{v}$  方向の直線になる。したがって, 平面  $P$  は点  $\mathbf{r}(u, v)$  で曲面に接する接平面である。 $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  に直交するから,  $\mathbf{J}$  は法線ベクトル (曲面に直交するベクトル) である。(3.61) より

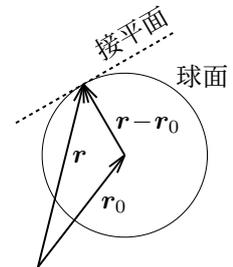
$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{e}_x + J_y \mathbf{e}_y + J_z \mathbf{e}_z$$

ただし

$$J_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad J_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad J_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

になる。 $\mathbf{J}$  はヤコビアンを成分とするベクトルである。

法線ベクトルの簡単な具体例は球面の場合である。図から, 中心  $\mathbf{r}_0$  の球面上の点  $\mathbf{r}$  での法線ベクトルは  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  になる。(3.62) を使っても求まる。



- (3.18) は  $D$  を  $xy$  平面 ( $z = 0$ ) にとった特別な場合である。この場合  $dS = dx dy$  であり  $\mathbf{J} = J_z \mathbf{e}_z$  になるから (3.63) は

$$\int_D dx dy G(x, y, 0) = \int_{\Omega} du dv |J_z| G(x(u, v), y(u, v), 0)$$

である。これは (3.18) に他ならない。

- 曲面  $D$  が原点を中心とした半径  $a$  の球面の場合,  $D$  上の点  $\mathbf{r}$  は (3.56) より

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = a \mathbf{e}_r(\theta, \phi), \quad \mathbf{e}_r(\theta, \phi) = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \theta$$

$\mathbf{e}_r$  は  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトルである。具体的に微分すれば

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = a^2 \sin \theta \mathbf{e}_r, \quad \therefore dS = |\mathbf{J}| d\theta d\phi = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

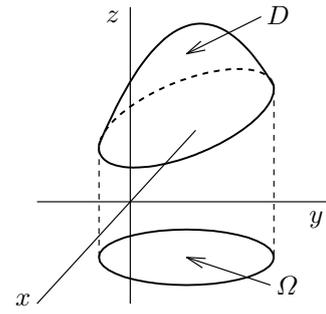
であり (3.57) に一致する。 $\mathbf{J}$  は法線ベクトルであるから,  $\mathbf{e}_r$  あるいは  $\mathbf{r}$  は原点を中心とした球面の法線ベクトルである。

- 曲面が  $z = f(x, y)$  のとき, 曲面上の点  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + f(x, y)\mathbf{e}_z$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left( \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) \times \left( \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_z \right) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.64)$$



(3.63) より

$$\int_D dS G(x, y, z) = \int_{\Omega} dx dy G(x, y, f(x, y)) \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1} \quad (3.65)$$

になる。領域  $\Omega$  は曲面上の領域  $D$  を  $xy$  平面に射影した領域である。

曲面は  $F(x, y, z) = 0$  と表すこともできる。これを  $z$  について解けば  $z = f(x, y)$  になる。 $F(x, y, z) = 0$  の曲面上の 2 点を  $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$  とすると  $F(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) = 0$  である。 $|d\mathbf{r}|$  が微小の場合, テイラー展開すると

$$F(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) + dx \frac{\partial F}{\partial x} + dy \frac{\partial F}{\partial y} + dz \frac{\partial F}{\partial z} = F(\mathbf{r}) + d\mathbf{r} \cdot \nabla F, \quad \therefore \quad d\mathbf{r} \cdot \nabla F = 0$$

である。曲面上の隣接する 2 点を結ぶベクトル  $d\mathbf{r}$  と  $\nabla F$  は直交するから,  $\nabla F$  は曲面  $F(\mathbf{r}) = 0$  の法線ベクトルである。 $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$  の場合  $\nabla F$  は (3.64) になる。

**例題 1** 原点を中心とする半径  $a$  の半球面 ( $z \geq 0$ ) を曲面  $D$  とする。極座標 (3.56) を使えば簡単に求まるが, (3.65) を適用する。この曲面は  $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  である。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

したがって, 半球面の表面積は (3.65) より  $G(x, y, z) = 1$  として

$$\int_D dS = \int_{\Omega} dx dy \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

になる。ここで  $\Omega$  は半球面を  $xy$  平面に射影した領域, つまり,  $xy$  平面上の半径  $a$  の円の内部である。 $x, y$  を 2 次元極座標で表すと

$$\int_D dS = \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a^2 \quad (3.66)$$

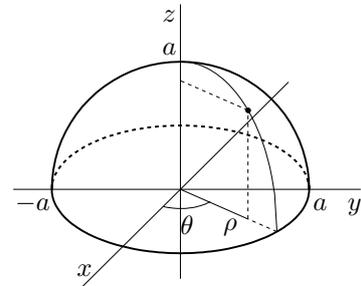
当たり前のことだが, 球の表面積  $4\pi a^2$  の半分である。

半球面上の点は

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = \mathbf{e}_x \rho \cos \theta + \mathbf{e}_y \rho \sin \theta + \mathbf{e}_z \sqrt{a^2 - \rho^2}$$

とも表せる。ただし  $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  である。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta - \mathbf{e}_z \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_x \rho \sin \theta + \mathbf{e}_y \rho \cos \theta$$



より

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{e}_x \frac{\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \mathbf{e}_y \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \mathbf{e}_z \rho = \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \mathbf{r}$$

になり  $|\mathbf{J}| = a\rho/\sqrt{a^2 - \rho^2}$  である。(3.63) より半球面の面積は

$$\int_D dS = \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\theta |\mathbf{J}| = \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

これは (3.66) と同じである。

**問題 3.11** 半径  $a$  の球面上に一様な面密度  $\sigma$  の電荷が分布するとき、静電気ポテンシャルは

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} dS' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

である。ここで  $S'$  は半径  $a$  の球面全体、 $\mathbf{r}'$  は  $S'$  上の点である。

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r} (r + a - |r - a|), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases} \quad (3.67)$$

を示せ。 $\mathbf{r} = (0, 0, r)$  の場合を考えればよい。 $Q = 4\pi a^2 \sigma$  は全電荷である。

**問題 3.12** 一様電場  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$  中の導体球の表面には (2.59) の電荷  $\sigma(\theta)$  が誘導される。この電荷による静電気ポテンシャルは、前問と同様に  $S'$  を半径  $a$  の球面全体、 $\mathbf{r}'$  を  $S'$  上の点とすると

$$U(\mathbf{r}) = \frac{3E_0}{4\pi} \int_{S'} dS' \frac{\cos \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{3E_0}{4\pi a} \int_{S'} dS' \frac{z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

である。このままでも積分は可能であるが

$$\frac{\partial}{\partial z} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \therefore U(\mathbf{r}) = \frac{3E_0}{4\pi a} \left( z \int_{S'} dS' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{S'} dS' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right)$$

と表せる。 $U(\mathbf{r})$  を求め (2.58) と比較せよ。

### 3.6 ガウスの定理

閉曲面  $S$  上の点  $\mathbf{r}$  での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  とする。ただし、 $\mathbf{n}$  は閉曲面に対して外向きにとる。閉曲面  $S$  で囲まれた領域を  $V$  とすると**ガウスの定理**

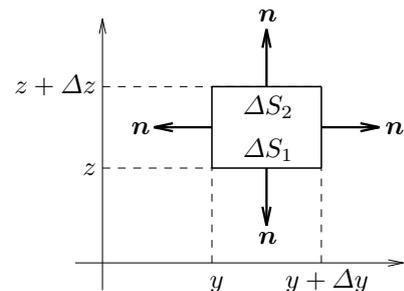
$$\int_S dS \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.68)$$

が成り立つ。左辺の  $\mathbf{r}$  は閉曲面  $S$  上の点であるが、右辺の  $\mathbf{r}$  は領域  $V$  内の点である。

**証明**

$(x, y, z)$  と  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  を頂点とする微小直方体を考える。図はこの直方体を  $x$  軸方向から見たものである。 $\mathbf{n}$  は微小直方体の表面  $\Delta S$  での外向き単位法線ベクトルを表す。

$$\int_{\Delta S} dS' \mathbf{A}(x', y', z') \cdot \mathbf{n}(x', y', z')$$



を求める。微小直方体の頂点  $(x, y, z)$  と区別するため、積分変数は  $(x', y', z')$  とする。図の  $xy$  平面に平行な面  $\Delta S_1$  からの寄与は  $z' = \text{一定} = z$ ,  $dS' = dx'dy'$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$  であるから

$$I_1 = \int_{\Delta S_1} dS' \mathbf{A}(x', y', z') \cdot \mathbf{n}(x', y', z') = - \int_{\Delta S_1} dx'dy' A_z(x', y', z)$$

になる。 $(x, y, z)$  のまわりでテイラー展開すると

$$A_z(x', y', z) = A_z(x, y, z) + (x' - x) \frac{\partial A_z}{\partial x} + (y' - y) \frac{\partial A_z}{\partial y} + \dots$$

より

$$I_1 = -A_z(x, y, z) \int_{\Delta S_1} dx'dy' + \dots = -A_z(x, y, z) \Delta x \Delta y$$

ただし、微小量  $\Delta x, \Delta y$  の最低次だけ考慮する。 $\Delta S_2$  では  $z' = \text{一定} = z + \Delta z$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  であるから

$$I_2 = \int_{\Delta S_2} dx'dy' A_z(x', y', z + \Delta z) = A_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y$$

したがって

$$I_1 + I_2 = (A_z(x, y, z + \Delta z) - A_z(x, y, z)) \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

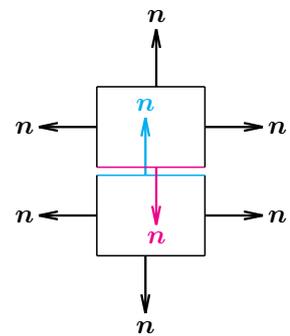
他の4面についても同様に行えば

$$\int_{\Delta S} dS \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta x \Delta y \Delta z$$

になる。任意の閉曲面  $S$  にかこまれた領域を  $N$  個の微小直方体  $\Delta S_k$  に分割すると

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Delta S_k} dS \mathbf{A}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_k) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

隣り合う直方体の面の寄与は、 $\mathbf{n}$  の向きが互いに逆になるから打ち消しあう (例えば右図の  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{n}$ )。したがって、左辺は最も外側にある直方体の表面での面積分だけ残る。 $N \rightarrow \infty$  のとき、最も外側の直方体の表面は曲面  $S$  になるから (3.68) が成り立つ。 ■



**例題 1** 直円錐  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  と平面  $z = 0$  で囲まれた領域を  $V$ , その表面を  $S$  とする。

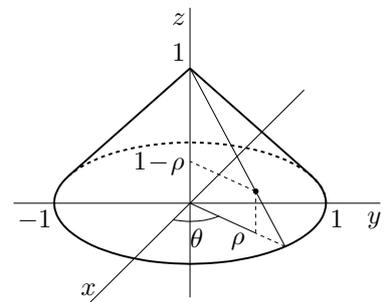
$$I_V = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{r}, \quad I_S = \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

とするとガウスの定理より  $I_V = I_S$  であるが<sup>3</sup>, これを  $I_V$  の体積積分と  $I_S$  の面積分を具体的に求めて確かめる。

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3, \quad \therefore \quad I_V = 3 \int_V d^3r$$

である。円錐の体積の公式を用いずに 3 重積分を正直に行う。 $V$  内の点  $\mathbf{r}$  は

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



とおける。

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

になるから (3.20) より

$$I_V = 3 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-\rho} dz \rho = 6\pi \int_0^1 d\rho \rho(1-\rho) = \pi$$

である。

$S$  は直円錐の表面  $S_1$  と  $z = 0$  の底面  $S_2$  からなる。 $S_2$  上では  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$  より  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$  であり  $S_2$  は寄与しない。 $S_1$  上の点  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = \mathbf{e}_x \rho \cos \theta + \mathbf{e}_y \rho \sin \theta + \mathbf{e}_z(1-\rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

とおける。(3.62) より  $S_1$  の法線ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta - \mathbf{e}_z) \times (-\mathbf{e}_x \rho \sin \theta + \mathbf{e}_y \rho \cos \theta) \\ &= \rho (\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta + \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$

であり  $|\mathbf{J}| = \sqrt{2}\rho$  になる。 $S_1$  の外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \frac{\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta + \mathbf{e}_z}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \frac{\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta + 1 - \rho}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これから

$$I_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_1} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta |\mathbf{J}| = 2\pi \int_0^1 d\rho \rho = \pi$$

$I_V = I_S$  でありガウスの定理が成り立つ。(3.65) で  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  としても  $I_S$  は求まる。

### 例題 2 ガウスの法則

電場を  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , 電荷密度を  $\rho(\mathbf{r})$  とするとガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (3.69)$$

が成り立つ (63 ページでクーロンの法則 (3.28) から上式を導く)。適当な領域  $V$  で積分すると

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r})$$

左辺にガウスの定理を適用すると

$$\int_S dS \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (3.70)$$

になる。 $\rho(\mathbf{r})$  が原点からの距離  $r$  にだけ依存する球対称な場合を考える。 $\rho(x, y, z) = \rho(r)$  である。対称性より  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の大きさは  $r$  だけの関数で、方向は  $\mathbf{r}$  の方向になるとすれば

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

とおける。閉曲面  $S$  として原点を中心とした半径  $R$  の球面を考えると、外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  であり  $r = \text{一定} = R$  になるから

$$\int_S dS \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int_S dS E(r) = E(R) \int_S dS = 4\pi R^2 E(R)$$

である。一方、領域  $V$  は半径  $R$  の球であるから、極座標を用いると

$$\int_V d^3r \rho(r) = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) \equiv Q(R)$$

したがって

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(R)}{R^2}$$

である。 $E(R)$  は半径  $R$  の球の全電荷が原点に集中した場合の電場に等しい。特に

$$\rho(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ \rho_0, & r \leq a \end{cases} \quad \text{の場合} \quad Q(R) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 \times \begin{cases} 1, & R \geq a \\ R^3/a^3, & R \leq a \end{cases}$$

になり (3.32) が求まる。電荷分布に何らかの対称性がある場合、電場  $\mathbf{E}$  は (3.28) の積分を実行するよりも、対称性に応じた閉曲面  $S$  を考えてガウスの定理を用いた方が簡単に求まる。

**問題 3.13** ガウスの定理の証明と同様にして

$$\int_{\Delta S} dS F(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \nabla F(\mathbf{r}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

を示せ。したがって、一般に

$$\int_S dS F(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \nabla F(\mathbf{r})$$

である。(2.40) において  $\mathbf{A}$  を定数ベクトルとする。これから上式を証明せよ。

**問題 3.14** ガウスの定理から

$$\int_V d^3r \left( (\nabla F(\mathbf{r})) \cdot \nabla G(\mathbf{r}) + F(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}) \right) = \int_S dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla G(\mathbf{r})) F(\mathbf{r}) \quad (3.71)$$

$$\int_V d^3r \left( F(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r}) \nabla^2 F(\mathbf{r}) \right) = \int_S dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left( F(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r}) \nabla F(\mathbf{r}) \right) \quad (3.72)$$

を示せ。(3.71), (3.72) を **グリーンの定理** という。

**奇妙な関数**

$\mathbf{a}$  を定ベクトルとして

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{a}, \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2}$$

とするとき

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \frac{1}{R} = \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{R}$$

$$D(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{R} = \nabla^2 \frac{1}{R}$$

を考える。 $D(\mathbf{a})$  を問題にするため、 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$  での  $1/R$  の発散を一時的に回避する。つまり

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \frac{1}{R_\epsilon}, \quad D(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla^2 \frac{1}{R_\epsilon}, \quad R_\epsilon = \sqrt{R^2 + \epsilon^2}$$

に変更し、後で  $\epsilon \rightarrow 0$  とする。 $\partial R_\epsilon / \partial x = (x - a_x) / R_\epsilon$  より

$$A_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_\epsilon} = -\frac{x - a_x}{R_\epsilon^3}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{1}{R_\epsilon^3} - (x - a_x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_\epsilon^3} = -\frac{1}{R_\epsilon^3} + \frac{3(x - a_x)^2}{R_\epsilon^5}$$

$A_y, A_z$  についても同様にして

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{(x-a_x)\mathbf{e}_x + (y-a_y)\mathbf{e}_y + (z-a_z)\mathbf{e}_z}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{R}}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}) &= -\underbrace{\frac{1}{R_\varepsilon^3} + \frac{3(x-a_x)^2}{R_\varepsilon^5}}_{\partial A_x / \partial x} - \underbrace{\frac{1}{R_\varepsilon^3} + \frac{3(y-a_y)^2}{R_\varepsilon^5}}_{\partial A_y / \partial y} - \underbrace{\frac{1}{R_\varepsilon^3} + \frac{3(z-a_z)^2}{R_\varepsilon^5}}_{\partial A_z / \partial z} \\ &= -\frac{3}{R_\varepsilon^3} + \frac{3R^2}{R_\varepsilon^5} = -\frac{3\varepsilon^2}{(R^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

である。 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{a}| \neq 0$  のとき  $D \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ ,  $R = 0$  のとき  $D = -3/|\varepsilon|^3 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$  になる。 $\varepsilon \rightarrow 0$  での  $D(\mathbf{r}) = \nabla^2 R^{-1}$  は  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$  では  $-\infty$ , この 1 点以外では 0 である。普通の関数とは言えない奇妙な関数  $D(\mathbf{r})$  に意味があるのか, 当然, 疑問だろうが, 積分すると意味ある結果に化ける。

$f(\mathbf{r})$  を任意の関数とし積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r f(\mathbf{r}) D(\mathbf{r})$$

を求める。 $\varepsilon \rightarrow 0$  では  $D(\mathbf{r} \neq \mathbf{a}) = 0$  になるから,  $f(\mathbf{r})$  を  $f(\mathbf{a})$  で置き換え, 積分領域を  $\mathbf{a}$  を中心とした半径  $R_0$  の球内部  $V$  に変更しても  $I$  は変わらない。

$$I = f(\mathbf{a}) \int_V d^3r D(\mathbf{r}) = f(\mathbf{a}) \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}$$

である。これを  $\varepsilon \neq 0$  で求めてから  $\varepsilon \rightarrow 0$  とする。 $\varepsilon \neq 0$  のとき  $D(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})$  は発散しないからガウスの定理が適用でき

$$I = f(\mathbf{a}) \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = -f(\mathbf{a}) \int_S dS \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{(R^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}$$

になる。ここで (3.73) を用いた。 $S$  は  $\mathbf{a}$  を中心とした球面である。 $S$  上では  $R = \text{一定} = R_0$  であり, 外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  になるから  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = R = R_0$  である。被積分関数は定数になり

$$I = -f(\mathbf{a}) \frac{R_0}{(R_0^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \int_S dS = -f(\mathbf{a}) \frac{4\pi R_0^3}{(R_0^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi f(\mathbf{a})$$

である。まとめると,  $\varepsilon \rightarrow 0$  での  $D(\mathbf{r}) = \nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$  は

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{a} \\ -\infty, & \mathbf{r} = \mathbf{a} \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d^3r f(\mathbf{r}) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = -4\pi f(\mathbf{a}) \quad (3.75)$$

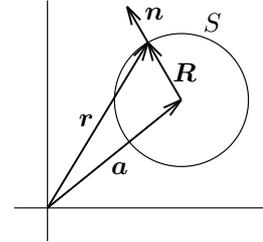
になる。特に,  $f(\mathbf{r}) = 1$  とすると  $\nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$  の積分は  $-4\pi$  である。 $\mathbf{r} \neq \mathbf{a}$  のとき  $\nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1} = 0$  であるから, (3.75) の積分領域は全空間である必要はなく  $\mathbf{a}$  を含む有限領域でよい。

(3.75) は普通の関数の関係式としては受け入れ難いが, 以下で示すように (3.75) を用いるとクーロンの法則からガウスの法則が簡単に導け, 物理としては有用な結果をもたらす。 $\nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$  は次章のデルタ関数の 1 例である。

### クーロンの法則 $\implies$ ガウスの法則

クーロンの法則 (3.28) を電場  $\mathbf{E}$  で表すと (積分は全空間)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla^2 \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.76)$$



である。 $\mathbf{r}$  と積分変数  $\mathbf{r}'$  は独立であり、 $\mathbf{r}$  の微分  $\nabla^2$  と  $\mathbf{r}'$  の積分は入れ替えてもよい。更に、 $\mathbf{r}'$  の関数  $\rho(\mathbf{r}')$  は  $\nabla^2$  に対しては定数と見なせるから

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.77)$$

$\nabla'$  を  $\mathbf{r}'$  のナブラ演算子とすると、差  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  の関数  $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  に対しては

$$\nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \nabla^2 f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla'^2 f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

になるから (3.77) は  $\nabla^2$  を  $\nabla'^2$  で置き換えて

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.78)$$

と表せる。(3.75) において  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{r}$  に変更すると

$$\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

したがって、(3.78) はガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \quad \nabla^2 U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (3.79)$$

に他ならない。(3.76)  $\implies$  (3.79) である。ただし、逆は必ずしも成り立たない。 $\rho(\mathbf{r})$  を与えたとき、微分方程式 (3.79) の特別な解が (3.76) である。

**問題 3.15**  $F(\mathbf{r})$  がラプラス方程式  $\nabla^2 F(\mathbf{r}) = 0$  を満たすとき

$$F(\mathbf{a}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S dS F(\mathbf{r}), \quad F(\mathbf{a}) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_V d^3r F(\mathbf{r})$$

を示せ。ただし、 $S$  は点  $\mathbf{a}$  を中心とした半径  $R$  の球面、 $V$  は球の内部である。また、 $F(\mathbf{r})$  は極大値、極小値をとらないことを示せ。第 1 式の場合、(3.72) において  $G(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{a}|$ 、第 2 式では  $G(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2$  としてみる。

### 3.7 デルタ関数

関数  $\nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$  は非常に奇妙な性質を示す。 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$  という 1 点以外では 0 であるが、この点を含む領域で積分すると有限な値になる。一般に、発散する点以外では 0 であるが、その点を含む領域で積分すると有限な値になる“関数”をディラックのデルタ関数という。デルタ関数は電磁気学や量子力学で重要な役割をする。1 次元 (1 変数) の場合、デルタ関数  $\delta(x)$  を

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (3.80)$$

で定義する。これを  $c$  だけ平行移動した  $\delta(x - c)$  は

$$\delta(x - c) = \begin{cases} \infty, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - c) = 1 \quad (3.81)$$

である。積分範囲はデルタ関数が発散する点を含めばよいが  $-\infty < x < \infty$  にしておく。

多変数の場合は積で定義する。例えば

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y), \quad \delta(x, y, z) = \delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

である。1変数と同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\mathbf{r}) = 1$$

である。(3.75)より

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z) \quad (3.82)$$

と表せる。

普通の関数  $f(x)$  に対して積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - c)$$

を考える。 $x \neq c$  のとき  $\delta(x - c) = 0$  であるから、任意の  $x$  で  $f(x)$  を  $f(c)$  に置き換えても積分は変わらない。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - c) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(c) \delta(x - c) = f(c) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - c) = f(c) \quad (3.83)$$

同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \quad (3.84)$$

これらはデルタ関数の最も基本的な性質である。

⊕ デルタ関数自体は 0 か  $\infty$  で単独では形式的なものでしかないが、デルタ関数を含む積分に実際の意味がある。デルタ関数は被積分関数の中において意味をもつ。また、以上で示した積分では、積分変数とデルタ関数の ( ) 内の変数は同じである。これが異なる場合、例えば、 $a \neq 0$  のとき

$$\delta(ax) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{であるが } a \neq 1 \text{ のとき } \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(ax) \neq 1$$

になる ((3.95) 参照)。

### 点電荷の電荷密度

デルタ関数で表せる簡単な物理量は、点電荷の電荷密度 (単位体積あたりの電荷)  $\rho(\mathbf{r})$  である。原点を中心とした半径  $a$  の球が一様に帯電しているとき、全電荷を  $q$  とすると

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{r}| > a \\ \frac{3}{4\pi a^3} q, & |\mathbf{r}| < a \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \rho(\mathbf{r}) = q$$

である。 $a \rightarrow 0$  とすると、原点以外では  $\rho(\mathbf{r}) = 0$  で原点で発散するが、原点を含む領域での積分は  $q$  である。したがって、原点に電荷  $q$  の点電荷が存在するとき、電荷密度は  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$  と表せる。数学的には非常に奇妙なデルタ関数は、物理的には自然に現れる (69 ページの撃力も参照)。

点  $\mathbf{r}_k$  に点電荷  $q_k$  が存在する場合

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_k q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$$

になる。これを (3.28) に代入すると

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k q_k \int d^3r' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \quad (3.27)$$

(3.84) より  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  の積分変数  $\mathbf{r}'$  を  $\mathbf{r}_k$  で置き換えればよい。デルタ関数を使うと連続的分布と離散的分布を統一的に扱える。

$\mathbf{r} = \mathbf{a}$  に点電荷  $q$  が存在する場合, (3.79) の第2式 (ポアソン方程式) は  $\nabla^2 U(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  であるが, (3.82) より, この微分方程式の特解は当たり前の結果  $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}$  になる。

### デルタ関数の物理的次元

$\delta(x)$  を  $x$  で積分すると無次元の 1 になるから  $dx \delta(x)$  は無次元, つまり,  $\delta(x)$  の次元は  $x$  の次元の逆である。 $x, y, z$  の次元が [長さ] の場合  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  の次元は [長さ]<sup>-3</sup> になるから,  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$  の次元は電荷密度の次元である。なお,  $\delta(x)$  の  $x$  は無次元とは限らないが,  $\sin x, \cos x, e^x$  などの  $x$  は必ず無次元である。例えば, 減衰振動  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  の場合, 左辺の各項は同じ次元であるから  $\beta$  と  $\omega_0$  の次元は共に [時間]<sup>-1</sup> になる。一般解は  $A, B$  を任意定数として

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

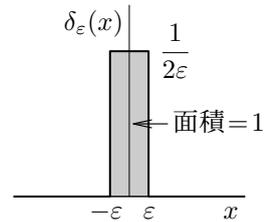
であるが,  $\beta t$  と  $\omega t$  は無次元である。

### デルタ関数の具体例

(3.82) はデルタ関数の具体例である。デルタ関数は関数の極限で表せる。

最も簡単な例は矩形関数

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & |x| < \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon \end{cases}, \quad \epsilon > 0 \quad (3.85)$$



である。 $\epsilon \rightarrow +0$  の極限では  $\delta_\epsilon(x)$  は (3.80) を満たす。

次に

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx - \epsilon|k|}, \quad \epsilon > 0$$

とする。 $k > 0$  のとき  $|k| = k$ ,  $k < 0$  のとき  $|k| = -k$  であるから

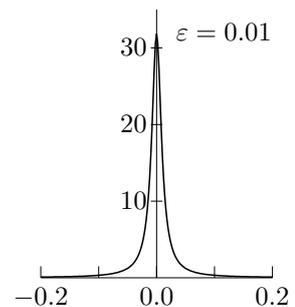
$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk e^{ikx + \epsilon k} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk e^{ikx - \epsilon k} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{ikx + \epsilon k}}{ix + \epsilon} \right]_{k=-\infty}^{k=0} + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{ikx - \epsilon k}}{ix - \epsilon} \right]_{k=0}^{k=\infty}$$

$\epsilon = 0$  ならば  $k \rightarrow \pm\infty$  のとき  $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$  は振動し積分は不定であるが,  $\epsilon > 0$  の場合  $e^{\epsilon k} \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} 0$ ,  $e^{-\epsilon k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  になるから

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{ix + \epsilon} - \frac{1}{ix - \epsilon} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (3.86)$$

右図に示したように,  $\epsilon \ll 1$  のとき  $\delta_\epsilon(x)$  は  $x = 0$  で非常に鋭いピークになり  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限では

$$\delta_\epsilon(x \neq 0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} 0, \quad \delta_\epsilon(0) = \frac{1}{\pi\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} \infty$$



である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 1$$

ただし,  $x = \varepsilon \tan \theta$ ,  $|\theta| \leq \pi/2$  と変数変換した。したがって

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} \right) = \delta(x) \quad (3.87)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx - \varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x) \quad (3.88)$$

である ((5.68) 参照)。 $\delta(x)$  は被積分関数の中で意味をもつが, この場合は (3.88) で  $\varepsilon = 0$  としても問題ない。ただし, (3.86) を求めるとき  $\varepsilon = 0$  とは置けない。

**フーリエ変換** (161 ページ) と関連して (3.88) の表現は重要であり, 多変数のデルタ関数に適用できる。3変数の場合

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikz} \right)$$

になる。 $k$  の積分はそれぞれ独立に行うから,  $k$  を  $k_x, k_y, k_z$  に変更し積分の独立性を明白にすれば

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.89)$$

になる。ただし,  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ ,  $d^3k = dk_x dk_y dk_z$  である。

**問題 3.16**  $m$  を正の定数として

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

とする。

- (3.82) より  $(\nabla^2 - m^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$  を示せ。
- 原点を中心とした半径  $a$  の球の内部  $D$  に対して

$$I = \int_D d^3r (\nabla^2 - m^2) G(\mathbf{r}) = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_D d^3r \nabla^2 G(\mathbf{r}), \quad I_2 = -m^2 \int_D d^3r G(\mathbf{r})$$

とする。1. の結果から  $I = 1$  であるが,  $I_1$  と  $I_2$  を求めて  $I = 1$  を確かめよ。 $I_1$  の積分はガウスの定理を用いて半径  $a$  の球面上の面積分に変換する。

**問題 3.17** 2次元の場合

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

は

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta(\mathbf{r}), \quad \text{ただし} \quad \delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y) \quad (3.90)$$

を満たすことを示せ。つまり

$$r \neq 0 \text{ のとき } \nabla^2 G(x, y) = 0, \quad \int_D dx dy \nabla^2 G(x, y) = 1$$

を示す。原点を含む領域  $D$  は, 原点を中心とした半径  $a$  の円の内部  $r < a$  を考えればよい。2重積分は, グリーンの定理を用いて線積分に変換する。

問題 3.18 (3.88) で積分領域を有限にした

$$\delta_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R dk e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Rx}{x}$$

を考える。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta_R(x) = f(0), \quad \therefore \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Rx}{x} = \delta(x)$$

を示せ。

問題 3.19 前問の結果より  $|x| < \pi$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = 2\pi \delta(x), \quad \text{ただし} \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

を示せ。

### デルタ関数の基本的性質

以下の等式はデルタ関数の具体形には依存しない。また、デルタ関数は 0 または  $\infty$  であるから、普通の等式としては全く無意味である。これらの等式は、両辺に任意の関数をかけ積分すると同じ結果になることを意味する。

$$1. \quad f(x) \delta(x - c) = f(c) \delta(x - c) \quad (3.91)$$

$$2. \quad \delta(x) = \delta(-x) \quad (3.92)$$

$$3. \quad x \delta(x) = 0 \quad (3.93)$$

$$4. \quad x \delta'(x) = -\delta(x) \quad (3.94)$$

$\delta'(x)$  は  $\delta(x)$  の 1 階導関数である。 $\delta(x)$  を普通の関数のように扱い微分もする。

$$5. \quad \delta(c(x - a)) = \frac{1}{|c|} \delta(x - a), \quad c \neq 0 \quad (3.95)$$

$$6. \quad \delta(x^2 - c^2) = \frac{1}{2|c|} (\delta(x - c) + \delta(x + c)), \quad c \neq 0 \quad (3.96)$$

$$7. \quad \delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n), \quad \text{ただし} \quad g(x_n) = 0, \quad g'(x_n) \neq 0 \quad (3.97)$$

$g(x)$  のすべての零点  $x_n$  について和をとる。 $g(x)$  と導関数  $g'(x)$  が同時に 0 になる  $x$  がある場合、 $\delta(g(x))$  は意味がない。(3.96) は (3.97) の具体例である。

証明 2. 以降では (3.83) を使う。そのため、積分変数と  $\delta(\quad)$  の括弧内の変数が異なる場合、変数変換して同じにする。積分区間は  $-\infty < x < \infty$  とするが、デルタ関数が発散する点を含めばよい。

1. (3.91) は (3.83) である。

2.  $t = -x$  とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(-t) \delta(t) = f(0), \quad \therefore \quad \delta(x) = \delta(-x)$$

デルタ関数は偶関数である。具体形の (3.85), (3.87), (3.88) は偶関数である。

3. (3.91) より

$$f(x)x\delta(x) = (f(x)x)_{x=0}\delta(x) = 0$$

になるから  $x\delta(x) = 0$  である。

4. 部分積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) x \delta'(x) = \left[ f(x)x\delta(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx (f(x)x)' \delta(x)$$

$\delta(\pm\infty) = 0$  であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) x \delta'(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx (f'(x)x\delta(x) + f(x)\delta(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x)$$

したがって (3.94) が成り立つ。

5.  $t = c(x - a)$  とすると  $c > 0$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(c(x - a)) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(a + t/c) \delta(t) = \frac{1}{c} f(a)$$

$c < 0$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(c(x - a)) &= \frac{1}{c} \int_{\infty}^{-\infty} dt f(a + t/c) \delta(t) = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(a + t/c) \delta(t) \\ &= -\frac{1}{c} f(a) \end{aligned}$$

まとめれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(c(x - a)) = \frac{1}{|c|} f(a) = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a)$$

であり (3.95) が成り立つ。

6.  $t = x^2 - c^2$  とすると

$$x = \begin{cases} -\sqrt{t + c^2}, & x \leq 0 \\ \sqrt{t + c^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

になるから、積分区間を  $-\infty < x \leq 0$  と  $0 \leq x < \infty$  の2つの部分に分ける必要がある。 $x = 0$  のとき  $t = -c^2$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$  のとき  $t \rightarrow \infty$  であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x^2 - c^2) &= \int_{-\infty}^0 dx f(x) \delta(x^2 - c^2) + \int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x^2 - c^2) \\ &= \int_{-c^2}^{\infty} dt \frac{f(-\sqrt{t + c^2})}{2\sqrt{t + c^2}} \delta(t) + \int_{-c^2}^{\infty} dt \frac{f(\sqrt{t + c^2})}{2\sqrt{t + c^2}} \delta(t) \end{aligned}$$

積分領域  $t \geq -c^2$  は  $\delta(t)$  の発散点  $t = 0$  を含むから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x^2 - c^2) = \frac{f(-|c|) + f(|c|)}{2|c|} = \frac{f(c) + f(-c)}{2|c|}$$

したがって (3.96) が成り立つ。

7.  $g(x) \neq 0$  のとき  $\delta(g(x)) = 0$  であるから  $g(x_n) = 0$  である  $x = x_n$  の近傍を考えればよい。 $\varepsilon$  を正の微小量として

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(g(x)) = \sum_n \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} dx f(x) \delta(g(x))$$

である。  $x = x_n$  近傍では

$$g(x) = g(x_n) + g'(x_n)(x - x_n) + \cdots = g'(x_n)(x - x_n) + \cdots$$

になるから

$$I = \sum_n \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} dx f(x) \delta(g'(x_n)(x - x_n))$$

(3.95) で  $c = g'(x_n)$  とすれば

$$I = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} dx f(x) \delta(x - x_n) = \sum_n \frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|}$$

であり (3.97) が成り立つ。

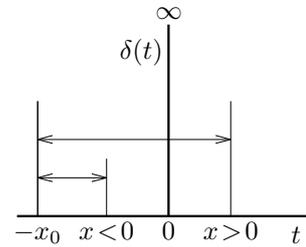
### 例題 1 階段関数

$x_0$  を正の定数として

$$\theta(x) = \int_{-x_0}^x dt \delta(t) \quad (3.98)$$

を考える。積分領域が  $\delta(t)$  の発散点  $t = 0$  を含まなければ  $\theta = 0$ , 含めば  $\theta = 1$  になるから,  $\theta(x)$  は階段関数

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.99)$$



である。(3.98) の両辺を微分すると  $\theta'(x) = \delta(x)$  になり, 階段関数の導関数はデルタ関数である。 $x = 0$  で  $\theta(x)$  は微分可能ではないが, 微分可能なように扱う。ただし  $\theta'(0) = \infty$  である。

### 例題 2 撃力

撃力は非常に短い時間間隔  $\Delta t$  だけ作用する非常に大きな力  $F$  で力積  $\int dt F(t)$  は有限である。 $\Delta t \rightarrow 0$  として, 撃力をデルタ関数で表す。 $t = t_0$  の瞬間に作用する撃力を  $f_0 \delta(t - t_0)$  とする。運動方程式を運動量  $p(t) = m dx/dt$  で表すと

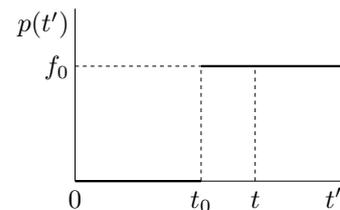
$$\frac{dp(t)}{dt} = f_0 \delta(t - t_0) \quad (3.100)$$

になる。 $\delta(t - t_0)$  の次元は [時間] $^{-1}$  であるから  $f_0$  の次元は [運動量] = [力積] である。 $t = 0$  で原点に静止していた質点に撃力が作用する場合を考え  $t_0 > 0$  とする。(3.98) より積分すると

$$p(t) = \int_0^t dt' \frac{dp(t')}{dt'} = f_0 \int_0^t dt' \delta(t' - t_0) = f_0 \int_{-t_0}^{t-t_0} dt' \delta(t') = f_0 \theta(t - t_0)$$

更に積分すると

$$mx(t) = \int_0^t dt' p(t') = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ (t - t_0)f_0, & t > t_0 \end{cases}$$



になる。質点は, 撃力が作用するまで静止しているが, 作用した瞬間に運動量  $f_0$  を得て, その後は一定速度  $f_0/m$  で運動する。 $t = t_0$  で  $p(t)$  は不連続であるが  $x(t)$  は連続である。撃力をデルタ関数で表すと, 運動方程式を正直に解いて (積分して), 当然の結果が簡単に求まる。

問題 3.20 (3.82), (3.90) の 1 次元版である

$$\frac{d^2 |x|}{dx^2} = \delta(x) \tag{3.101}$$

を示せ。

問題 3.21 (3.97) を 2 変数の場合に拡張する。

$$\delta(g_1(x_1, x_2)) \delta(g_2(x_1, x_2)) = \sum_n \frac{\delta(x_1 - p_n) \delta(x_2 - q_n)}{|J(p_n, q_n)|}, \quad J(x_1, x_2) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

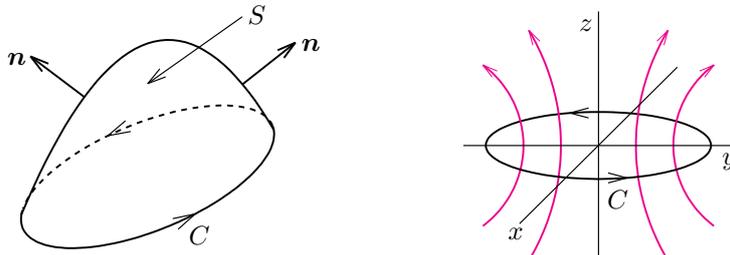
を示せ。ただし  $(p_n, q_n)$  は  $g_1(x_1, x_2) = 0$  かつ  $g_2(x_1, x_2) = 0$  の解である。

### 3.8 ストークスの定理

閉曲線に沿って 1 周する経路を  $C$  とし,  $C$  を縁とする任意の曲面を  $S$  とする (下の左図)。また,  $S$  上の点  $\mathbf{r}$  での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  とする。 $\mathbf{n}$  の向きは経路  $C$  の周回方向に右ネジを回したときネジの進む向きにとる。例えば, 右図のように  $C$  が  $xy$  平面上で反時計回りの場合,  $\mathbf{n}$  は矢印の向きで  $S$  に直交するようにとる。このときストークスの定理

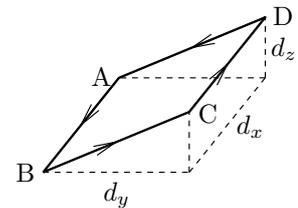
$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \tag{3.102}$$

が成り立つ。左辺の点  $\mathbf{r}$  は曲線  $C$  上の点, 右辺の点  $\mathbf{r}$  は曲面  $S$  上の点である。



証明 1  $d_x, d_y, d_z$  を微小量とすると, 下図の微小長方形の経路  $\Delta C$

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &\rightarrow B(x + d_x, y, z) \rightarrow C(x + d_x, y + d_y, z + d_z) \\ &\downarrow \\ A(x, y, z) &\leftarrow D(x, y + d_y, z + d_z) \end{aligned}$$



に沿った線積分

$$I = \oint_{\Delta C} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

を求める。ここで, 始点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と区別するため, 積分変数は  $\mathbf{r}'$  で表す。 $d_z = 0$  の場合はグリーン定理の証明で求めた。A  $\rightarrow$  B の線積分を  $I_{AB}$  などとすると

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA}$$

である。

$$\text{線分 AB 上 } \mathbf{r}' = (x + d_x t, y, z), \quad t: 0 \rightarrow 1$$

$$\text{線分 CD 上 } \mathbf{r}' = (x + d_x t, y + d_y, z + d_z), \quad t: 1 \rightarrow 0$$

と表せる。いずれの場合でも  $dr'/dt = (d_x, 0, 0)$  になるから

$$\begin{aligned} I_{AB} + I_{CD} &= d_x \int_0^1 dt A_x(x + d_x t, y, z) + d_x \int_1^0 dt A_x(x + d_x t, y + d_y, z + d_z) \\ &= -d_x \int_0^1 dt \left( A_x(x + d_x t, y + d_y, z + d_z) - A_x(x + d_x t, y, z) \right) \end{aligned}$$

になる。 $(x, y, z)$  のまわりでテイラー展開すれば

$$A_x(x + d_x t, y + d_y, z + d_z) - A_x(x + d_x t, y, z) = d_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + d_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dots$$

になるから

$$I_{AB} + I_{CD} = -d_x d_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - d_x d_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad (3.103)$$

ただし、微少量  $d_x, d_y, d_z$  の最低次のみ扱い 3 次以上は無視する。線分 BC, DA では

$$\text{線分 BC 上 } \mathbf{r}' = (x + d_x, y + d_y t, z + d_z t), \quad t: 0 \rightarrow 1$$

$$\text{線分 DA 上 } \mathbf{r}' = (x, y + d_y t, z + d_z t), \quad t: 1 \rightarrow 0$$

$dr'/dt = (0, d_y, d_z)$  より  $\mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'/dt = d_y A_y + d_z A_z$  になるから

$$I_{BC} = \int_0^1 dt \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \int_0^1 dt \left( d_y A_y(x + d_x, Y, Z) + d_z A_z(x + d_x, Y, Z) \right)$$

$$I_{DA} = \int_1^0 dt \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = - \int_0^1 dt \left( d_y A_y(x, Y, Z) + d_z A_z(x, Y, Z) \right)$$

ただし  $Y = y + d_y t, Z = z + d_z t$  である。 $(x, Y, Z)$  のまわりでテイラー展開すれば

$$A_k(x + d_x, Y, Z) - A_k(x, Y, Z) = d_x \frac{\partial}{\partial x} A_k(x, Y, Z) + \dots$$

になるから

$$I_{BC} + I_{DA} = d_x d_y \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial x} A_y(x, y + d_y t, z + d_z t) + d_x d_z \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial x} A_z(x, y + d_y t, z + d_z t)$$

である。 $d_x, d_y, d_z$  の 2 次まで考慮するから  $d_y t, d_z t$  を無視して

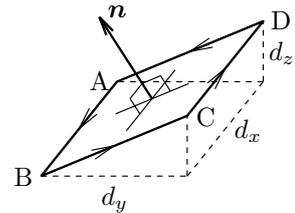
$$I_{BC} + I_{DA} = d_x d_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + d_x d_z \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

これと (3.103) より

$$I = d_x d_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + d_x d_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = d_x d_y (\nabla \times \mathbf{A})_z - d_x d_z (\nabla \times \mathbf{A})_y$$

になる。微小長方形の単位法線ベクトルで、その向きが経路  $\Delta C$  の周回方向に右ネジを回したときネジの進む方向のものを  $\mathbf{n}$  とすると、図より

$$\mathbf{n} = \frac{(0, -d_z, d_y)}{\sqrt{d_y^2 + d_z^2}}$$



微小長方形の面積  $\Delta S$  は  $\Delta S = d_x \sqrt{d_y^2 + d_z^2}$  になるから

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \Delta S = d_x d_y (\nabla \times \mathbf{A})_z - d_x d_z (\nabla \times \mathbf{A})_y = I$$

したがって

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \Delta S \quad (3.104)$$

である。 $n_x = 0$  という場合に示したが、任意の方向の  $\mathbf{n}$  について (3.104) は成り立つ。

曲面  $S$  を面積が  $\Delta S_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) の  $N$  個の微小長方形に分割する。 $\Delta S_k$  の微小長方形を  $C$  と同じ方向に 1 周する経路を  $\Delta C_k$  とする。 $\Delta S_k$  に垂直で、 $\Delta C_k$  の周回方向に右ネジを回したときネジが進む方向の単位ベクトルを  $\mathbf{n}_k$  とすると (3.104) より

$$\sum_{k=1}^N \oint_{\Delta C_k} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^N \Delta S_k \mathbf{n}_k \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k}$$

50 ページの平面でのグリーンの定理の証明と同様に、隣り合う長方形で共通する辺の線積分は打ち消しあうから、左辺では最も外側の閉曲線  $C$  に沿う線積分だけ残る。したがって  $N \rightarrow \infty$  とするとストークスの定理が成り立つ。 ■

**証明 2** 簡単のため表記法 (2.3) を用いる。曲面  $S$  が  $z = f(x, y)$  で表されるとき、(3.64) より

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \frac{1}{J} (-\partial_x f \mathbf{e}_x - \partial_y f \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z), \quad J = |\mathbf{J}| = \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}$$

であるから

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \frac{B}{J}$$

ただし

$$\begin{aligned} B &= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{J} = -(\partial_y A_z - \partial_z A_y) \partial_x f - (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \partial_y f + \partial_x A_y - \partial_y A_x \\ &= (\partial_x A_y + (\partial_z A_y) \partial_x f) - (\partial_y A_x + (\partial_z A_x) \partial_y f) \\ &\quad + (\partial_x A_z + (\partial_z A_z) \partial_x f) \partial_y f - (\partial_y A_z + (\partial_z A_z) \partial_y f) \partial_x f \end{aligned}$$

曲面  $S$  上では  $z = f(x, y)$  であるから

$$F_k(x, y) = A_k(x, y, f(x, y))$$

とする。偏微分の定義に戻れば

$$\begin{aligned} \partial_x F_k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_k(x+h, y, f(x+h, y)) - A_k(x, y, f(x, y))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_k(x+h, y, f(x, y) + h \partial_x f) - A_k(x, y, f(x, y))}{h} \\ &= \partial_x A_k + (\partial_z A_k) \partial_x f \end{aligned}$$

になるから

$$B = \partial_x F_y - \partial_y F_x + (\partial_x F_z) \partial_y f - (\partial_y F_z) \partial_x f = \partial_x (F_y + F_z \partial_y f) - \partial_y (F_x + F_z \partial_x f)$$

したがって

$$I \equiv \int_S dS (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \int_S dS \frac{1}{J} \left[ \partial_x (F_y + F_z \partial_y f) - \partial_y (F_x + F_z \partial_x f) \right]$$

曲面  $S$  を  $xy$  平面に射影した領域を  $D$  とし (3.65) を用いると

$$I = \int_D dx dy \left[ \partial_x (F_y + F_z \partial_y f) - \partial_y (F_x + F_z \partial_x f) \right]$$

になる。更に、 $C'$  を  $xy$  平面上の領域  $D$  を囲む縁とすると、グリーンの定理から

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C'} \left[ (F_x + F_z \partial_x f) dx + (F_y + F_z \partial_y f) dy \right] \\ &= \oint_{C'} \left[ F_x dx + F_y dy + F_z (\partial_x f dx + \partial_y f dy) \right] \end{aligned}$$

になる。 $(x, y)$  が  $C'$  上の点であるとき、 $(x, y, f(x, y))$  は  $C$  上の点になる。したがって、 $F_k(x, y) = A_k(x, y, f(x, y))$  は  $C$  上の点  $(x, y, z)$  での  $A_k(x, y, z)$  である。また、曲線  $C$  上では  $z = f(x, y)$  より  $dz = \partial_x f dx + \partial_y f dy$  であるから

$$\int_S dS (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \oint_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

になる。 ■

**例題** 半径  $a$  の半球面 ( $z \geq 0$ )  $S_1$  と  $xy$  平面の作る円を反時計回りに一周する経路を  $C$  とする。

$$\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{e}_x - yz^2\mathbf{e}_y - y^2z\mathbf{e}_z$$

のとき、ストークスの定理が成り立つことを確かめる。

$$I_C = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad I_{S_1} = \int_{S_1} dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

とする。 $C$  上の点は  $z = 0$  であり  $A_y = A_z = 0$  になるから

$$I_C = \oint_C A_x dx = \oint_C (2x - y) dx$$

これは  $x$  についての積分ではない。 $C$  上の点であるから、 $x$  が変化すれば  $y$  も変化する。

$$x = a \cos \phi, \quad y = a \sin \phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.105)$$

とおけるから

$$I_C = \int_0^{2\pi} (2a \cos \phi - a \sin \phi) \frac{dx}{d\phi} d\phi = a^2 \int_0^{2\pi} (\sin \phi - 2 \cos \phi) \sin \phi d\phi = \pi a^2$$

である。 $A_x = 2x - y$ ,  $A_y = -yz^2$ ,  $A_z = -y^2z$  のとき  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_z$  になる。70 ページの矢印の向きより半球面  $S_1$  では  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/a$  になるから

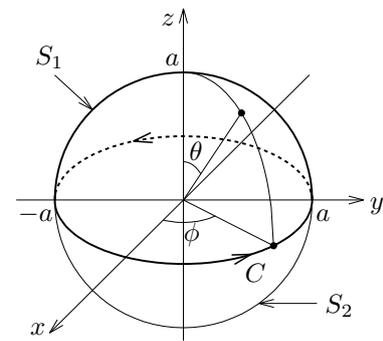
$$I_{S_1} = \int_{S_1} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \int_{S_1} dS \frac{z}{a} \quad (3.106)$$

3 次元極座標で表すと  $z \geq 0$  の半球面上の点は

$$z = a \cos \theta, \quad dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.107)$$

になるから

$$I_{S_1} = a^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \cos \theta = \pi a^2 = I_C$$



でありストークスの定理が成り立つ。

ストークスの定理で  $S$  は  $C$  を縁とする任意の曲面である。 $S_1$  の代わりに  $z \leq 0$  の半球面  $S_2$  の場合、70 ページの矢印の向きより  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/a$  ではなく  $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/a$  になるから

$$I_{S_2} = \int_{S_2} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = - \int_{S_2} dS \frac{z}{a} \quad (3.108)$$

(3.106) と符号が逆になるが、(3.107) で  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  になるから  $I_{S_2} = \pi a^2 = I_{S_1}$  である。

$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  とすると  $S_1$  上の点は  $z = f(x, y)$ ,  $S_2$  上の点は  $z = -f(x, y)$  と表せる。(3.106), (3.108) に対して (3.65) を適用する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

であるから

$$\sqrt{1 + (\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2} = \frac{a}{f(x, y)}$$

$S_1, S_2$  を  $xy$  平面上に射影した領域は半径  $a$  の円の内部  $D$  である。(3.65) より

$$I_{S_1} = \int_D dx dy \frac{z}{a} \frac{a}{f(x, y)} = \int_D dx dy \frac{f(x, y)}{a} \frac{a}{f(x, y)} = \int_D dx dy = \pi a^2$$

$$I_{S_2} = - \int_D dx dy \frac{z}{a} \frac{a}{f(x, y)} = - \int_D dx dy \frac{-f(x, y)}{a} \frac{a}{f(x, y)} = \pi a^2$$

になる。

### ストークスの定理と幾つかの性質

- $S$  として  $xy$  平面上の領域  $D$  を考える。 $dS = dx dy, dz = 0$  である。 $D$  を囲む経路を反時計方向に一周する場合  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  であるから  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y$  になる。ストークスの定理より

$$\oint_C (A_x dx + A_y dy) = \int_D dx dy \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

これは平面でのグリーンの定理 (3.43) である。

- ガウスの定理 (3.68) の  $\mathbf{n}$  とストークスの定理 (3.102) の  $\mathbf{n}$  は、曲面上の単位法線ベクトルであるが、互いに逆向きになることがある。ここではガウスの定理の  $\mathbf{n}$  を  $\mathbf{n}_{\text{out}}$  で表して区別する。 $\mathbf{n}_{\text{out}}$  は閉曲面上の外向き単位法線ベクトルである。閉曲面  $S$  に対して

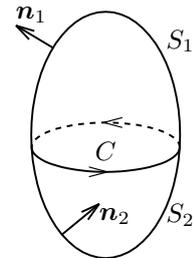
$$I_S = \int_S dS \mathbf{n}_{\text{out}}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

とするとき、ガウスの定理を使えば、恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  より  $I_S = 0$  になるが、これをストークスの定理を用いて示す。閉曲面  $S$  上の閉曲線の経路  $C$  で  $S$  を 2 つに分割する。例えば、図の  $C$  より上の部分の曲面を  $S_1$ , 下の部分を  $S_2$  とする。ストークスの定理の  $\mathbf{n}$  を  $S_1$  では  $\mathbf{n}_1$ ,  $S_2$  では  $\mathbf{n}_2$  とすれば

$$\int_{S_1} dS \mathbf{n}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \int_{S_2} dS \mathbf{n}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

である。70 ページの矢印の向きより  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{\text{out}}, \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_{\text{out}}$  になるから

$$I_S = \int_{S_1} dS \mathbf{n}_{\text{out}} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \int_{S_2} dS \mathbf{n}_{\text{out}} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$



である。

- $\mathbf{a}$  を任意の定ベクトルとする。ストークスの定理で  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{a}$  とすると

$$\oint_C f(\mathbf{r}) \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times (f(\mathbf{r})\mathbf{a})) = \int_S dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot ((\nabla f) \times \mathbf{a})$$

一般に  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  になるから

$$\oint_C f(\mathbf{r}) \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dS \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \times (\nabla f)), \quad \therefore \quad \mathbf{a} \cdot \left( \oint_C f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_S dS \mathbf{n} \times (\nabla f) \right) = 0$$

$\mathbf{a}$  は任意であるから、ベクトルの関係式として

$$\oint_C f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_S dS \mathbf{n} \times (\nabla f), \quad \text{成分で表せば} \quad \oint_C f(\mathbf{r}) dx_k = \int_S dS (\mathbf{n} \times (\nabla f))_k \quad (3.109)$$

が成り立つ。ただし、 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  である。

- 線積分が途中の経路に依存しない  $\iff$  恒等的に  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$

始点 P と終点 Q を結ぶ任意の 2 つの経路  $C_1, C_2$  を考え

$$I_1 = \int_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad I_2 = \int_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

とする。閉曲線  $C_1 - C_2$  で囲まれた領域を  $S$  とすると、ストークスの定理より

$$I_1 - I_2 = \oint_{C_1 - C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S dS \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

である。恒等的に  $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  ならば、任意の  $C_1, C_2$  に対して  $I_1 = I_2$  になるから、線積分は途中の経路に依存しない。逆に

$$\text{線積分が途中の経路に依存しない} \implies \text{恒等的に} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.110)$$

あるいは、この否定

ある点  $\mathbf{a}$  で  $\mathbf{B}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0} \implies$  線積分は途中の経路に依存する

を示す。 $\mathbf{a}$  の近傍の平面上の微小経路を  $\Delta C$  とすると、ストークスの定理、あるいは (3.104) より

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{B}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{a}) \Delta S$$

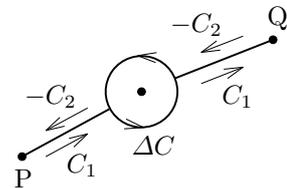
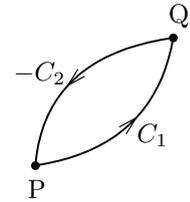
である。 $\mathbf{n}(\mathbf{a})$  は  $\Delta C$  を含む平面に直交するが、この平面の向きを適当にとれば  $\mathbf{B}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{a}) \neq 0$  にできる。右図の  $P \xrightarrow{C_1} Q \xrightarrow{-C_2} P$  の線積分では、逆向きの線積分は打ち消し合うから

$$\oint_{C_1 - C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Delta C} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \therefore \quad I_1 - I_2 = \mathbf{B}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{a}) \Delta S \neq 0$$

になり、線積分は途中の経路に依存する。したがって、(3.110) が成り立ち

$$\text{線積分が途中の経路に依存しない} \iff \text{恒等的に} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

である。恒等式  $\nabla \times (\nabla U(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$  より  $\nabla U(\mathbf{r})$  の線積分は途中の経路に依存しない。これは (3.39) で示した。



- $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r}) \iff$  恒等的に  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

$\mathbf{A} = \nabla U$  ならば恒等的に  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  であるが、この逆を示す。恒等的に  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  のとき線積分は始点と終点だけに依存する。始点  $\mathbf{r}_0$  を固定し終点  $\mathbf{r}$  を動かすことにすれば、線積分は  $\mathbf{r}$  の関数

$$U(\mathbf{r}) = \int_{(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \text{始点 } \mathbf{r}_1 \text{ と終点 } \mathbf{r}_2 \text{ を結ぶ経路}$$

である。線積分は途中の経路に依存しないから

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$$

に分割できる。これから

$$U(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = \int_{(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \xrightarrow{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}$$

$\Delta y = \Delta z = 0$  とすれば

$$A_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

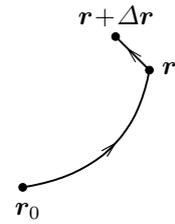
他の成分も同様にして、恒等的に  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  のとき  $\mathbf{A} = \nabla U$  と表せる。

**問題 3.22** ストークスの定理を用いて

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) (\nabla G(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{r} = \int_S ((\nabla F) \times (\nabla G)) \cdot \mathbf{n} dS, \quad \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \times \nabla F dS$$

を示せ。2番目では  $\mathbf{B}$  を定数ベクトルとして  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}F(\mathbf{r})$  を考える。

**問題 3.23** 73 ページの例題と同じ  $S_1, C$  に対して (3.109) が成り立つことを左辺と右辺を具体的に計算して示せ。



## 4 常微分方程式

1変数  $x$  の未知の関数  $y(x)$  について,  $x, y(x)$  と導関数  $y'(x), y''(x), \dots$  を含む方程式を**常微分方程式**という。微分方程式を満たす未知関数  $y(x)$  を求めることを微分方程式を解くといい, 求めた関数を解という。常微分方程式に含まれる導関数の最高階数を微分方程式の階数という。

### 4.1 1階常微分方程式

導関数として  $y'(x)$  だけを含む常微分方程式の代表的な解法を考える。

#### 変数分離型

$x$  だけの関数  $X(x)$  と  $y$  だけの関数  $Y(y)$  の積で表される微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$$

を変数分離型という。 $Y(y) \neq 0$  とすると上の方程式は

$$\frac{dy}{Y(y)} = X(x) dx$$

になる。これを積分すれば

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x) dx + C$$

である。ここで  $C$  は任意定数である。左辺は  $y$  だけの関数で, 右辺は  $x$  だけの関数になる。この方程式を  $y$  について解けば  $y = y(x)$  が求まる。 $Y(y_0) = 0$  となる定数  $y_0$  が存在するならば  $y(x) = y_0$  も解である。

$y$  は任意定数を1つだけ含む。変数分離型に限らず, 一般に, 1階常微分方程式の解で1つの任意定数  $C$  を含む解を**一般解**という。一般解は微分方程式の解全体を表し,  $C$  の値の取り方で無数の解  $y(x)$  が存在する。 $C$  を特定の値にした解を**特別解**あるいは**特解**という。物理の問題では, 与えられた**初期条件**あるいは**境界条件**を満たすように任意定数を決めることが多い。1階常微分方程式の場合, 例えば,  $x = x_0$  のとき  $y = y_0$  となるように  $C$  を決める。

#### 例題

$$\frac{dy}{dx} = x(y-1), \quad \text{つまり} \quad \int \frac{dy}{y-1} = \int x dx + C \quad (4.1)$$

両辺の積分は  $C_1, C_2$  を積分定数とすると

$$\int \frac{dy}{y-1} = \log|y-1| + C_1, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2$$

したがって

$$\log|y-1| = \frac{x^2}{2} + C + C_2 - C_1$$

$C + C_2 - C_1$  全体が任意定数であるから, これを  $D$  とすると

$$|y-1| = e^{x^2/2+D}, \quad \therefore y = 1 \pm e^D e^{x^2/2}$$

$e^D > 0$  であるが  $\pm e^D$  は0でない任意定数であるから  $A$  とおくと

$$y = 1 + Ae^{x^2/2}, \quad A = \text{任意定数}$$

になる。  $A = 0$  の場合  $y = 1$  になるが、これも (4.1) の解になるから  $A \neq 0$  の条件は不要である。  
 $x = 0$  のとき  $y = 0$  となる特解は  $y = 1 - e^{x^2/2}$  である。

次に

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \text{つまり} \quad \int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x dx + C$$

の場合

$$-\frac{1}{y} + C_1 = x^2 + C_2 + C, \quad \therefore y = -\frac{1}{x^2 + D}, \quad D = \text{任意定数}$$

である。

### 同次型

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(y/x)$$

を同次型という。  $u = y/x$  とすると

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \quad \therefore \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

これは変数分離型である。

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C = \log |x| + C$$

これから  $u = u(x)$  が求まれば  $y = xu(x)$  が解になる。

### 例題

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1 + u^2}{u}$$

の場合  $f(u) - u = 1/u$  になるから

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C_1$$

したがって  $C$  を任意定数として

$$u^2 = 2(\log |x| + C), \quad \therefore y^2 = 2x^2(\log |x| + C)$$

**問題 4.1** (2.31) を  $u = y/x$  の方程式に書き換え (2.32) を求めよ。

### 線形微分方程式

一般に  $y(x)$  と導関数を高々 1 次の項だけ含む微分方程式

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x)$$

を  $n$  階線形微分方程式という。  $q(x) = 0$  ならば同次,  $q(x) \neq 0$  ならば非同次という。ここでは  $n = 1$  である

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{4.2}$$

の解を求める。まず,  $q(x) = 0$  である同次方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{4.3}$$

は変数分離型であるから

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x) dx = C, \quad \therefore \log |y| + P(x) = C$$

ただし

$$P(x) = \int p(x) dx$$

である。したがって

$$y = \pm e^C e^{-P(x)} = D e^{-P(x)}, \quad D = \text{任意定数} \quad (4.4)$$

が同次方程式の一般解である。

(4.2) の特解を  $Y(x)$  とし、同次方程式の一般解を  $y_0 = D e^{-P(x)}$  とすると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (Y(x) + y_0(x)) + p(x) (Y(x) + y_0(x)) - q(x) \\ &= \underbrace{\frac{dY}{dx} + p(x)Y - q(x)}_0 + \underbrace{\frac{dy_0}{dx} + p(x)y_0}_0 = 0 \end{aligned}$$

になるから

$$y = Y(x) + y_0(x) = Y(x) + D e^{-P(x)}$$

も非同次方程式の解であり、任意定数  $D$  を含むから一般解である。非同次方程式の1つの特解  $Y(x)$  が求めれば、一般解が得られる。

$Y(x)$  を求めるには**定数変化法**や、 $q(x)$  の関数形に応じた解の形を予想しこれに含まれる係数を決める**未定係数法**などがある。定数変化法では同次方程式の一般解の任意定数  $D$  を  $x$  の関数  $D(x)$  と見なし

$$y(x) = D(x) e^{-P(x)}$$

とする。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dD}{dx} e^{-P(x)} + D(x) \frac{d}{dx} e^{-P(x)} = \frac{dD}{dx} e^{-P(x)} - \frac{dP}{dx} D e^{-P(x)} = \frac{dD}{dx} e^{-P(x)} - p(x)y$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y - q(x) = \frac{dD}{dx} e^{-P(x)} - q(x) = 0, \quad \text{つまり} \quad \frac{dD}{dx} = q(x) e^{P(x)}$$

ならば  $y(x) = D(x) e^{-P(x)}$  は (4.2) の解である。積分すれば

$$D(x) = \int dx q(x) e^{P(x)} + C$$

になるから

$$y(x) = e^{-P(x)} \int dx q(x) e^{P(x)} + C e^{-P(x)}, \quad P(x) = \int p(x) dx \quad (4.5)$$

が (4.2) の一般解である。右辺第1項が特解  $Y(x)$  である。

**例題**

$$\frac{dy}{dx} + y = 2 \sin x$$

の場合、 $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 2 \sin x$  であるから

$$P(x) = \int dx = x + C_1$$

したがって

$$y = 2e^{-x} \int dx e^x \sin x + C' e^{-x}, \quad C' = C e^{-C_1}$$

部分積分をすれば

$$\int dx e^x \sin x = \int dx (e^x)' \sin x = e^x \sin x - \int dx e^x \cos x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int dx e^x \sin x$$

これから

$$\int dx e^x \sin x = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C_2$$

である。一般解は

$$y = \sin x - \cos x + D e^{-x}, \quad D = C' + 2C_2 = \text{任意定数}$$

になる。

$q(x)$  は三角関数であるから特解を  $Y(x) = a \sin x + b \cos x$  としてみると

$$\frac{dY}{dx} + Y = (a - b) \sin x + (a + b) \cos x$$

であるから  $a - b = 2$ ,  $a + b = 0$ , つまり  $a = 1$ ,  $b = -1$  とすればよい。これが未定係数法である。定数変化法は機械的に積分すれば一般解が求まるが計算が面倒になる。一方、未定係数法は予想が当たれば楽であるが、予想が当たるとは限らない。

### 完全微分型

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0, \quad \text{あるいは} \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

において

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4.6}$$

が成り立つとき完全微分型という。52 ページで示したように、上の条件が成り立つとき

$$dU = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \text{つまり} \quad P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

である  $U(x, y)$  が存在するから、微分方程式は  $dU(x, y) = 0$  になる。したがって、一般解は  $D$  を任意定数として

$$U(x, y) = D$$

である。この方程式を  $y$  について解けばよい。

$U(x, y)$  は (3.48) で与えられる。ある固定した点  $(x_0, y_0)$  と  $(x, y)$  を結ぶ積分路  $C$  として、 $x$  軸に沿って  $(x_0, y_0)$  から  $(x, y_0)$  に進み、次に  $y$  軸に沿って  $(x, y_0)$  に進む経路を採用すれば

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x dx' P(x', y_0) + \int_{y_0}^y dy' Q(x, y') \tag{4.7}$$

になる。あるいは  $Q = \partial U / \partial y$  を積分すれば

$$U(x, y) = \int_{y_0}^y dy' Q(x, y') + G(x)$$

積分定数  $G$  は  $y$  について定数であればよいから,  $x$  の関数である。この両辺を  $x$  で微分すると

$$P(x, y) = \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} + \frac{dG}{dx} = \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial P(x, y')}{\partial y'} + \frac{dG}{dx} = P(x, y) - P(x, y_0) + \frac{dG}{dx}$$

これから

$$\frac{dG}{dx} = P(x, y_0), \quad \therefore G(x) = \int_{x_0}^x dx P(x, y_0) + \text{定数}$$

定数 = 0 とすれば (4.7) が求まる。(4.7) を  $x, y$  で微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y dy' Q(x, y') = Q(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} \\ &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial P(x, y')}{\partial y'} = P(x, y_0) + [P(x, y')]_{y'=y_0}^{y'=y} = P(x, y) \end{aligned}$$

である。 $U(x, y)$  は適当にとった点  $(x_0, y_0)$  にも依存するが

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = -P(x_0, y_0), \quad \frac{\partial U}{\partial y_0} = -Q(x_0, y_0)$$

であり  $U(x_0, y_0) = 0$  であるから  $U(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$  と表せる。 $f(x_0, y_0)$  を任意定数に含めれば  $f(x, y) = D$  が微分方程式の一般解になる。

**例題**

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xe^y + 1}{x^2e^y + 2y} = 0$$

$P(x, y) = 2xe^y + 1, Q(x, y) = x^2e^y + 2y$  とすれば

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y$$

になるから (4.6) を満たす。(4.7) より

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x dx' (2x'e^{y_0} + 1) + \int_{y_0}^y dy' (x^2e^{y'} + 2y') \\ &= (x^2 - x_0^2)e^{y_0} + x - x_0 + x^2(e^y - e^{y_0}) + y^2 - y_0^2 \\ &= x^2e^y + x + y^2 - (x_0^2e^{y_0} + x_0 + y_0^2) \end{aligned}$$

したがって  $x^2e^y + x + y^2 = D$  が一般解である。

**ベルヌーイ微分方程式**

非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

は  $z(x) = y^{1-n}$  とすると

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n} (-ay + by^n)$$

より

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

これは1階の線形微分方程式 (4.2) である。

#### リッカチ微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$$

これも非線形微分方程式である。この方程式の一般的解法は存在しない。しかし、特解が1つ分かると一般解が求まる。特解が  $y_1(x)$  で与えられるとき

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

とすると

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} + a \left( y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 + b \left( y_1 + \frac{1}{z} \right) + c = -\frac{1}{z^2} \left( \frac{dz}{dx} - (2ay_1 + b)z - a \right) = 0$$

したがって

$$\frac{dz}{dx} - (2ay_1 + b)z = a$$

これは1階の線形微分方程式 (4.2) であるから一般解は求まる。

## 4.2 2階線形微分方程式

未知関数  $y(x)$  と導関数  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  について線形 (1次) の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (4.8)$$

を2階線形微分方程式という。これに付随する同次方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (4.9)$$

である。1階線形微分方程式と同様に、(4.8) の特解を  $Y(x)$  とし (4.9) の一般解を  $y_0(x)$  とすると、(4.8) の一般解  $y(x)$  は

$$y(x) = Y(x) + y_0(x)$$

で与えられる。

ここで、同次方程式の性質を調べる。 $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  が同次方程式 (4.9) の解であるとき、 $C_1, C_2$  を定数とすると

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right) (C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) \\ &= C_1 \left( \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right) y_1(x) + C_2 \left( \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right) y_2(x) = 0 \end{aligned}$$

になるから  $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  も (4.9) の解である。つまり、解の線形結合 (1次結合) もまた解である。これを**重ね合わせの原理**という。重ね合わせの原理は線形で、かつ同次である微分方程式の重要な性質である。 $y^2$  などを含む非線形微分方程式や  $f(x) \neq 0$  である非同次方程式 (4.8) の場合、重ね合わせの原理は成り立たない。

一般に、2つの関数  $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  に対して恒等的に

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$$

が成り立つのは  $C_1 = 0$  かつ  $C_2 = 0$  に限るとき,  $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  は **1次独立**であるという。1次独立でないとき **1次従属**という。1次従属とは  $y_1(x) = C y_2(x)$  あるいは  $y_2(x) = C y_1(x)$  の場合である。

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

を **ロンスキー行列式**または**ロンスキャン**という。恒等的に  $W(x) = 0$  のとき  $y_1'/y_1 = y_2'/y_2$  であるから積分すると

$$\log |y_1| = \log |y_2| + \text{定数}, \quad \therefore y_1(x) = C y_2(x)$$

であり1次従属になる。逆に, 1次従属ならば  $W(x) \equiv 0$  になることは明らかである。

$$1\text{次従属} \iff \text{恒等的に } W(x) = 0, \quad \therefore 1\text{次独立} \iff \text{恒等的に } W(x) \neq 0$$

である。

$y_1(x)$  と  $y_2(x)$  が同次方程式 (4.9) の解

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

であるとき, 第1式に  $y_2$  をかけ第2式に  $y_1$  をかけて差をとれば

$$y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + p(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0, \quad \therefore \frac{dW}{dx} + p(x)W(x) = 0$$

したがって

$$W(x) = C \exp\left(-\int p(x) dx\right)$$

になる。 $W(x)$  は決して0にならないか ( $C \neq 0$ ), または恒等的に0である ( $C = 0$ )。

初期条件  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$  を満たす (4.9) の解が2つ  $y_1(x), y_2(x)$  あるとする。 $W(x_0) = 0$  であるから  $W(x)$  は恒等的に0になり,  $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  は1次従属である。したがって  $y_1(x) = C y_2(x)$  とおける。 $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$  であるから  $C = 1$  になり  $y_1(x) = y_2(x)$  である。初期条件を与えると (4.9) の解は一意に決まる。

(4.9) の解  $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  が1次独立ならば, (4.9) の一般解  $y(x)$  は  $C_1, C_2$  を任意定数として

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

と表せる。別の表現をすれば, 初期条件と解の一意性より, 任意の初期条件  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$  を満たすように  $C_1, C_2$  を決められる。

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'$$

第1式に  $y_2'$  をかけ第2式に  $y_2$  をかけて差をとれば

$$W(x_0) C_1 = y_0 y_2'(x_0) - y_0' y_2(x_0)$$

$W(x_0) \neq 0$  であるから

$$C_1 = \frac{y_0 y_2'(x_0) - y_0' y_2(x_0)}{W(x_0)}, \quad \text{同様に} \quad C_2 = -\frac{y_0 y_1'(x_0) - y_0' y_1(x_0)}{W(x_0)}$$

である。1次独立である2つの解  $y_1(x), y_2(x)$  を**基本解**という。同次線形微分方程式 (4.9) の全ての解は基本解の線形結合  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  で表せる。

1階の同次線形微分方程式の一般解は(4.4)で与えられる。また、2階の同次線形微分方程式で  $p(x)$  と  $q(x)$  が定数ならば、次節で示すように基本解  $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  は簡単に得られる。しかし、 $p(x)$  または  $q(x)$  が  $x$  に依存する場合、基本解は簡単には求まらない。

(4.9) の解  $y_1(x)$  が分かっているとき、これと 1 次独立な解  $y_2(x)$  は次のようにすれば求まる。 $y_2(x) = v(x)y_1(x)$  とすると

$$y_2' = v'y_1 + vy_1', \quad y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

であるから

$$\begin{aligned} y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= v(x)(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + (2y_1' + p(x)y_1)v' + y_1v'' \\ &= (2y_1' + p(x)y_1)v' + y_1v'' = 0 \end{aligned}$$

つまり

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)v' = 0$$

これは  $v'$  についての 1 階線形微分方程式であるから (4.4) より

$$v' = \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}, \quad \therefore v(x) = \int dx \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}, \quad \text{ただし } P(x) = \int p(x) dx \quad (4.10)$$

とすればよい。ロンスキアンは

$$W(x) = y_1(v'y_1 + vy_1') - y_1'vy_1 = y_1^2v' = e^{-P(x)} \neq 0$$

である。

非同次方程式 (4.8) の特解  $Y(x)$  は、1 階の場合と同様に、定数変化法を用いれば求められる。

$$Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

とする。これを (4.8) に代入すれば 1 つの条件が求まるが、これだけでは 2 つの関数  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  は決まらない。そこで付加条件として

$$y_1C_1' + y_2C_2' = 0$$

を課すことにすると

$$Y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

$$Y'' = C_1y_1'' + C_1'y_1' + C_2y_2'' + C_2'y_2'$$

である。これから

$$Y'' + pY' + qY = C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ ,  $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$  であるから

$$y_1'C_1' + y_2'C_2' = f(x)$$

これと付加条件から

$$C_1' = -\frac{y_2f}{W}, \quad C_2' = \frac{y_1f}{W}, \quad \text{ただし } W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$$

したがって

$$Y(x) = -y_1(x) \int dx \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} + y_2(x) \int dx \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

になる。定積分で表して

$$Y(x) = \int_{x_0}^x dx' \frac{f(x')}{W(x')} (y_2(x)y_1(x') - y_1(x)y_2(x')) \quad (4.11)$$

でもよい。

**問題 4.2** (4.11) の  $Y(x)$  は

$$Y(x) = y_2(x)F_1(x) - y_1(x)F_2(x), \quad \text{ただし} \quad F_k(x) = \int_{x_0}^x dx \frac{y_k(x')f(x')}{W(x')}, \quad k = 1, 2$$

と表せる。 $F_k(x)$  の微分は

$$F_k' = \frac{y_k f}{W}, \quad F_k'' = y_k' \frac{f}{W} + y_k \left( \frac{f}{W} \right)'$$

になる。これから

$$Y''(x) + p(x)Y'(x) + q(x)Y(x) = f(x)$$

を示せ。

### 4.3 定数係数の 2 階線形微分方程式

定数係数の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by(x) = f(x) \quad (4.12)$$

は解くのが簡単であり、物理においては頻繁に現れるため重要である。

**同次方程式**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by(x) = 0 \quad (4.13)$$

の解を求める。 $y = e^{\lambda x}$  としてこの方程式に代入すると

$$(\lambda^2 + 2a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

になるから  $\lambda$  が 2 次方程式

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0 \quad (4.14)$$

の解ならば  $e^{\lambda x}$  は (4.13) の解になる。(4.14) を**特性方程式**という。

$a^2 - b \neq 0$  の場合、特性方程式の解

$$\lambda_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

は  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  である。このとき、ロンスキヤンは

$$e^{\lambda_+ x} (e^{\lambda_- x})' - (e^{\lambda_+ x})' e^{\lambda_- x} = (\lambda_- - \lambda_+) e^{(\lambda_+ + \lambda_-)x} \neq 0$$

であるから、 $e^{\lambda_+x}$  と  $e^{\lambda_-x}$  は 1 次独立である。したがって、(4.13) の一般解は  $C_{\pm}$  を任意定数として

$$y(x) = C_+e^{\lambda_+x} + C_-e^{\lambda_-x}$$

になる。

$a, b$  を実数とすると  $a^2 - b > 0$  ならば  $\lambda_{\pm}$  は実数である。 $a^2 - b < 0$  の場合、 $\lambda_{\pm}$  は複素数になる。

$$k = \sqrt{b - a^2}$$

とすると  $\lambda_{\pm} = -a \pm ik$  になるから

$$y(x) = e^{-ax} (C_+e^{ikx} + C_-e^{-ikx}) \quad (4.15)$$

物理の問題としては  $y(x)$  が実数の場合がある。 $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$  を代入すれば

$$y(x) = e^{-ax} (A \cos kx + B \sin kx) \quad (4.16)$$

ここで  $A = C_+ + C_-$ ,  $B = i(C_+ - C_-)$  とおいた。(4.15) と (4.16) は一般解の異なる表現であり数学的には同等である。

$a^2 - b = 0$  の場合、 $\lambda_{\pm} = -a$  になり特性方程式から求まる解は  $y_1 = e^{-ax}$  の 1 つだけである。もう一つの基本解は (4.10) を求めたのと同様にすればよい。 $y_2(x) = v(x)e^{-ax}$  とすると

$$y_2'' + 2ay_2' + a^2y_2 = v''e^{-ax} = 0, \quad \therefore v(x) = C_1x + C_2$$

$y_1$  と 1 次独立な解は  $xe^{-ax}$  になる。したがって、一般解は

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{-ax} \quad (4.17)$$

である。 $v(x)$  は既に任意定数を 2 つ含むから  $v(x)e^{-ax}$  を一般解とすればよい。

(4.13) は特性方程式の解を用いれば

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_+\right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_-\right) y = 0 \quad (4.18)$$

と因数分解できる。そこで

$$z = \frac{dy}{dx} - \lambda_-y$$

とすると

$$\frac{dz}{dx} - \lambda_+z = 0, \quad \therefore z = C_1e^{\lambda_+x}$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} - \lambda_-y = C_1e^{\lambda_+x}$$

という 1 階の非同次方程式になる。1 階の非同次方程式の一般解 (4.5) において、 $p(x) = -\lambda_-$ ,  $q(x) = C_1e^{\lambda_+x}$  とすれば

$$y = C_1e^{\lambda_-x} \int dx e^{(\lambda_+ - \lambda_-)x} + C_2e^{\lambda_-x}$$

$\lambda_+ \neq \lambda_-$  の場合

$$y = \frac{C_1}{\lambda_+ - \lambda_-} e^{\lambda_-x} \left( e^{(\lambda_+ - \lambda_-)x} + C_3 \right) + C_2e^{\lambda_-x} = D_1e^{\lambda_+x} + D_2e^{\lambda_-x}$$

$\lambda_+ = \lambda_- = -a$  の場合

$$y = C_1 e^{\lambda_- x} \int dx + C_2 e^{\lambda_- x} = (C_1(x + C_3) + C_2) e^{-ax} = (C_1 x + D_1) e^{-ax}$$

になる。

### 非同次方程式の特解

非同次方程式 (4.12) の特解  $Y(x)$  は (4.11) で与えられる。 $a^2 - b \neq 0$  の場合、同次方程式の基本解は  $y_1 = e^{\lambda_+ x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_- x}$  であるから

$$Y(x) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \int_{x_0}^x dx' f(x') (e^{\lambda_+(x-x')} - e^{\lambda_-(x-x')}) \quad (4.19)$$

になる。 $a^2 - b = 0$  の場合、基本解として  $y_1 = e^{-ax}$ ,  $y_2 = x e^{-ax}$  を (4.11) に代入すればよい。あるいは、(4.19) で  $\lambda_+ \rightarrow \lambda_- = -a$  の極限を考えれば

$$Y(x) = \int_{x_0}^x dx' f(x') \left. \frac{de^{\lambda(x-x')}}{d\lambda} \right|_{\lambda=-a} = \int_{x_0}^x dx' f(x') (x-x') e^{-a(x-x')} \quad (4.20)$$

になる。

$a, b$  が実数で  $a^2 - b < 0$  の場合、 $\sqrt{a^2 - b} = i\sqrt{b - a^2}$  に置き換えれば (4.19) は

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{b - a^2}} \int_{x_0}^x dx' f(x') e^{-a(x-x')} \sin(\sqrt{b - a^2}(x - x')) \quad (4.21)$$

である。

$f(x)$  が特別な場合には (物理では特別な場合が多い), 上の公式よりも  $Y(x)$  の形を仮定する未定係数法の方が簡単である。

- $f(x) = f_0 e^{\alpha x}$  の場合

$Y(x) = A e^{\alpha x}$  とし (4.12) に代入すると

$$(\alpha^2 + 2a\alpha + b) A e^{\alpha x} = f_0 e^{\alpha x}$$

$\alpha^2 + 2a\alpha + b \neq 0$ , つまり,  $\alpha \neq \lambda_{\pm}$  ならば

$$A = \frac{f_0}{\alpha^2 + 2a\alpha + b} = \frac{f_0}{(\alpha - \lambda_+)(\alpha - \lambda_-)}$$

とすると  $Y(x) = A e^{\alpha x}$  は特解になる。 $\alpha = \lambda_+$  または  $\alpha = \lambda_-$  の場合

$$\lambda_+ \neq \lambda_- \text{ のとき } Y(x) = A x e^{\alpha x}, \quad \lambda_+ = \lambda_- = -a \text{ のとき } Y(x) = A x^2 e^{-ax}$$

ととる。

- $f(x) = f_0 \cos(kx + \theta)$  の場合

$Y(x) = C \cos(kx + \theta) + D \sin(kx + \theta)$  としてもよいが, 係数が実数の場合には

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + 2a \frac{d}{dx} + b \right) Z(x) = f_0 e^{i(kx + \theta)}$$

の実部をとれば

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + 2a \frac{d}{dx} + b \right) \operatorname{Re} Z = f_0 \cos(kx + \theta)$$

になるから  $Y = \operatorname{Re} Z$  である。  $f(x) = f_0 e^{\alpha x}$  の場合と同様に  $Z = A e^{i(kx+\theta)}$  とすれば

$$(-k^2 + 2iak + b)A = f_0$$

$-k^2 + 2iak + b \neq 0$  の場合, 極形式で表して

$$b - k^2 + 2iak = \sqrt{(b - k^2)^2 + (2ak)^2} e^{i\phi}, \quad \tan \phi = \frac{2ak}{b - k^2}$$

とすれば

$$Y(x) = \operatorname{Re} Z = \frac{f_0}{\sqrt{(b - k^2)^2 + (2ak)^2}} \cos(kx + \theta - \phi)$$

になる。なお,  $a = 0, b \neq k^2$  の場合は  $Y(x) = A \cos(kx + \theta)$  とした方が簡単である。 $b = k^2$  ならば  $Y(x) = Ax \cos(kx + \theta)$  とする。

- $f(x)$  が  $n$  次の多項式の場合

$Y(x)$  も  $n$  次の多項式とする。例えば  $f(x) = x^2$  のとき  $Y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$  とすると (4.12) は

$$\begin{aligned} 2c_2 + 2a(c_1 + 2c_2x) + b(c_0 + c_1x + c_2x^2) \\ = 2c_2 + 2ac_1 + bc_0 + (4ac_2 + bc_1)x + bc_2x^2 = x^2 \end{aligned}$$

これから

$$2c_2 + 2ac_1 + bc_0 = 0, \quad 4ac_2 + bc_1 = 0, \quad bc_2 = 1$$

これを  $c_0, c_1, c_2$  について解けばよい。

#### 4.4 演算子法

定数係数の  $n$  階線形微分方程式の解法を考える。ただし, 物理では  $n > 3$  の場合を扱うことは余りない。

$n$  階の同次方程式  $a_1, \dots, a_n$  が定数である微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$$

においても  $y(x) = e^{\lambda x}$  とすれば, 特性方程式は

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

になる。この方程式の解  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  が全て異なれば

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x}$$

が  $n$  階同次方程式の一般解になる。

重根がある場合を考える。  $y = x^k e^{\lambda x} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda x}$  とすると

$$\begin{aligned} F &= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y \\ &= \left( \frac{\partial^n}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \dots + a_n \right) \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda x} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left( \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \right) e^{\lambda x} \end{aligned}$$

$\mu$  が特性方程式の  $m$  重根ならば

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = (\lambda - \mu)^m (\lambda^{n-m} + b_1\lambda^{n-m-1} + \cdots + b_{n-m})$$

と因数分解できるから

$$g(\lambda, x) = (\lambda^{n-m} + b_1\lambda^{n-m-1} + \cdots + b_{n-m})e^{\lambda x}$$

とすると

$$F = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda - \mu)^m g(\lambda, x) = (\lambda - \mu)^m \frac{\partial^k g}{\partial \lambda^k} + k \frac{\partial (\lambda - \mu)^m}{\partial \lambda} \frac{\partial^{k-1} g}{\partial \lambda^{k-1}} + \cdots + \frac{\partial^k (\lambda - \mu)^m}{\partial \lambda^k} g$$

これは  $(\lambda - \mu)^m, (\lambda - \mu)^{m-1}, \dots, (\lambda - \mu)^{m-k}$  の和であるから,  $k < m$  の場合  $\lambda = \mu$  とすると  $F = 0$  になる。したがって,  $\mu$  が特性方程式の  $m$  重根の場合

$$x^k e^{\mu x}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

である  $m$  個が基本解になる。特に,  $n$  階同次方程式で  $\mu$  が  $n$  重根の場合, 一般解は

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k e^{\mu x}, \quad c_k = \text{任意の積分定数} \quad (4.22)$$

になる。

**演算子法** 関数  $f(x)$  が与えられたとき,  $n$  階の線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

の解  $y(x)$  を求める。  $f(x) = 0$  とすると同次方程式になる。ここで形式的に

$$D = \frac{d}{dx}$$

とおく。  $Dy(x) = dy/dx$  であり  $D$  は関数  $y(x)$  に作用して微分を行うことを表す。  $D$  を**微分演算子**といい, 微分演算子を用いた微分方程式の解法を**演算子法**という。  $D$  は定数ではないが, 以下に示すようにあたかも定数のように扱うことができる。

$$D^n = \left( \frac{d}{dx} \right)^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

であるから, 上の微分方程式は

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y(x) = F(D)y(x) = f(x)$$

と表せる。ただし,  $F(x)$  は  $n$  次の多項式

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

である。

$D$  の逆  $D^{-1} = \frac{1}{D}$  を微分可能な任意の関数  $y(x)$  に対して

$$D(D^{-1}y(x)) = y(x)$$

で定義する。つまり  $Y(x) = D^{-1}y(x)$  とすると

$$DY = \frac{dY}{dx} = y(x), \quad \therefore Y(x) = D^{-1}y(x) = \int_{x_0}^x dx_1 y(x_1) + C, \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (4.23)$$

である。微分の逆演算には積分である。括弧を省略して  $DD^{-1}y(x) = y(x)$  と書いてもよい。更に、 $y(x)$  は任意の関数であるから  $y(x)$  を省略して

$$DD^{-1} = 1, \quad (\text{恒等演算})$$

と表せる。微分演算子を含む関係式は、任意の関数に作用したときに成り立つ関係式である。なお、 $Dy(x) = dy/dx = y'(x)$  であるから

$$D^{-1}Dy(x) = D^{-1}y'(x) = \int_{x_0}^x dx_1 y'(x_1) + C = y(x) - y(x_0) + C \neq y(x)$$

したがって  $D^{-1}D = 1$  は成り立たない。

一般に  $F(D)$  の逆  $F^{-1}(D) = \frac{1}{F(D)}$  を

$$F(D)F^{-1}(D) = 1, \quad (\text{恒等演算})$$

で定義する。ただし、 $F^{-1}(D)F(D) \neq 1$  である。 $F^{-1}(D)$  を用いると  $F(D)y(x) = f(x)$  の解は

$$y(x) = F^{-1}(D)f(x)$$

と表せる。これは単なる書き換えではあるが、演算子法の便利な点は、普通の多項式  $F(x)$  と同様に、 $F(D)$  の因数分解や  $1/F(D)$  の部分分数展開などが行えることである。例えば  $a, b$  を定数として

$$F(x) = x^2 - (a+b)x + ab$$

のとき  $Y(x) = (D-b)y(x) = y' - by$  とすると

$$(D-a)Y = Y' - aY = (y'' - by') - a(y' - by) = (D^2 - (a+b)D + ab)y$$

つまり

$$(D-a)(D-b) = (D-b)(D-a) = D^2 - (a+b)D + ab = F(D)$$

である。 $(D-a)^{-1}$  の定義より  $(D-a)(D-a)^{-1} = 1$  であるから

$$F(D)(D-a)^{-1} = (D-b)(D-a)(D-a)^{-1} = D-b$$

同様にして  $F(D)(D-b)^{-1} = D-a$  になるから

$$F(D) \left( \frac{1}{D-a} - \frac{1}{D-b} \right) = a-b$$

したがって  $a \neq b$  のとき

$$F^{-1}(D) = \frac{1}{(D-a)(D-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{D-a} - \frac{1}{D-b} \right)$$

である。 $F(x), G(x)$  が定数係数の多項式のとき

$$F(D)G(D) = G(D)F(D), \quad \frac{1}{F(D)G(D)} = \frac{1}{F(D)} \frac{1}{G(D)} = \frac{1}{G(D)} \frac{1}{F(D)}$$

などが成り立つ。

演算子法で解を求めるとき、 $\alpha$  を定数として

$$D^{-n}f(x) = \int_{x_0}^x dx' \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!} f(x') + g_{n-1}(x) \quad (4.24)$$

$$(D-\alpha)^n f(x) = e^{\alpha x} D^n (e^{-\alpha x} f(x)) \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{(D-\alpha)^n} f(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{D^n} (e^{-\alpha x} f(x)) \quad (4.26)$$

が重要になる。ただし

$$g_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k, \quad c_k = \text{積分定数}$$

は任意の  $n-1$  次の多項式である。(4.25), (4.26) は  $f(x)$  を省略して

$$(D-\alpha)^n = e^{\alpha x} D^n e^{-\alpha x}, \quad (D-\alpha)^{-n} = e^{\alpha x} D^{-n} e^{-\alpha x}$$

と表してもよい。ただし、右辺の演算子  $D$  は  $e^{-\alpha x}$  だけでなく省略した関数にも作用する。

(4.24) 数学的帰納法で証明する。 $n=1$  のときは (4.23) であるから成り立つ。 $n=k$  のとき成り立つとし

$$f_k(x) = D^{-k} f(x) = \int_{x_0}^x dx_1 \frac{(x-x_1)^{k-1}}{(k-1)!} f(x_1) + g_{k-1}(x)$$

とおくと

$$D^{-k-1} f(x) = D^{-1} f_k(x) = \int_{x_0}^x dx_2 f_k(x_2) + C = \int_{x_0}^x dx_2 \int_{x_0}^{x_2} dx_1 \frac{(x_2-x_1)^{k-1}}{(k-1)!} f(x_1) + g_k(x)$$

ただし

$$g_k(x) = C + \int_{x_0}^x dx_2 g_{k-1}(x_2) = k \text{ 次の多項式}$$

である。ところで (3.9) より積分の順序を入れ換えると

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx_2 \int_{x_0}^{x_2} dx_1 \frac{(x_2-x_1)^{k-1}}{(k-1)!} f(x_1) &= \int_{x_0}^x dx_1 f(x_1) \int_{x_1}^x dx_2 \frac{(x_2-x_1)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \int_{x_0}^x dx_1 f(x_1) \frac{(x-x_1)^k}{k!} \end{aligned}$$

したがって (4.24) は  $n=k+1$  のときも成り立つ。

(4.25)  $n=1$  のとき

$$e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} f(x)) = e^{\alpha x} \frac{d}{dx} (e^{-\alpha x} f(x)) = -\alpha f(x) + \frac{df}{dx} = (D-\alpha)f(x) \quad (4.27)$$

である。 $n=k$  のとき成り立つとして  $f_k(x) = (D-\alpha)^k f(x) = e^{\alpha x} D^k (e^{-\alpha x} f(x))$  とすると

$$\begin{aligned} (D-\alpha)^{k+1} f(x) &= (D-\alpha)f_k(x) = e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} f_k(x)) = e^{\alpha x} D(D^k (e^{-\alpha x} f(x))) \\ &= e^{\alpha x} D^{k+1} (e^{-\alpha x} f(x)) \end{aligned}$$

になり  $n=k+1$  のときも成り立つ。

(4.26)  $n = 1$  の場合

$$(D - \alpha) e^{\alpha x} D^{-1} e^{-\alpha x} = e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} e^{\alpha x} D^{-1} e^{-\alpha x} = 1$$

より  $(D - \alpha)^{-1} = e^{\alpha x} D^{-1} e^{-\alpha x}$  である。 $(D - \alpha)^{-k} = e^{\alpha x} D^{-k} e^{-\alpha x}$  が成り立つとすると

$$(D - \alpha)^{-k-1} = (D - \alpha)^{-1} (D - \alpha)^{-k} = e^{\alpha x} D^{-1} e^{-\alpha x} e^{\alpha x} D^{-k} e^{-\alpha x} = e^{\alpha x} D^{-k-1} e^{-\alpha x}$$

になるから  $n = k + 1$  のときも成り立つ。 ■

(4.24) で  $f(x) = 0$  とすると

$$D^{-n} 0 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k = \text{任意の } n-1 \text{ 次の多項式}$$

$Y(x) = D^{-n} 0 \iff D^n Y(x) = d^n Y/dx^n = 0$  であるから  $Y(x)$  は  $n-1$  次の多項式になる。

(4.24) より (4.26) を積分で表せば

$$\begin{aligned} y(x) &= (D - \alpha)^{-n} f(x) = e^{\alpha x} D^{-n} (e^{-\alpha x} f(x)) \\ &= e^{\alpha x} \int_{x_0}^x dx' \frac{(x - x')^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x'} f(x') + e^{\alpha x} g_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$y(x)$  は微分方程式  $(D - \alpha)^n y(x) = f(x)$  の一般解である。 $f(x) = 0$  とすると  $y(x) = e^{\alpha x} g_{n-1}(x)$  になるが、これは同次方程式  $(D - \alpha)^n y(x) = 0$  の一般解 (4.22) である。したがって、右辺第 1 項の積分は非同次方程式  $(D - \alpha)^n y(x) = f(x)$  の特解を表す。

**例題 1** (4.12) を演算子法で解く。 $\lambda_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$  とすれば (4.12) は

$$(D - \lambda_+)(D - \lambda_-)y(x) = f(x)$$

$\lambda_+ = \lambda_- = -a$  のとき (4.28) より

$$y(x) = (D + a)^{-2} f(x) = \int_{x_0}^x dx' (x - x') e^{-a(x-x')} f(x') + e^{-ax} (c_0 + c_1 x)$$

第 1 項は特解 (4.20)、第 2 項は  $(D + a)^2 y = 0$  の一般解 (4.17) である。 $\lambda_+ \neq \lambda_-$  の場合、部分分数に分解すれば

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{(D - \lambda_+)(D - \lambda_-)} f(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left( \frac{1}{D - \lambda_+} - \frac{1}{D - \lambda_-} \right) f(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \int_0^x dx' \left( e^{\lambda_+(x-x')} - e^{\lambda_-(x-x')} \right) f(x') + c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x} \end{aligned}$$

になる。第 1 項は特解 (4.19) である。

**例題 2**  $n$  階の微分方程式  $(D - \alpha)^n y(x) = e^{\lambda x}$  の一般解は (4.28) より

$$y(x) = I_{n-1}(x) + e^{\alpha x} g_{n-1}(x)$$

ただし

$$I_k(x) = \frac{e^{\alpha x}}{k!} \int_0^x dx' (x - x')^k e^{(\lambda - \alpha)x'} = \frac{e^{\lambda x}}{k!} \int_0^x dt t^k e^{(\alpha - \lambda)t}$$

で与えられる ( 簡単のため  $x_0 = 0$  とする )。  $I_k(x)$  を求めると  $\lambda = \alpha$  のとき

$$I_k(x) = \frac{e^{\lambda x}}{k!} \int_0^x dt t^k = \frac{e^{\lambda x} x^{k+1}}{(k+1)!}$$

である。  $\lambda \neq \alpha$  のとき  $a = \alpha - \lambda \neq 0$  とすると

$$I_k(x) = \frac{e^{\lambda x}}{k!} \int_0^x dt t^k e^{at} = \frac{e^{\lambda x}}{k!} \int_0^x dt \frac{d^k}{da^k} e^{at} = \frac{e^{\lambda x}}{k!} \frac{d^k}{da^k} \frac{e^{ax} - 1}{a}$$

ライプニッツの公式から

$$I_k(x) = \frac{e^{\lambda x}}{k!} \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{d^m(e^{ax} - 1)}{da^m} \frac{d^{k-m} a^{-1}}{da^{k-m}} = e^{\lambda x} \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \frac{(-1)^{k-m}}{a^{k+1-m}} \frac{d^m(e^{ax} - 1)}{da^m}$$

ここで

$$\frac{d^m(e^{ax} - 1)}{da^m} = \begin{cases} e^{ax} - 1, & m = 0 \\ x^m e^{ax}, & m > 0 \end{cases}$$

に注意すると

$$I_k(x) = \frac{e^{\lambda x}}{(\lambda - \alpha)^{k+1}} + e^{\alpha x} \tilde{g}_k(x), \quad \tilde{g}_k(x) = \frac{1}{\alpha - \lambda} \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \frac{x^m}{(\lambda - \alpha)^{k-m}}$$

になる。  $\tilde{g}_k(x)$  は  $k$  次の多項式である。したがって

$$(D - \alpha)^{-n} e^{\lambda x} = I_{n-1}(x) + e^{\alpha x} g_{n-1}(x) = e^{\alpha x} g_{n-1}(x) + \begin{cases} \frac{x^n e^{\alpha x}}{n!}, & \lambda = \alpha \\ \frac{e^{\lambda x}}{(\lambda - \alpha)^n}, & \lambda \neq \alpha \end{cases}$$

になる。ただし  $\tilde{g}_{n-1}(x)$  は任意の多項式  $g_{n-1}(x)$  に含めた。

$$(D - \alpha)e^{\lambda x} = (\lambda - \alpha)e^{\lambda x}, \quad \text{一般に } (D - \alpha)^n e^{\lambda x} = (\lambda - \alpha)^n e^{\lambda x}$$

であるから、  $\lambda \neq \alpha$  のとき  $e^{\lambda x}/(\lambda - \alpha)^n$  が  $(D - \alpha)^n y = e^{\lambda x}$  の特解になることは明らかである。

**例題 3**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  が互いに異なるとき

$$F(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

を考える。  $1/F(x)$  を部分分数に分解すると  $A_k$  を定数として

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x - \lambda_k}$$

とおける。  $F(\lambda_m) = 0$  であるから

$$\frac{x - \lambda_m}{F(x)} = \frac{1}{\frac{F(x) - F(\lambda_m)}{x - \lambda_m}} = A_m + (x - \lambda_m) \sum_{k \neq m} \frac{A_k}{x - \lambda_k}$$

$x \rightarrow \lambda_m$  とすると  $A_m = 1/F'(\lambda_m)$  になる。  $\lambda_m$  は重根ではないから  $F'(\lambda_m) \neq 0$  である。したがって

$$F(D)y(x) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n)y(x) = f(x)$$

の一般解は (4.28) より

$$y(x) = \frac{1}{F(D)} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{F'(\lambda_k)} \frac{1}{D - \lambda_k} f(x) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{e^{\lambda_k x}}{F'(\lambda_k)} \int_{x_0}^x dx' e^{-\lambda_k x'} f(x') + c_k e^{\lambda_k x} \right)$$

になる。

## 4.5 独立変数を含まない2階微分方程式

2階の非線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

の場合  $Y = dy/dx$  とすると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dY}{dy} = Y \frac{dY}{dy}$$

より1階の微分方程式

$$Y \frac{dY}{dy} = F(y, Y)$$

になる。 $F(y, Y)$  が変数分離型や同時型ならば一般解を求めることはできる。

1次元の質点が保存力  $F(x)$  を受けて運動するとき、運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

したがって  $v = dx/dt$  とすると

$$mv \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = F(x)$$

これから力学的エネルギー保存則

$$\frac{mv^2}{2} + V(x) = \text{一定} = E, \quad V(x) = - \int dx F(x)$$

が成り立つ。 $v$  について解けば

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}, \quad \therefore \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} t + C$$

であり  $x = x(t)$  を決定できる。

**懸垂曲線** 糸の両端を固定し一様重力のもとでつるすとき、静止状態での糸の形を求める。水平方向に  $x$  軸、鉛直上向きに  $y$  軸をとり、糸の形を  $y(x)$  とする。糸の張力の  $x$  軸成分、 $y$  軸成分をそれぞれ  $F_x(x)$ 、 $F_y(x)$  とする。糸の微小部分  $[x, x + \Delta x]$  の力の釣り合いは、水平方向では

$$F_x(x + \Delta x) - F_x(x) = \frac{dF_x}{dx} \Delta x = 0, \quad \therefore F_x(x) = \text{一定}$$

微小部分の糸の長さは

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \Delta x, \quad y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

である。糸の長さを  $\ell$ 、質量を  $m$  とすると、鉛直方向の力の釣り合いは

$$F_y(x + \Delta x) - F_y(x) - \frac{mg}{\ell} \sqrt{1 + y'^2} \Delta x = 0, \quad \therefore \frac{dF_y}{dx} = \frac{mg}{\ell} \sqrt{1 + y'^2}$$

張力は糸の接線方向を向くから  $F_y(x) = F_x y'(x)$  である。したがって

$$y'' = k \sqrt{1 + y'^2}, \quad k = \frac{mg}{\ell F_x}$$

$Y = y'(x)$  とすると  $dY/dx = k \sqrt{1 + Y^2}$  あるいは  $Y dY/dy = k \sqrt{1 + Y^2}$  になる。前者の方程式から

$$k \int dx = \int \frac{dY}{\sqrt{1 + Y^2}} = \int d\eta, \quad \text{ただし } Y = \sinh \eta$$

$\eta = kx + C$  になるから

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \eta = \sinh(kx + C), \quad \therefore y = \frac{\cosh(kx + C)}{k} + D$$

である。この曲線を懸垂曲線という。 $a > 0$  として  $x = \pm a/2$  で  $y = 0$  とすると

$$C = 0, \quad D = -\frac{\cosh(ka/2)}{k}, \quad \therefore y(x) = \frac{\cosh(kx) - \cosh(ka/2)}{k}$$

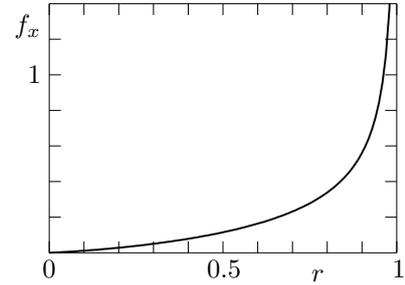
になる。

$$\ell = \int_{-a/2}^{a/2} dx \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{k} \int_{-a/2}^{a/2} dx y''(x) = \frac{2}{k} \sinh(ka/2)$$

つまり

$$2f_x \sinh \frac{r}{2f_x} = 1, \quad \text{ただし} \quad f_x = \frac{F_x}{mg}, \quad r = \frac{a}{\ell}$$

これから張力の水平成分  $F_x = mgf_x$  が決まる。右図に  $f_x$  を  $r$  の関数として図示する。当然の結果であるが、 $x/\sinh x \leq 1$  より  $r < 1$  でなければならない。 $r \rightarrow 1$  のとき  $1/f_x \rightarrow 0$  になるから  $F_x \rightarrow \infty$  である。一方、 $r \rightarrow 0$  のとき  $r/f_x \rightarrow \infty$  より  $F_x \rightarrow 0$  である。



#### 4.6 べき級数と2階線形微分方程式

係数が  $x$  に依存する1階の同次線形微分方程式の一般解(4.4)は1回積分すれば求まる。2階の同次線形微分方程式でも、定係数の場合は(4.18)以下で示したように2回積分すれば求まる。しかし、係数が  $x$  に依存する2階の同次線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (4.29)$$

の場合、一般に  $x$  について積分する方法(求積法)で解を求めることは困難である。求積法以外の解法として、解  $y(x)$  をべき級数に展開する方法や複素積分を用いた方法がある。ここではべき級数により2階の同次線形微分方程式の解を求める。複素積分については145ページで扱う。

$p(x)$  と  $q(x)$  が  $x = x_0$  で正則(微分可能)であるとき、 $x = x_0$  をこの微分方程式の**正則点**という。正則でない点を**特異点**という。 $x = x_0$  で  $(x - x_0)p(x)$  と  $(x - x_0)^2 q(x)$  が正則である特異点  $x = x_0$  を**確定特異点**という。

簡単のため  $x_0 = 0$  とする。 $x = 0$  が正則点ならば

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots, \quad q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots$$

と展開できる。

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

とすると(4.29)は

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + (p_0 + p_1 x + \cdots)(a_1 + 2a_2 x + \cdots) + (q_0 + q_1 x + \cdots)(a_0 + a_1 x + \cdots) \\ & = 2a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0 + (6a_3 + 2p_0 a_2 + p_1 a_1 + q_0 a_1 + q_1 a_0)x + \cdots = 0 \end{aligned}$$

になるから

$$2a_2 + p_0a_1 + q_0a_0 = 0, \quad 6a_3 + 2p_0a_2 + p_1a_1 + q_0a_1 + q_1a_0 = 0, \quad \dots$$

これから  $a_0, a_1$  を与えると  $a_2, a_3, \dots$  が決まる。 $a_0 = y(0), a_1 = y'(0)$  であるから,  $x = 0$  での任意の初期条件に対して解が確定する。したがって,  $x = x_0$  が正則点ならば, 任意の解は

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

と展開できる。

$x = 0$  が確定特異点の場合

$$p(x) = \frac{p_0 + p_1x + \dots}{x}, \quad q(x) = \frac{q_0 + q_1x + \dots}{x^2}$$

である。

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0$$

とすると

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) a_k x^{\rho+k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) a_k x^{\rho+k-2}$$

であるから (4.29) は

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) a_k x^{\rho+k-2} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ((\rho + j)p_i + q_i) a_j x^{\rho+i+j-2} = 0$$

第2項の  $i, j$  の和は  $k = i + j$  とし  $k \geq 0, 0 \leq i \leq k$  の和に置き直せるから

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (\rho + k)(\rho + k - 1) a_k + \sum_{i=0}^k ((\rho + k - i)p_i + q_i) a_{k-i} \right) x^{\rho+k-2} = 0 \quad (4.30)$$

したがって

$$(\rho + k)(\rho + k - 1) a_k + \sum_{i=0}^k ((\rho + k - i)p_i + q_i) a_{k-i} = 0$$

$k = 0$  とすると

$$f(\rho) = \rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0 \quad (4.31)$$

$k \geq 1$  のとき

$$f(\rho + k) a_k + \sum_{i=1}^k ((\rho + k - i)p_i + q_i) a_{k-i} = 0 \quad (4.32)$$

になる。 $\rho$  は2次方程式 (4.31) の解である。これを  $\rho_1, \rho_2$  とすると  $f(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)$  になるから (4.32) は

$$a_k(\rho) = -\frac{D_k(\rho)}{(\rho + k - \rho_1)(\rho + k - \rho_2)}, \quad D_k(\rho) = \sum_{i=1}^k ((\rho + k - i)p_i + q_i) a_{k-i}(\rho) \quad (4.33)$$

$\rho_1 - \rho_2 \neq$  整数 ならば, 分母が 0 になることはないから  $a_0$  を与えると  $a_1, a_2, \dots$  が決まり, 2つの1次独立な解

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\rho_1) x^k, \quad y_2(x) = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\rho_2) x^k$$

を得る。

$\rho_1 = \rho_2 = (1 - p_0)/2$  の場合も、分母  $\neq 0$  より  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  が求まるが、 $y_1(x)$  と  $y_2(x)$  は 1 次独立でない。 $y_1(x)$  を解として採用し、これと独立な解  $y_2(x)$  を求める。

$$w(\rho, x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\rho) x^k \quad (4.34)$$

とする。ただし  $\rho$  はパラメータで (4.31) の解ではない。 $a_1, a_2, \dots$  は (4.32) により  $\rho$  と  $a_0$  から決める。このとき、(4.30) の左辺で  $k \neq 0$  の項は 0 になるから

$$w'' + p(x)w' + q(x)w = (\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0)a_0 x^{\rho-2} = (\rho - \rho_1)^2 a_0 x^{\rho-2}$$

である。両辺を  $\rho$  で微分すると

$$w''_\rho + p(x)w'_\rho + q(x)w_\rho = 2(\rho - \rho_1)a_0 x^{\rho-2} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{\partial}{\partial \rho} a_0 x^{\rho-2}, \quad w_\rho = \frac{\partial w}{\partial \rho}$$

したがって、 $\rho = \rho_1$  とすると  $w_\rho$  は解になるから

$$y_2(x) = \left. \frac{\partial w}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} = y_1(x) \log x + x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{da_k}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_1} x^k \quad (4.35)$$

が  $y_1(x)$  と独立な解である。

$\rho_1 - \rho_2 = n = 1, 2, 3, \dots$  のとき、(4.33) より

$$a_k(\rho_1) = -\frac{D_k(\rho_1)}{k(k+n)}, \quad a_k(\rho_2) = -\frac{D_k(\rho_2)}{k(k-n)} \quad (4.36)$$

になるから、大きい方の  $\rho = \rho_1$  の解  $y_1(x)$  は求まる。一方、 $a_n(\rho_2)$  は  $D_n(\rho_2) \neq 0$  ならば発散するから  $y_2(x)$  は求まらない。 $\rho_1 = \rho_2$  の場合と同様にすると

$$y_2(x) = A y_1(x) \log x + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho_2) x^k, \quad A = \text{定数} \quad (4.37)$$

という解が存在することが示せる。 $D_n(\rho_2) = 0$  の場合  $a_n(\rho_2)$  が有限ならば  $A = 0$  になる。

$x = 0$  が確定特異点である簡単な例は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p_0}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{q_0}{x^2} y = 0 \quad (4.38)$$

である。 $k \geq 1$  のとき  $p_k = q_k = 0$  であるから (4.32) より  $a_k = 0$  になる。したがって  $a_0 = 1$  とれば、 $\rho_1 \neq \rho_2$  のとき、 $\rho_1 - \rho_2 = \text{整数}$  の場合も含めて

$$y_1(x) = x^{\rho_1}, \quad y_2(x) = x^{\rho_2}$$

が 2 つの 1 次独立な解である。 $\rho_1 = \rho_2$  の場合  $y_1(x) = y_2(x)$  と 1 次独立な解は (4.35) で与えられるが、 $k \geq 1$  のとき  $a_k = 0$  であるから (4.35) の右辺第 2 項は  $y_1$  に比例する。これから  $\rho_1 = \rho_2$  のとき 2 つの 1 次独立な解は

$$y_1(x) = x^{\rho_1}, \quad y_2(x) = x^{\rho_1} \log x$$

である。一般に  $n$  階の微分方程式

$$y^{(n)} + \frac{c_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{c_2}{x^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{c_n}{x^n} y = 0 \quad (4.39)$$

をオイラー型の微分方程式という。  $t = \log x$  とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad \dots$$

である。これを (4.39) に代入すると定数係数の  $n$  階微分方程式になる。(4.38) は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p_0 - 1) \frac{dy}{dt} + q_0 y = 0$$

になるから、特性方程式は  $\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$  である。これは (4.31) と同じである。基本解は

$$\rho_1 \neq \rho_2 \text{ のとき } y_1 = e^{\rho_1 t} = e^{\rho_1 \log x} = x^{\rho_1}, \quad y_2 = e^{\rho_2 t} = x^{\rho_2}$$

$$\rho_1 = \rho_2 \text{ のとき } y_1 = e^{\rho_1 t} = x^{\rho_1}, \quad y_2 = t e^{\rho_1 t} = x^{\rho_1} \log x$$

になる。

### ルジャンドル ( Legendre ) の微分方程式

正則点まわりのべき級数解の例としてルジャンドルの微分方程式

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

の解を求める。

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

であるから、 $x = \pm 1$  は確定特異点であるが、 $x \neq \pm 1$  では正則である。正則点  $x = 0$  まわりでは

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

と展開できる。 $xy'$ ,  $x^2y''$ ,  $y''$  の展開で  $x$  のべきを同じにする。

$$xy' = x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k, \quad x^2y'' = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

$y''$  単独については

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

$k-2$  を改めて  $k$  とした。以上の展開式をルジャンドルの微分方程式に代入すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+2)(k+1) a_{k+2} - (k(k-1) + 2k - n(n+1)) a_k \right) x^k = 0$$

これから漸化式

$$a_{k+2} = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

を得る。 $a_0$  を与えると

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2} a_0, \quad a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_0, \quad \dots$$

であり  $k$  が偶数である  $a_k$  が決まる。一方、 $a_1$  を与えると  $k$  が奇数である  $a_k$  が決まり奇関数が求まる。これから

$$y(x) = a_0 \times \text{偶関数} + a_1 \times \text{奇関数}$$

になる。\$a\_0\$ と \$a\_1\$ は任意定数であるから \$y(x)\$ は一般解である。

(4.41) より \$k = n\$ とすると \$a\_{n+2} = 0\$ になる。(4.41) を再び使えば \$a\_{n+4} = a\_{n+6} = \dots = 0\$ になるから、\$n\$ が偶数 (奇数) のとき、偶 (奇) 関数は \$n\$ 次の多項式である。一方、奇 (偶) 関数は無限級数である。\$n\$ 次の多項式を \$P\_n(x)\$、これと 1 次独立な無限級数を \$Q\_n(x)\$ で表す。

\$P\_n(x)\$ を求める。\$n\$ が偶数 (奇数) のとき \$k\$ は偶数 (奇数) であるから \$k = n - 2m, 0 \le m \le [n/2]\$ とおけ

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} a_{n-2m} x^{n-2m}$$

である。漸化式

$$a_{n-2(m-1)} = -\frac{2m(2n+1-2m)}{(n+2-2m)(n+1-2m)} a_{n-2m}$$

は \$b\_m = a\_{n-2m}\$ とすると

$$b_m = -\frac{(n+2-2m)(n+1-2m)}{2m(2n+1-2m)} b_{m-1} = -\frac{n+1-m}{m} \frac{(n+2-2m)(n+1-2m)}{(2n+2-2m)(2n+1-2m)} b_{m-1}$$

これから

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{n}{1} \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} b_0, & b_2 &= -\frac{n-1}{2} \frac{(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)} b_1 \\ & & &= (-1)^2 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} b_0 \end{aligned}$$

一般に

$$b_m = (-1)^m \frac{n(n-1) \cdots (n+1-m)}{m!} \frac{n(n-1) \cdots (n+1-2m)}{2n(2n-1) \cdots (2n+1-2m)} b_0$$

である。\$1 \le m \le n\$ のとき

$$n(n-1) \cdots (n+1-m) = \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

同様に

$$n(n-1) \cdots (n+1-2m) = \frac{n!}{(n-2m)!}, \quad 2n(2n-1) \cdots (2n+1-2m) = \frac{(2n)!}{(2n-2m)!}$$

になるから

$$b_m = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{m! (n-m)! (n-2m)!} b_0$$

これは \$m = 0\$ でも成り立つ。\$b\_0\$ は任意であるが \$b\_0 = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\$ とすると

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

になる。\$P\_n(x)\$ をルジャンドル多項式という。

\$(x^2 - 1)^n\$ を二項展開すると

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-1)^k x^{2n-2k}$$

になるから

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \sum_{n-2k \geq 0} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} (2n-2k)(2n-2k-1) \cdots (n-2k+1) x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \end{aligned}$$

したがって

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (4.42)$$

と表せる。これをロドリグ (Rodrigues) の公式という。  $n = 0, 1, 2$  とすると

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

である。

$t = x \mp 1$  とし二項定理を使うと

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} t^n (t \pm 2)^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (\pm 2)^{n-k} \frac{d^n}{dt^n} t^{n+k} \\ &= \sum_{k=0}^n (\pm 1)^{n-k} \frac{(n+k)(n+k-1) \cdots (k+1)}{2^k k! (n-k)!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n (\pm 1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{2^k (k!)^2 (n-k)!} (x \mp 1)^k \end{aligned} \quad (4.43)$$

になるから  $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$  である。

**問題 4.3** 確定特異点  $x = \pm 1$  のまわりで展開を行う場合

$$y(x) = y_{\pm}(x) = (x \pm 1)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x \pm 1)^k, \quad a_0 \neq 0$$

とおける。これを (4.40) に代入し  $\rho$  は重根  $\rho = 0$  だけであり, (4.43) と比較して  $y_{\pm}(x) = P_n(x)$  とできることを示せ。また,  $P_n(x)$  と 1 次独立な解  $Q_n(x)$  は

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{2} \log \frac{x+1}{x-1} + W_{n-1}(x), \quad W_{n-1}(x) = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} d_m x^{n-1-2m} \quad (4.44)$$

とおけることを示せ。

### ベッセル (Bessel) の微分方程式

確定特異点まわりのべき級数解の例としてベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (4.45)$$

の解を求める。この微分方程式の確定特異点は  $x = 0$  である。一般論と同様に

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0 \quad (4.46)$$

として微分方程式に代入すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+\rho)^2 - \nu^2 \right) a_k x^{k+\rho-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = 0$$

第2項目で  $k = k' - 2$  とすると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+\rho)^2 - \nu^2 \right) a_k x^{k+\rho-2} + \sum_{k'=2}^{\infty} a_{k'-2} x^{k'+\rho-2} = 0$$

したがって

$$(\rho^2 - \nu^2) a_0 + \left( (1+\rho)^2 - \nu^2 \right) a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \left( (k+\rho)^2 - \nu^2 \right) a_k + a_{k-2} \right) x^k = 0$$

これから

$$(\rho^2 - \nu^2) a_0 = 0, \quad \left( (1+\rho)^2 - \nu^2 \right) a_1 = 0, \quad k \geq 2 \text{ のとき } \left( (k+\rho)^2 - \nu^2 \right) a_k + a_{k-2} = 0$$

である。 $a_0 \neq 0$  より  $\rho = \pm \nu$  になる。これは2次方程式 (4.31) の解である。

$2\rho \neq -1, -2, \dots$  の場合を考える。 $k \geq 1$  に対して  $(k+\rho)^2 - \nu^2 = k(k+2\rho) \neq 0$  になるから

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\rho)}$$

$k$  が奇数のとき  $a_k = 0$  である。 $k$  が偶数のとき  $k = 2m$  とおくと

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\frac{1}{4m(m+\rho)} a_{2(m-1)} = \frac{(-1)^2}{4^2 m(m-1)(m+\rho)(m-1+\rho)} a_{2(m-2)} \\ &= \frac{(-1)^m}{4^m m! (m+\rho)(m-1+\rho) \cdots (1+\rho)} a_0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

になる。

ここで**ガンマ関数**  $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1} \quad (4.48)$$

を導入する。この積分が発散しないためには  $x > 0$  である。ところで

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} \frac{1}{x} \frac{dt^x}{dt} = \frac{1}{x} \left[ e^{-t} t^x \right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^x = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

である。 $\Gamma(x+1)$  は  $x+1 > 0$  で収束するから、 $\Gamma(x)$  は  $x=0$  を除く  $x > -1$  で定義できる。上の関係式を繰り返し適用すると

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots \quad (4.49)$$

が成り立つ。したがって、 $\Gamma(x)$  は任意の  $x$  について定義される。ただし  $x = 0, -1, -2, \dots$  では発散する。 $\Gamma(1) = 1$  より  $\Gamma(n+1) = n!$  である。

(4.49) より

$$\frac{1}{(m+\rho)(m-1+\rho) \cdots (1+\rho)} = \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+m+1)}$$

と表せるから (4.47) は

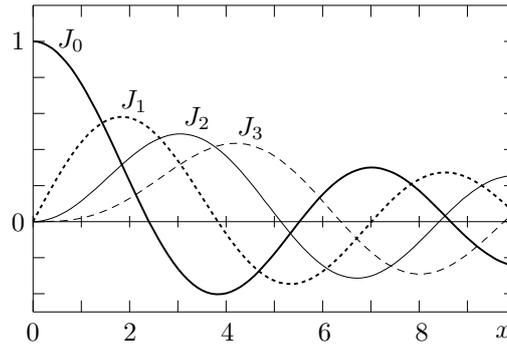
$$a_{2m} = \frac{(-1)^m \Gamma(\rho+1)}{4^m m! \Gamma(\rho+m+1)} a_0$$

になる。\$a\_0\$ は任意定数であるが、\$a\_0 = 1/(2^\rho \Gamma(\rho + 1))\$ とすれば

$$y(x) = J_\rho(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\rho \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\rho + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \quad \text{ただし } \rho = \pm \nu \quad (4.50)$$

になる。これを \$\rho\$ 次のベッセル関数という。\$2\rho = -1, -2, \dots\$ でも (4.50) は (4.45) の解になる。

下図に \$J\_0(x), J\_1(x), J\_2(x), J\_3(x)\$ を示す。一般に、ベッセル関数 \$J\_\nu(x)\$ は振動しながら減衰し、無限個のゼロ点が存在する。\$J\_0(x)\$ の場合、ゼロ点 \$\approx 2.405, 5.520, 8.654, \dots\$ になる。



\$\nu \neq 0\$ のとき微分方程式 (4.45) の解として \$J\_\nu(x)\$ と \$J\_{-\nu}(x)\$ の2つの解が得られた。\$\nu\$ が整数でない場合 \$J\_\nu(x)\$ と \$J\_{-\nu}(x)\$ は1次独立である。一方、\$n = 1, 2, 3, \dots\$ のとき

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n + m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \quad (4.51)$$

である。\$m \leq n - 1\$ のとき \$\Gamma(-n + m + 1)\$ は発散し \$1/\Gamma(-n + m + 1) = 0\$ になるから

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

\$m = n + k, k = 0, 1, \dots\$ とすると

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = (-1)^n J_n(x)$$

になる。\$J\_n(x)\$ と \$J\_{-n}(x)\$ は1次独立ではない。(4.37) より \$J\_n(x)\$ と独立な解は

$$J_n(x) \log x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (4.52)$$

と表せる。\$n = 0\$ の場合も含む。\$J\_\nu(x)\$ と1次独立な解として

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} \left( J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x) \right), \quad \nu \neq \text{整数}$$

がよく使われる。これを \$\nu\$ 次のノイマン (Neumann) 関数という。\$\nu = n\$ のとき \$N\_\nu\$ は \$0/0\$ になるから

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu = \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} \left( J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x) \right)}{\frac{\partial \sin \pi \nu}{\partial \nu}} \bigg|_{\nu=n} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right) \bigg|_{\nu=n}$$

で定義する。\$\nu\$ の微分を行えば \$\pi N\_n(x)/2\$ は (4.52) になる。

## 例題

$z > 0$  に誘電率  $\varepsilon_1$  の媒質,  $z < 0$  に誘電率  $\varepsilon_2$  の媒質があり,  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ ,  $a > 0$  に点電荷  $q$  を置く。 $z > 0$  での電位を  $V_1(\mathbf{r})$ ,  $z < 0$  での電位を  $V_2(\mathbf{r})$  とすると,  $V_i(\mathbf{r})$  は境界条件

$$V_1(x, y, 0) = V_2(x, y, 0), \quad \varepsilon_1 \left. \frac{\partial V_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial V_2}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad V_i(\mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0$$

を満たす

$$\nabla^2 V_1(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad \nabla^2 V_2(\mathbf{r}) = 0$$

の解である。 $V_1(\mathbf{r})$  は

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + U_1(\mathbf{r}), \quad \nabla^2 U_1(\mathbf{r}) = 0$$

とおける。対称性より  $V_i(\mathbf{r})$  は  $z$  と  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  の関数である ( $z$  軸まわりの角度に依存しない)。ラプラス方程式の軸対称な解  $\nabla^2 \phi(\rho, z) = 0$  を求める。(2.19) より

$$\left( \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \phi(\rho, z) = \left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \partial_z^2 \right) \phi(\rho, z) = 0$$

である。変数分離型の解  $\phi(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$  を考えると

$$\frac{1}{R} \left( \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right) = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

になる。左辺は  $\rho$  だけの関数, 右辺は  $z$  だけの関数である。両辺が任意の  $\rho, z$  で等しいためには  $k^2$  を定数として

$$\frac{1}{R} \left( \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right) = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2$$

これから  $Z(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$  になる。 $k$  は実数とは限らないが,  $Z \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$  であるためには  $k > 0$  として  $Z(z) = Ae^{-k|z|}$  である。 $R$  の微分方程式は

$$\frac{d^2 R}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dR}{d\eta} - R = 0, \quad \eta = k\rho$$

これは  $\nu = 0$  とした (4.45) であるから  $R(\rho) = CJ_0(k\rho) + DN_0(k\rho)$  になる。 $x \rightarrow 0$  のとき  $N_0(x)$  は  $\log x$  で発散するから  $D = 0$  である。変数分離型の解は  $AJ_0(k\rho)e^{-k|z|}$ ,  $k > 0$  になる。ラプラス方程式の軸対称な一般解は

$$\phi(\rho, z) = \int_0^\infty dk A(k) J_0(k\rho) e^{-k|z|}$$

になるから

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \int_0^\infty dk v_1(k) J_0(k\rho) e^{-kz}, \quad V_2(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \int_0^\infty dk v_2(k) J_0(k\rho) e^{kz}$$

とおける。境界条件は

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} + \int_0^\infty dk v_1(k) J_0(k\rho) = \int_0^\infty dk v_2(k) J_0(k\rho)$$

$$\frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} - \int_0^\infty dk kv_1(k) J_0(k\rho) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \int_0^\infty dk kv_2(k) J_0(k\rho)$$

になる。(5.42) より

$$\int_0^\infty dk e^{-ak} J_0(k\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}, \quad a \text{ で微分すると } \int_0^\infty dk k e^{-ak} J_0(k\rho) = \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}$$

これらを代入すると

$$\int_0^\infty dk J_0(k\rho) \left( e^{-ak} + v_1(k) - v_2(k) \right) = 0, \quad \int_0^\infty dk k J_0(k\rho) \left( e^{-ak} - v_1(k) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_2(k) \right) = 0$$

これから  $e^{-ak} + v_1 - v_2 = 0$ ,  $e^{-ak} - v_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_2 = 0$ , つまり

$$v_1(k) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-ak}, \quad v_2(k) = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{-ak}$$

であればよい。したがって

$$\begin{aligned} V_1(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \int_0^\infty dk e^{-k(z+a)} J_0(k\rho) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right) \end{aligned}$$

$$V_2(\mathbf{r}) = \frac{2q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^\infty dk e^{-k(a-z)} J_0(k\rho) = \frac{2q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}$$

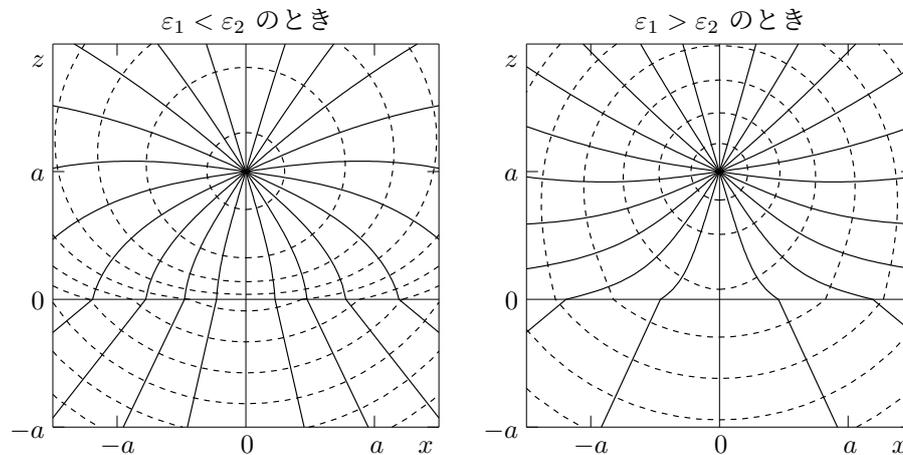
になる。この結果は鏡像法を用いれば簡単に求まる。 $y = 0$  での等電位線 (破線) と電気力線 (実線) を下図に示す。電気力線は微分方程式

$$\frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x} = \frac{\partial_z V}{\partial_x V}$$

の解である。 $z < 0$  の場合

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z-a}{x}, \quad \therefore z-a \propto x$$

になる。



## 5 複素関数

### 5.1 複素関数

複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z)$  を複素関数という。初等的な複素関数についてまとめておく。

**多項式**

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k = \text{複素数の定数}$$

複素数の和と積は定義されているから多項式は計算できる。

**有理関数**  $P(z), Q(z)$  を多項式とすると  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  を有理関数という。

**指数関数** これは既に (1.10) で定義した。2つの複素数  $z_1, z_2$  に対して加法定理

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

が成り立つ。 $x, y$  を実数として  $z = x + iy$  のとき、オイラーの公式より

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (5.1)$$

である。 $e^{z+2\pi i} = e^z$  であるから、指数関数  $e^z$  は周期  $2\pi i$  の周期関数である。

**三角関数** 実数  $x$  に対してオイラーの公式から

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

であるが、複素三角関数を

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

で定義する。実三角関数で成り立つ関係式は複素三角関数でも成り立つ。例えば

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

である。第2式は

$$\begin{aligned} (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) &= e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} \\ (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) &= e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} - e^{iz_1-iz_2} - e^{-iz_1+iz_2} \end{aligned}$$

を足し合わせれば求まる。 $z = x + iy$  とすると

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned} \quad (5.2)$$

同様にして

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad \tan z = \frac{\tan x + i \tanh y}{1 - i \tan x \tanh y} \quad (5.3)$$

である。

**対数関数** 複素数  $z$  を与えたとき  $e^w = z$  を満たす複素数  $w$  を  $w = \log z$  と定義する。  $w = \ln z$  と書くこともある。定義から  $e^{\log z} = z$  である。  $e^{w+2\pi i} = e^w$  であるから  $w = \log z$  は  $n$  を整数として  $2n\pi i$  の不定性がある多価関数である。ただし、  $\log z$  の定義より  $e^{\log z} = z$  である。  $\log z$  を実部と虚部に分けて  $\log z = u + iv$  とし、  $z$  を極形式

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

で表す。  $e^{u+iv} = re^{i\theta}$  の両辺の絶対値をとると  $|e^{iu}| = |e^{i\theta}| = 1$  であるから  $e^u = r$ 、つまり、

$$u = \log r, \quad \text{ただし、正の実数に対して } \log \text{ は実数とする。}$$

これから  $e^{iv} = e^{i\theta}$  になるから  $v = \theta + 2n\pi$  である。したがって

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi), \quad n = \text{整数}$$

1つの  $z$  に対して無限に多くの  $\log z$  の値が対応する。  $n = 0$  に制限すれば  $\log z$  は一意に決まる。このとき  $0 \leq v < 2\pi$  である。これを**対数の主値**といい  $\text{Log } z$  で表す。  $-\pi < \theta \leq \pi$  にとることもある。一価関数  $\text{Log } z$

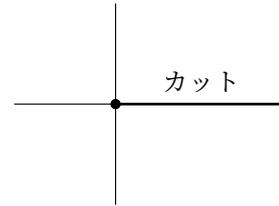
$$f(r, \theta) = \text{Log } z = \log r + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (5.4)$$

は正の実軸上では  $f(r, 0) = \log r$  であるが、複素平面の下半面から正の実軸に近づく場合

$$f(r, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 2\pi} \log r + 2\pi i$$

になるから、正の実軸上で不連続になる。この不連続性を明示するために、  $z$  の複素平面で、正の実軸に**切断線** ( カット ) を入れて表す。一価関数  $\text{Log } z$

$$\text{Log } z = \log r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$



と定義するならば、負の実軸にカットを入れる。ある点  $z_0$  の周りに  $z$  を一周させても  $f(z)$  が元の値に戻らないとき、  $z_0$  を**分岐点**という。原点は  $\log z$  の分岐点である。

**べき関数**  $a$  を複素数とするとき

$$z^a = \exp(a \log z)$$

でべき関数  $z^a$  を定義する。  $w = a \log z$  とすると  $a \neq 0$  のとき

$$(z^a)^{1/a} = (e^w)^{1/a} = \exp\left(\frac{1}{a} \log e^w\right) = e^{w/a} = e^{\log z} = z$$

である。  $z = re^{i\theta}$ 、  $(0 \leq \theta < 2\pi)$  とおくと

$$z^a = \exp\left(a \log r + ia(\theta + 2k\pi)\right), \quad k = \text{整数}$$

になり  $a \neq \text{整数}$  のとき多価関数で  $z = 0$  は  $z^a$  の分岐点になる。  $n = 2, 3, \dots$  のとき

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n} e^{2\pi i k/n}$$

である。  $e^{2\pi i k/n}$  は  $1, e^{2\pi i/n}, \dots, e^{2\pi i(n-1)/n}$  の  $n$  個の異なる値をとるから、  $z \neq 0$  のとき  $z^{1/n}$  は  $n$  価の多価関数である。  $w^n = z \neq 0$  を満たす  $n$  個の解は

$$w = z^{1/n} = r^{1/n} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

で与えられる。

$$f(z) = r^{1/n} e^{i\theta/n}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

と定義すれば、 $f(z)$  は一価関数であるが、正の実軸で不連続になる。

もっとも簡単な  $f(z) = \sqrt{z}$  について考える。

$$f_+(r, \theta) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad f_-(r, \theta) = \sqrt{r} e^{i(\theta/2+\pi)} = -f_+(r, \theta), \quad \text{ただし } 0 \leq \theta < 2\pi$$

とする。 $f_{\pm}$  は一価関数である。正の実軸上では  $f_{\pm}(r, 0) = \pm\sqrt{r}$  になる。 $z$  の複素平面の下半面から正の実軸に近づく場合

$$f_+(r, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 2\pi} -\sqrt{r}, \quad f_-(r, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 2\pi} \sqrt{r}$$

より、原点 ( $r = 0$ ) を除いた正の実軸上で  $f_{\pm}$  は不連続である。ところで

$$f_+(r, 0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} f_-(r, \theta), \quad f_-(r, 0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} f_+(r, \theta)$$

であるから  $f_{\pm}(z)$  は正の実軸上で互いに滑らかにつながる。そこで  $f_{\pm}(z)$  が定義された2つの複素平面  $C_{\pm}$  を考えると

$$C_+ \text{ の正の実軸の上側の } f_+(z) = C_- \text{ の正の実軸の下側の } f_-(z)$$

$$C_+ \text{ の正の実軸の下側の } f_+(z) = C_- \text{ の正の実軸の上側の } f_-(z)$$

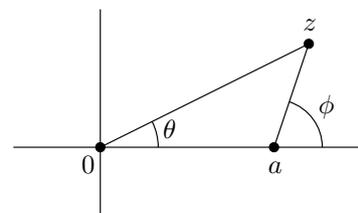
であるから、 $C_+$  の正の実軸の上側と  $C_-$  の正の実軸の下側をつなぎ、 $C_+$  の正の実軸の下側と  $C_-$  の正の実軸の上側をつないだ2枚の複素平面  $C$  に対して

$$F(z) = \begin{cases} f_+(z), & z \text{ が } C_+ \text{ 上のとき} \\ f_-(z), & z \text{ が } C_- \text{ 上のとき} \end{cases}$$

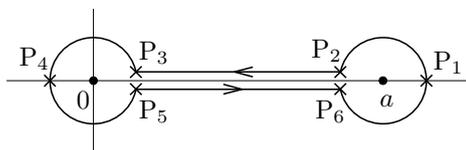
と定義すれば、 $F(z)$  は  $C$  上で一価関数になる。 $C$  を  $\sqrt{z}$  のリーマン面という。原点を2周すると元の点に戻る。

$a > 0$  のとき  $\sqrt{z(z-a)}$  のカットについて考える。この場合  $z = 0, a$  が分岐点である。図のように角度  $\theta, \phi$  をとり

$$z = r e^{i\theta}, \quad z - a = \rho e^{i\phi}, \quad \text{ただし } r \geq 0, \quad \rho \geq 0$$



とし  $f(z) = \sqrt{r\rho} e^{i(\theta+\phi)/2}$  を考える。 $r, \theta$  を与えれば  $\rho e^{i\phi} = r e^{i\theta} - a$  から  $\rho, \phi$  は決まる。



点	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>1</sub>
$\theta$	0	0	0	$\pi$	$2\pi$	$2\pi$	$2\pi$
$\phi$	0	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$2\pi$

上図のように、点  $P_1$  を出発点にして2つの分岐点を囲む経路に沿って1周する場合、 $P_1$  では  $\theta = 0, \phi = 0$ ,  $P_2$  では  $\theta = 0, \phi = \pi$  である。同様に、経路に沿った位相の変化をまとめると表になる。1周して  $P_1$  に戻ると位相  $(\theta + \phi)/2$  の変化は  $2\pi$  になるから、 $f(z)$  は2つの分岐点を囲む経路に沿っては1価である。一方、例えば、 $z = 0$  だけを囲む経路を1周すると、 $\phi$  は出発点の値に戻るが  $\theta$  は  $2\pi$  増加するから、 $f(z)$  は  $-f(z)$  になり1価関数ではない。したがって、 $0 \leq z \leq a$  にカットを入れて、このカットを横切れないようにすれば、 $f(z)$  は1価関数になる。位相を比較すれば  $f(P_3) = -f(P_5)$  である。 $P_2$  と  $P_6$  でも同様である。カットの両側で  $f(z)$  は不連続になる。

## 5.2 複素関数の微分

$f(z)$  を複素平面上のある領域  $D$  で定義された関数とする。 $z \in D$  のとき、 $z$  を中心とした微小な半径  $\varepsilon > 0$  の円内の領域が  $D$  に含まれるとする。 $D$  が境界線を含むとき、 $z$  が境界線上の点ならば、これを満たさない。以下では  $D$  は境界線を含まない開領域とする。 $0 < |\Delta z| < \varepsilon$  として

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (5.5)$$

が存在するとき、 $f(z)$  は微分可能であるという。複素平面のどの方向から  $z$  に近づいても、同じ極限値に収束しなければならない。この極限値を  $df/dz$  または  $f'(z)$  で表す。実関数の場合と同様に

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z), \quad (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = g'(z)f'(g(z)), \quad g(z) \neq 0 \text{ のとき } \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

である。複素平面上のある領域  $D$  内のすべての点で微分可能であるとき、 $f(z)$  は  $D$  で正則といい、 $f(z)$  を正則関数という。 $f(z)$  が  $z = z_0$  で微分可能でないとき、この点を  $f(z)$  の特異点という。 $z \in D$  での微分を考えるとき、

**微分の例**  $n$  を自然数とするとき、二項定理より

$$\frac{dz^n}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( n z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \Delta z + \dots \right) = n z^{n-1}$$

指数関数の場合

$$e^{z+\Delta z} = e^z e^{\Delta z} = e^z \left( 1 + \Delta z + \frac{1}{2}(\Delta z)^2 + \dots \right), \quad \therefore \frac{de^z}{dz} = e^z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta z}{2} + \dots \right) = e^z$$

これから

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z$$

対数関数  $w = \log z$  は  $e^w = z$  の両辺を微分すると

$$\frac{dw}{dz} e^w = 1, \quad \therefore \frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}$$

になる。 $f(z) = z^*$  は任意の点で微分不可能である。実際

$$\delta = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z}$$

$\Delta z$  が実数のとき  $\delta = 1$ 、 $\Delta z$  が純虚数のとき  $\delta = -1$  になるから、(5.5) の極限値は存在しない。同様に  $\operatorname{Re} z$ 、 $\operatorname{Im} z$  も任意の点で微分不可能である。 $f(z) = |z|^2 = z z^* = x^2 + y^2$  の場合

$$\delta = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = z^* + z \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z}$$

$z = 0$  のときだけ  $\Delta z$  に無関係に  $\delta = 0$  であるから微分可能で  $d(z z^*)/dz|_{z=0} = 0$  である。

### コーシー・リーマンの微分方程式

$f(z)$  が微分可能である条件を求める。 $x, y$  を実数として  $z = x + iy$  とし、 $f(z)$  の実部と虚部をそれぞれ  $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$  とすると  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  である。このとき

$$\begin{aligned} \delta(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta x + i \Delta y} + i \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta x + i \Delta y} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

は  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \varepsilon e^{i\phi}$  とおくと

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= u(x + \varepsilon \cos \phi, y + \varepsilon \sin \phi) - u(x, y) \\ &= \varepsilon \left( u_x(x, y) \cos \phi + u_y(x, y) \sin \phi + O(\varepsilon) \right), \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ など} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{-i\phi} \left( u_x \cos \phi + u_y \sin \phi + iv_x \cos \phi + iv_y \sin \phi + O(\varepsilon) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u_x - iu_y + iv_x + v_y + e^{-2i\phi} \left( u_x + iu_y + iv_x - v_y \right) \right) \end{aligned}$$

微分可能である条件は  $\delta$  が  $\phi$  に依存しないことであるから

$$u_x + iu_y + iv_x - v_y = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$u(x, y), v(x, y)$  は実数であるから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.7)$$

になる。これをコーシー・リーマンの微分方程式という。この条件が成り立つとき

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left( u_x - iu_y + iv_x + v_y \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.8)$$

である。 $u(x, y), v(x, y)$  が連続ならば  $f(z)$  も連続であるが、 $f(z)$  が微分可能である条件は、 $u(x, y), v(x, y)$  が微分可能であるだけでなく (5.7) を満たす必要があり、極めて強い条件である。(5.8) は、(5.6) において実軸に沿った極限  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0$  での値と虚軸に沿った極限  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  での値が等しいことと同値である。

- (5.7) の第 1 式を  $x$  で偏微分し、第 2 式を  $y$  で偏微分したものを加えると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{同様にして} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (5.9)$$

である。 $u(x, y), v(x, y)$  は 2 次元のラプラス方程式を満たす。

- $z = x + iy$  を与えれば  $z^* = x - iy$  は一意に決まるから、 $z$  と  $z^*$  は独立ではない。しかし、あたかも独立変数のように扱い  $z, z^*$  に関する偏微分を考える。 $x = (z + z^*)/2, y = (z - z^*)/(2i)$  であるから偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial x}{\partial z^*} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z^*} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

で定義する。 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  を代入すると、(5.7), (5.8) より

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{u_x - v_y + i(v_x + u_y)}{2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{u_x + v_y + i(v_x - u_y)}{2} = \frac{df}{dz}$$

になる。コーシー・リーマンの微分方程式は  $\partial f / \partial z^* = 0$  と表せる。これから  $f(z) = z^*$  は微分不可能、 $f(z) = |z|^2 = zz^*$  は  $z = 0$  だけ微分可能である。

- $z$  を極形式で表して  $z = re^{i\theta}$  とする。

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{df}{dz} = e^{i\theta} \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{df}{dz} = ire^{i\theta} \frac{df}{dz} = ir \frac{\partial f}{\partial r}$$

であるから、極座標によるコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} = ir \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r}$$

を得る。(2.17)を用いて(5.7)を書き直してもよい。

**問題 5.1** (5.1), (5.2), (5.3) の場合, 具体的に微分して(5.7)が成り立ち,  $f'(z)$  が(5.8)で与えられることを示せ。また,  $f(z) = z^*$  の場合には(5.7)が成り立たないことを示せ。

**問題 5.2** 正則関数  $f(z)$  が任意の  $z$  で  $f'(z) = 0$ ,  $\operatorname{Re} f(z) = \text{定数}$ ,  $|f(z)| = \text{定数}$  のどれかを満たせば,  $f(z)$  は定数になることを示せ。

**問題 5.3** ある領域  $D$  と実軸に関して対称な領域を  $D^*$  とする。 $D$  で  $f(z)$  が正則な場合,  $D^*$  で  $g(z) = (f(z^*))^*$  は正則になる, つまり  $\partial g(z)/\partial z^* = 0$  を示せ。

**問題 5.4** 極形式で表して  $z = re^{i\theta}$ ,  $f(z) = R(r, \theta) \exp(i\Theta(r, \theta))$  とする。コーシー・リーマンの微分方程式が

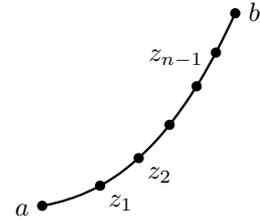
$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -rR \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad R \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = r \frac{\partial R}{\partial r}$$

になることを示せ。

### 5.3 複素積分

ガウス平面(複素平面)上の2点  $a, b$  を考える。 $a$  を始点とし  $b$  を終点とする曲線  $C$  を  $n$  個に分割し,  $k$  番目の点を  $z_k$  とする。ただし,  $a = z_0$ ,  $b = z_n$  である。 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$  として和

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \quad (5.10)$$



を考える。すべての  $\Delta z_k$  が 0 になるように  $n \rightarrow \infty$  とするとき,  $S_n$  の極限值  $S$  を

$$S = \int_C f(z) dz \quad (5.11)$$

で表す。これを積分路  $C$  に沿った  $f(z)$  の複素積分という。複素積分の値は, 始点  $a$ , 終点  $b$  だけでなく, 一般に積分路の取り方にも依存する。どのような積分路に沿った積分かを明記するために, 積分記号の下に積分路  $C$  を書く。(5.11)において,  $z$  は任意の点ではなく積分路  $C$  上の点である。また,  $dz$  は  $C$  に沿った  $a$  から  $b$  に向かう微小変位である。積分路  $C$  には向きがある。曲線  $C$  に沿って逆向きの積分路を  $-C$  で表すと  $\Delta z_k$  は  $-\Delta z_k$  になるから

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

である。 $C$  が閉曲線で  $a = b$  の場合, 線積分と同様に  $\oint_C f(z) dz$  と書くこともある。

複素積分は  $xy$  平面上の線積分で表せる。 $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  を用いれば

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_C (v(x, y) dx + u(x, y) dy) \end{aligned} \quad (5.12)$$

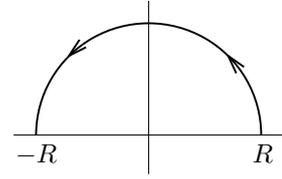
になる。各々の積分は実関数 (変数を実数である関数) の線積分である。

始点  $a$  と終点  $b$  を結ぶ曲線  $C$  上の点  $z$  が, 実数の変数  $t$  の関数  $z = z(t)$  で表せ  $a = z(t_a), b = z(t_b)$  のとき

$$\int_C dz f(z) = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{dz}{dt} f(z(t))$$

である。右図の半径  $R$  の半円  $C$  の場合  $z = Re^{i\theta}, \theta: 0 \rightarrow \pi$  であるから

$$\int_C dz f(z) = iR \int_0^\pi d\theta e^{i\theta} f(Re^{i\theta})$$



になる。

複素積分を評価するとき以下の不等式は有用である。  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  であるから (5.10) より

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| \Delta s_k, \quad \Delta s_k = |\Delta z_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

極限をとれば

$$\left| \int_C dz f(z) \right| \leq \int_C ds |f(z)|, \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{5.13}$$

になる。経路が変数  $t$  で表せるならば

$$\left| \int_C dz f(z) \right| \leq \int_{t_a}^{t_b} dt \left| f(z) \frac{dz}{dt} \right|, \quad \text{ただし } t_a < t_b$$

である。

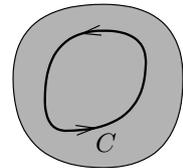
### 5.4 コーシーの積分定理

自分自身と交わらない (閉) 曲線を **単純 (閉) 曲線** という。また, 複素平面上の領域  $D$  で,  $D$  内を通る任意の単純閉曲線の内部が  $D$  に含まれるとき,  $D$  を **単連結領域** という。つまり, 穴の開いていない領域を単連結領域という。

$f(z)$  は複素平面の単連結領域  $D$  で正則とする。  $D$  内の閉曲線  $C$  に沿った複素積分を考える。  $C$  は単純閉曲線である必要はない。(5.12) にグリーンの定理 (3.43) を適用する。閉曲線  $C$  の内部の領域  $R$  では (5.7) が成り立つから

$$\oint_C f(z) dz = \int_R dx dy \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \int_R dx dy \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

になる。これを **コーシーの積分定理** といい, 複素積分で最も重要な定理である。なお, 図のように, 反時計回りに閉曲線をまわる向きを **正方向**, 逆の向きを **負方向** という。通常は, 正方向に積分する。



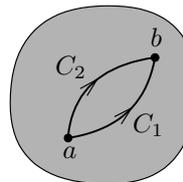
#### 原始関数

単連結領域  $D$  内の 2 点  $a, b$  を  $a$  から  $b$  に向かう  $D$  内の積分路を  $C_1, C_2$  とする。  $C_2$  と逆方向の積分路  $-C_2$  と  $C_1$  は閉曲線をなすからコーシーの積分定理より

$$0 = \int_{C_1} dz f(z) + \int_{-C_2} dz f(z) = \int_{C_1} dz f(z) - \int_{C_2} dz f(z)$$

したがって, 積分は両端の  $a, b$  にだけ依存し途中の経路に依存しない。  $a$  を固定すると積分は  $b$  だけの関数になる。  $b$  を  $z$  と書き直せば

$$F(z) = \int_a^z dz' f(z')$$



である。  $\Delta z \rightarrow 0$  のとき

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} dz' f(z') = f(z)\Delta z, \quad \therefore F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

である。一般に、  $dG/dz = f(z)$  を満たす正則関数  $G(z)$  を  $f(z)$  の原始関数という。  $F(z)$  は原始関数の1つである。  $F'(z) - G'(z) = 0$  であるから  $F(z) - G(z) = \text{定数} = A$  になる。  $F(a) = 0$  より  $A = -G(a)$  になるから

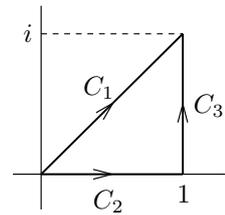
$$\int_a^z dz' f(z') = G(z) - G(a)$$

単連結領域で正則ならば、その領域内の積分は始点と終点だけで決まり原始関数が存在する。

通常、実関数の積分は原始関数を求めることだが、以下の複素関数の積分では、原始関数は現れない。

**例題**  $f(z) = z$  を右図の経路  $C_1$  と  $C_2 + C_3$  に沿って積分する。  $C_1$  上の  $z$  は  $z = (1 + i)t, 0 \leq t \leq 1$  と表せるから

$$I_1 = \int_{C_1} dz z = \int_0^1 dt \frac{dz}{dt} z = (1 + i)^2 \int_0^1 dt t = i$$



$C_2$  では  $z = x, 0 \leq x \leq 1$  であり  $C_3$  では  $z = 1 + ix, 0 \leq x \leq 1$  になるから

$$I_{2+3} = \int_{C_2} dz z + \int_{C_3} dz z = \int_0^1 dx x + i \int_0^1 dx (1 + ix) = i$$

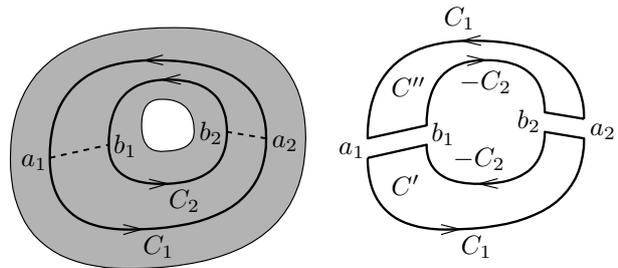
$f(z) = z$  は正則であるから積分は経路に依らない。原始関数は  $G(z) = z^2/2 + \text{定数}$  になるから  $I_1 = I_{2+3} = G(1 + i) - G(0) = i$  である。  $f(z) = z^*$  の場合

$$I_1 = \int_{C_1} dz z^* = (1 + i)(1 - i) \int_0^1 dt t = 1, \quad I_{2+3} = \int_0^1 dx x + i \int_0^1 dx (1 - ix) = 1 + i$$

$z^*$  は正則ではないから積分は経路に依存する。

**積分路の変更**

右図において  $f(z)$  が空白部分を除いた領域  $D$  で正則とする。  $C_1$  と  $C_2$  を  $D$  内の単純閉曲線とし  $C_2$  は  $C_1$  の内部にあるとする。積分の方向は同じ向きにとる。  $C_1$  と  $C_2$  を  $a_1, b_1$  及び  $a_2, b_2$  で結ぶ。このとき、右側の図のように



$$C' : a_1 \xrightarrow{C_1} a_2 \rightarrow b_2 \xrightarrow{-C_2} b_1 \rightarrow a_1, \quad C'' : a_1 \rightarrow b_1 \xrightarrow{-C_2} b_2 \rightarrow a_2 \xrightarrow{C_1} a_1$$

という2つの閉曲線の積分路を考えると、コーシーの積分定理より

$$I = \oint_{C'} dz f(z) + \oint_{C''} dz f(z) = 0$$

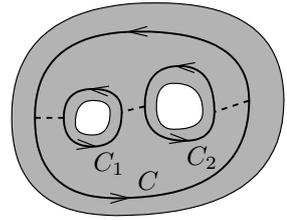
である。  $a_1$  と  $b_1$  を結ぶ部分の積分は  $C'$  では  $b_1 \rightarrow a_1$ ,  $C''$  では  $a_1 \rightarrow b_1$  であり逆方向になるから  $I$  では打ち消しあう。同様に  $a_2$  と  $b_2$  を結ぶ部分の積分も打ち消しあい

$$I = \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{-C_2} dz f(z) = 0, \quad \therefore \oint_{C_1} dz f(z) = \oint_{C_2} dz f(z)$$

である。

更に, 2つの部分を除いた領域  $D$  で正則であるとき, 右図の様な  $D$  内の積分路を考える。  $C_1$  と  $C_2$  を  $C$  の内部にある単純閉曲線とし,  $C_1$  と  $C_2$  は互いに外部にある。このとき, 上と同様にして

$$\oint_C dz f(z) = \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) \quad (5.14)$$

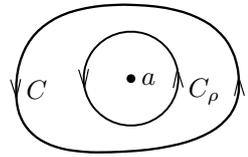


これは  $n$  個の場合に一般化できる。正則でない領域を横切らない限り, 積分路を変更しても積分は変わらない。この性質は重要である。

**例題 1** 点  $a$  を内部に含む正方向の単純閉曲線を  $C$  とする。整数  $k$  に対して

$$I_k = \oint_C dz (z-a)^k = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ 0, & k \neq -1 \end{cases} \quad (5.15)$$

を示す。  $k \geq 0$  のとき  $(z-a)^k$  は任意の点で正則であるから  $I_k = 0$  である。  $k < 0$  の場合,  $(z-a)^k$  は  $z = a$  以外では正則であるから, 積分路は  $z = a$  を横切らなければ変更してもよい。そこで,  $z = a$  を中心とした半径  $\rho$  の円周を  $C_\rho$  とすると,  $C_\rho$  上では  $z = a + \rho e^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$  であるから



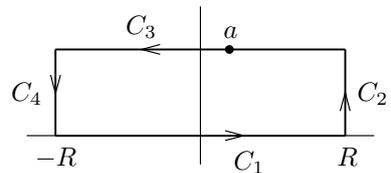
$$I_k = \oint_{C_\rho} dz (z-a)^k = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{dz}{d\theta} (\rho e^{i\theta})^k = i \rho^{k+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(k+1)\theta} = \begin{cases} 2\pi i, & k+1 = 0 \\ 0, & k+1 \neq 0 \end{cases}$$

$k \leq -2$  のとき  $(z-a)^k$  は  $z = a$  で正則ではないが周積分は 0 になる。

**例題 2**  $a$  が複素定数のとき

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+a)^2} = \sqrt{\pi} \quad (5.16)$$

を示す。実数の場合, (3.25) より明らかである。  $\text{Im } a > 0$  の場合を考えれば十分である。図のような長方形の積分路を  $C$  とする。  $e^{-z^2}$  は正則であるから, コーシーの積分定理より



$$\oint_C dz e^{-z^2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad \text{ただし} \quad I_k = \int_{C_k} dz e^{-z^2}$$

である。  $C_1$  上では  $z = x$ ,  $x: -R \rightarrow R$ ,  $C_3$  上では  $z = x + a$ ,  $x: R \rightarrow -R$  であるから

$$I_1 = \int_{-R}^R dx e^{-x^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad I_3 = \int_R^{-R} dx e^{-(x+a)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -I(a)$$

$C_2$  上では  $z = R + ix$ ,  $x: 0 \rightarrow b = \text{Im } a$  であるから

$$|I_2| = \left| i \int_0^b dx e^{-(R+ix)^2} \right| \leq \int_0^b dx |e^{-(R+ix)^2}| = e^{-R^2} \int_0^b dx e^{x^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad |I_4| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} - I(a)$  になるから (5.16) が成り立つ。

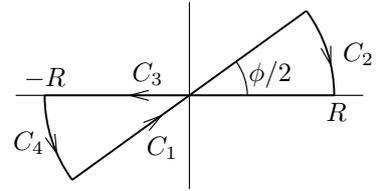
**問題 5.5**  $a$  を実数とするとき

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \cos(2ax) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}, \quad \int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \sin(2ax) = e^{-a^2} \int_0^a dx e^{x^2}$$

を示せ。上図において  $C_4$  を虚軸上にとる。

**例題 3**  $e^{-ax^2}$  の積分 (3.25) が  $\operatorname{Re} a \geq 0$  である複素数でも成り立つことを示す。 $a$  を極形式で表して  $a = |a|e^{i\phi}$  とすると  $\operatorname{Re} a \geq 0$  より  $|\phi| \leq \pi/2$  である。 $z = \sqrt{|a|}e^{i\phi/2}x$  とすると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \frac{e^{-i\phi/2}}{\sqrt{|a|}} \int_{C_1} dz e^{-z^2}$$



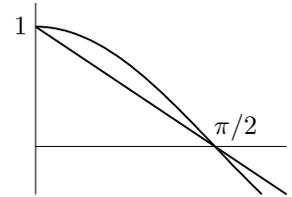
$C_1$  は原点を通る傾き  $\tan(\phi/2)$  の直線である。図のような閉曲線  $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  を考えると、 $e^{-z^2}$  は正則であるから

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad I_k = \int_{C_k} dz e^{-z^2}$$

$C_2$  上では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: \phi \rightarrow 0$  とおけるから

$$|I_2| \leq \frac{R}{2} \int_0^{|\phi|} d\theta |\exp(-R^2 e^{i\theta})| = \frac{R}{2} \int_0^{|\phi|} d\theta \exp(-R^2 \cos \theta)$$

右図より  $0 \leq \theta \leq |\phi| \leq \pi/2$  のとき  $\cos \theta \geq 1 - 2\theta/\pi$ ,  $1 - 2|\phi|/\pi \geq 0$  になるから



$$|I_2| \leq \frac{R}{2} \int_0^{|\phi|} d\theta e^{-R^2(1-2\theta/\pi)} = \frac{\pi}{4R} \left( e^{-R^2(1-2|\phi|/\pi)} - e^{-R^2} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

同様に  $I_4 \rightarrow 0$  である。実軸に沿った積分  $I_3$  は  $I_3 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\sqrt{\pi}$  になるから

$$I_1 - \sqrt{\pi} = 0, \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \frac{I_1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{ただし } \sqrt{a} = \sqrt{|a|}e^{i\phi/2}, \quad |\phi| \leq \pi/2$$

である。

$k$  を正の実数として  $a = ik$  の場合  $\phi = \pi/2$  であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-i\pi/4}, \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(kx^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin(kx^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

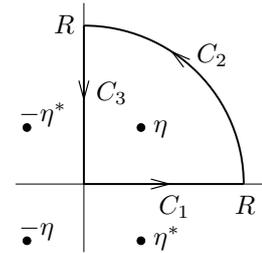
を得る。これをフレネル積分という。

**例題 4** 右図の閉曲線  $C = C_1 + C_2 + C_3$  に沿って  $1/(z^4 + 1)$  を積分して

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tag{5.17}$$

を求める ((5.56) 参照)。 $\eta = e^{i\pi/4}$  とすると

$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{\eta^*}{4} \left( \frac{1}{z + \eta^*} - \frac{1}{z - \eta^*} \right) + \frac{\eta}{4} \left( \frac{1}{z + \eta} - \frac{1}{z - \eta} \right) \tag{5.18}$$



に分解できる。 $1/(z - \eta)$  以外は閉曲線  $C$  の内部で正則であるから、コーシーの積分定理より、これらの積分は 0 である。 $1/(z - \eta)$  の積分は (5.15) より  $2\pi i$  になるから

$$\oint_C dz \frac{1}{z^4 + 1} = -\frac{i\pi}{2} \eta = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (1 - i) \tag{5.19}$$

一方

$$\oint_C dz \frac{1}{z^4 + 1} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_k = \int_{C_k} dz \frac{1}{z^4 + 1}$$

$C_1$  上では  $z = x$ ,  $x: 0 \rightarrow R$ ,  $C_3$  上では  $z = ix$ ,  $x: R \rightarrow 0$  であるから

$$I_1 + I_3 = \int_0^R dx \frac{1}{x^4 + 1} + i \int_R^0 dx \frac{1}{(ix)^4 + 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (1 - i) \int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^4 + 1}$$

$C_2$  上では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow \pi/2$  であるから

$$|I_2| \leq \int_0^{\pi/2} d\theta \left| \frac{iRe^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 1} \right| \leq \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{R}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

したがって (5.17) を得る。

実関数の定積分に複素積分を適用すると、原始関数を用いずに定積分が求められる。原始関数が複雑であったり、初等関数では表せない場合、特に有効である。なお、(5.18) のように変形したが、これは (5.15) を利用するためである。留数定理 (5.33) を用いれば (5.19) は直ちに求められる。

**問題 5.6**  $1/(x^4 + 1)$  を  $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1$  の部分分数に分解し原始関数を求めよ。

### コーシーの積分公式

$f(z)$  は領域  $D$  で正則とする。 $D$  内の単純閉曲線を正方向のまわる積分路を  $C$  とする。このとき、 $z$  を  $C$  内の任意の点として  $f(\eta)/(\eta - z)$  を  $\eta$  について積分する。 $f(\eta)/(\eta - z)$  は  $\eta \neq z$  で正則であるから、積分路  $C$  は  $\eta = z$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の円に置き換えてよい。 $\varepsilon$  は任意である。円が  $D$  内にあれば  $\eta = z + \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  であるから

$$\oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{\eta - z} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\eta}{d\theta} \frac{f(\eta)}{\eta - z} = i \int_0^{2\pi} d\theta f(z + \varepsilon e^{i\theta}) \quad (5.20)$$

この積分は半径  $\varepsilon$  には依存しない。そこで、 $\varepsilon \rightarrow +0$  の極限を考えれば

$$\oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{\eta - z} = i \int_0^{2\pi} d\theta f(z) = 2\pi i f(z), \quad \therefore f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{\eta - z} \quad (5.21)$$

になる。これを **コーシーの積分公式** という。 $C$  内における正則関数の値は、 $C$  上の値だけで完全に決まる。(5.20), (5.21) より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(z + \varepsilon e^{i\theta}) \quad (5.22)$$

である。 $f(z)$  は  $z$  を中心とする円周上の平均値である。これを複素関数の**平均値の定理**という。

(5.21) の両辺を単純に  $z$  で微分すれば

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} \quad (5.23)$$

である。実関数の場合、 $f(x)$  が微分可能であっても  $f'(x)$  は微分可能とは限らないが、複素関数は微分可能 (正則関数) ならば、何回でも微分可能である。(5.23) を数学的帰納法で示す。(5.21) より

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{(\eta - z - h)(\eta - z)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^2}$$

であるから、(5.23) は  $n = 1$  のとき成り立つ。 $n = k$  のとき成り立つとすると

$$\frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{h} \frac{(\eta - z)^{k+1} - (\eta - z - h)^{k+1}}{(\eta - z - h)^{k+1}(\eta - z)^{k+1}}$$

分子の  $(\eta - z - h)^{k+1}$  を二項展開すれば

$$\frac{1}{h} \frac{(\eta - z)^{k+1} - (\eta - z - h)^{k+1}}{(\eta - z - h)^{k+1}(\eta - z)^{k+1}} = \frac{(k+1)(\eta - z)^k + O(h)}{(\eta - z - h)^{k+1}(\eta - z)^{k+1}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{k+1}{(\eta - z)^{k+2}}$$

になるから、(5.23) は  $n = k + 1$  のときも成り立つ。

### 最大値の原理

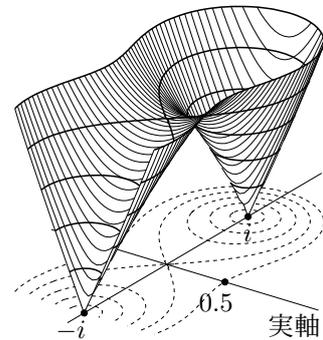
$f(z)$  が正則である領域  $D$  内の点  $z$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の円周  $z + \varepsilon e^{i\theta}$  を考える。 $|f(z)|$  が極大ならば  $\varepsilon$  が微小のとき  $|f(z + \varepsilon e^{i\theta})| < |f(z)|$  である。(5.22) より

$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} d\theta f(z + \varepsilon e^{i\theta}) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| < \frac{|f(z)|}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = |f(z)|$$

になり矛盾する。したがって、 $D$  の内部で  $|f(z)|$  は極大にならない。 $f(z) \neq 0$  ならば  $1/f(z)$  も正則であるから、 $1/|f(z)|$  は極大にならない、つまり、 $|f(z)|$  は極小にもならない。 $f(z) = 0$  を満たす点があれば  $|f(z)|$  は最小値 0 になる。この場合を除いて  $|f(z)|$  は極値をとらない。

$D$  を閉曲線  $C$  とその内部とする。 $C$  の内部で  $|f(z)|$  は極大にならないから、 $f(z) \neq$  定数の場合、 $D$  における  $|f(z)|$  の最大値は  $C$  上の点を与える。これを**最大値の原理**という。また、 $D$  で  $f(z)$  が 0 にならないならば、 $|f(z)|$  の最小値も  $C$  上でとる。

右図は  $|f(z)| = |z^2 + 1|$  の 3 次元プロットである。 $f(\pm i) = 0$  であり  $z \neq \pm i$  では  $|f(z)|$  は極値にならない。 $|z| \leq \rho$  の領域では、 $|f(z)|$  は境界上の点  $z = \pm \rho$  で最大になる。 $\rho \leq 1$  ならば境界上の点  $z = \pm i\rho$  で  $|f(z)|$  は最小になり、 $\rho > 1$  では  $z = \pm i$  で最小になる。 $f'(0) = 0$ 、 $f''(0) = 2$  であるが、 $z = 0$  で  $|f(z)|$  は極値にならない。実軸上では  $|f(z)| = x^2 + 1$  より  $z = 0$  で極小になるが、虚軸上では  $|f(z)| = |1 - y^2|$  であるから極大になり、 $z = 0$  は  $|f(z)|$  の鞍点である (141 ページ参照)。



### コーシーの不等式

(5.23) で  $C$  として  $z$  を中心とした半径  $r$  の円を考えると

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{f(z + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^n}, \quad \therefore |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} d\theta |f(z + re^{i\theta})|$$

になる。 $|f(z + re^{i\theta})| \leq M(r)$  ならば**コーシーの不等式**

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M(r)}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{n!M(r)}{r^n}$$

が成り立つ。

**リウビルの定理** 全領域において正則で有界な関数は定数である。

任意の  $z$  に対して  $|f(z)| \leq M$  である定数  $M$  が存在する。 $z$  を中心とした半径  $r$  の円の経路を考えると、コーシーの不等式より  $|f'(z)| \leq M/r$  である。 $r$  は任意であるから、 $r \rightarrow \infty$  でも成り立たなければならない。したがって、任意の  $z$  に対して  $f'(z) = 0$  になるから  $f(z)$  は定数である。

実変数  $x$  の関数とは非常に異なる性質である。例えば、 $\sin x$  は任意の点で微分可能で  $|\sin x| \leq 1$  であるが、定数ではない。リウビルの定理を言い換えれば、定数でない正則関数の場合、無限遠を含む全複素平面上のどこかで発散する。 $\sin z$  も  $\sin(iR) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$  である。

### 代数学の基本定理

係数が複素数である  $n$  次の多項式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

を考える。代数方程式  $f(z) = 0$  には  $n$  個の複素解が存在することを示す。

$f(z) = 0$  の解が存在しないとすると,  $1/f(z)$  は任意の点で正則である。 $|z| \rightarrow \infty$  のとき  $|f(z)| \rightarrow \infty$  になるから, 十分大きな  $R$  に対して  $|z| > R$  のとき  $1/|f(z)| < M$  となる定数  $M$  が存在する。 $|z| = R$  上での  $1/|f(z)|$  の最大値  $N$  は有界である。最大値の原理から  $|z| \leq R$  のとき  $1/|f(z)| \leq N$  になる。したがって, 全領域で  $1/f(z)$  は有界になるから, リウビルの定理より  $1/f(z)$  は定数でなければならない。これは  $f(z)$  が定数でないことと矛盾するから,  $f(z) = 0$  は少なくとも1つ解をもつ。 $f(z_1) = 0$  とすると  $f(z)/(z - z_1)$  は  $n - 1$  次の多項式になり, 少なくとも1つ解をもつ。これを繰り返せば,  $f(z) = 0$  には  $n$  個の解 (重根を含む) が存在する。

### ポアソンの公式

ある領域  $D$  の境界上 (2次元なら閉曲線, 3次元なら閉曲面) で与えられた関数になり,  $D$  でラプラス方程式  $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0$  を満たす関数  $u(\mathbf{r})$  を求める問題をディリクレ問題という。

2次元の場合, 正則関数  $f(z)$  の実部あるいは虚部は (5.9) よりラプラス方程式を満たす。コーシーの積分公式 (5.21) を用いて,  $D$  が原点を中心とした半径  $R$  の円  $C$  の内部の場合, ディリクレ問題を解く。 $z = re^{i\theta}$  が円内部の点 ( $r < R$ ) のとき  $R^2/z^*$  は円外部の点である。したがって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{\eta - z}, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{f(\eta)}{\eta - R^2/z^*}$$

両者の差をとれば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \left( \frac{1}{\eta - z} - \frac{1}{\eta - R^2/z^*} \right) f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{|z|^2 - R^2}{\eta(\eta - z)(z^* - R^2/\eta)} f(\eta)$$

$\eta$  は  $C$  上の点であるから  $\eta = Re^{i\phi}$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  とおける。 $d\eta = i\eta d\phi$ ,  $R^2/\eta = \eta^*$  より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R^2 - r^2}{|\eta - z|^2} f(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} f(\eta)$$

したがって, ラプラス方程式の解  $u(r, \theta) = \text{Re}f(z)$  は

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} u(R, \phi) \quad (5.24)$$

になる。これが円上での  $u(R, \phi)$  を与えたときのラプラス方程式の解でありポアソンの公式という。

**問題 5.7** (5.24) の  $u(r, \theta)$  が (2.19) 参照)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(r, \theta) = 0$$

を満たすことを確かめよ。また,  $r \rightarrow R$  とすると (5.24) の積分が  $u(R, \theta)$  になることを示せ。

## 5.5 テイラー展開とローラン展開

### テイラー展開

複素数  $\alpha$  に対して

$$\sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, \quad \therefore \frac{1}{1 - \alpha} = \sum_{k=0}^n \alpha^k + \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

であるから,  $z' \neq a$  のとき  $\alpha = (z - a)/(z' - a)$  とすると

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - a} \frac{1}{1 - \alpha} = \sum_{k=0}^n \frac{(z - a)^k}{(z' - a)^{k+1}} + \frac{1}{z' - z} \left( \frac{z - a}{z' - a} \right)^{n+1} \quad (5.25)$$

$C$  を  $f(z)$  が正則な領域  $D$  内の正方向の単純閉曲線とし,  $z$  を  $C$  内部の点とすると, (5.21) より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{z' - z} = \sum_{k=0}^n A_k (z - a)^k + R_n(z)$$

ただし

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{(z' - a)^{k+1}}, \quad R_n(z) = \frac{(z - a)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{(z' - z)(z' - a)^{n+1}} \quad (5.26)$$

$C$  として  $a$  を中心とした半径  $\rho$  の円を考える。  $z' = a + \rho e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  とおけるから

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - a)^{n+1}}{\rho^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \frac{f(z')}{(z' - z)}$$

$r = |z - a|$  とする。  $|z' - z| \geq \rho - r$  であるから

$$|R_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|z - a|^{n+1}}{\rho^n} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|f(z')|}{|z' - z|} = \frac{1}{2\pi} \frac{r}{\rho - r} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \int_0^{2\pi} d\theta |f(z')|$$

$r < \rho$  より  $|R_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  になるから, 正則領域  $D$  に含まれる  $|z - a| < \rho$  において, テイラー展開

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - a)^k, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{(z' - a)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (5.27)$$

が成り立つ。ここで (5.23) を用いた。  $f(z)$  の右辺のべき級数を **テイラー級数** という。実関数と同様に,  $a = 0$  のときマクローリン級数という。べき級数の解析的性質は 133 ページで考察する。

### ローラン展開

正則でない点を中心とする展開もできる。  $a$  を中心とする領域  $D = \{z \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$  で  $f(z)$  は正則とする。図の正方向の積分路を考えると (5.14) より

$$\oint_{C_2} dz' \frac{f(z')}{z' - z} = \oint_{C_1} dz' \frac{f(z')}{z' - z} + \oint_{C_z} dz' \frac{f(z')}{z' - z}$$

コーシーの積分公式 (5.21) より右辺第 2 項は  $2\pi i f(z)$  になるから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz' \frac{f(z')}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz' \frac{f(z')}{z' - z}$$

$|z' - a| \leq R_1$  において  $f(z')$  が正則ならば,  $C_1$  内部では  $f(z')/(z' - z)$  は正則になり第 2 項は 0 になるが, ここでは 0 ではない。  $C_2$  の積分では,  $|z - a| < |z' - a|$  であるからテイラー展開と同様に

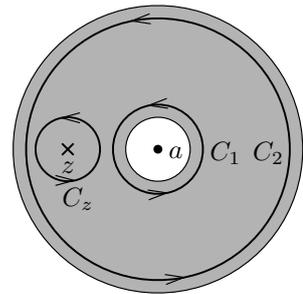
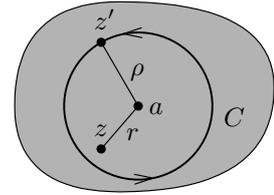
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz' \frac{f(z')}{z' - z} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - a)^k, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz' \frac{f(z')}{(z' - a)^{k+1}}$$

と展開できる。  $C_2$  内部で  $f(z')$  は正則でないから  $A_k \neq f^{(k)}(a)/k!$  である。(5.25) で  $z$  と  $z'$  を入れ替えると

$$-\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z - a} \sum_{k=0}^n \left(\frac{z' - a}{z - a}\right)^k + \frac{1}{z - z'} \left(\frac{z' - a}{z - a}\right)^{n+1}$$

になるから

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz' \frac{f(z')}{z' - z} = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{(z - a)^{k+1}} + S_n(z)$$



ただし

$$B_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz' f(z') (z' - a)^k, \quad S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \oint_{C_1} dz' f(z') \frac{(z' - a)^{n+1}}{z - z'}$$

$C_1$  上の  $z'$  に対しては  $|z' - a| < |z - a|$  であるから  $n \rightarrow \infty$  のとき  $|S_n| \rightarrow 0$  になる。したがって

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz' \frac{f(z')}{z' - z} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k (z - a)^{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} B_{-k-1} (z - a)^k$$

である。 $n$  を任意の整数として  $f(z')(z' - a)^n$  は領域  $D = \{z \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$  で正則であるから、 $C_1$  と  $C_2$  を  $D$  内の任意の単純閉曲線  $C$  にできる。 $D$  内の点  $z$  に対してローラン展開

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z - a)^k, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{(z' - a)^{k+1}} \quad (5.28)$$

が成り立つ。

$R_1 = 0$  の場合、 $z = a$  でも正則ならば、 $k \leq -1$  のとき  $f(z')/(z' - a)^{k+1}$  は  $C$  内部で正則になり  $A_k = 0$  である。また、 $k \geq 0$  では  $A_k = f^{(k)}(a)/k!$  であるから、ローラン展開はテイラー展開になる。 $R_1 = 0$  ではあるが  $z = a$  で  $f(z)$  が正則でない場合、 $z = a$  を  $f(z)$  の孤立特異点という。孤立特異点は3種類に分類される。

- $k < 0$  のとき  $A_k = 0$  ならば  $z \neq a$  のとき  $f(z) = A_0 + A_1(z - a) + \dots$  である。 $f(a) = A_0$  と定義すれば  $f(z)$  は  $z = a$  でも正則になる。このような点  $z = a$  を除去可能な特異点という。例えば  $f(z) = \sin z/z$  における  $z = 0$  である。
- $n = 1, 2, \dots$  として

$$f(z) = \frac{A_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z - a)^{n-1}} + \dots, \quad A_{-n} \neq 0$$

であるとき  $z = a$  を  $n$  位の極という。 $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow a} \infty$  である。 $G(z) = (z - a)^n g(z)$ ,  $g(a) \neq 0$  のとき  $z = a$  を  $G(z)$  の  $n$  位の零点という。 $z = a$  は  $1/G(z)$  の  $n$  位の極である。

- ローラン展開の負のべきが無限級数であるとき  $z = a$  を真性特異点という。例えば

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} \quad (5.29)$$

であるから  $z = 0$  は真性特異点である。 $b$  を任意の複素数として  $1/z_n = b + 2n\pi i$  とすると、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $z_n \rightarrow 0$  である。このとき  $e^{1/z_n} = e^{b+2n\pi i} = e^b$  であるから  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$  は任意の値をとり不定である。一般に、真性特異点  $a$  の場合  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  は不定である。

$R$  を適当に大きくとれば、すべての有限な特異点は  $|z| < R$  に存在する。このとき、 $R < |z| < \infty$  で  $f(z)$  は正則であるから、ローラン展開 (5.28) で  $a = 0$  とおくと

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_{-k} z^{-k} + P(z), \quad P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{z'^{k+1}}$$

になる。ここで  $C$  は領域  $|z| > R$  内の単純閉曲線である。無限遠は単一の点ではないが、 $\zeta = 1/z$  とすると、単一の点  $\zeta = 0$  に対応するから、仮想的な1点を考え無限遠点  $\infty$  という。

- $P(z) = 0$  のとき  $f(z)$  は  $z = \infty$  で正則であるという。
- $P(z)$  が  $n$  次の多項式のとき、無限遠点は  $f(z)$  の  $n$  位の極である。

- $P(z)$  が無限級数のとき, 無限遠点は  $f(z)$  の真性特異点である。

**例題** (5.27), (5.28) の展開係数  $A_k$  を定義に従って求める必要はない。テイラー展開とローラン展開は一意に決まるから, 別の方法で係数が求まれば, それでよい。

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \quad (5.30)$$

の  $z=0$  まわりのローラン展開を求める。

$$\frac{1}{1-z} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} z^k, & |z| < 1 \\ -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k, & |z| > 1 \end{cases}$$

であるから

$$0 < |z| < 1 \text{ のとき } f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k, \quad |z| > 1 \text{ のとき } f(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-2} z^k \quad (5.31)$$

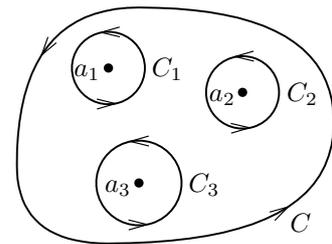
になる。次の例題で (5.28) の複素積分を実行して  $A_k$  を求める。なお,  $|z| > 1$  では  $k = -\infty$  の項を含むが,  $z=0$  は真性特異点ではない。孤立特異点  $z=a$  の性質は  $f(z)$  が  $0 < |z-a| < R$  で正則になる場合のローラン展開で決まる。(5.30) では  $0 < |z| < 1$  になるから  $z=0$  は一位の極である。

## 5.6 留数定理

$f(z)$  が  $R_1 < |z-a| < R_2$  で正則な場合, この領域内の単純閉曲線の経路を  $C$  とすると (5.15), (5.28) より

$$\oint_C dz f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \oint_C dz (z-a)^k = 2\pi i A_{-1} \quad (5.32)$$

である。周積分すると  $A_{-1}$  だけ残る。 $z=a$  が孤立特異点 ( $R_1=0$ ) の場合,  $A_{-1}$  を  $z=a$  における留数といい  $\text{Res}(f(z), a)$  あるいは  $\text{Res}(a)$  などで表わす。単純閉曲線  $C$  の内部に  $n$  個の孤立特異点  $a_1, a_2, \dots, a_n$  があり, これらの点以外では  $f(z)$  は正則とする。図のような経路を考えると, (5.14) と同様にして



$$\oint_C dz f(z) = \sum_{m=1}^n \oint_{C_m} dz f(z) = 2\pi i \sum_{m=1}^n \text{Res}(f(z), a_m) \quad (5.33)$$

になる。これを留数定理という。

一般に, ローラン展開を完全に決めることは複雑であるが,  $A_{-1}$  だけ求まればよい。孤立特異点が  $n$  位の極の場合,  $z=a$  まわりのローラン展開は

$$f(z) = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \dots$$

であるから

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) = (n-1)! A_{-1} + n! A_0 (z-a) + \dots$$

したがって

$$A_{-1} = \text{Res}(f(z), a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) \quad (5.34)$$

特に,  $n = 1$  のとき

$$\text{Res}(f(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) \quad (5.35)$$

になる。

$g(a) = 0, g'(a) \neq 0, h(a) \neq 0$  ならば  $z = a$  は  $h(z)/g(z)$  の 1 位の極になるから

$$\text{Res}(h(z)/g(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)}{\frac{g(z) - g(a)}{z-a}} = \frac{h(a)}{g'(a)} \quad (5.36)$$

である。

**例題** (5.30) の  $f(z)$  の場合, (5.28) の複素積分を実行して  $A_k$  を求める。  $a = 0$  とすると

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz g_k(z), \quad g_k(z) = \frac{1}{z^{k+2}(1-z)}$$

である。  $C$  が  $0 < |z| < 1$  の領域内の場合,  $k \leq -2$  のとき  $g_k(z)$  は  $C$  内に特異点をもたなから  $A_k = 0$  である。  $k \geq -1$  のとき,  $C$  内の特異点は  $k+2$  位の極  $z = 0$  だけであるから (5.34) より

$$A_k = \frac{1}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \frac{1}{1-z} = 1$$

になり (5.31) を再現する。  $C$  が領域  $|z| > 1$  の場合,  $C$  内には 1 位の極  $z = 1$  が加わる。これの  $A_k$  への寄与は, 全ての  $k$  に対して

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z^{k+2}(1-z)} = -1, \quad \therefore f(z) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k + \sum_{k=-1}^{\infty} z^k = - \sum_{k=-\infty}^{-2} z^k$$

であり (5.31) に一致する。

**問題 5.8** 指数関数の定義から  $e^{1/z}$  は (5.29) であるが,  $z = 0$  まわりのローラン展開より

$$e^{1/z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{e^{1/z}}{z^{k+1}}, \quad C = \text{原点まわりの正方向の単純曲線}$$

になる。  $A_k$  を求めよ。  $z$  が正方向に 1 周するとき,  $\eta = 1/z$  は負方向に 1 周する。

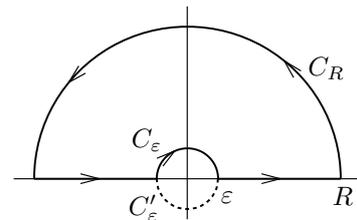
## 5.7 実関数の定積分

114 ページの **例題 4** で扱ったように, 実関数の定積分は, 複素積分を用いれば, 原始関数を知らなくても求められる。例として

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (5.37)$$

を求める。  $|z| \rightarrow \infty$  のとき  $\sin z$  は上半面でも下半面でも発散するが,  $e^{iz}$  は上半面では 0 に収束する。そこで  $F(z) = e^{iz}/z$  を特異点  $z = 0$  を避けた図の積分路  $C$  で積分する。  $F(z)$  は  $C$  内部では正則であるから

$$\oint_C dz F(z) = \int_{-R}^{-\varepsilon} dx F(x) + \int_{\varepsilon}^R dx F(x) + I_{\varepsilon} + I_R = 2i \int_{\varepsilon}^R dx \frac{\sin x}{x} + I_{\varepsilon} + I_R = 0 \quad (5.38)$$



ただし  $I_R, I_\varepsilon$  はそれぞれ  $C_R, C_\varepsilon$  の寄与である。  $C_\varepsilon$  では  $z = \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta: \pi \rightarrow 0$  であるから

$$I_\varepsilon = i \int_\pi^0 d\theta e^{i\varepsilon z} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_\pi^0 d\theta = -i\pi$$

$C_R$  では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow \pi$  であるから

$$|I_R| = \left| \int_0^\pi d\theta e^{iz} \right| \leq \int_0^\pi d\theta |e^{iz}| = \int_0^\pi d\theta e^{-R \sin \theta} = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-R \sin \theta}$$

図より  $0 < \theta < \pi/2$  のとき  $\sin \theta > (2/\pi)\theta$  になるから

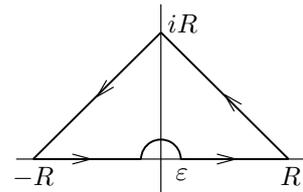
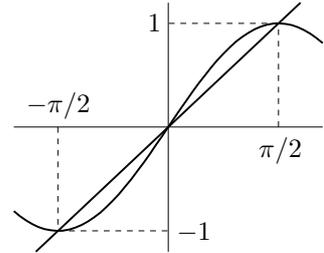
$$|I_R| < 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \exp(-2R\theta/\pi) = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (5.39)$$

である。  $I_R = 0, I_\varepsilon = -i\pi$  を (5.38) に代入すると (5.37) が求まる。  
実数の積分

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dq e^{-qx} \sin x = \int_0^\infty dq \int_0^\infty dx e^{-qx} \sin x$$

から求めることもできる。

**問題 5.9**  $C_\varepsilon$  の代わりに下半面の半円  $C'_\varepsilon$  を用いて (5.37) を求めよ。また、右図の経路に沿って積分して (5.37) を求めよ。



**問題 5.10** 次の積分を求めよ。

$$\int_0^\infty dx \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty dx \left( \frac{\sin x}{x} \right)^3 = \frac{3\pi}{8}$$

$z \rightarrow 0$  のとき  $1/z$  で発散する  $F(z) = (e^{2iz} - 1)/z^2$  または  $F(z) = (e^{3iz} - 3e^{iz} + 2)/z^3$  を考える。

**三角関数の有理関数**

$\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の有理関数の場合,  $z = e^{i\theta}$  とおくと  $dz/d\theta = iz$  であるから

$$\int_0^{2\pi} d\theta F(\cos \theta, \sin \theta) = \oint_C \frac{dz}{iz} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \quad (5.40)$$

になる。  $C$  は  $|z| = 1$  の正方向の円である。留数定理から  $|z| < 1$  にある極の留数を求めればよい。

**例題**  $a$  を実数として  $a^2 \neq 1$  のとき

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} = i \oint_C \frac{dz}{(z-a)(az-1)}$$

を求める。  $|z| < 1$  にある極は  $|a| < 1$  のとき  $a$ ,  $|a| > 1$  のとき  $1/a$  である。留数は (5.35) より

$$|a| < 1 \text{ のとき } i \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{az-1} = -\frac{i}{1-a^2}, \quad |a| > 1 \text{ のとき } \frac{i}{a} \lim_{z \rightarrow 1/a} \frac{1}{z-a} = -\frac{i}{a^2-1}$$

したがって

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|} \quad (5.41)$$

である。  $t = \tan(\theta/2)$  と変数変換して求めてみよ。

問題 5.11  $-1 < a < 1$  のとき

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+a\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos n\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}, \quad n=0, 1, \dots$$

を示せ。

問題 5.12 次の積分を示せ。

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \cos^{2n}\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n=0, 1, \dots$$

最初の積分の原始関数は  $-e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)$  である。2番目の積分は漸化式から求めてもよい。

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ix\cos\theta}, \quad \int_0^\infty dx e^{-ax} J_0(bx) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (5.42)$$

を示せ。 $a > 0$ ,  $b$  は実数,  $J_0(x)$  は (4.51) の 0 次ベッセル関数である。

### 有理関数の無限区間での積分

有理関数  $f(z)$  の極を  $f_k$  とする。 $f(z)$  が実軸上に極をもたず  $zf(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{\text{Im} f_k > 0} \text{Res}(f(z), f_k) = -2\pi i \sum_{\text{Im} f_k < 0} \text{Res}(f(z), f_k) \quad (5.43)$$

和は虚部が正の極, または, 負の極についてとる。

証明 右図の積分路  $C_{12} = C_1 + C_2$  を考える。半径  $R$  を十分大きく取れば, 虚部が正の極は全て  $C_{12}$  内に存在するから, 留数定理より

$$\int_{C_{12}} dz f(z) = 2\pi i \sum_{\text{Im} f_k > 0} \text{Res}(f(z), f_k)$$

である。半円の経路  $C_2$  では  $z = Re^{i\theta}$  とおけるから

$$\left| \int_{C_2} dz f(z) \right| \leq \int_0^\pi d\theta \left| \frac{dz}{d\theta} f(z) \right| = \int_0^\pi d\theta |zf(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

したがって

$$\int_{C_{12}} dz f(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{\text{Im} f_k > 0} \text{Res}(f(z), f_k) \quad (5.44)$$

である。下半面の経路  $C_{13} = C_1 + C_3$  は時計回りの閉曲線になるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = -2\pi i \sum_{\text{Im} f_k < 0} \text{Res}(f(z), f_k) \quad (5.45)$$

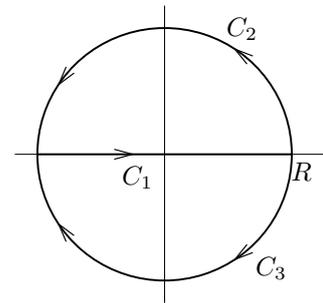
である。和は虚部が負の極についてとる。

原点を中心とした半径  $R$  の円を正方向に一周する積分路を  $C_R$  とすると,  $R$  が十分大きければ

$$\int_{C_R} dz f(z) = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f(z), f_k)$$

である。和は全ての極についてとる。 $C_R$  上では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$  であるから

$$\left| \int_{C_R} dz f(z) \right| \leq \int_0^{2\pi} d\theta |zf(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad \therefore \sum_k \text{Res}(f(z), f_k) = 0 \quad (5.46)$$



したがって, (5.44) と (5.45) は同じ結果になる。\$zf(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0\$ である \$f(z)\$ が上半面あるいは下半面だけに極をもつ場合, (5.43) の積分は 0 である。

**例題 1** 114 ページの例題 4 の場合, \$f(z) = 1/(z^4+1)\$ は上の条件を満たす。上半面の極は \$f\_1 = e^{i\pi/4}\$ と \$f\_2 = -f\_1^\*\$ であり, これらは 1 位の極であるから (5.36) より

$$\operatorname{Res}(f_1) = \frac{1}{4f_1^3} = -\frac{f_1}{4}, \quad \operatorname{Res}(f_2) = \frac{f_1^*}{4}, \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^4+1} = \frac{\pi i}{2} (f_1^* - f_1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である。

**例題 2** \$a, b\$ を 0 でない実数として \$f(z) = \frac{1}{(z-ia)(z-ib)}\$ とする。\$a > 0 > b\$ の場合, 上半面の極は \$z = ia\$ の 1 位の極だけであるから

$$I_{ab} = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} (z-ia)f(z) = \frac{2\pi}{a-b}$$

\$b > 0 > a\$ の場合は \$I\_{ab} = 2\pi/(b-a)\$ になる。\$a\$ と \$b\$ が同符号ならば, \$f(z)\$ の極は上半面あるいは下半面だけに存在するから \$I\_{ab} = 0\$ である。実関数の積分で求める。\$a \neq b\$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \frac{1}{i(a-b)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x-ib} \right)$$

になる。

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x-ia} = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x+ia}{x^2+a^2} = \frac{1}{\pi|a|} \left[ \tan^{-1} \frac{x}{|a|} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{a}{|a|} \quad (5.47)$$

\$a = b\$ のとき不定積分は \$-1/(x-ia)\$ になるから \$I\_{ab} = 0\$ である。したがって, 複素積分の結果と一致する。

### 有理関数のフーリエ変換

\$f(z)\$ の極を \$f\_k\$ とする。\$f(z)\$ が実軸上に極をもたず \$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0\$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{iqx} = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} f_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iqz}, f_k), & q > 0 \\ -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} f_k < 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iqz}, f_k), & q < 0 \end{cases} \quad (5.48)$$

**証明** \$q > 0\$ の場合, 123 ページと同様に, 上半面の半円を加えた積分路 \$C\_{12}\$ を考えると, \$R\$ が十分大きければ

$$\int_{C_{12}} dz f(z) e^{iqz} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} f_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iqz}, f_k)$$

である。半円 \$C\_2\$ 上では \$z = Re^{i\theta}\$ より \$|e^{iqz}| = e^{-qR \sin \theta}\$ になるから \$C\_2\$ の寄与は

$$|I_2| \leq R \int_0^\pi d\theta |f(z) e^{iqz}| = R \int_0^\pi d\theta |f(Re^{i\theta})| \exp(-qR \sin \theta)$$

\$C\_2\$ 上での \$|f(z)|\$ の最大値を \$M(R)\$ とし (5.39) と同様にすると, \$qR > 0\$ より

$$|I_2| < RM(R) \int_0^\pi d\theta \exp(-qR \sin \theta) < 2RM(R) \int_0^{\pi/2} d\theta \exp(-2qR \theta/\pi) = \frac{\pi M(R)}{q} (1 - e^{-qR})$$

\$R \rightarrow \infty\$ のとき \$M(R) \rightarrow 0\$ より \$I\_2 \rightarrow 0\$ になる。\$q > 0\$ のとき (5.48) が成り立つ。

$q < 0$  の場合, 下半面の半円を加えた積分路  $C_{13}$  を採用すると

$$\int_{C_{13}} dz f(z) e^{iqz} = -2\pi i \sum_{\text{Im}f_k < 0} \text{Res}(f(z)e^{iqz}, f_k)$$

である。半円では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta : 0 \rightarrow -\pi$  であるから

$$|I_2| \leq R \int_{-\pi}^0 d\theta |f(Re^{i\theta})| \exp(-qR \sin \theta) \leq 2RM(R) \int_{-\pi/2}^0 d\theta \exp(-qR \sin \theta)$$

(5.39) の図から  $-\pi/2 < \theta < 0$  のとき  $2\theta/\pi > \sin \theta$  になるから,  $-qR > 0$  を考慮すると

$$|I_2| < 2RM(R) \int_{-\pi/2}^0 d\theta \exp(-2qR\theta/\pi) = \frac{\pi M(R)}{-q} (1 - e^{qR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

になるから (5.48) が成り立つ。なお,  $q > 0$  の場合, 下半面の半円を加えると半円上では  $\sin \theta < 0$  より  $\exp(-qR \sin \theta) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$  になり無意味である。

**例題**  $\varepsilon$  が正の実数のとき  $f(z) = 1/(z - i\varepsilon)$  の極は上半面の 1 位の極  $z = i\varepsilon$  だけである。

$$F(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{iqx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iqx}}{x - i\varepsilon}$$

とすると,  $q > 0$  のとき (5.48) から  $F(q) = \lim_{z \rightarrow i\varepsilon} (z - i\varepsilon)f(z)e^{iqz} = e^{-\varepsilon q}$  になる。下半面には  $f(z)$  の極はないから,  $q < 0$  のとき  $F(q) = 0$  である。(5.47) より  $F(0) = 1/2$  になるから

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iqx}}{x - i\varepsilon} = \begin{cases} e^{-\varepsilon q}, & q > 0 \\ 1/2, & q = 0 \\ 0, & q < 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

特に  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると階段関数  $\theta(q)$  になる。

**問題 5.13**  $\varepsilon > 0$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos qx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\pi}{\varepsilon} e^{-\varepsilon|q|}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin qx}{x^2 + \varepsilon^2} = \pm \pi e^{-\varepsilon|q|}, \quad \begin{cases} +, & q > 0 \\ -, & q < 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

を示せ。(5.49) から求める。あるいは  $f(z) = 1/(z^2 + \varepsilon^2)$ ,  $f(z) = z/(z^2 + \varepsilon^2)$  として求める。

**問題 5.14** (5.48) において,  $q > 0$  の結果から  $q < 0$  の結果を導け。

### 有理関数のメリン変換

$q$  を整数でない実数とする。有理関数  $f(z)$  は原点及び正の実軸に極を持たず,  $z \rightarrow 0$  及び  $z \rightarrow \infty$  において  $z^{q+1}f(z) \rightarrow 0$  であるとき

$$\int_0^{\infty} dx x^q f(x) = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i q}} \sum_k \text{Res}(z^q f(z), f_k) \quad (5.51)$$

ただし  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき  $z^q = |z|^q e^{iq\theta}$  とする。 $f_k$  は  $f(z)$  の極である。

なお,  $z^q = e^{q \log z}$  は多価関数であるが,  $\log z$  として (5.4) の主値を採用すれば  $z^q = |z|^q e^{iq\theta}$  になり一価関数である。正の実軸の上側 ( $\theta \rightarrow 0$ ) では  $z^q = x^q$ , 下側 ( $\theta \rightarrow 2\pi$ ) では  $z^q = x^q e^{2\pi i q}$  になる。 $q \neq$  整数 より  $e^{2\pi i q} \neq 1$  であり,  $z^q$  は正の実軸で不連続になるが, これ以外では正則である。

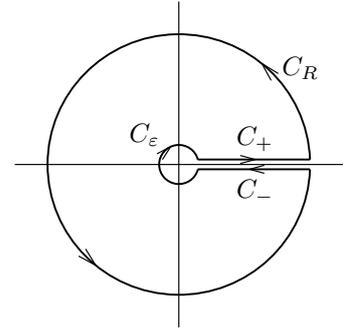
**証明** 図の閉曲線の経路  $C$  に沿って  $z^q f(z)$  を積分する。  $C$  は

$C_R$  原点を中心とする半径  $R \rightarrow \infty$  の正方向の円周

$C_\varepsilon$  原点を中心とする半径  $\varepsilon \rightarrow +0$  の負方向の円周

$C_+$  実軸のすぐ上の線分 ( $x: \varepsilon \rightarrow R$ )

$C_-$  実軸のすぐ下の線分 ( $x: R \rightarrow \varepsilon$ )



からなる。  $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  では、  $C$  は  $f(z)$  の極  $f_k$  を全て含むから

$$\oint_C dz z^q f(z) = 2\pi i \sum_k \text{Res}(z^q f(z), f_k)$$

である。各部分に分割すると、  $C_R$  上では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $z^q = R^q e^{iq\theta}$ ,  $C_\varepsilon$  では  $R$  を  $\varepsilon$  に置き換えれば

$$|I_R| \leq R \int_0^{2\pi} d\theta |z^q f(z)| = \int_0^{2\pi} d\theta R^{q+1} |f(Re^{i\theta})|, \quad |I_\varepsilon| \leq \int_0^{2\pi} d\theta \varepsilon^{q+1} |f(\varepsilon e^{i\theta})|$$

$z \rightarrow 0$  または  $z \rightarrow \infty$  のとき  $z^{q+1} f(z) \rightarrow 0$  より  $I_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ ,  $I_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  になる。  $C_+$  上では  $z = x$ , ( $x: \varepsilon \rightarrow R$ ) であり、  $\theta = 0$  より  $z^q = x^q$  になるから

$$I_+ = \int_\varepsilon^R dx x^q f(x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty dx x^q f(x)$$

$C_-$  上では  $z = x$ , ( $x: R \rightarrow \varepsilon$ ) であり、  $\theta = 2\pi$  より  $z^q = x^q e^{2\pi i q}$  になるから

$$I_- = \int_R^\varepsilon dx x^q e^{2\pi i q} f(x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} -e^{2\pi i q} \int_0^\infty dx x^q f(x)$$

である。以上から

$$\oint_C dz z^q f(z) = I_R + I_\varepsilon + I_+ + I_- \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{R \rightarrow \infty} (1 - e^{2\pi i q}) \int_0^\infty dx x^q f(x) = 2\pi i \sum_k \text{Res}(z^q f(z), f_k)$$

になり (5.51) が求まる。

**例題** 実数  $p, q$  が  $0 < q < p$  のとき

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{q-1}}{x^p + 1} = \frac{1}{p} \int_0^\infty dy \frac{y^{q/p-1}}{y+1} = \frac{\pi}{p \sin(\pi q/p)} \quad (5.52)$$

を示す。  $f(z) = 1/(z+1)$  とすると、  $0 < q/p < 1$  より  $z \rightarrow 0$  及び  $z \rightarrow \infty$  で  $z^{q/p} f(z) \rightarrow 0$  になる。  $f(z)$  は  $z = -1 = e^{i\pi}$  に 1 位の極をもつから (5.51) より

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy \frac{y^{q/p-1}}{y+1} &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(q/p-1)}} \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} (z+1) z^{q/p-1} f(z) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i q/p}} e^{i\pi(q/p-1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi q/p)} \end{aligned}$$

である。

### 有理関数の半無限区間での積分

有理関数  $f(z)$  は原点及び正の実軸に極を持たず、  $z \rightarrow \infty$  において  $z^2 f(z)$  が有限であるとき

$$\int_0^\infty dx f(x) = - \sum_k \text{Res}(f(z) \text{Log } z, f_k) \quad (5.53)$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \sum_k \text{Im} \left[ \text{Res}(f(z) (\text{Log } z)^2, f_k) \right] \quad (5.54)$$

$$\int_0^\infty dx f(x) \log x = - \frac{1}{2} \sum_k \text{Re} \left[ \text{Res}(f(z) (\text{Log } z)^2, f_k) \right] \quad (5.55)$$

ただし  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき  $\text{Log } z = \log |z| + i\theta$  とする。 $f_k$  は  $f(z)$  の極である。(5.54), (5.55) の場合, 実数  $x$  に対して  $f(x)$  は実数とする。

**証明** 126 ページの図と同じ積分路  $C$  に対して

$$I_1 = \oint_C dz f(z) \text{Log } z, \quad I_2 = \oint_C dz f(z) (\text{Log } z)^2$$

を考える。 $I_1$  の場合,  $C_+$  では  $\text{Log } z = \log x$ ,  $C_-$  では  $\text{Log } z = \log x + 2\pi i$  になるから

$$I_+ = \int_{C_+} dz f(z) \text{Log } z = \int_{\varepsilon}^R dx f(x) \log x, \quad I_- = - \int_{\varepsilon}^R dx f(x) (\log x + 2\pi i)$$

である。 $C_R$  上では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\text{Log } z = \log R + i\theta$  より

$$|I_R| = \left| R \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} f(Re^{i\theta}) (\log R + i\theta) \right| \leq R (\log R + 2\pi) \int_0^{2\pi} d\theta |f(Re^{i\theta})|$$

$R$  が十分大きいとき  $R^2 |f(Re^{i\theta})| \leq M$  となる  $M$  が存在するから

$$|I_R| \leq 2\pi M \frac{\log R + 2\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$C_{\varepsilon}$  では  $R$  を  $\varepsilon$  で置き換えると  $\varepsilon (\log \varepsilon + 2\pi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  より  $I_{\varepsilon} \rightarrow 0$  になるから,  $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  では  $I_1 \rightarrow I_+ + I_-$  である。一方,  $C$  は  $f(z)$  の極  $f_k$  を全て内部に含むから

$$\oint_C dz f(z) \text{Log } z = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f(z) \text{Log } z, f_k) = I_+ + I_- = -2\pi i \int_0^{\infty} dx f(x)$$

になり (5.53) が成り立つ。 $I_2$  の場合, 上と同様にして

$$I_+ = \int_{C_+} dz f(z) (\text{Log } z)^2 = \int_{\varepsilon}^R dx f(x) (\log x)^2, \quad I_- = - \int_{\varepsilon}^R dx f(x) (\log x + 2\pi i)^2$$

である。 $C_R$  の寄与は

$$|I_R| = \left| R \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} f(Re^{i\theta}) (\log R + i\theta)^2 \right| \leq 2\pi M \frac{(\log R)^2 + 4\pi^2}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$C_{\varepsilon}$  の寄与も  $I_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  になるから,  $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  では

$$\begin{aligned} \oint_C dz f(z) (\text{Log } z)^2 &= 2\pi i \sum_k \text{Res}(f(z) (\text{Log } z)^2, f_k) \\ &= I_+ + I_- = -4\pi i \int_0^{\infty} dx f(x) \log x + 4\pi^2 \int_0^{\infty} dx f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$  が実数のとき, 1 行目と 2 行目の実部と虚部を比較すると (5.54), (5.55) が求まる。

**例題 1**  $z = -1 = e^{i\pi}$  は  $f(z) = 1/(z+1)^4$  の 4 位の極であるから (5.34), (5.55) より

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\log x}{(x+1)^4} = -\frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} \frac{d^3}{dz^3} (\text{Log } z)^2 \right) = -\frac{1}{2}$$

になる。不定積分で求めると

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\log x}{(x+1)^4} = \frac{1}{3} \left[ \frac{2x+3}{2(x+1)^2} - \log(x+1) + \log x - \frac{\log x}{(x+1)^3} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}$$

**例題 2**  $n = 2, 3, 4, \dots$  の場合, (5.52) で  $p = n > q = 1$  とすれば

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad (5.56)$$

になるが, (5.53) を用いて求める。 $f_k = e^{i(2k+1)\pi/n}$  は  $f(z) = 1/(z^n + 1)$  の 1 位の極である。 $0 \leq \theta < 2\pi$  より  $k = 0, 1, \dots, n-1$  である。 $\text{Log } f_k = i\pi(2k+1)/n$  及び (5.36) から

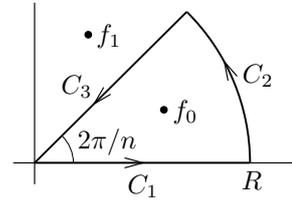
$$\lim_{z \rightarrow f_k} \frac{z - f_k}{z^n + 1} = \frac{1}{(z^n + 1)' \Big|_{z=f_k}} = -\frac{f_k}{n}, \quad \therefore \text{Res}(f(z) \text{Log } z, f_k) = -i\pi \frac{2k+1}{n^2} f_k$$

になる。(5.53) に代入すると

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1} = \frac{i\pi}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) e^{i(2k+1)\pi/n} = \frac{\pi}{n^2} \frac{d}{d\theta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)\theta} \Big|_{\theta=\pi/n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

和は公比  $e^{2i\theta}$  の等比数列の和である。右図の経路  $C = C_1 + C_2 + C_3$  を考えてもよい。 $C$  内部の極は  $f_0 = e^{i\pi/n}$  だけであるから

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^n + 1} = 2\pi i \frac{1}{f'(f_0)} = \frac{2\pi i}{n f_0^{n-1}} = -\frac{2\pi i f_0}{n}$$



になる。一方

$$I = \int_0^R \frac{dx}{x^n + 1} + I_2 + I_3, \quad I_k = \int_{C_k} \frac{dz}{z^n + 1}$$

$C_2$  上では  $z = R e^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow 2\pi/n$  より

$$I_2 = iR \int_0^{2\pi/n} \frac{d\theta}{R^n e^{in\theta} + 1}, \quad \therefore |I_2| \leq R \int_0^{2\pi/n} \frac{d\theta}{R^n - 1} = \frac{R}{R^n - 1} \frac{2\pi}{n}$$

$n \geq 2$  のとき  $I_2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  になる。 $C_3$  上では  $z = e^{2\pi i/n} x = f_0^2 x$ ,  $x: R \rightarrow 0$  とおけるから

$$I_3 = f_0^2 \int_R^0 \frac{dx}{f_0^{2n} x^n + 1} = -f_0^2 \int_0^R \frac{dx}{x^n + 1}, \quad \therefore I \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (1 - f_0^2) \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1} = -\frac{2\pi i f_0}{n}$$

になり (5.56) が求まる。

**問題 5.15** (5.54), (5.55) より

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}, \quad \int_0^\infty dx \frac{\log x}{x^n + 1} = -\frac{\pi^2 \cos(\pi/n)}{n^2 \sin^2(\pi/n)}$$

を示せ。

### 無理関数の積分

具体例として  $a > 0$  のとき

$$I_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = \pi, \quad I_2 = \int_0^a dx \sqrt{x(a-x)} = \frac{\pi a^2}{8}$$

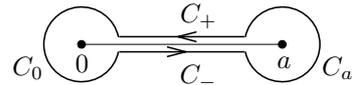
は  $x = a \sin^2 \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  と変数変換すれば求まるが, ここでは複素積分により  $I_1$  を求める。

$0 < x < a$  のとき  $f(x) = \sqrt{x(a-x)}$  は二乗して  $x(a-x)$  になる正の実数であり一意に決まるが、複素数  $z$  に対しては  $f(z)$  は二価関数である。積分を行うには  $f(z)$  を一価関数にする必要がある。107 ページと同様に

$$f_{\pm}(z) = \pm i\sqrt{r\rho}e^{i(\theta+\phi)/2}, \quad \text{ただし } z = re^{i\theta}, \quad z - a = \rho e^{i\phi}$$

は  $f_{\pm}(z)^2 = z(a-z)$  を満たす一価である。 $z = x + i\varepsilon$ , (ただし,  $0 < x < a, \varepsilon \rightarrow +0$ ) のとき  $\theta = 0, \phi = \pi$  より  $f_{\pm}(x + i\varepsilon) = \mp f(x)$  である。また,  $z = x - i\varepsilon$  のとき  $\theta = 2\pi, \phi = \pi$  より  $f_{\pm}(x - i\varepsilon) = -f_{\pm}(x + i\varepsilon)$  になり,  $f_{\pm}(z)$  は実軸  $0 < x < a$  で不連続である。

不連続部分を避けた図の経路  $C$  を考える。 $C_0, C_a$  は半径  $\varepsilon$  の円である。実軸  $0 < x < a$  の線分はカットを表す。



$$I_C = \oint_C \frac{dz}{f_+(z)} = I_+ + I_- + I_0 + I_a, \quad I_k = \int_{C_k} \frac{dz}{f_+(z)}$$

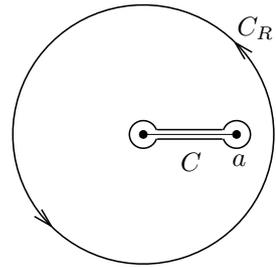
$C_+$  では  $\theta = 0, \phi = \pi, C_-$  では  $\theta = 2\pi, \phi = \pi$  であるから

$$I_+ = \int_a^0 dr \frac{e^{-i\pi/2}}{i\sqrt{r(a-r)}} = I_1, \quad I_- = \int_0^a dr \frac{e^{-3\pi i/2}}{i\sqrt{r(a-r)}} = I_1$$

$C_0$  では  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  として  $z = \varepsilon e^{i\theta}, a - z = a - \varepsilon e^{i\theta}$  とおけるから

$$I_0 = i\sqrt{\varepsilon} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{a - \varepsilon e^{i\theta}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \text{同様に } I_a \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

したがって  $I_C = 2I_1$  である。原点中心の半径  $R > a$  の円の経路  $C_R$  と  $C$  の間の領域では  $1/f_+(z)$  は正則であるから



$$\begin{aligned} I_C &= \oint_{C_R} \frac{dz}{f_+(z)} = \int_0^{2\pi} d\theta \left(1 - \frac{a}{R} e^{-i\theta}\right)^{-1/2} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} e^{-i\theta} + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{R} e^{-i\theta}\right)^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

( ) 内で積分に寄与する項は 1 だけであり  $I_C = 2\pi$  になるから  $I_1 = \pi$  である。

**問題 5.16** 上と同様にして  $I_2 = \pi a^2/8$  を示せ。

### 5.8 無限級数和

有理関数  $f(z)$  が  $z f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  を満たし,  $f(z)$  の極  $f_k$  が整数でないとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_k \text{Res}(f(z) \cot \pi z, f_k) \tag{5.57}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_k \text{Res}(f(z)/\sin \pi z, f_k) \tag{5.58}$$

**証明**  $F(z) = f(z) \cot \pi z$  の極は  $f(z)$  の極  $f_k$  と  $1/\sin \pi z$  の極からなる。 $1/\sin \pi z$  は任意の整数  $z = n$  に 1 位の極をもつ。 $z = n$  で  $f(z)$  は正則であるから留数は (5.36) より

$$\text{Res}(F(z), z = n) = \frac{f(z) \cos \pi z}{(\sin \pi z)'} \Big|_{z=n} = \frac{1}{\pi} f(n) \tag{5.59}$$

である。原点を中心とする半径  $R \neq$  整数 の正方向の円周を  $C$  とすると,  $R \rightarrow \infty$  では  $C$  内部に  $F(z)$  の全ての極が存在するから

$$I_C = \oint_C dz f(z) \cot \pi z = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(F(z), f_k) + 2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \quad (5.60)$$

である。 $C$  上では  $z = Re^{i\theta}$  より

$$|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi R \sin \theta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \sin \theta > 0 \\ \infty, & \sin \theta < 0 \end{cases}, \quad \therefore |\cot \pi z| = \left| \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1} \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1$$

$\sin \theta = 0$  の場合  $\cot \pi z = \pm \cot \pi R =$  有限 である。 $Rf(Re^{i\theta}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  であるから

$$|I_C| \leq R \int_0^{2\pi} d\theta |f(z)| |\cot \pi z| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (5.61)$$

になる。したがって, (5.60) より (5.57) が成り立つ。

$G(z) = f(z)/\sin \pi z$  とすると  $z = n$  での留数は

$$\operatorname{Res}(G(z), z = n) = \left. \frac{f(z)}{(\sin \pi z)'} \right|_{z=n} = \frac{f(n)}{\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi}$$

になる。 $F(z)$  の場合と同様に

$$I_C = \oint_C dz G(z) = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(G(z), f_k) + 2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n), \quad I_C \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

であるから (5.58) が成り立つ。

**例題 1**  $a$  を正の実数として

$$S_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\pm}(n) \mp \frac{1}{2a^2}, \quad f_{\pm}(z) = \frac{1}{z^2 \pm a^2}$$

を求める。 $S_-$  の場合  $a \neq$  整数 とする。 $f_-(z)$  は  $z = \pm a$  に 1 位の極をもつから (5.57) より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_-(n) = -\pi \left( \frac{1}{2a} \cot \pi a - \frac{1}{2a} \cot(-\pi a) \right) = -\frac{\pi}{a} \cot \pi a$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1 - \pi a \cot \pi a}{2a^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2} \quad (5.62)$$

$S_+$  の場合,  $S_-$  で  $a$  を  $ia$  で置き換えればよい。 $S_{\pm} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \pi^2/6$  は以下の  $\zeta(2)$  である。

**例題 2**  $m$  を正の整数として

$$\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^{2m}}, \quad \text{ただし } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

を求める。 $\zeta(x)$  をツェータ関数という。 $f(z) = 1/z^{2m}$  は整数  $z = 0$  に極をもつから (5.57) はそのままでは適用できないが, (5.60) において  $n = 0$  を  $f(z)$  の極  $f_k$  に含め  $\sum_n f(n)$  から除外すれば

$$2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(F(z), f_k) + 2i \sum_{n \neq 0} f(n) = 0, \quad \therefore \zeta(2m) = -\frac{\pi}{2} \sum_k \operatorname{Res}(F(z), f_k)$$

$f(z)$  の極は  $f_k = 0$  だけであり, これは  $F(z) = \cot \pi z / z^{2m}$  の  $2m + 1$  位の極であるから

$$\zeta(2m) = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{(2m)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} z^{2m+1} F(z) = -\frac{\pi^{2m}}{2(2m)!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} x \cot x \quad (5.63)$$

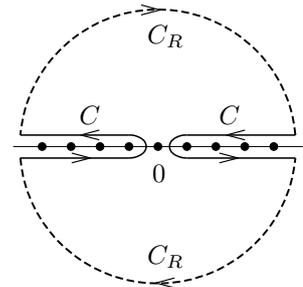
(1.16) より

$$\zeta(2m) = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_m, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

になる。  $B_m$  はベルヌーイ数である。

右図のような無限遠で閉じた積分路  $C$  を考える。  $\bullet$  は実軸上の整数の点を表す。  $C$  内には  $F(z) = \cot \pi z / z^{2m}$  の 1 位の極  $z = n \neq 0$  が存在するから (5.59) より

$$\int_C dz F(z) = 2\pi i \sum_{n \neq 0} \text{Res}(F(z), z = n) = 2i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^{2m}} = 4i \zeta(2m)$$



になる。破線で示した半径  $R$  の経路を  $C_R$  とすると (5.61) より

$$\int_{C_R} dz F(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad \therefore \zeta(2m) = \frac{1}{4i} \int_{C+C_R} dz F(z)$$

時計回りの閉曲線  $C + C_R$  内の極は  $2m + 1$  位の  $z = 0$  だけであるから (5.63) になる。

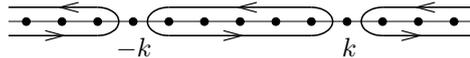
**問題 5.17** (5.58) より  $a \neq 0$  のとき

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left( 1 - \frac{\pi a}{\sinh \pi a} \right) = \frac{\pi^2}{12} \left( 1 - \frac{7}{60} (\pi a)^2 + \dots \right)$$

を求めよ。また,  $F(z) = 1/(z^2 \sin \pi z)$  を前図の積分路  $C$  で積分し  $S(0) = \pi^2/12$  を示せ。

**問題 5.18**  $k = 1, 2, \dots$  のとき, (5.62) において  $a = k + \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$  として

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{n^2 - k^2} = \frac{3}{4k^2}$$



を求めよ。また, 右図の積分路に沿って  $F(z) = \cot \pi z / (z^2 - k^2)$  を積分して求めよ。

### 5.9 コーシーの主値

$a < c < b$  とする。  $f(x)/(x - c)$  が  $x = c$  で発散するとき, 区間  $a \leq x \leq b$  の積分は意味がないが,  $x = c$  を除外した積分

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} dx \frac{f(x)}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b dx \frac{f(x)}{x-c}, \quad \text{ただし } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0 \quad (5.64)$$

を考える。  $x = c$  近傍では  $f(x)/(x - c) \approx f(c)/(x - c)$  であるから  $c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_2$  の寄与は

$$f(c) \int_a^{c-\varepsilon_1} dx \frac{1}{x-c} = f(c) \log \varepsilon_1, \quad f(c) \int_{c+\varepsilon_2}^b dx \frac{1}{x-c} = -f(c) \log \varepsilon_2$$

になる。  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  ならば発散は打ち消し合うから

$$\text{P} \int_a^b dx \frac{f(x)}{x-c} = \int_a^b dx f(x) \text{P} \frac{1}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b dx \frac{f(x)}{x-c} \right) \quad (5.65)$$

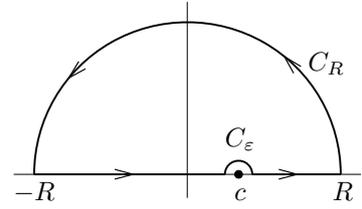
を定義する。これを**コーシーの主値**という。例えば

$$P \int_a^b \frac{1}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \log \left| \frac{\varepsilon}{a-c} \right| + \log \left| \frac{b-c}{\varepsilon} \right| \right) = \log \frac{b-c}{c-a}$$

であり有限な値になる。

$f(z)$  は実軸上で正則で  $\text{Im} z \geq 0$  のとき  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  とする。図のような閉曲線の積分路  $C$  を考える。 $C_R$  は原点を中心とする半径  $R$  の半円,  $C_\varepsilon$  は  $x=c$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の半円である。 $f(z)$  の極を  $f_k$  とすると

$$I_C = \oint_C dz \frac{f(z)}{z-c} = 2\pi i \sum_{\text{Im} f_k > 0} \text{Res}(f(z)/(z-c), f_k)$$



である。一方,  $I_C = I_0 + I_R + I_\varepsilon$ , ただし

$$I_0 = \int_{-R}^{c-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^R dx \frac{f(x)}{x-c}, \quad I_R = \int_{C_R} dz \frac{f(z)}{z-c}, \quad I_\varepsilon = \int_{C_\varepsilon} dz \frac{f(z)}{z-c}$$

$\varepsilon \rightarrow +0$  のとき  $I_0$  はコーシーの主値になる。 $C_R$  では  $z = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow \pi$ ,  $C_\varepsilon$  では  $z = c + \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta: \pi \rightarrow 0$  になるから

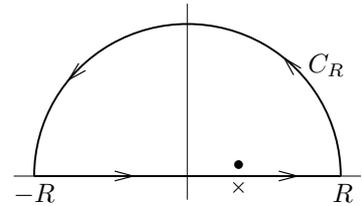
$$I_R = \int_0^\pi d\theta iRe^{i\theta} \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - c} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad I_\varepsilon = i \int_\pi^0 d\theta f(c + \varepsilon e^{i\theta}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} -i\pi f(c)$$

$R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow +0$  とすると

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-c} = i\pi f(c) + \mathcal{R}(c), \quad \mathcal{R}(c) = 2\pi i \sum_{\text{Im} f_k > 0} \text{Res}(f(z)/(z-c), f_k) \quad (5.66)$$

になり主値は有限である。

$f(z)/(z-c)$  の実軸上の極  $z=c$  を避けるために半円  $C_\varepsilon$  を考えたが, この代わりに  $z=c$  を実軸からずらす。 $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき  $F_\pm(z) = f(z)/(z-c \mp i\varepsilon)$  とすると,  $F_\pm(z)$  の極は  $c \pm i\varepsilon$  と  $f(z)$  の極  $f_k$  であり, 実軸上に極は存在しない。図の経路  $C$  を考える。 $C_R$  では  $z-c \neq 0$  であるから  $\varepsilon=0$  としてよい。 $R \rightarrow \infty$  のとき  $C_R$  の寄与は 0 になるから



$$\oint_C dz F_\pm(z) = \int_{-R}^R dx F_\pm(x) + \int_{C_R} dz F_\pm(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx F_\pm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-c \mp i\varepsilon}$$

$C$  内の極は  $F_-(z)$  では  $f(z)$  の極だけ,  $F_+(z)$  の場合これに  $c+i\varepsilon$  が加わり

$$\oint_C dz F_-(z) = \mathcal{R}(c), \quad \oint_C dz F_+(z) = 2\pi i f(c) + \mathcal{R}(c)$$

になる。 $f_k \neq$  実数 より  $f(c+i\varepsilon) \rightarrow f(c)$ ,  $\mathcal{R}(c+i\varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}(c)$  である。(5.66) より  $\mathcal{R}$  を主値で表せば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-c \mp i\varepsilon} = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-c} \pm i\pi f(c) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left( P \frac{1}{x-c} \pm i\pi \delta(x-c) \right)$$

したがって

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x-c \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x-c} \mp i\pi \delta(x-c) \quad (5.67)$$

である。これから

$$\delta(x-c) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x-c+i\varepsilon} - \frac{1}{x-c-i\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-c)^2 + \varepsilon^2} \quad (5.68)$$

$$P \frac{1}{x-c} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x-c+i\varepsilon} + \frac{1}{x-c-i\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x-c}{(x-c)^2 + \varepsilon^2} \quad (5.69)$$

になる。(5.68) は (3.87) である。

$f(z)$  が上半面で  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$  でかつ正則ならば (5.66) で  $\mathcal{R} = 0$  になるから

$$f(c) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-c}, \quad \therefore \operatorname{Re} f(c) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-c}, \quad \operatorname{Im} f(c) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x-c}$$

である。これを **分散公式** という。なお,  $f(z)$  が上半面で正則ならばコーシーの積分公式 (5.21) より

$$f(c+i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z-c-i\varepsilon} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-c-i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

である。 $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき (5.67) を代入すると分散公式が求まる。

**例題** 量子力学の散乱問題では

$$F(r) = \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x}{x^2 - k^2} e^{irx} = \frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) e^{irx}$$

が現れる ( (5.56) で  $m^2 = -k^2$  とした式)。ここで  $k$  は正の定数,  $r$  は 3次元空間での原点からの距離  $r = |\mathbf{r}|$  である。 $k$  を  $k \pm i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  で置き換えて

$$F_{\pm}(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{\pm}(x) e^{irx}, \quad f_{\pm}(z) = \frac{1}{z + (k \pm i\varepsilon)} + \frac{1}{z - (k \pm i\varepsilon)}$$

を考える。 $r > 0$  であるから (5.48) より  $F_{\pm}(r)$  の積分には上半面にある極だけが寄与し

$$F_{\pm}(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} 2\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{ir(\pm k + i\varepsilon)} = -\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}$$

になる。 $F_{\pm}$  の代わりに主値でもよい。(5.67) より

$$F_P(r) = \frac{i}{8\pi^2 r} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) e^{irx} = \frac{F_+(r) + F_-(r)}{2} = -\frac{\cos kr}{4\pi r}$$

である。 $F_{\pm}$ ,  $F_P$  のどれを採用するかは境界条件に依存する。

**問題 5.19**  $(\nabla^2 + k^2)F_{\pm}(r) = \delta(\mathbf{r})$  を示せ。

## 5.10 ベキ級数

正則関数はテイラー展開すると, ベキ級数で表せる。ここでは, ベキ級数の解析的性質を調べる。

$\{g_n(z)\}$  を複素平面上の開領域  $D$  で定義された関数列  $g_0(z), g_1(z), \dots$  とする。任意の  $z \in D$  に対して有限な  $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)$  が存在するとき, 関数列  $\{g_n(z)\}$  は  $D$  で収束するという。 $\varepsilon, \delta$  記法で表現すれば, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して適当な自然数  $N$  が存在し, すべての  $z \in D$  において

$$n > N \text{ である任意の } n \text{ に対して } |g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$$

が成り立つとき,  $\{g_n(z)\}$  は  $D$  で  $g(z)$  に収束するという。任意の微小な  $\varepsilon > 0$  に対して, 十分大きな  $n$  をとれば  $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$  になる, ということである。一般に  $N = N(z, \varepsilon)$  であるが  $N$  が  $z$  に依存せず  $N = N(\varepsilon)$  のとき,  $\{g_n(z)\}$  は  $D$  において  $g(z)$  に**一様収束**するという。

$g(z)$  が  $z = a$  で連続であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して適当な  $\delta > 0$  が存在し

$$|z - a| < \delta \text{ である任意の } z \text{ に対して } |g(z) - g(a)| < \varepsilon$$

になることである。ただし, 領域  $|z - a| < \delta$  が  $g(z)$  の定義領域に含まれるように  $\delta$  をとる。

連続関数の列  $\{g_n(z)\}$  が  $D$  で一様収束する場合を考える。  $a \in D$  に対して  $D_a = \{z \mid |z - a| < \rho\}$  が  $D_a \subset D$  になるように  $\rho$  をとれる。  $g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(z)$  は一様収束であるから,  $\varepsilon > 0$  を与えたとき, 任意の  $z \in D_a$  に対して  $n > N$  で  $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$  になる  $N$  が存在する。  $g_n(z)$  は  $z = a$  で連続であるから,  $n$  を十分大きくとれば, 適当な  $\delta \leq \rho$  に対して  $|z - a| < \delta$  のとき  $|g_n(z) - g_n(a)| < \varepsilon$  になる。したがって

$$|z - a| < \delta \text{ のとき } |g(z) - g(a)| \leq |g(z) - g_n(z)| + |g_n(z) - g_n(a)| + |g_n(a) - g(a)| < 3\varepsilon$$

になり  $g(z)$  は  $z = a$  で連続である。  $a$  は  $D$  の任意の点であるから

$$\text{連続関数の列 } \{g_n(z)\} \text{ が } D \text{ で一様収束するならば } g(z) \text{ も } D \text{ で連続である。} \quad (5.70)$$

連続な  $\{g_n(z)\}$  が収束するだけならば,  $|g(z) - g_n(z)| < \varepsilon$  である  $n$  に対して  $|g(a) - g_n(a)| < \varepsilon$  になる保証はないから,  $g(z)$  が連続とは結論できない。

関数  $f_n(z)$  の級数及び部分 and

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z), \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|, \quad G_n(z) = \sum_{k=0}^n |f_k(z)| \quad (5.71)$$

とする。関数列  $\{F_n(z)\}$  が領域  $D$  で収束するとき, 級数  $F(z)$  は  $D$  で収束するという。  $G(z)$  が収束 (または一様収束) するとき  $F(z)$  は**絶対収束** (または**一様に絶対収束**) するという。

$$|F_n(z) - F(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| = G(z) - G_n(z)$$

であるから, 絶対収束する  $F(z)$  は収束するし, 一様に絶対収束する  $F(z)$  は一様収束する。

収束するとは限らない有界な実数列  $\{a_n\}$  は, 収束する部分数列  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, n_1 < n_2 < \dots$  を必ず含む (ワイエルシュトラスの定理)。収束値は部分数列のとり方に依存するが, 収束値の最大値を数列  $\{a_n\}$  の**上極限**, 最小値を**下極限**といい, それぞれ  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  で表す。

### べき級数の収束性

$a, c_n$  を複素定数として連続関数  $f_n(z) = c_n(z - a)^n$  の級数

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n, \quad \eta = z - a$$

がべき級数または整級数である。数列  $\{c_n\}$  は有界ではあるが収束する必要はない。  $F(z)$  が収束する場合  $c_n \eta^n = F_n(z) - F_{n-1}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  であるから, すべての  $n$  に対して  $|c_n \eta^n| \leq M < \infty$  になる定数  $M$  が存在する。  $|c_n|^{1/n} |\eta| \leq M^{1/n}$  より

$$C|\eta| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^{1/n} = 1, \quad C = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \quad (5.72)$$

である。

$0 < C < \infty$  の場合  $\rho_0 = |z_0 - a| < \rho \equiv 1/C$  である  $z = z_0$  を考える。 $\rho_0 < x < \rho$  とすると

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$$

であるから、 $n > N$  のとき  $1/x > |c_n|^{1/n}$ 、つまり  $|c_n|x^n < 1$  になる  $N$  が存在する。したがって、任意の  $n$  に対して  $|c_n|x^n < M < \infty$  を満たす定数  $M$  が存在する。 $z \in D_0 = \{z \mid |z - a| \leq \rho_0\}$  のとき (5.71) の  $G, G_n$  は

$$G(z) - G_n(z) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|\rho_0^k < M \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^k = M \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{\rho_0}{x} < 1 \quad (5.73)$$

になる。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$N > \frac{\log((1-\alpha)\varepsilon/M)}{\log \alpha}, \quad \log \alpha < 0$$

とすれば、 $n > N$  のとき  $G(z) - G_n(z) < \varepsilon$  である。 $N$  は  $z \in D_0$  である  $z$  に依存しないから、 $F(z)$  は閉円板  $D_0$  で一様に絶対収束する。 $\rho_0$  は  $\rho_0 < \rho$  であればよいから、 $|z - a| < \rho$  において  $F(z)$  は一様に絶対収束し (5.70) より連続である。

(5.72) より  $F(z)$  が収束するならば  $|\eta| \leq \rho$  であるが、この対偶をとれば、 $|\eta| > \rho$  の場合  $F(z)$  は収束しない、つまり、発散する。 $|\eta| = \rho$  では  $F(z)$  は収束することも発散することもある。

$$\rho = \frac{1}{C} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}} \quad (5.74)$$

べき級数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  の収束半径、 $|z-a| = \rho$  を収束円という。ただし、 $C = 0$  のとき (5.72) を満たす  $z$  は任意であるから  $\rho = \infty$  とし、 $C = \infty$  のときは  $z = a$  だけであるから  $\rho = 0$  とする。

収束半径の別表現を求める。

適当な  $n_0$  に対して  $n \geq n_0$  のとき  $c_n \neq 0$  であり  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}| > 0$  が存在する

場合を考える。 $|z-a| = |\eta| < R$  のとき  $|\eta| < x < R$  とすると、 $n > N$  のとき  $x < |c_n/c_{n+1}|$ 、つまり  $|c_n|x^n > |c_{n+1}|x^{n+1}$  になる  $N$  が存在するから、任意の  $n$  に対して  $|c_n|x^n < M < \infty$  とおける。(5.73) と同様にして  $|z-a| < R$  で  $F(z)$  は一様に絶対収束する。 $|\eta| > R$  の場合、 $|\eta| > x > R$  とすると  $n > N > n_0$  で  $x > |c_n/c_{n+1}|$  になる  $N$  が存在する。 $|c_n| > |c_{n-1}|/x$  より

$$|c_n \eta^n| > \frac{|\eta|}{x} |c_{n-1} \eta^{n-1}| > \cdots > \left| \frac{\eta}{x} \right|^{n-N} |c_N \eta^N|$$

$|\eta|/x > 1$  であるから  $|c_n \eta^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  になる。“ $F(z)$  が収束するならば  $c_n \eta^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ” の対偶より  $F(z)$  は発散する。したがって、収束半径  $\rho$  は

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (5.75)$$

である。 $\rho$  を求めるには、この方が (5.74) よりも簡単なことが多いが、適用範囲に制限がある。

### べき級数の導関数

$F(z)$  を項別微分した

$$F_d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \eta^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \eta^n, \quad d_n = (n+1)c_{n+1}$$

を考える。

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |d_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}|^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$$

であるから  $F(z)$  と  $F_d(z)$  の収束半径は一致する。 $F(z)$  の議論で  $c_n$  を  $d_n$  で置き換えれば,  $F_d(z)$  も  $|\eta| < \rho$  において一様に絶対収束し連続関数である。

$$|(\eta+h)^n - \eta^n - nh\eta^{n-1}| \leq \sum_{k=2}^n n C_k |h|^k |\eta|^{n-k} = (|h| + |\eta|)^n - |\eta|^n - n|h||\eta|^{n-1}$$

であるから

$$d = \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - F_d(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \left( (|h| + |\eta|)^n - |\eta|^n - n|h||\eta|^{n-1} \right)$$

$|\eta| < \rho$  のとき  $|\eta| < x < \rho$  とすると  $F(x+a)$  は収束するから  $c_n x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  であり, 任意の  $n$  に対して  $|c_n| x^n < M$  になる  $M$  が存在する。これから

$$d < \frac{M}{|h|} \sum_{n=0}^{\infty} (p^n - q^n - (p-q)nq^{n-1}), \quad p = \frac{|h| + |\eta|}{x}, \quad q = \frac{|\eta|}{x}$$

である。 $0 < q < 1$ ,  $|h| \rightarrow 0$  のとき  $0 < p < 1$  になるから

$$d < \frac{M}{|h|} \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-q} - \frac{p-q}{(1-q)^2} \right) = \frac{M}{(1-p)(1-q)^2} \frac{|h|}{x^2} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

したがって,  $dF/dz$  は  $F(z)$  の項別微分

$$\frac{dF}{dz} = F_d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z-a)^{n-1}, \quad |z-a| < \rho$$

で与えられる。 $|z-a| < \rho$  において  $dF/dz$  は連続であるから  $F(z)$  は正則である。

べき級数  $dF/dz$  の収束半径も  $\rho$  であるから, これまでの議論を  $dF/dz$  に適用できる。 $dF/dz$  も  $|z-a| < \rho$  で正則であり  $d^2F/dz^2$  は  $dF/dz$  を項別微分すればよい。これを繰り返し適用すると,  $F(z)$  は  $|z-a| < \rho$  で正則関数であり何回でも微分可能である。 $k$  階導関数  $F^{(k)}(z)$  も  $|z-a| < \rho$  で正則であり,  $F(z)$  を項別に  $k$  回微分した

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^{n-k} = c_k k! + c_{k+1} (k+1)! (z-a) + \dots$$

になる。 $F^{(k)}(a) = c_k k!$  であるから, べき級数  $F(z)$  はテイラー級数 (5.27) である。

### 5.11 解析接続

ある領域で定義された正則関数をより広い領域に拡張することを考える。このとき, 次の**一致の定理**が重要になる。

#### 一致の定理

$f_1(z), f_2(z)$  が領域  $D$  で正則とする。 $D$  内のある1点  $a$  に収束する  $D$  内の点列  $z_n \neq a, n = 1, 2, \dots$  を考える。任意の  $n$  に対して  $f_1(z_n) = f_2(z_n)$  ならば,  $D$  全体で  $f_1(z) = f_2(z)$  である。

**証明**  $D$  の境界と点  $a$  の最短距離を  $\rho_0$  とすると領域  $D_0 = \{z \mid |z-a| < \rho_0\}$  では

$$F(z) \equiv f_1(z) - f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

とテイラー展開できる。 $F(z_n) = 0$  であり  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  より  $c_0 = F(a) = 0$  であるから

$$F(z) = (z - a)F_1(z), \quad F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(z - a)^k$$

とおける。 $F(z_n) = (z_n - a)F_1(z_n) = 0$ ,  $z_n \neq a$  より  $F_1(z_n) = 0$  であり  $c_1 = F_1(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_1(z_n) = 0$  になる。以下同様にして, すべての  $c_k = 0$  であるから  $D_0$  では恒等的に  $F(z) = 0$  である。次に,  $a$  と  $D$  内の任意の点  $b$  を  $D$  内の通る曲線で結ぶ。曲線と  $D$  の境界との最短距離を  $\rho_{\min}$  とする。曲線上の点列  $t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b$  を中心とする領域  $D_k = \{z \mid |z - t_k| < \rho_{\min}\}$  を考える ( $k = 1, 2, \dots, m$ )。ただし,  $t_k \in D_{k-1}$  になるように  $m$  を十分大きく取る。 $t_1 \in D_0$  より  $F^{(k)}(t_1) = 0$  になるから  $D_1$  でも

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(t_1)}{k!} (z - t_1)^k = 0$$

これを繰り返すと  $F(z) = 0, z \in D_m$  になり  $F(b) = 0$  である。 ■

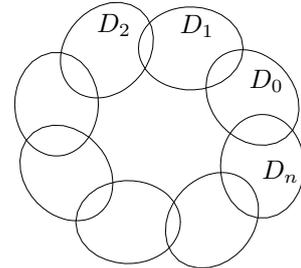
$D$  内のごく一部の領域 (例えば, 線分上) で  $f_1(z) = f_2(z)$  ならば, 上の条件を満たす点列  $z_n$  をとれるから,  $D$  全体で  $f_1(z) = f_2(z)$  である。

$f_0(z), f_1(z)$  がそれぞれ領域  $D_0, D_1$  で正則とする。 $D_0$  と  $D_1$  が重なる領域  $D_0 \cap D_1$  が存在し ( $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ ),  $D_0 \cap D_1$  で  $f_0(z) = f_1(z)$  のとき,  $f_1(z)$  を  $f_0(z)$  の  $D_1$  への解析接続という。 $D_1$  上で正則な関数  $g(z)$  が  $D_0 \cap D_1$  で  $g(z) = f_1(z)$  ならば, 一致の定理より  $D_1$  で  $g(z) = f_1(z)$  になるから,  $D_1$  への解析接続は一意に決まる。

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z), & z \in D_0 \\ f_1(z), & z \in D_1 \end{cases}$$

とすると,  $f(z)$  は  $D_0$  と  $D_1$  を合わせた領域  $D_0 \cup D_1$  で正則で  $D_0$  において  $f_0(z)$  に一致する唯一の関数である。一般に領域の列

$$D_0, D_1, \dots, D_n, \quad D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, n$$



に対して  $f_0(z) \rightarrow f_1(z) \rightarrow \dots \rightarrow f_n(z)$  と解析接続できるとき  $f_k(z), k = 0, 1, \dots, n$  の全体は, 総和領域  $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$  における正則関数  $f(z)$  を定義する。 $f(z)$  を解析関数という。 $f(z)$  は一意に決まる。 $f_k(z)$  は 1 価であるが, 図のように  $D_0 \cap D_n \neq \emptyset$  のとき,  $D_0 \cap D_n$  において  $f_n(z) = f_0(z)$  とは限らない。解析関数は多価の正則関数になる可能性がある。通常, 単に正則関数といえば 1 価正則関数を表す。

解析接続を具体的にを行う方法はいろいろある。

### 実関数の解析接続

実軸上で  $f(x)$  が与えられているとき, 実変数  $x$  を複素変数  $z$  に置き換えた  $f(z)$  が実軸を含む領域  $D$  で 1 価正則とする。 $D$  で正則な関数  $g(z)$  が実軸上で  $g(x) = f(x)$  ならば, 一致の定理より  $D$  で  $g(z) = f(z)$  である。 $f(x)$  の  $D$  への解析接続は  $f(z)$  以外にない。例えば, 実変数  $x$  を複素変数  $z$  で置き換えた指数関数  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$  は, 無限遠点を除く全平面で正則で, 実軸上で  $e^x$  に一致する唯一の関数である。

### べき級数による解析接続

収束半径が  $\rho_0$  のべき級数を

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{0n}(z - a_0)^n \tag{5.76}$$

とする。\$f\_0(z)\$ は領域 \$D\_0 = \{z \mid |z - a\_0| < \rho\_0\}\$ で正則である。円周上で \$f\_0(z)\$ が正則ならば、収束半径は \$\rho\_0\$ よりも大きくなるから、円周上には \$f\_0(z)\$ の特異点が存在する。\$D\_0\$ 内の点 \$a\_1 \neq a\_0\$ でテイラー展開すると

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n}(z - a_1)^n \tag{5.77}$$

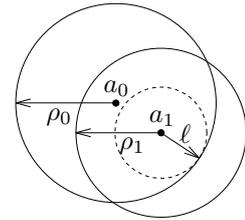
ただし

$$c_{1n} = \frac{f_0^{(n)}(a_1)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} c_{0k} \left. \frac{d^n (z - a_0)^k}{dz^n} \right|_{z=a_1} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} c_{0k} \frac{k!}{(k-n)!} (a_1 - a_0)^{k-n} \tag{5.78}$$

になる。(5.77) の右辺のべき級数の収束半径を \$\rho\_1\$ とすると

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n}(z - a_1)^n$$

は領域 \$D\_1 = \{z \mid |z - a\_1| < \rho\_1\}\$ で正則である。\$z = a\_1\$ を中心とする半径 \$\ell = \rho\_0 - |a\_1 - a\_0|\$ の円内は \$D\_0\$ に含まれるから \$\rho\_1 \ge \ell\$ である。\$\rho\_1 > \ell\$ ならば \$D\_1\$ は \$D\_0\$ からはみ出し \$f\_1(z)\$ は \$f\_0(z)\$ の \$D\_1\$ への解析接続になる。



\$D\_0 \cap D\_1\$ では \$f\_0(z) = f\_1(z)\$ であるが、\$D\_0\$ からはみ出た \$D\_1\$ では \$f\_0(z)\$ は発散する。同様に、あらゆる方向に解析接続を行うと \$z \in D\_0\$ のとき \$f(z) = f\_0(z)\$ である解析関数 \$f(z)\$ が一意に決まる。なお、任意の \$a\_1 \in D\_0\$ に対して \$\rho\_1 = \ell\$ の場合、\$f\_0(z)\$ は解析接続できない。

**問題 5.20** (5.76) において \$(z - a\_1 + a\_1 - a\_0)^n\$ を二項展開して (5.78) を導け。

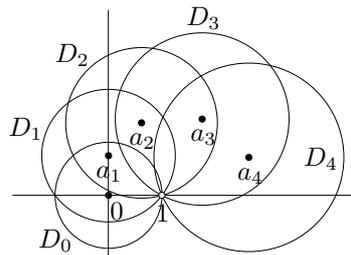
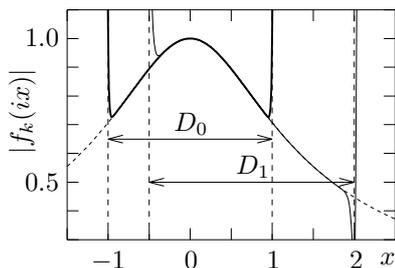
例として \$f\_0(z) = 1 + z + z^2 + \dots\$ の場合 \$D\_0 = \{z \mid |z| < 1\}\$ では \$f\_0(z) = 1/(1 - z)\$ になるが \$|z| \ge 1\$ では発散する。\$z \neq 1\$ である領域に解析接続すると、一致の定理より \$D\_0\$ で \$f\_0(z)\$ に一致する解析関数 \$f(z)\$ は \$f(z) = 1/(1 - z)\$ だけである。これを具体的に確かめる。\$a\_1 \in D\_0\$ のとき

$$c_{1n} = \frac{f_0^{(n)}(a_1)}{n!} = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{1 - z} \right|_{z=a_1} = \frac{1}{(1 - a_1)^{n+1}}$$

であるから

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - a_1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left( \frac{z - a_1}{1 - a_1} \right)^n = \frac{1}{1 - z} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \left( \frac{z - a_1}{1 - a_1} \right)^{N+1} \right)$$

\$c\_{1n}/c\_{1,n+1} = 1 - a\_1\$ より \$\rho\_1 = |1 - a\_1|\$ である。\$D\_1 = \{z \mid |z - a\_1| < \rho\_1\}\$ では \$f\_1(z) = 1/(1 - z)\$ になる。\$a\_1\$ が 0 と 1 を結ぶ線分上にない場合 \$\rho\_1 > \ell = 1 - |a\_1|\$ であり \$D\_1\$ は \$D\_0\$ からはみ出す。下の左図に虚軸上での \$|f\_k(ix)|\$ を示す。太い曲線が \$|f\_0(ix)|\$、細い曲線が \$|f\_1(ix)|\$ であり \$N = 50, a\_1 = 3i/4\$ (\$\rho\_1 = 5/4\$) とした。破線の曲線は \$1/|1 - ix|\$ を表す。次に、\$a\_2 \in D\_1\$ を \$a\_1\$ と 1 を結ぶ線分上にない点とする。下の右図のように、この操作を繰り返すと \$D\_k = \{z \mid |z - a\_k| < \rho\_k\}, \rho\_k = |1 - a\_k|\$ では \$f\_k(z) = 1/(1 - z)\$ である。\$z = 1\$ は全ての収束円上に存在するから、\$z = 1\$ には解析接続できないが、\$z \neq 1\$ には解析接続でき \$f(z) = 1/(1 - z)\$ になる。



次に、多価関数である  $\log z$  を考える。実関数  $\log x$  の  $x = a_0 > 0$  でのテイラー展開を用いて

$$f_0(z) = \log a_0 + G(z, a_0), \quad G(z, a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n, \quad c_n(a) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{1}{a^n}$$

とする。  $|c_n/c_{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$  より  $f_0(z)$  は

$$D_0 = \{z \mid |z - a_0| < a_0\} = \{z = re^{i\theta} \mid 0 < r < 2a_0, |\theta| < \varphi(r)\}, \quad \varphi(r) = \cos^{-1} \frac{r}{2a_0}$$

で正則である。  $\varphi(a_0) = \pi/3$  より  $a_1 = a_0 e^{i\varphi_0}$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  は  $D_0$  内の点である。  $z = a_1$  で  $f_0(z)$  をテイラー展開する。  $|z - a| < |a|$  のとき

$$\frac{dG(z, a)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z)^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{z}$$

より  $f_0^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! / z^n$  になるから

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0^{(n)}(a_1)}{n!} (z - a_1)^n = f_0(a_1) + G(z, a_1)$$

$G(z, a_1)$  は  $D_1 = \{z \mid |z - a_1| < a_0\}$  で正則であるから、 $f_0(z)$  の  $D_1$  への解析接続は

$$f_1(z) = f_0(a_1) + G(z, a_1)$$

になる。  $k = 0, 1, 2, \dots$  のとき  $a_k = a_0 e^{ik\varphi_0}$  として、解析接続を繰り返すと

$$f_k(z) = f_{k-1}(a_k) + G(z, a_k), \quad f_{-1}(a_0) = \log a_0$$

ただし

$$z \in D_k = \{z \mid |z - a_k| < a_0\} = \{z = re^{i\theta} \mid 0 < r < 2a_0, |\theta - k\varphi_0| < \varphi(r)\}$$

になる。  $dG(z, a_k)/dz = 1/z$ ,  $G(a_k, a_k) = 0$  より

$$G(z, a_k) = \int_C \frac{dt}{t}, \quad C = \text{始点 } a_k \text{ と終点 } z \text{ を結ぶ } D_k \text{ 内の任意の経路}$$

と表せる。  $t = \rho e^{i\phi}$  とする。  $C$  を線分  $\rho: a_0 \rightarrow r$ ,  $\phi = \text{一定} = k\varphi_0$  と円弧  $\rho = \text{一定} = r$ ,  $\phi: k\varphi_0 \rightarrow \theta$  にとれば

$$f_k(z) = f_{k-1}(a_k) + \int_{a_0}^r \frac{d\rho}{\rho} + i \int_{k\varphi_0}^{\theta} d\phi = f_{k-1}(a_k) + \log r - \log a_0 + i(\theta - k\varphi_0)$$

である。  $z = a_{k+1} = a_0 e^{i(k+1)\varphi_0} \in D_k$  の場合  $r = a_0$ ,  $\theta = (k+1)\varphi_0$  より

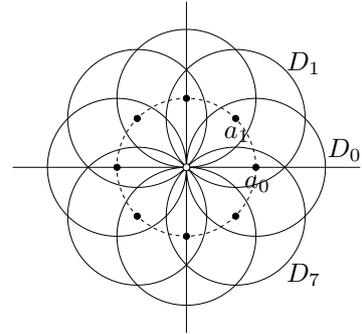
$$f_k(a_{k+1}) = f_{k-1}(a_k) + i\varphi_0, \quad \therefore f_{k-1}(a_k) = f_{-1}(a_0) + ik\varphi_0 = \log a_0 + ik\varphi_0$$

したがって  $k \geq 0$  のとき

$$f_k(z) = \log r + i\theta, \quad z \in D_k$$

になる。  $D_0 \rightarrow D_{-1} \rightarrow \dots$  と解析接続すれば、上式は  $k = -1, -2, \dots$  のときでも成り立つ。

$$\log z = \log r + i\theta, \quad z \in D_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



で  $\log z$  を定義する。 $z \in D_k$  である  $z$  に対して  $\log z$  は 1 価である。

$$k = 8n + \nu, \quad n = \text{任意整数}, \quad \nu = 0, 1, \dots, 7$$

とする。 $k$  を与えると  $n, \nu$  は一意に決まる。 $D_k$  での  $\theta$  を  $\theta_k$  とすると

$$-\varphi(r) < \theta_k - (8n + \nu)\varphi_0 < \varphi(r), \quad 8n\varphi_0 = 2n\pi$$

より  $D_k$  と  $D_\nu$  は複素平面上では同じ部分を占めるから  $z \in D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_7$  に制限してもよい。 $\theta_k = \theta_\nu + 2n\pi$  になるから

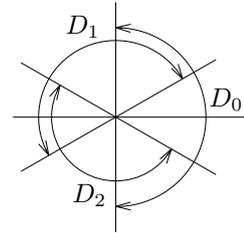
$$\log z = \log r + i\theta + 2n\pi i, \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, 7$$

である。 $\log z$  は領域  $D_\nu$  において  $\log r + i\theta + 2n\pi i$  のいずれかと一致する多価の解析関数である。 $z = 0$  を内部に含む  $D_k$  は存在しないから  $z = 0$  には解析接続できない。

**問題 5.21**  $\sqrt{z}$  を解析接続して求める。 $k$  を任意整数として領域

$$D_k = \{z = re^{i\theta} \mid r \geq 0, 2k\pi/3 - \pi/2 < \theta < 2k\pi/3 + \pi/2\}$$

を考える。 $f_0(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ ,  $z \in D_0$  とする。 $x \geq 0$  のとき  $f_0(x) = \sqrt{x}$  である。 $f_0(z)$  を  $D_0 \rightarrow D_{\pm 1} \rightarrow D_{\pm 2} \rightarrow \dots$  の順に解析接続した関数  $f_k(z)$ ,  $z \in D_k$  により  $f(z)$  を定義する。 $f(z) = (-1)^n f_\nu(z)$ ,  $z \in D_\nu$  を示せ。ただし  $k = 3n + \nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2$  である。



### 鏡像原理による解析接続

ある領域  $D$  に対して実軸に関して対称な領域を  $D^*$  とする。 $D$  における正則関数  $f(z)$  は  $a \in D$  のとき

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \therefore \quad f^*(z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (z-a^*)^n$$

と展開できる。 $a^* \in D^*$  より  $f^*(z^*)$  は  $D^*$  において正則な  $z$  の関数である。

$D_0$  を実軸上の線分  $L$  を含む片側の領域 ( $\text{Im } z \geq 0$  または  $\text{Im } z \leq 0$ ) とする。 $f_0(z)$  を  $D_0$  における正則関数とすると,  $f_1(z) = f_0^*(z^*)$  は  $D_0^*$  で正則である。 $x \in L$  とし, 実数  $\varepsilon$  を  $x + i\varepsilon \in D_0$  になるようにとると

$$f_0(x + i\varepsilon) - f_1(x - i\varepsilon) = f_0(x + i\varepsilon) - f_0^*(x + i\varepsilon) = 2 \text{Im} f_0(x + i\varepsilon)$$

である。 $f_0(x)$  が実数ならば  $L$  において  $f_1(x) = f_0(x)$  になるから,  $f_0(z)$  の  $D_0^*$  への解析接続は  $f_1(z)$  であり

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z), & z \in D_0 \\ f_0^*(z^*), & z \in D_0^* \end{cases}$$

は  $D_0 \cup D_0^*$  で正則になる。上式の複素共役をとり  $z$  を  $z^*$  で置き換えると

$$f^*(z^*) = \begin{cases} f_0^*(z^*), & z^* \in D_0, \text{ つまり } z \in D_0^* \\ f_0(z), & z^* \in D_0^*, \text{ つまり } z \in D_0 \end{cases} = f(z), \quad z \in D_0 \cup D_0^*$$

である。

## ガンマ関数

(4.48)において実数  $x$  を複素数  $z$  で置き換えて

$$\Gamma_0(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad (5.79)$$

とする。  $z = x + iy$  とすると  $|t^{z-1}| = |t^{x-1} e^{iy \log t}| = t^{x-1}$  より

$$|\Gamma_0(z)| \leq \int_0^{\infty} dt |e^{-t} t^{z-1}| = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}, \quad |d\Gamma_0/dz| \leq \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1} |\log t|$$

である。  $D_0 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  で  $\Gamma_0(z)$ ,  $d\Gamma_0/dz$  は有限になるから  $\Gamma_0(z)$  は正則である。(4.49)と同様に  $n = 1, 2, 3, \dots$  として

$$\Gamma_0(z) = \Gamma_n(z), \quad \Gamma_n(z) = \frac{\Gamma_0(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in D_0 \quad (5.80)$$

である。  $\Gamma_n(z)$  は  $D_n = \{z \mid \operatorname{Re} z > -n, z \neq 0, -1, \dots, -n+1\}$  で正則である。そこで  $\Gamma(z)$  を

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \Gamma_0(z), & z \in D_0 \\ \Gamma_n(z), & z \in D_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

で定義する。  $z \in D_0$  のとき  $\Gamma_n(z) = \Gamma_0(z)$  であるから、  $\Gamma_0(z)$  を非正の整数を除く全複素平面に解析接続したことになる。  $z \notin D_0$  のとき  $\Gamma(z)$  は (5.79) では表せないが

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right) \quad (5.81)$$

は任意の  $z$  で成り立つ。  $\gamma = 0.5772156\dots$  はオイラーの定数である。

**問題 5.22**  $n$  を整数とする。  $(1-t/n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t}$  であるから、  $z \in D_0$  のとき (5.79) より

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z), \quad F_n(z) = \int_0^n dt t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n^z \int_0^1 dx x^{z-1} (1-x)^n$$

である。部分積分を  $n$  回行い (5.81) を示せ。

## 5.12 鞍点法

116 ページで示したように、正則関数  $f(z)$  の場合、  $f'(z) = 0$ ,  $f''(z) \neq 0$  を満たす点  $z$  において  $|f(z)|$  は極小値 0 以外の極値をとらない。同じことは  $f(z)$  の実部  $u(z)$ , 虚部  $v(z)$  でも成り立つ。  $f'(z) = u_x - iu_y = 0$  のとき  $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$  である。また、コーシー・リーマンの微分方程式 (5.7) より

$$D_u = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = - (u_{xx})^2 - (v_{xx})^2 = -|f''(z)|^2$$

$u(x, y)$  が極値をとる条件は (2.12) より  $D_u > 0$  であるが、  $f''(z) \neq 0$  である点  $z$  では  $D_u < 0$  になるから  $z$  は停留点であり、  $u(z)$  は極小でも極大でもない。

停留点近傍の性質を調べる前に  $u(x, y) = \text{一定}$  及び  $v(x, y) = \text{一定}$  を考える。  $x$  を与えると  $u(x, y) = \text{一定}$  を満たすように  $y$  が定まるから、  $u(x, y) = \text{一定}$  は複素平面上の曲線を表す。この曲線を  $C_u$  とすると、  $C_u$  上の近接する 2 点  $(x, y)$ ,  $(x+dx, y+dy)$  では

$$u(x+dx, y+dy) - u(x, y) = u_x dx + u_y dy = 0$$

である。同様に  $v(x, y) = \text{一定}$  である曲線  $C_v$  上の近接する 2 点  $(x, y)$ ,  $(x + dx', y + dy')$  では

$$v(x + dx', y + dy') - v(x, y) = v_x dx' + v_y dy' = -u_y dx' + u_x dy' = 0$$

になるから  $u_x dx dx' = -u_y dy dx' = -u_x dy dy'$  である。したがって

$$u_x(dx dx' + dy dy') = 0, \quad \text{同様にして} \quad u_y(dx dx' + dy dy') = 0$$

$f'(z) = u_x - iu_y \neq 0$  のとき  $u_x$  と  $u_y$  が同時に 0 になることはないから  $dx dx' + dy dy' = 0$  であり、微小ベクトル  $(dx, dy)$  と  $(dx', dy')$  は直交する。つまり、 $f'(z) \neq 0$  である点では  $u(x, y) = \text{一定}$  の曲線と  $v(x, y) = \text{一定}$  の曲線は直交する。25 ページで示したように、 $u(x, y)$  が最も大きく変化する方向は、 $u(x, y) = \text{一定}$  と直交する方向であるから、 $v(x, y) = \text{一定}$  の曲線上では  $u(x, y)$  は最も大きく変化する。このため、曲線  $v(x, y) = \text{一定}$  を**最大勾配曲線**という。

以上のことは、次のようにしても示せる。ある点  $z_0$  を通る直線上の  $z$  は  $z - z_0 = xe^{i\phi}$  とおける。 $z_0$  の両側で  $\phi$  を共通にし  $-\infty < x < \infty$  である。 $z_0$  近傍での  $f(z)$  は

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots = f(z_0) + |f'(z_0)|xe^{i(\alpha+\phi)} + \cdots$$

ただし、 $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\alpha}$  である。これから

$$u(z) = u(z_0) + |f'(z_0)|x \cos(\phi + \alpha) + \cdots, \quad v(z) = v(z_0) + |f'(z_0)|x \sin(\phi + \alpha) + \cdots$$

したがって、 $f'(z_0) \neq 0$  の場合

$$\cos(\phi + \alpha) = 0 \text{ のとき } u = \text{一定}, \quad \sin(\phi + \alpha) = 0 \text{ のとき } v = \text{一定}$$

であり、 $u = \text{一定}$  の方向と  $v = \text{一定}$  の方向は直交する。また  $v = \text{一定}$ , ( $\sin(\phi + \alpha) = 0$ ) のとき  $\cos(\phi + \alpha) = \pm 1$  になるから  $u$  は最も大きく変化する。

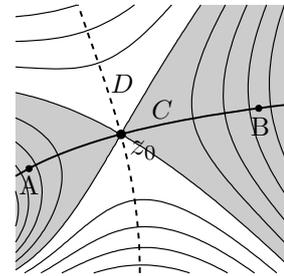
次に  $f'(z_0) = 0$ ,  $f''(z_0) \neq 0$  のとき

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots = f(z_0) + \frac{|f''(z_0)|}{2}x^2e^{i(2\phi+\beta)} + \cdots$$

ただし  $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\beta}$  である。これから

$$u(z) = u(z_0) + \frac{|f''(z_0)|}{2}x^2 \cos(2\phi + \beta), \quad v(z) = v(z_0) + \frac{|f''(z_0)|}{2}x^2 \sin(2\phi + \beta) + \cdots \quad (5.82)$$

$\phi$  が  $\cos(2\phi + \beta) > 0$  を満たす方向では  $u(z_0)$  は極小、 $\cos(2\phi + \beta) < 0$  の方向では極大になる。したがって、 $z = z_0$  を通り  $u(z) = \text{一定} = u(z_0)$  の 2 つの曲線を境にして、曲面  $u = u(z)$  は山と谷に分かれる。 $u(z_0)$  は極小でも極大でもない。図に  $u(z)$  の等高線を細い実線で示す。影をつけた部分が谷を表す。 $z = z_0$  は曲面  $u = u(z)$  の峠になっており鞍点 (saddle point) である。曲線  $v(z) = \text{一定}$  は  $u(z)$  が最も大きく変化する方向を表すが、特に鞍点  $z = z_0$  を通る曲線  $v(z) = \text{一定} = v(z_0)$  は図に示した太い実線  $C$  と破線  $D$  の 2 本ある。これらの曲線の  $z = z_0$  での接線方向は (5.82) から



$$C : \cos(2\phi + \beta) = -1, \quad D : \cos(2\phi + \beta) = 1$$

であり  $z = z_0$  で  $C$  と  $D$  は直交する。谷を通る  $C$  上では  $u(z)$  は最も急速に減少するから、この曲線を**最急降下曲線**という。

$t$  を複素数とすると、複素積分で定義される関数

$$F(t) = \int_{C_0} dz e^{tf(z)} g(z)$$

の  $|t| \rightarrow \infty$  での近似式を求める。

$$e^{tf(z)} = e^{u(t,z)} \left( \cos v(t,z) + i \sin v(t,z) \right), \quad \text{ただし } tf(z) = u(t,z) + iv(t,z)$$

とおく。積分路  $C_0$  が  $u(t,z)$  の鞍点を通る最急降下曲線  $C$  に変更できるとする。 $|t| \rightarrow \infty$  のとき鞍点近傍では  $e^{u(t,z)}$  は非常に鋭いピークになるだろうから、積分を  $z = z_0$  近傍だけで近似できよう。一般に、 $|t| \rightarrow \infty$  では  $\cos v(t,z)$  と  $\sin v(t,z)$  は  $z$  は変化すると激しく振動するため積分の評価は困難であるが、最急降下曲線上の積分では  $v(t,z)$  は定数である。 $z = z_0$  近傍では

$$tf(z) = tf(z_0) + \frac{tf''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 + \dots = tf(z_0) + \frac{|tf''(z_0)|}{2} e^{i(2\phi+\beta)} x^2 + \dots$$

ただし

$$tf''(z_0) = |tf''(z_0)| e^{i\beta}, \quad z - z_0 = x e^{i\phi}$$

である。 $\phi$  は  $z = z_0$  で曲線  $C$  と接する直線の角度であり、 $x > 0$  の方向が積分路の方向になるように  $\phi$  をとる。上図でいえば、積分方向が  $A \rightarrow B$  と  $B \rightarrow A$  では  $\phi$  は  $\pi$  だけ異なる。最急降下曲線  $C$  では  $x^2$  の係数は負になるから  $e^{i(2\phi+\beta)} = -1$ 、つまり  $2\phi + \beta = (2n+1)\pi$  であり

$$tf(z) = tf(z_0) - \frac{|tf''(z_0)|}{2} x^2 + \dots$$

あるいは

$$u(t,z) = u(t,z_0) - \frac{|tf''(z_0)|}{2} x^2 + \dots, \quad v(t,z) = v(t,z_0)$$

になる。 $|t| \rightarrow \infty$  のとき、 $x = 0$  近傍以外では  $e^{tf(z)} \approx 0$  になるから、積分区間を  $-\infty < x < \infty$  とし、 $tf(z)$  を上式で近似する。また、 $g(z) \approx g(z_0)$  としてよい。 $dz = e^{i\phi} dx$  より

$$\int_{C_0} dz e^{tf(z)} g(z) \approx e^{tf(z_0)} g(z_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\phi} e^{-|tf''(z_0)|x^2/2} = e^{tf(z_0)+i\phi} g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|tf''(z_0)|}}$$

になる。 $\sqrt{|tf''(z_0)|} = \sqrt{|tf''(z_0)|} e^{i\beta/2} = \sqrt{|tf''(z_0)|} i e^{-i\phi+i\pi n}$  であるから

$$\int_{C_0} dz e^{tf(z)} g(z) \approx \pm i e^{tf(z_0)} g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|tf''(z_0)|}}$$

とも表せる。符号は積分路  $C_0$  と鞍点を通る積分路  $C$  の向きで決まる。この近似法を鞍点法という。

**例題** ガンマ関数 (4.48)

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} dx x^t e^{-x}$$

の  $|t| \rightarrow \infty$  での近似式を求める。 $t$  は  $\text{Ret} > -1$  の複素数でもよい。 $t$  の極形式を

$$t = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho > 0, \quad |\alpha| < \pi/2$$

とする。 $z = x/t$  とすると

$$\Gamma(t+1) = t^{t+1} \int_{C_0} dz z^t e^{-tz} = t^{t+1} \int_{C_0} dz e^{tf(z)}, \quad f(z) = \log z - z$$

であり、鞍点法が使える形式になる。 $C_0$  は角度  $-\alpha$  で原点から無限遠に向かう直線経路である。

$$f'(z) = \frac{1}{z} - 1, \quad f''(z) = -\frac{1}{z^2}$$

より  $z = 1$  が鞍点である。 $\alpha \neq 0$  のとき、 $C_0$  上に  $z = 1$  は存在しないが、以下で示すように、 $z = 1$  を通る最急降下曲線  $C$  に積分路を変更できる。 $z = 1 + xe^{i\phi}$  とおくと

$$tf(z) = tf(1) + \frac{tf''(1)}{2}x^2e^{2i\phi} + \dots = -t - \frac{e^{i(\alpha+2\phi)}}{2}\rho x^2 + \dots$$

である。 $C$  上の  $z$  では  $x^2$  の係数は負になるから  $e^{i(\alpha+2\phi)} = 1$  である。積分の向きを考えると  $\phi = -\alpha/2$  とし  $x$  を増加する方向に積分すればよい。 $dz = e^{i\phi}dx = e^{-i\alpha/2}dx$  より

$$\Gamma(t+1) \approx t^{t+1}e^{-t}e^{-i\alpha/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\rho x^2/2} = \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}, \quad \sqrt{t} = \sqrt{\rho} e^{i\alpha/2}$$

である。 $n = 1, 2, \dots$  のとき  $\Gamma(n+1) = n!$  であるから、 $n \gg 1$  の場合  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  になる。これをスターリングの公式という。

$\log z$  は多価関数である。ここでは正の実軸で連続になるように

$$\log z = \log r + i\theta, \quad \text{ただし } z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

とする。 $tf(z) = \rho e^{i\alpha}(\log r + i\theta - re^{i\theta})$  より

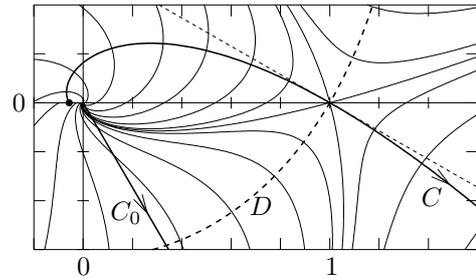
$$u(t, z) = \operatorname{Re}(tf(z)) = \rho(\cos \alpha \log r - \theta \sin \alpha - r \cos(\alpha + \theta))$$

$$v(t, z) = \operatorname{Im}(tf(z)) = \rho(\sin \alpha \log r + \theta \cos \alpha - r \sin(\alpha + \theta))$$

である。 $u(t, re^{i\pi}) - u(t, re^{-i\pi}) = -2\pi\rho \sin \alpha$  になるから、 $\alpha \neq 0$  のとき  $u$  は負の実軸で不連続になる。最急降下曲線  $C$  は  $v(t, z) = \text{一定} = v(t, 1)$  より

$$(\log r + 1) \sin \alpha + \theta \cos \alpha - r \sin(\alpha + \theta) = 0$$

で決まる。 $t$  が実数 ( $\alpha = 0$ ) のとき  $\theta - r \sin \theta = 0$ 、つまり  $y = 0$  または  $x = y \cot y$  になり、 $y = 0$  が  $C$  である。 $C_0$  と  $C$  は一致し、積分路を変更する必要はない。 $\alpha \neq 0$  での  $C$  を右図に示す ( $\alpha = \pi/3$ )。細かい曲線は  $u(t, z) = \text{一定}$  を表す。 $C$  はこれらの曲線と直交する。鞍点  $z = 1$  での  $C$  の接線は角度  $\phi = -\alpha/2$  で実軸と交わる。



$$\sin(\alpha + \theta) = \frac{(\log r + 1) \sin \alpha + \theta \cos \alpha}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad u(t, z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\rho r \cos(\alpha + \theta)$$

より、最急降下曲線の場合  $\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\alpha$  になるから、 $C_0$  は  $C$  の漸近線である ( $\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \pi - \alpha$  は曲線  $D$  の漸近線)。  $C$  は  $\alpha > 0$  のとき上半面から、 $\alpha < 0$  のとき下半面から負の実軸に到達する (図の●)。負の実軸で  $v(t, z)$  は不連続になるから、 $C$  は反対側の半面には達しない。 $\alpha \geq 0$  のとき到達点を  $r = r_0$ 、 $\theta = \pm\pi$  とすると

$$(\log r_0 + 1) \sin |\alpha| + \pi \cos \alpha + r_0 \sin |\alpha| = 0, \quad \therefore \log r_0 + r_0 = -\frac{\pi \cos \alpha}{\sin |\alpha|} - 1 \quad (5.83)$$

である ( $\theta = \mp\pi$  とすると  $D$  の到達点)。実軸に沿って  $z = r_0 e^{\pm i\pi}$  から原点までの経路を  $C'$  とすると  $C_0 - C + C'$  は閉曲線になり, この閉曲線内で  $e^{tf(z)}$  は正則になるから (原点を迂回する必要はあるが,  $\cos \alpha > 0$  よりこの部分の寄与は 0 になる)

$$\int_{C_0} dz e^{tf(z)} = \int_C dz e^{tf(z)} - I', \quad I' = \int_{C'} dz e^{tf(z)} = - \int_{r_0}^0 dr e^{tf(re^{\pm i\pi})}$$

である。

$$|I'| \leq \int_0^{r_0} dr \exp(u(t, re^{\pm i\pi})) = \int_0^{r_0} dr \exp((\log r + r)\rho \cos \alpha - \pi\rho \sin |\alpha|)$$

$\cos \alpha > 0, 0 \leq r \leq r_0$  のとき  $\log r + r \leq \log r_0 + r_0$  であり (5.83) より

$$|I'| \leq r_0 \exp(-\rho \cos \alpha - \pi\rho / \sin |\alpha|) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0, \quad \cos \alpha + \pi / \sin |\alpha| > 0$$

になる。したがって,  $C_0$  を最急降下曲線に変更できる。

### 5.13 複素積分と 2 階線形微分方程式

同次の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z)y(z) = 0$$

の解  $y(z)$  は, 95 ページ以降で扱ったように, ベキ級数を用いて得ることができる。ここでは解  $y(z)$  を複素  $t$  平面上の積分で表して

$$y(z) = \int_C dt K(z, t) v(t) \quad (5.84)$$

の形に求める。  $K(z, t)$  は与えられた関数で, 例えば  $e^{zt}, (t-z)^\lambda$  などである。積分路  $C$  は以下で示す条件を満たす適当な経路である。  $y(z)$  が微分方程式を満たすように  $v(t)$  を決める。

以下では, ルジャンドルの微分方程式

$$(1-z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + \nu(\nu+1)y = 0$$

を考える。  $z, \nu$  は複素数でもよい。  $K(z, t) = (t-z)^\lambda$  として (5.84) を上式に代入すると

$$\int_C dt v(t) \left( \lambda(\lambda-1)(1-z^2)(t-z)^{\lambda-2} + 2\lambda z(t-z)^{\lambda-1} + \nu(\nu+1)(t-z)^\lambda \right) = 0$$

$z = t - (t-z)$  として  $t-z$  で表すと

$$\int_C dt v(t) \left( \lambda(\lambda-1)(1-t^2)(t-z)^{\lambda-2} + 2\lambda^2 t(t-z)^{\lambda-1} + (\nu(\nu+1) - \lambda(\lambda+1))(t-z)^\lambda \right) = 0$$

$\lambda$  を  $\nu(\nu+1) - \lambda(\lambda+1) = 0$ , つまり,  $\lambda = \nu$  または  $\lambda = -\nu - 1$  とすれば

$$\begin{aligned} & \int_C dt v(t) \left( \lambda(\lambda-1)(1-t^2)(t-z)^{\lambda-2} + 2\lambda^2 t(t-z)^{\lambda-1} \right) \\ &= \int_C dt v(t) \left( (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} (t-z)^\lambda + 2\lambda t \frac{d}{dt} (t-z)^\lambda \right) = 0 \end{aligned}$$

部分積分を行うと

$$\int_C dt t v(t) \frac{d}{dt} (t-z)^\lambda = [t v(t) (t-z)^\lambda]_C - \int_C dt (t-z)^\lambda \frac{d}{dt} t v(t)$$

ただし  $[f(t)]_C$  は積分路の終点と始点での  $f(t)$  の差,  $C$  が閉曲線なら一周したときの  $f(t)$  の差を表す。同様にして

$$\int_C dt v(t) (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} (t-z)^\lambda = \left[ (1-t^2)v(t) \frac{d}{dt} (t-x)^\lambda - \frac{d(1-t^2)v}{dt} (t-x)^\lambda \right]_C + \int_C dt (t-x)^\lambda \frac{d^2}{dt^2} (1-t^2) v(t)$$

であるから

$$[F(t)]_C + \int_C dt (t-x)^\lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (1-t^2) v(t) - 2\lambda t v(t) \right) = 0$$

ただし

$$F(t) = (1-t^2)v(t) \frac{d}{dt} (t-z)^\lambda - (t-z)^\lambda \left( \frac{d}{dt} (1-t^2)v(t) - 2\lambda t v(t) \right)$$

したがって

$$\frac{d}{dt} (1-t^2)v(t) - 2\lambda t v(t) = (1-t^2) \frac{dv}{dt} - 2(1+\lambda)tv = 0 \quad (5.85)$$

及び  $C$  を

$$[F(t)]_C = \left[ (1-t^2)v(t) \frac{d}{dt} (t-x)^\lambda \right]_C = 0$$

となるように取れば

$$y(z) = \int_C dt (t-z)^\lambda v(t), \quad \lambda = \nu, -\nu-1$$

はルジャンドル微分方程式の解になる。(5.85) より

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} + (\lambda+1) \frac{2t}{t^2-1} = \frac{d}{dt} (\log v + (\lambda+1) \log(t^2-1)) = 0, \quad \therefore v(t) = v_0(t^2-1)^{-\lambda-1}$$

になるから

$$y(z) = v_0 \int_C dt (t-z)^\lambda (t^2-1)^{-\lambda-1}, \quad [(t^2-1)^{-\lambda}(t-z)^{\lambda-1}]_C = 0$$

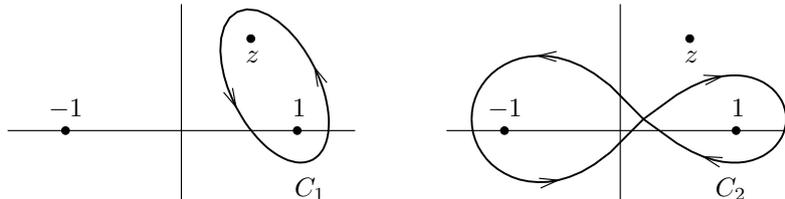
$\lambda = -\nu-1$  のとき

$$y(z) = v_0 \int_C dt \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}, \quad [F_\nu(t)]_C = 0 \quad (5.86)$$

ただし

$$F_\nu(t) = \frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}} = \frac{(t-1)^{\nu+1}(t+1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}$$

である。 $\lambda = \nu$  は上式で  $\nu$  を  $-\nu-1$  に置き換えればよい。



積分路  $C$  の選び方はいろいろある。これにより微分方程式の解の様々な表現を得たり, 他の表現との関係を調べられる。 $\nu$  が整数でないとき,  $(t-1)^{\nu+1}$  は多価関数であり分岐点  $t=1$  のまわりの1周すると元の値に戻らない。 $(t+1)^{\nu+1}$ ,  $(t-z)^{-\nu-2}$  についても同様であり, これらのことを考慮して (5.86) の条件を満たすように積分路  $C$  を決める。上図のような積分路を考える。 $C_1$  は  $t=1$

と  $t = z$  のまわりを正方向にまわる。ただし、 $t = -1$  は  $C_1$  の外側にある。したがって  $z \neq -1$  である。 $t = 1 + r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $t = z + r_2 e^{i\theta_2}$  とすると

$$(t-1)^{\nu+1} = r_1^{\nu+1} e^{i(\nu+1)\theta_1}, \quad (t-z)^{-\nu-2} = r_2^{-\nu-2} e^{-i(\nu+2)\theta_2}$$

$t = 1$  及び  $t = z$  のまわりに1周すると

$$r_1^{\nu+1} e^{i(\nu+1)(2\pi+\theta_1)} = e^{2\pi i \nu} r_1^{\nu+1} e^{i(\nu+1)\theta_1}, \quad r_2^{-\nu-2} e^{-i(\nu+2)(2\pi+\theta_2)} = e^{-2\pi i \nu} r_2^{-\nu-2} e^{-i(\nu+2)\theta_2}$$

であるから、 $\nu$  が整数でない場合  $e^{2\pi i \nu} \neq 1$  であり元も値に戻らない。しかし、 $C_1$  上で、ある点  $t = t_0$  を出発点にして1周すると

$$[F_\nu(t)]_{C_1} = e^{2\pi i \nu} e^{-2\pi i \nu} F(t_0) - F(t_0) = F(t_0) - F(t_0) = 0$$

であり条件 (5.86) を満たす。 $C_2$  は  $t = -1$  を正方向に、 $t = 1$  を負方向に1周する積分路である。 $t = z$  は  $C_2$  の外側にあり  $z \neq \pm 1$  である。この場合も

$$\text{正方向の } t = -1 \text{ まわり } (t+1)^{\nu+1} \rightarrow e^{2\pi i \nu}, \quad \text{負方向の } t = 1 \text{ まわり } (t-1)^{\nu+1} \rightarrow e^{-2\pi i \nu}$$

の因子は打ち消しあい  $[F_\nu(t)]_{C_2} = 0$  である。

積分路が  $C_1$  の場合  $v_0 = 1/(2\pi i 2^\nu)$  として

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu} \oint_{C_1} dt \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} \quad (5.87)$$

とする。

$$\frac{dP_\nu}{dz} = \frac{\nu+1}{2\pi i 2^\nu} \oint_{C_1} dt \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+2}}$$

$z = 1$  のとき

$$P_\nu(1) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu} \oint_{C_1} dt \frac{(t+1)^\nu}{t-1}, \quad P'_\nu(1) = \frac{\nu+1}{2\pi i 2^\nu} \oint_{C_1} dt \frac{(t+1)^\nu}{(t-1)^2}$$

$C_1$  内の極は  $t = 1$  だけが存在するから

$$P_\nu(1) = \frac{1}{2^\nu} \lim_{t \rightarrow 1} (t-1) \frac{(t+1)^\nu}{t-1} = 1, \quad P'_\nu(1) = \frac{\nu+1}{2^\nu} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{d}{dt} (t-1)^2 \frac{(t+1)^\nu}{(t-1)^2} = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

になる。 $\nu$  を  $-\nu-1$  で置き換えた  $P_{-\nu-1}(z)$  も微分方程式の解であるが

$$P_\nu(1) = P_{-\nu-1}(1) = 1, \quad P'_\nu(1) = P'_{-\nu-1}(1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

2階の線形微分方程式の一般論として、初期条件  $y(x_0), y'(x_0)$  を与えると解は一意に決まるから

$$P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z)$$

である。

$\nu = n = 0, 1, 2, \dots$  のとき、べき関数は一価関数になり

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dt \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}}$$

の被積分関数は  $t = z$  以外では正則である。したがって、コーシーの積分公式 (5.23) より

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

これはロドリグの公式 (4.42) であり,  $P_\nu(z)$  はルジャンドル多項式  $P_n(x)$  を複素数の  $n, x$  に拡張したものである。 $P_\nu(z)$  をルジャンドル関数という。

(5.87) を用いると, ルジャンドル関数の関係式を導ける。 $[F_\nu(t)]_{C_1} = 0$  と同様にして

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{(t^2 - 1)^{\nu+1}}{(t - z)^{\nu+1}} \right]_{C_1} = \oint_{C_1} dt \frac{d(t^2 - 1)^{\nu+1}}{(t - z)^{\nu+1}} \\ &= 2(\nu + 1) \int_{C_1} dt \frac{t(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^{\nu+1}} - (\nu + 1) \int_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^{\nu+1}}{(t - z)^{\nu+2}} \end{aligned} \quad (5.88)$$

$t = (t - z) + z$  として

$$2 \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^\nu} + 2z \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^{\nu+1}} - \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^{\nu+1}}{(t - z)^{\nu+2}} = 0$$

したがって

$$P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu} \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^\nu} \quad (5.89)$$

両辺を  $z$  で微分すると

$$\frac{dP_{\nu+1}}{dz} - P_\nu - z \frac{dP_\nu}{dz} = \frac{\nu}{2\pi i 2^\nu} \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^{\nu+1}} = \nu P_\nu$$

つまり

$$(\nu + 1)P_\nu = \frac{dP_{\nu+1}}{dz} - z \frac{dP_\nu}{dz} \quad (5.90)$$

である。次に

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{t(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^\nu} \right]_{C_1} = \oint_{C_1} dt \frac{d t (t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^\nu} \\ &= \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^\nu} + 2\nu \oint_{C_1} dt \frac{t^2(t^2 - 1)^{\nu-1}}{(t - z)^\nu} - \nu \oint_{C_1} dt \frac{t(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^{\nu+1}} \end{aligned} \quad (5.91)$$

$t^2 = (t^2 - 1) + 1, t = (t - z) + z$  と分解すると

$$(\nu + 1) \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^\nu} + 2\nu \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^{\nu-1}}{(t - z)^\nu} - \nu z \oint_{C_1} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^{\nu+1}} = 0$$

(5.89) より

$$(\nu + 1) (P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)) + \nu P_{\nu-1}(z) - \nu z P_\nu(z) = 0$$

したがって

$$(\nu + 1) P_{\nu+1}(z) - (2\nu + 1) z P_\nu(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = 0 \quad (5.92)$$

これを  $z$  で微分すると

$$(\nu + 1) P'_{\nu+1}(z) - (2\nu + 1) P_\nu(z) - (2\nu + 1) z P'_\nu(z) + \nu P'_{\nu-1}(z) = 0$$

$P'_{\nu+1}$  に (5.90) を代入し  $\nu$  で割ると

$$\nu P_\nu(z) = z \frac{dP_\nu}{dz} - \frac{dP_{\nu-1}}{dz} \quad (5.93)$$

$P_0(z) = P_{-1}(z) = 1$  であるから上式は  $\nu = 0$  のときも成り立つ。(5.90) と (5.93) を足し合わせれば

$$(2\nu + 1)P_\nu(z) = \frac{dP_{\nu+1}}{dz} - \frac{dP_{\nu-1}}{dz} \quad (5.94)$$

である。

$P_\nu(z)$  と 1 次独立な解を求める。  $\operatorname{Re}(\nu) + 1 < 0$  ならば  $(t^2 - 1)^{\nu+1}$  は  $t = \pm 1$  で発散するが、  $\operatorname{Re}(\nu) + 1 > 0$  ならば 0 になるから  $F_\nu(1) = F_\nu(-1) = 0$  である (ただし  $z \neq \pm 1$ )。したがって、実軸上の線分  $-1 \leq t \leq 1$  である積分路は、 $z$  がこの線分上にないとき (5.86) の条件を満たす。これから  $v_0 = -1/2^{\nu+1}$  として

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^1 dt \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}} \quad (5.95)$$

と定義すると  $Q_\nu(z)$  は微分方程式の解である。  $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$  のとき、ここで定義した  $Q_n(z)$  は (4.44) の型に書き直せる。

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \frac{1}{z-t} = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1}$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt \frac{1-t^2}{(z-t)^2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt \left( \frac{1-z^2}{(z-t)^2} + \frac{2z}{z-t} - 1 \right) = \frac{z}{2} \log \frac{z+1}{z-1} - 1$$

$P_0(z) = 1, P_1(z) = z$  であるから  $n = 0, 1$  のとき

$$Q_n(z) = \frac{P_n(z)}{2} \log \frac{z+1}{z-1} + W_{n-1}(z), \quad W_{n-1} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n-1 \text{ 次の多項式}, & n \geq 1 \end{cases} \quad (5.96)$$

は成り立つ。(5.88), (5.91) は  $C_1$  を実軸上の積分  $-1 \leq t \leq 1$  に置き換えても成り立つ。ただし、(5.91) では  $\operatorname{Re}(\nu) > 0$  である。また、 $P_\nu$  と  $Q_\nu$  を定義したときの  $v_0$  の  $\nu$  依存性は同じ  $1/2^\nu$  であるから、 $\operatorname{Re}(\nu) > 0$  のとき (5.92) で  $P_\nu$  を  $Q_\nu$  に置き換えることができ

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(z) - (2\nu+1)zQ_\nu(z) + \nu Q_{\nu-1}(z) = 0$$

である。(5.96) が  $n = k, n = k-1$  のとき成り立つとすると

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= \frac{2k+1}{k+1} z Q_k - \frac{k}{k+1} Q_{k-1} \\ &= \frac{2k+1}{k+1} z \left( \frac{P_k(z)}{2} \log \frac{z+1}{z-1} + W_{k-1}(z) \right) - \frac{k}{k+1} \left( \frac{P_{k-1}(z)}{2} \log \frac{z+1}{z-1} + W_{k-2}(z) \right) \\ &= \frac{P_{k+1}(z)}{2} \log \frac{z+1}{z-1} + W_k(z) \end{aligned}$$

ただし

$$W_k(z) = \frac{2k+1}{k+1} z W_{k-1}(z) - \frac{k}{k+1} W_{k-2}(z)$$

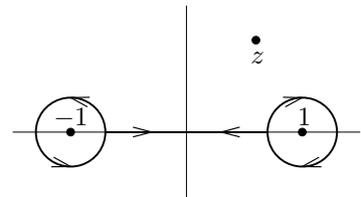
$W_{k-1}(z)$  は  $k-1$  次の多項式と仮定しているから、 $W_k(z)$  は  $k$  次の多項式になる。したがって、(5.96) は  $n = 0, 1, 2, \dots$  のとき成り立つ。

任意の  $\nu$  の場合、積分路を  $C_2$  にとればよい。このとき

$$Q_\nu(z) = A \oint_{C_2} dt \frac{(t^2-1)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$$

とする。定数  $A$  は  $\operatorname{Re}(\nu) + 1 > 0$  のとき (5.95) に一致するようにとる。 $C_2$  は実軸上を往復する経路  $D$  に変更できる。 $D$  は

- $D_+$   $t = -1 + \varepsilon$  から  $t = 1 - \varepsilon$  に向かう実軸に沿った経路
- $D_{+1}$   $t = 1$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の負方向の円周
- $D_-$   $t = 1 - \varepsilon$  から  $t = -1 + \varepsilon$  に向かう実軸に沿った経路
- $D_{-1}$   $t = -1$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の正方向の円周

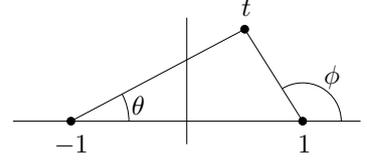


からなり

$$\oint_{C_2} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(z - t)^{\nu+1}} = I_+ + I_{+1} + I_- + I_{-1}, \quad I_k = \int_{D_k} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(z - t)^{\nu+1}}$$

である。図のように角度をとり  $D_+$  の場合に  $\theta = 0$ ,  $\phi = \pi$  と決めれば,  $D_+$  では  $\varepsilon \leq r \leq 2 - \varepsilon$  として  $t + 1 = r$ ,  $t - 1 = (2 - r)e^{i\pi}$  になるから

$$I_+ = \int_\varepsilon^{2-\varepsilon} dr \frac{r^\nu (2-r)^\nu e^{i\pi\nu}}{(z-r+1)^{\nu+1}} = e^{i\pi\nu} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} dt \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$$



である。 $D_{+1}$  上では  $t - 1 = \varepsilon e^{i\phi}$ , ( $\phi: \pi \rightarrow -\pi$ ) とおける。 $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $t + 1 = r e^{i\theta}$ , ( $r \approx 2$ ,  $\theta \approx 0$ ) であるから

$$I_{+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} i \frac{2^\nu \varepsilon^{\nu+1}}{(z-1)^{\nu+1}} \int_\pi^{-\pi} d\phi e^{i(\nu+1)\phi} = \frac{2^\nu}{(z-1)^{\nu+1}} \frac{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}}{\nu+1} \varepsilon^{\nu+1}$$

になる。次に,  $D_-$  では  $\theta = 0$ ,  $\phi = -\pi$  である。 $t = 1$  を中心として時計周りに 1 周したから  $\phi$  は  $D_+$  での値  $\pi$  に比べて  $2\pi$  減少し  $-\pi$  になる。 $2 - \varepsilon \geq r \geq \varepsilon$  として

$$t + 1 = r, \quad t - 1 = (2 - r)e^{-i\pi}$$

である。これから

$$I_- = \int_{2-\varepsilon}^\varepsilon dr \frac{r^\nu (2-r)^\nu e^{-i\pi\nu}}{(z-r+1)^{\nu+1}} = -e^{-i\pi\nu} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} dt \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$$

$D_{-1}$  上では  $t + 1 = \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$  とおける。 $t - 1 = r e^{i\phi}$ , ( $r \approx 2$ ,  $\phi \approx -\pi$ ) であるから

$$I_{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} i \frac{2^\nu e^{-i\pi\nu}}{(z+1)^{\nu+1}} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\nu\theta} = \frac{2^\nu}{(z+1)^{\nu+1}} \frac{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}}{\nu+1} \varepsilon^{\nu+1}$$

以上から

$$Q_\nu(z) = A(e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) \left[ \left( \frac{2^\nu}{(z+1)^{\nu+1}} + \frac{2^\nu}{(z-1)^{\nu+1}} \right) \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\nu+1} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} dt \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}} \right]$$

$\text{Re}(\nu) + 1 > 0$  のとき  $\varepsilon^{\nu+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} 0$  になるから

$$Q_\nu(z) = A(e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) \int_{-1}^1 dt \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$$

これと (5.95) を比較すると

$$A(e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) = \frac{1}{2^{\nu+1}}, \quad \therefore A = \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \frac{1}{2^\nu}$$

であるから

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{4i \sin(\pi\nu)} \frac{1}{2^\nu} \oint_{C_2} dt \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(z - t)^{\nu+1}}$$

になる。これは  $\text{Re}(\nu) + 1 > 0$  である必要はない。

## 6 フーリエ解析

### 6.1 フーリエ級数

$a$  を正の実数とし、関数  $f(x)$  が任意の  $x$  に対して  $f(x+a) = f(x)$  が成り立つとき、 $f(x)$  を周期  $a$  の周期関数という。

$$f(x+2a) = f(x+a+a) = f(x+a) = f(x), \quad \text{一般に} \quad f(x+na) = f(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

であるから  $na$  も周期である。周期の中で最小の周期を基本周期と呼ぶこともある。周期関数の代表例は三角関数である。 $\cos x, \sin x$  は基本周期  $2\pi$  の周期関数である。一般に  $\cos(nx), \sin(nx)$  は基本周期  $2\pi/n$  の周期関数であるが、周期  $2\pi$  の周期関数でもある。

周期  $2a$  の周期関数  $f(x)$  を考える。便宜上、周期を  $a$  ではなく  $2a$  とする。

$$\cos \frac{n\pi x}{a}, \quad \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

も周期  $2a$  の周期関数であるから

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi x}{a} + B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \right) \quad (6.1)$$

と展開できるとする。これを**フーリエ級数**という。オイラーの公式 (1.11) を用いて指数関数で表せば

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n - iB_n}{2} e^{in\pi x/a} + \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-in\pi x/a} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/a} \quad (6.2)$$

ここで

$$A_n = C_n + C_{-n}, \quad B_n = i(C_n - C_{-n}), \quad \text{ただし} \quad n \geq 0 \quad (6.3)$$

である。(6.2) を**複素フーリエ級数**という。係数  $C_n$  を求める。

$$\int_{-a}^a dx \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) = \delta_{mn}, \quad \text{ただし} \quad \varphi_n(x) = \frac{e^{in\pi x/a}}{\sqrt{2a}} \quad (6.4)$$

になることは簡単に示せる。(6.2) を  $\varphi_n(x)$  で表せば

$$f(x) = \sqrt{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varphi_n(x) \quad (6.5)$$

になるから

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx e^{-in\pi x/a} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^a dx \varphi_n^*(x) f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \int_{-a}^a dx \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) = C_n \quad (6.6)$$

である。(6.3) より

$$A_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad B_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (6.7)$$

になる。 $f(x)$  が偶関数のとき  $f(x) \sin(n\pi x/a)$  は奇関数であるから  $B_n = 0$  になり

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad A_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (6.8)$$

これをフーリエ余弦級数という。一方、 $f(x)$  が奇関数のとき  $A_n = 0$  になるから

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad B_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (6.9)$$

である。これをフーリエ正弦級数という。

**ディリクレ核** (6.5) の右辺の  $-k \leq n \leq k$  の部分 and を  $f_k(x)$  とする。 $C_n$  に (6.6) を代入すると

$$f_k(x) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-k}^k e^{in\pi x/a} \int_{-a}^a dy e^{-in\pi y/a} f(y) = \int_{-a}^a dy f(y) D_k(x-y) \quad (6.10)$$

ただし ( $z = e^{i\pi x/a}$ )

$$D_k(x) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-k}^k e^{in\pi x/a} = \frac{1}{2a} \frac{z^{k+1} - z^{-k}}{z - 1} = \frac{1}{2a} \frac{z^{k+1/2} - z^{-k-1/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} = \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi x}{2a}\right)}{2a \sin \frac{\pi x}{2a}} \quad (6.11)$$

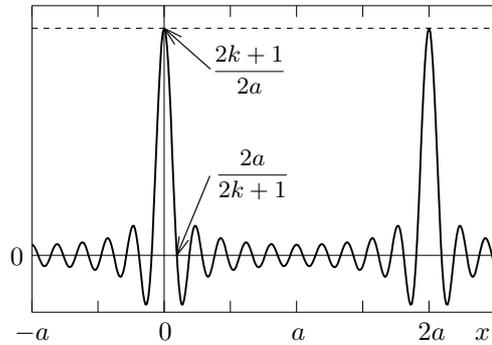
である。 $D_k(x)$  をディリクレ核という。 $D_k(x)$  の概略を右図に示す。

$$D_k(0) = \frac{2k+1}{2a} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\int_{-a}^a dx D_k(x) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-k}^k \int_{-a}^a dx e^{in\pi x/a} = 1$$

であり  $D_k(x)$  は周期  $2a$  の周期関数であるから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2an) \quad (6.12)$$



特に  $|x| < 2a$  のとき  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k(x) = \delta(x)$  になる。なお、例えば  $D_k(a) = (-1)^k/2a$  であり、 $x \neq 2an$  であっても  $D_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  にはならない。しかし、 $x = 2an$  近傍以外では、 $D_k(x)$  は周期  $\approx 2a/k \rightarrow 0$  で激しく振動するから  $D_k(x)$  を 1 周期の平均で置き換えれば  $D_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  である。

$f(x)$  が連続ならば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a dy f(y) \delta(x-y-2an) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-2an) \int_{-a}^a dy \delta(x-y-2an)$$

$f(x-2an) = f(x)$  及び  $-a < x-2an < a$  を満たす  $n$  は 1 つだけであるから  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  になる。 $f(x)$  が  $x=c$  で不連続の場合、(6.16) で示すように

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} \quad (6.13)$$

が成り立つ。

### 例題 1

$$f(x) = |x|, \quad -a \leq x \leq a, \quad f(x+2a) = f(x)$$

$f(x)$  は偶関数であるから (6.8) より

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx x \cos \frac{n\pi x}{a} = \begin{cases} a, & n = 0 \\ 2a \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

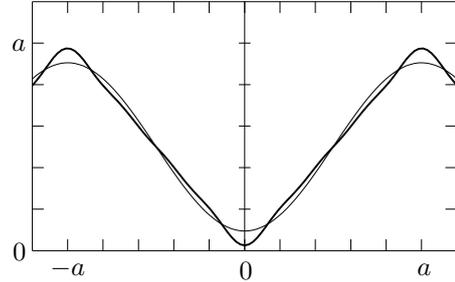
したがって

$$f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (6.14)$$

になる。 $n = k$  までの部分 and  $f_k(x)$  を右図に示す。細い曲線は  $f_1(x)$ , 太い曲線は  $f_7(x)$  である。三角関数とは無関係な  $|x|$  が, 確かに  $\cos$  の和として表せる。(6.14) で  $x = 0$  とすると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

になる。ある特定の  $x$  でのフーリエ級数から, 各種の無限級数を求められる。



### 例題 2

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & x = 0, a \\ -1, & -a < x < 0 \end{cases}, \quad f(x+2a) = f(x) \quad (6.15)$$

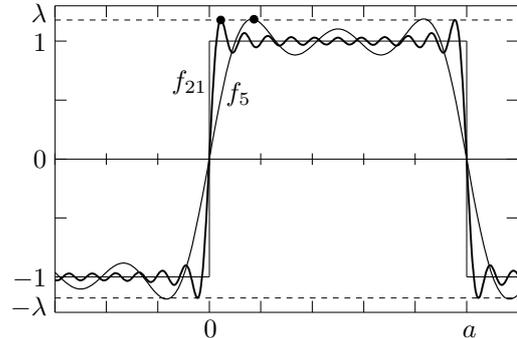
の場合,  $f(x)$  は奇関数であるから

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n), \quad \therefore f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

部分 and  $f_k(x)$  を右図に示す。不連続点  $x = 0, a$  では

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = 0$$

であるから, 任意の点で  $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$  になる。ところで, 右図の  $\bullet$  の  $x$  を  $x_k$  とすると,  $k \rightarrow \infty$  のとき  $x_k \rightarrow 0$  であるが  $f_k(x_k) \rightarrow \lambda > 1$  になる。以下で示すが,  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  である  $x_k$  に依存して  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x_k)| \leq \lambda$  になる。これをギブスの現象という。



(6.15) の場合 (6.10) より

$$f_k(x) = \frac{1}{2a} \int_0^a dy D_k(x-y) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^0 dy D_k(x-y)$$

である。 $|x| < a$  の場合を考える。 $x' = \pi x/2a, y' = \pi y/2a$  として (6.11) を代入すると

$$f_k(x) = \int_0^{\pi/2} dy' F_k(x' - y') - \int_{-\pi/2}^0 dy' F_k(x' - y'), \quad F_k(x) = \frac{\sin(2k+1)x}{\pi \sin x}$$

になる。第 1 項では  $t = y' - x'$ , 第 2 項では  $t = -y' + x'$  とすると

$$f_k(x) = \int_{-x'}^{\pi/2-x'} dt F_k(t) - \int_{x'}^{\pi/2+x'} dt F_k(t) = \int_{-x'}^{x'} dt F_k(t) - \int_{\pi/2-x'}^{\pi/2+x'} dt F_k(t)$$

$k \rightarrow \infty$  のとき  $F_k(t)$  は  $t = 0, \pm\pi$  で発散するが,  $|x'| < \pi/2$  であるから, 第 2 項の積分領域は発散点を含まない。したがって,  $k \rightarrow \infty$  のとき無視してよいから

$$f_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{x'} dt \frac{\sin(2k+1)t}{t} = S((2k+1)x'), \quad S(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x ds \frac{\sin s}{s}, \quad s = (2k+1)t$$

ただし,  $k \rightarrow \infty$  では  $t = 0$  近傍が寄与するから  $\sin t = t$  とした.  $k$  に無関係に  $x$  を固定すると,  $x$  が微小であっても  $x \geq 0$  ならば  $(2k+1)x' \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm \infty$  になるから (5.37) より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = S(\pm \infty) = \pm 1 = f(x)$$

フーリエ級数は  $f(x)$  に収束する. 一方,  $u$  を定数として  $x' = u/(2k+1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  とすると

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) = S(u), \quad x_k = \frac{2a}{\pi} \frac{u}{2k+1} = \frac{au}{k\pi}$$

$S(x)$  は  $x = \pi$  のとき最大になるから  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x_k)| \leq \lambda = S(\pi)$  の範囲の値をとる. これがギブスの現象である. 数値計算すると  $\lambda = 1.1789 \dots$  である.

一般に,  $f(x)$  が  $x = c$  で不連続の場合

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k \rightarrow c) - f_+ \right| \leq \lambda f_-, \quad f_{\pm} = \frac{f(c+0) \pm f(c-0)}{2}$$

になる. (6.15) の  $f(x)$  を  $g(x)$  として  $F(x) = f(x) - f_- g(x-c)$  とする.

$$F(c \pm 0) = f(c \pm 0) \mp f_- = f_+$$

であるから,  $F(c) = f_+$  と定義すれば  $F(x)$  は  $x = c$  で連続である. したがって

$$F(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(c) - f_- \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(0) \quad (6.16)$$

$g_k(0) = 0$  であるから (6.13) が成り立つ.

### 半区間での展開

$0 \leq x \leq a$  の関数  $f(x)$  をフーリエ級数で表す場合, 周期  $a$  の関数  $f(x+a) = f(x)$  として拡張し

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2in\pi x/a}, \quad C_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx e^{-2in\pi x/a} f(x)$$

でもよい. あるいは  $f(x)$  を  $-a \leq x \leq 0$  の区間まで拡張し  $-a \leq x \leq a$  で定義した周期  $2a$  の関数と見なすこともできる.  $x < 0$  の側への拡張は任意であるが, 通常, 偶関数あるいは奇関数として拡張する. フーリエ級数は, 偶関数として拡張するなら (6.8), 奇関数ならば (6.9) で与えられる.

$f(x) = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  を考える. これを奇関数として  $-\pi \leq x \leq 0$  に拡張しても  $f(x) = \sin x$  であり自明な結果になるだけである. 偶関数として拡張すると  $f(x) = |\sin x|$  である.

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin x \cos(nx) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ -\frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1}, & n \neq 1 \end{cases}$$

したがって

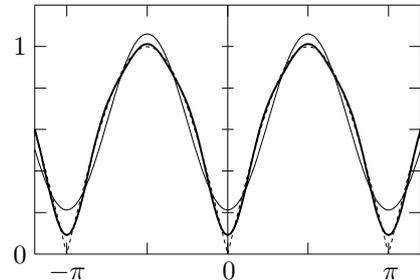
$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} \cos(nx)$$

右図に部分和  $f_2(x)$  を細い曲線で,  $f_6(x)$  を太い曲線で示す.

次に  $0 < x \leq a$  のとき  $f(x) = 1 - x/a$  を奇関数として  $-a \leq x \leq a$  に拡張する.  $x = 0$  で不連続である.

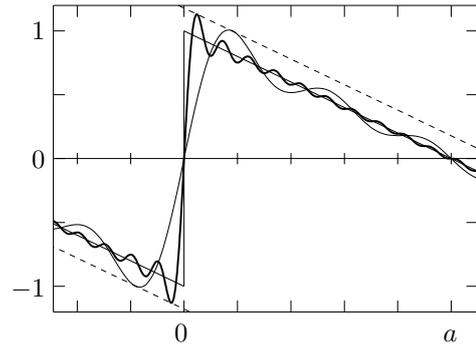
$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{2}{n\pi}$$

になるから



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a}, & 0 < x < 2a \\ 0, & x = 0 \\ -1 - \frac{x}{a}, & -2a < x < 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

である。右図に部分和  $f_5(x)$  を細い曲線で、 $f_{20}(x)$  を太い曲線で示す。例題 2 と同様に、不連続点  $x = 0$  でギブスの現象が現れる。破線は  $\pm \lambda - x/a$  である。偶関数として拡張すると  $|x| \leq a$  のとき  $1 - |x|/a$  になる。これは例題 1 と実質的には同じである。



### パーセバルの等式

(6.5) より

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx |f(x)|^2 = \int_{-a}^a dx \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varphi_n(x) \right|^2 = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \int_{-a}^a dx \varphi_n(x) \varphi_m^*(x)$$

$\varphi_n(x)$  の規格直交性 (6.4) より

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{|A_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|A_n|^2 + |B_n|^2) \quad (6.18)$$

になる。これをパーセバルの等式という。

周期  $2a$  の関数  $f(x)$  を有限項

$$F_k(x) = \sum_{n=-k}^k a_n e^{in\pi x/a}$$

で近似することを考える。ここで  $a_n$  は任意定数である。 $k$  を与えたとき、最もよい近似は

$$\Delta = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx |f(x) - F_k(x)|^2$$

を最小にするように  $a_n$  を選ぶことであろう。(6.18) と同様にして

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx |F_k(x)|^2 = \sum_{n=-k}^k |a_n|^2$$

また

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx f(x) F_k^*(x) = \sum_{n=-k}^k a_n^* \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx f(x) e^{-in\pi x/a} = \sum_{n=-k}^k a_n^* C_n$$

であるから

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx |f(x)|^2 + \sum_{n=-k}^k (|a_n|^2 - a_n^* C_n - a_n C_n^*) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx |f(x)|^2 - \sum_{n=-k}^k |C_n|^2 + \sum_{n=-k}^k |a_n - C_n|^2 = \sum_{|n|>k} |C_n|^2 + \sum_{n=-k}^k |a_n - C_n|^2 \end{aligned}$$

したがって、 $a_n = C_n$  のとき  $\Delta$  は最小になる。 $f(x)$  を  $e^{in\pi x/a}$ 、あるいは三角関数  $\cos(n\pi x/a)$ 、 $\sin(n\pi x/a)$  の多項式で近似する場合、フーリエ係数を用いることが最もよい近似である。

### 正規直交関数系

フーリエ級数はベクトルと対応させることができる。 $x, y, z$  軸方向の単位ベクトルを  $e_1, e_2, e_3$  とすると、単位ベクトルの長さは 1 であり、互いに直交するから

$$e_m \cdot e_n = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3 \quad (6.19)$$

である。任意のベクトル  $\mathbf{A}$  は

$$\mathbf{A} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, \quad A_n = e_n \cdot \mathbf{A} \quad (6.20)$$

と展開できる。フーリエ級数において、(6.4) が (6.19) に対応し、(6.5) 及び (6.6) が (6.20) に対応する。したがって、 $f(x)$  は 3 次元空間のベクトルではないが、これをある空間内のベクトルと見なすことができる。このとき、 $\varphi_n(x)$  がこの空間での単位ベクトルになる。ベクトル  $f(x)$  と  $g(x)$  の内積  $\langle g|f \rangle$  を

$$\langle g|f \rangle = \int_{-a}^a dx g^*(x) f(x)$$

で定義する。 $\langle g|f \rangle = 0$  のとき  $f(x)$  と  $g(x)$  は直交するという。また、ベクトル  $f(x)$  の大きさ (ノルム) を  $\sqrt{\langle f|f \rangle}$  で定義する。 $\langle f|f \rangle = 1$  のとき  $f(x)$  は規格化あるいは正規化されているという。(6.4) は

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$$

であるから、 $m \neq n$  のとき  $\varphi_m(x)$  と  $\varphi_n(x)$  は直交し、 $\varphi_n(x)$  は規格化されている。この関数の集まり  $\varphi_n(x)$  を正規直交関数系という。 $f(x), g(x)$  をフーリエ級数で表して

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \varphi_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \varphi_n(x)$$

とすれば、内積は

$$\langle g|f \rangle = \int_{-a}^a dx g^*(x) f(x) = \sum_{mn} G_m^* F_n \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n^* F_n$$

になるが、これはベクトルの内積  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{n=1}^3 A_n B_n$  に対応する。

## 6.2 波動方程式

フーリエ級数の適用例として、波動方程式 (2.20)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.21)$$

の解  $u(x, t)$  を求める (2 次元, 3 次元の場合, 178 ページ以降を参照)。 $x$  軸上で  $0 \leq x \leq a$  に張られた弦の振動を考える。まず、 $u(x, t)$  を変数分離法で求める。 $u(x, t)$  が  $x$  の関数  $X(x)$  と  $t$  の関数  $T(t)$  の積  $u(x, t) = X(x)T(t)$  で与えられるとする。(6.21) は

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

になる。左辺は  $x$  だけの関数、右辺は  $t$  だけの関数であり、これらが任意の  $x, t$  で等しいためには定数でなければならない。この定数を  $-k^2$  とおくと ( $k$  は実数とは限らない)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 X, \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = -(ck)^2 T$$

であるから、一般解は  $A, B, C, D$  を定数として

$$\begin{aligned} k \neq 0 \text{ のとき } & X(x) = A \cos kx + B \sin kx, \quad T(t) = C \cos ckt + D \sin ckt \\ k = 0 \text{ のとき } & X(x) = A + Bx, \quad T(t) = C + Dt \end{aligned} \quad (6.22)$$

になる。

### 両端固定の境界条件

任意の時刻  $t$  で

$$u(0, t) = u(a, t) = 0 \quad (6.23)$$

とする。 $u(x, t)$  が変数分離型の場合、 $X(0)T(t) = X(a)T(t) = 0$  になるが、任意の  $t$  に対して  $T(t) = 0$  である解は意味がないから  $X(0) = X(a) = 0$  である。(6.22) より

$$k \neq 0 \text{ のとき } A = 0, \quad B \sin ka = 0, \quad k = 0 \text{ のとき } A = B = 0$$

$k = 0$  のとき恒等的に  $X = 0$  になるから考える必要はない。 $k \neq 0$  のとき  $B \neq 0$  より

$$\sin ka = 0, \quad \therefore k = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

したがって、変数分離型の解は

$$u_n(x, t) = \left( C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t \right) \sin k_n x, \quad \omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{a}$$

になる。波動方程式は同次線形方程式であるから、これらの和

$$u(x, t) = \sum_{n \neq 0} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t \right) \sin k_n x \quad (6.24)$$

は境界条件 (6.23) を満たす (6.21) の一般解になる。なお、最後の式では任意定数である  $C_n - C_{-n}$ ,  $D_n + D_{-n}$  をそれぞれ  $C_n, D_n$  と置き直した。

(6.24) は次のようにしても求まる。 $0 \leq x \leq a$  で定義された関数  $u(x, t)$  を周期  $2a$  の奇関数

$$u(x + 2a, t) = u(x, t), \quad u(-x, t) = -u(x, t)$$

に拡張する。この場合

$$u(0, t) = -u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = -u(-a, t) = -u(2a - a, t) = 0$$

になり境界条件 (6.23) を自動的に満たす。(6.9) より

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin k_n x, \quad B_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a dx u(x, t) \sin k_n x, \quad \text{ただし } k_n = \frac{n\pi}{a} \quad (6.25)$$

とおける。

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 B_n}{dt^2} = \frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sin k_n x = \frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin k_n x$$

部分積分を 2 回行えば

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 B_n}{dt^2} &= \frac{2}{a} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \sin k_n x \right]_0^a - \frac{2k_n}{a} \left[ u(x, t) \cos k_n x \right]_0^a - \frac{2k_n^2}{a} \int_0^a dx u(x, t) \sin k_n x \\ &= \frac{2k_n}{a} \left( u(0, t) - (-1)^n u(a, t) \right) - k_n^2 B_n(t) \end{aligned} \quad (6.26)$$

になる。  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  であるから

$$\frac{d^2 B_n}{dt^2} + \omega_n^2 B_n = 0, \quad \therefore B_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t$$

になり (6.24) を得る。

$C_n, D_n$  は初期条件を与えると決まる。  $t = 0$  のとき

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n \sin k_n x = g(x) \quad (6.27)$$

とする。  $f(x)$  と  $g(x)$  は与えられた関数である。  $u(x, t)$  と同様に周期  $2a$  の奇関数として拡張すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin k_n x, & f_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin k_n x \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin k_n x, & g_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx g(x) \sin k_n x \end{aligned}$$

であるから、  $C_n = f_n, D_n = g_n/\omega_n$  になり

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( f_n \cos \omega_n t + \frac{g_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin k_n x \quad (6.28)$$

が境界条件と初期条件を満たす解である。

この解とダランベールの解 (2.21) を比較する。

$$f(x \pm ct) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin k_n (x \pm ct) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left( \sin k_n x \cos \omega_n t \pm \cos k_n x \sin \omega_n t \right)$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \omega_n t \sin k_n x = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$

である。次に

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \sin k_n x$$

とすると

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \omega_n t \sin k_n x = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2}$$

$G(x, 0) = 0$  であるから

$$G(x, t) = \int_0^t dt' \frac{g(x+ct') + g(x-ct')}{2}$$

$s = x \pm ct'$  とすると

$$G(x, t) = \frac{1}{2c} \int_x^{x+ct} ds g(s) - \frac{1}{2c} \int_x^{x-ct} ds g(s) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds g(s)$$

になるから

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left( f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds g(s) \\ &= F_+(x+ct) + F_-(x-ct), \quad \text{ただし } F_{\pm}(x) = \frac{1}{2} f(x) \pm \frac{1}{2c} \int_0^x ds g(s) \end{aligned} \quad (6.29)$$

したがって、ダランベールの解 (2.21) を再現する。

### 両端自由の境界条件

任意の時刻  $t$  で

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (6.30)$$

とする。この境界条件を満たす変数分離型の解は  $X'(0) = X'(a) = 0$  になるから (6.22) より

$$k \neq 0 \text{ のとき } B = 0, \quad A \sin ka = 0, \quad k = 0 \text{ のとき } B = 0$$

である。  $k \neq 0$  の場合  $A \neq 0$  で

$$\sin ka = 0, \quad \therefore k = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

したがって、変数分離型の解は

$$u_0(x, t) = \frac{C_0 + D_0 t}{2}$$

または  $n \neq 0$  として

$$u_n(x, t) = \left( C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t \right) \cos k_n x, \quad \omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{a}$$

になる。これらを和し合わせれば、両端自由の境界条件を満たす一般解は

$$u(x, t) = \frac{C_0 + D_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t \right) \cos k_n x \quad (6.31)$$

である。

$0 \leq x \leq a$  で定義された関数  $u(x, t)$  を周期  $2a$  の偶関数

$$u(x+2a, t) = u(x, t), \quad u(-x, t) = u(x, t)$$

に拡張する。  $u_x(x, t) = \partial u(x, t) / \partial x$  とすると

$$u_x(x+2a, t) = u_x(x, t), \quad u_x(-x, t) = -u_x(x, t)$$

になるから  $u_x(0, t) = u_x(a, t) = 0$  であり境界条件 (6.30) を満たす。 (6.8) より

$$u(x, t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos k_n x, \quad A_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a dx u(x, t) \cos k_n x, \quad \text{ただし } k_n = \frac{n\pi}{a}$$

とおける。両端固定の場合と同様にすれば  $d^2 A_n / dt^2 + \omega_n^2 A_n = 0$  になるから

$$n = 0 \text{ のとき } A_0 = C_0 + D_0 t, \quad n \neq 0 \text{ のとき } A_n = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t$$

であり (6.31) が求まる。

初期条件を

$$u(x, 0) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n x = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{D_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n \cos k_n x = g(x)$$

とする。\$f(x), g(x)\$ を周期 \$2a\$ の偶関数に拡張すれば

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos k_n x, & f_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \cos k_n x \\ g(x) &= \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos k_n x, & g_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx g(x) \cos k_n x \end{aligned}$$

であるから

$$C_n = f_n, \quad D_n = \begin{cases} g_0, & n = 0 \\ g_n/\omega_n, & n \neq 0 \end{cases}$$

したがって

$$u(x, t) = \frac{f_0 + g_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( f_n \cos \omega_n t + \frac{g_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \cos k_n x \quad (6.32)$$

になる。

\$t = 0\$ で一様に初速度 \$v\_0\$ を与える \$f(x) = 0, g(x) = v\_0\$ の場合 \$f\_0 = 0, g\_n = 2v\_0\delta\_{n0}\$ になるから \$u(x, t) = v\_0 t\$ である。弦は振動せず速度 \$v\_0\$ で移動する。

**問題 6.1** (6.32) がダランベールの解 (6.29) になることを示せ。

### 一端固定の境界条件

初期条件が (6.27) で境界条件が

$$u(0, t) = u_0(t)\theta(t), \quad u(a, t) = 0 \quad (6.33)$$

の場合を考える。両端固定の場合と同様に

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{a} \quad (6.34)$$

とする。ただし、境界条件の \$u(0, t)\$ は \$u(+0, t)\$ と見なす。(6.34) は \$0 \le x \le a\$ の関数 \$u(x, t)\$ を周期 \$2a\$ の奇関数として全領域に拡張する。このとき、\$u(-0, t) = -u(+0, t) \neq u(+0, t)\$ になり \$x = 0\$ で不連続である。フーリエ級数は不連続関数に対しても適用できる (例えば (6.17))。

(6.26) で \$u(0, t) = u\_0(t)\theta(t), u(a, t) = 0\$ とすれば、\$B\_n(t)\$ は微分方程式

$$\frac{d^2 B_n}{dt^2} + \omega_n^2 B_n = \frac{2c^2 k_n}{a} u_0(t)\theta(t), \quad \omega_n = ck_n$$

の解である。この方程式の特解は (4.19) で与えられる。(4.19) で \$\lambda\_{\pm} = \pm i\omega\_n\$ とすれば、一般解は

$$B_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t + \theta(t) \frac{2c}{a} \int_0^t dt' u_0(t') \sin \omega_n(t - t')$$

になる。\$C\_n, D\_n\$ は初期条件 (6.27) で決まる。

$$\frac{dB_n}{dt} = -\omega_n C_n \sin \omega_n t + \omega_n D_n \cos \omega_n t + \theta(t) \frac{2c}{a} \omega_n \int_0^t dt' u_0(t') \cos \omega_n(t - t')$$

より,  $B_n(0), \dot{B}_n(0)$  は両端固定の場合と同じになる。したがって, (6.34) は

$$u(x, t) = u_{\text{fix}}(x, t) + v(x, t), \quad v(x, t) = \theta(t) \frac{2c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \int_0^t dt' u_0(t') \sin \omega_n(t - t')$$

になる。ただし,  $u_{\text{fix}}(x, t)$  は  $C_n, D_n$  の寄与であり両端固定の解 (6.28) を表わす。  $v(x, t)$  は

$$v(x, t) = \theta(t) \int_0^t dt' u_0(t') V(x, t - t'), \quad V(x, t) = \frac{2c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \sin \omega_n t$$

と表せる。

$$V(x, t) = \frac{c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{n\pi(x - ct)}{a} - \cos \frac{n\pi(x + ct)}{a} \right) = \frac{c}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{in\pi(x-ct)/a} - e^{in\pi(x+ct)/a} \right)$$

(6.12) より  $x_n = x - 2an$  とすれば

$$V(x, t) = c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \delta(x_n - ct) - \delta(x_n + ct) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \delta(t - x_n/c) - \delta(t + x_n/c) \right)$$

になる。したがって  $t > 0$  のとき

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t dt' u_0(t') \left( \delta(t - t' - x_n/c) - \delta(t - t' + x_n/c) \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( u_0(t - x_n/c) \int_0^t dt' \delta(t - t' - x_n/c) - u_0(t + x_n/c) \int_0^t dt' \delta(t - t' + x_n/c) \right) \end{aligned}$$

第1項の積分が1になるためには  $0 < t - x_n/c < t$  であるから,  $t - x_n/c > 0$  かつ  $x_n > 0$ , つまり  $n \leq 0$  である。第2項の積分が1になるためには  $t + x_n/c > 0$  かつ  $n > 0$  になるから

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_0 \left( t - \frac{2an + x}{c} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_0 \left( t - \frac{2an - x}{c} \right), \quad \bar{u}_0(t) = u_0(t)\theta(t) \quad (6.35)$$

$$= \bar{u}_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) - \bar{u}_0 \left( t - \frac{2a - x}{c} \right) + \bar{u}_0 \left( t - \frac{2a + x}{c} \right) - \dots \quad (6.36)$$

である。これはダランベールの解 (2.21) の一種であるから波動方程式を満たす。

波動は速さ  $c$  で伝わるから,  $x = 0$  での波動が  $x$  に到達するのは  $t > x/c$  である [(6.36) 第1項]。時間が経過すると波動は  $x = a$  に到達し反射する。固定端であるから反射波の符号は変わる。この反射波が  $x$  に到達するのは  $t > (x + 2(a - x))/c = (2a - x)/c$  である [(6.36) 第2項]。波動は再び  $x = 0$  に戻り反射する。反射波の符号は変わり元に戻る。この反射波が  $x$  に到達するのは  $t > (2a + x)/c$  である [(6.36) 第3項]。以降, 上記の繰り返しになり (6.35) になる。

**問題 6.2** (6.35) が  $x = 0, a$  での境界条件  $v(0, t) = \bar{u}_0(t), v(a, t) = 0$  を満たすことを示せ。

### 6.3 フーリエ変換

フーリエ級数の周期  $a$  が  $a \rightarrow \infty$  の極限を考える。  $f(x)$  は周期関数である必要はない。

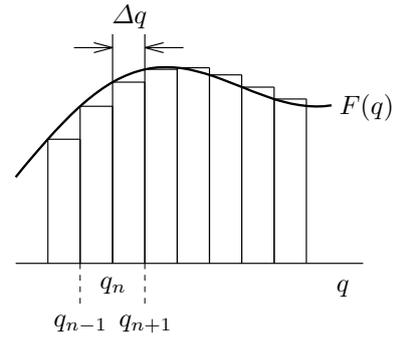
$$\tilde{f}(a, q) = \int_{-a}^a dx e^{-iqx} f(x), \quad q_n = \frac{n\pi}{a} = n\Delta q, \quad \Delta q = \frac{\pi}{a}$$

とすると, (6.6) は

$$C_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx e^{-in\pi x/a} f(x) = \frac{\Delta q}{2\pi} \tilde{f}(a, q_n)$$

と表せるから

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/a} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta q \tilde{f}(a, q_n) e^{iq_n x}$$



になる。右辺の和は図のような長方形の面積の和である。ただし,  $F(q)$  は  $\tilde{f}(a, q) e^{iqx}$  の実部あるいは虚部である。 $a \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta q \rightarrow 0$  であるから, 長方形の面積の和は積分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \tilde{f}(q) e^{iqx} \quad (6.37)$$

ただし

$$\tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-iqx} \quad (6.38)$$

になる。 $\tilde{f}(q)$  を  $f(x)$  のフーリエ変換,  $f(x)$  を  $\tilde{f}(q)$  のフーリエ逆変換という。この関係式を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \tilde{f}(q) e^{iqx}, \quad \tilde{f}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-iqx}$$

と定義することもある。(6.37), (6.38) の積分の収束性については次の定理が成り立つ。

$$f(x) \text{ と } f'(x) \text{ は区分的に連続, } \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$$

のとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \tilde{f}(q) e^{iqx} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (6.39)$$

になる。 $f(x)$  が連続な点では  $f(x)$  に一致する。

デルタ関数の表現 (3.88) を用いると

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqx} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iqy} f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqx} \tilde{f}(q) \quad (6.40)$$

になり (6.37), (6.38) を得る。

3変数  $x, y, z$  の関数  $f(\mathbf{r})$  の場合

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3q \tilde{f}(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad \tilde{f}(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.41)$$

ただし

$$d^3r = dx dy dz, \quad d^3q = dq_x dq_y dq_z, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = q_x x + q_y y + q_z z$$

である。 $f(\mathbf{r})$  が  $r = |\mathbf{r}|$  だけの関数の場合, 極座標を使えば (ただし,  $\theta$  を  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{q}$  のなす角とする)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{q}) &= 2\pi \int_0^{\infty} dr r^2 f(r) \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \exp(-iqr \cos \theta) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dr r^2 f(r) \left[ \frac{\exp(-iqr \cos \theta)}{iqr} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2\pi}{iq} \int_0^{\infty} dr r f(r) (e^{iqr} - e^{-iqr}) = \frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} dr r f(r) \sin(qr) \end{aligned}$$

$\tilde{f}(q)$  も大きさ  $q$  だけの関数  $\tilde{f}(q)$  であり偶関数  $\tilde{f}(q) = \tilde{f}(-q)$  になる。このとき

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq q^2 \tilde{f}(q) \int_0^\pi d\theta \sin \theta \exp(iqr \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dq q \tilde{f}(q) \sin(qr) = \frac{1}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^\infty dq q \tilde{f}(q) e^{iqr} \end{aligned} \quad (6.42)$$

である。 $r < 0$  のとき  $f(r) = f(-r)$  と定義すれば

$$\tilde{f}(q) = \frac{2\pi}{iq} \int_{-\infty}^\infty dr r f(r) e^{iqr} \quad (6.43)$$

である。 $f(r)$  が  $r = |r|$  だけの関数の場合、1変数のフーリエ変換と実質的には同じになる。

$f(x)$  あるいは  $\tilde{f}(q)$  が有理関数の場合、フーリエ積分は複素積分 (5.48) から求まる。

**例題 1**  $a > 0$  として

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x - ia} - \frac{1}{x + ia} \right)$$

のとき (5.48) あるいは (5.49) より

$$\tilde{f}(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-iqx} \left( \frac{1}{x - ia} - \frac{1}{x + ia} \right) = e^{-a|q|}$$

である。フーリエ逆変換 (6.37) より

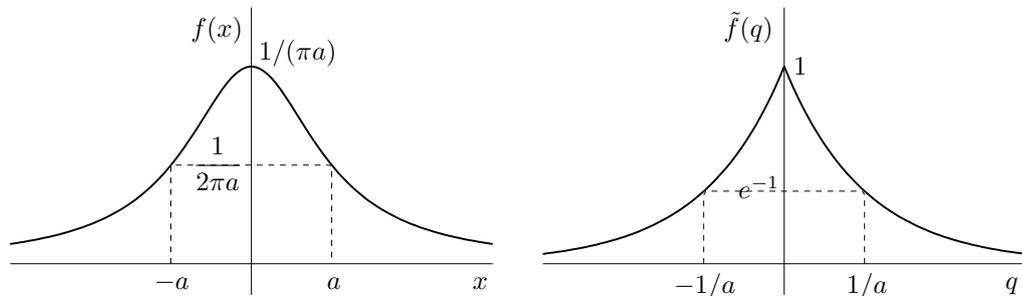
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dq e^{iqx - a|q|}$$

実際に右辺の積分を実行すると

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{iqx - a|q|} = \int_0^\infty dq e^{iqx - aq} + \int_{-\infty}^0 dq e^{iqx + aq} = -\frac{1}{ix - a} + \frac{1}{ix + a} = \frac{2a}{x^2 + a^2} = 2\pi f(x)$$

である。 $f(x)$  と  $\tilde{f}(q)$  を図示すると下図になる。 $x$  のひろがり  $a$  に比例するが、 $q$  のひろがり  $1/a$  に比例する。つまり、 $x$  のひろがり大きい (小さい) と、 $q$  のひろがり小さく (大きく) なる。一般に、フーリエ変換の性質として、 $x$  のひろがり  $q$  のひろがりの積は一定値以下には小さくならない。これは量子力学での不確定性と関連している。

(3.87) より  $a \rightarrow 0$  のとき  $f(x) = \delta(x)$  であるが、このとき  $\tilde{f}(q) = 1$  になる。デルタ関数のフーリエ変換は 1 であり、全ての  $q$  を同じ割合で含む。デルタ関数の表現 (3.88) は、デルタ関数をフーリエ変換すると 1 になることを表している。



$a > 0$  として  $f(x) = e^{-x^2/a^2}$  のとき  $y = x/a$  とすると

$$\tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2/a^2 - iqx} = a \int_{-\infty}^\infty dy e^{-y^2 - iaqy} = a e^{-a^2 q^2/4} \int_{-\infty}^\infty dy e^{-(y+iaq/2)^2}$$

(5.16) より

$$\tilde{f}(q) = \sqrt{\pi} a e^{-a^2 q^2/4}$$

になる。この場合も、 $f(x)$  の幅は  $e^{-x^2/a^2} = e^{-1}$  より  $a$  に比例し、 $\tilde{f}(q)$  の幅は  $1/a$  に比例する。

**例題 2**  $a > 0$  として

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

のとき

$$\tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-iqx} = \int_{-a}^a dx e^{-iqx} = \left[ -\frac{e^{-iqx}}{iq} \right]_{-a}^a = \frac{2 \sin aq}{q}$$

フーリエ逆変換 (6.37) より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{2 \sin aq}{q} e^{iqx} = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (6.44)$$

オイラーの公式を使うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\sin aq \cos qx}{q} = \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

になる。特に  $x = 0$  とすると (5.37)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\sin aq}{q} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\sin q}{q} = \pi, \quad \text{ただし } a > 0 \quad (6.45)$$

になる。 $q^n \sin q$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  の不定積分は初等関数で表せるが、 $\sin q/q$  の不定積分は初等関数では表せない。しかし、フーリエ変換とフーリエ逆変換を用いると、定積分が求まる。

不連続点  $x = \pm a$  では

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqx} \tilde{f}(q) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\sin aq \cos aq}{q} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\sin 2aq}{q} = \frac{1}{2}$$

になり (6.39) が成り立つ。

$$\delta_a(q) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(q) = \frac{\sin aq}{\pi q}$$

とすると

$$\delta_a(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a dx e^{-iqx} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \delta(q)$$

になるから、デルタ関数の具体的表現として

$$\delta(q) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin aq}{\pi q} \quad (6.46)$$

を得る。実際

$$\delta_a(0) = \frac{a}{\pi} \frac{\sin aq}{aq} \Big|_{q=0} = \frac{a}{\pi} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq \delta_a(q) = 1$$

になるから  $\lim_{a \rightarrow \infty} \delta_a(q)$  はデルタ関数の性質を満たす。 $\delta_a(q \neq 0)$  は 0 にはならないが、 $a \rightarrow \infty$  では周期  $2\pi/a \rightarrow 0$  になり限りなく早く振動する。このため、 $\delta_a(q)$  を含む積分は、発散する  $q = 0$  以外は寄与せず、 $\delta_a(q \neq 0) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$  と同等である。

**例題 3**  $a > 0$ ,  $b$  を  $|\operatorname{Im} b| < a$  である複素数として

$$f(x) = \theta(x) e^{-ax} \sin bx = \begin{cases} e^{-ax} \sin bx, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

とする。  $\theta(x)$  は階段関数 (3.99) である。

$$\begin{aligned}\tilde{f}(q) &= \int_0^\infty dx e^{-ax-iqx} \sin bx = \frac{1}{2i} \int_0^\infty dx e^{-ax-iqx} (e^{ibx} - e^{-ibx}) \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{e^{(-a-iq+ib)x}}{-a-iq+ib} - \frac{e^{(-a-iq-ib)x}}{-a-iq-ib} \right]_0^\infty\end{aligned}$$

$b$  を実部と虚部に分けて  $b = u + iv$  とする。

$$-a - ik \pm ib = -a - ik \pm iu \mp v = -(a \pm v) - i(k \mp u)$$

$-a < v < a$ , つまり  $a \pm v > 0$  になるから

$$|e^{-ax-ikx \pm ibx}| = |e^{-(a \pm v)x} e^{-i(k \mp u)x}| = e^{-(a \pm v)x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

したがって

$$\tilde{f}(q) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{a+iq-ib} - \frac{1}{a+iq+ib} \right) = \frac{b}{(a+iq)^2 + b^2}$$

になる。(6.37) より

$$a > 0, |\operatorname{Im} b| < a \text{ のとき } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{e^{iqx}}{(a+iq)^2 + b^2} = \theta(x) e^{-ax} \frac{\sin bx}{b} \quad (6.47)$$

である。 $b = 0$  の場合,  $b \rightarrow 0$  の極限をとれば成り立つ。

**問題 6.3** 複素積分 (5.48) を用いて (6.47) を求めよ。

**問題 6.4**  $a > 0$  として  $f(x) = \theta(x)e^{-ax}$  とする。

1.  $\tilde{f}(q)$  を求めよ。不連続点  $x = 0$  で (6.39) が成り立つことを示せ。
2. フーリエ逆変換より (5.50)

$$C(x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} = e^{-a|x|}, \quad S(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k \sin kx}{a^2 + k^2} = \begin{cases} +, & x > 0 \\ -, & x < 0 \end{cases}$$

を示せ。 $C(x)$  は偶関数,  $S(x)$  は奇関数である。

### フーリエ変換の性質

3次元を扱うが, 1次元の場合には変数を1つにすればよいから, 同じ性質が成り立つ。

$f(\mathbf{r})$  のフーリエ変換  $\tilde{f}(\mathbf{q})$  を  $\mathcal{F}[f(\mathbf{r})]$  と表すとき

$$\mathcal{F}[af(\mathbf{r}) + bg(\mathbf{r})] = a\mathcal{F}[f(\mathbf{r})] + b\mathcal{F}[g(\mathbf{r})]$$

である。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\mathbf{r} - \mathbf{a})] &= \int d^3r f(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) \int d^3r' f(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') = \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}) \mathcal{F}[f(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[\exp(i\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})f(\mathbf{r})] = \int d^3r f(\mathbf{r}) \exp(-i(\mathbf{q} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}) = \tilde{f}(\mathbf{q} - \mathbf{a})$$

が成り立つ。 $\partial_1 = \partial/\partial x$ ,  $\partial_2 = \partial/\partial y$ ,  $\partial_3 = \partial/\partial z$  で表すと

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\partial_1 f(\mathbf{r})] &= \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dydz \left[ \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int d^3r f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x} \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \\ &= iq_1 \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = iq_1 \mathcal{F}[f(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

一般に

$$\mathcal{F}[\partial_k^n f(\mathbf{r})] = (iq_k)^n \mathcal{F}[f(\mathbf{r})]$$

である。

**たたみ込み** (convolution) を

$$(f*g)(\mathbf{r}) = \int d^3r' f(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int d^3r' f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')$$

で定義する。 $(f*g)(\mathbf{r}) = (g*f)(\mathbf{r})$  である。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(f*g)(\mathbf{r})] &= \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \int d^3r' f(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &= \int d^3r' f(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}') \int d^3r g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))\end{aligned}$$

積分変数を  $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  に変更すると

$$\mathcal{F}[(f*g)(\mathbf{r})] = \int d^3r' f(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}') \int d^3x g(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})] \mathcal{F}[g(\mathbf{r})]$$

になる。

フーリエ級数で示したパーセバルの等式はフーリエ変換では次のようなる。

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3r f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}), \quad \tilde{g}(\mathbf{q}) = \int d^3r g(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$$

に対して

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \tilde{f}^*(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \int d^3r \int d^3r' f^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))$$

最初に  $\mathbf{q}$  についての積分を行うと (3.89) より

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \exp(i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

になる。デルタ関数の性質 (3.84) から

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \tilde{f}^*(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}) = \int d^3r f^*(\mathbf{r}) \int d^3r' g(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int d^3r f^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r})$$

である。 $g = f$  とすれば

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q |\tilde{f}(\mathbf{q})|^2 = \int d^3r |f(\mathbf{r})|^2$$

が成り立つ。1次元の場合は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \tilde{f}^*(q) \tilde{g}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x)$$

である。

## 6.4 フーリエ変換と微分方程式

### 強制振動

バネ定数  $k$  のバネに結ばれた質量  $m$  の質点の強制振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.48)$$

の解  $x(t)$  を求める。 $-2m\gamma dx/dt$  は速度に比例する摩擦力,  $mf(t)$  は外力を表し時間の関数として与えられているとする。 $x(t)$ ,  $f(t)$  をフーリエ変換し

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega), \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega)$$

とする。 $\tilde{x}(\omega)$  は未知であるが,  $\tilde{f}(\omega)$  は既知である。フーリエ変換を行うと  $x(t)$  の  $t$  依存性は  $e^{i\omega t}$  にだけ現れる。このため

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{de^{i\omega t}}{dt} \tilde{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega i\omega e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (i\omega)^2 e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega)$$

つまり時間微分  $d/dt$  は  $i\omega$  に置き換わる。(6.48) は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) - \tilde{f}(\omega)] e^{i\omega t} = 0$$

フーリエ逆変換すれば

$$\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega), \quad \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2}$$

であるから  $x(t)$  はたたみ込み

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t-t') \quad (6.49)$$

で与えられる。ただし

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} \quad (6.50)$$

である。(6.49) は任意定数を含まないから (6.48) の特解である。外力  $f(t)$  に依存しない  $G(t)$  が求まれば, 任意の外力に対する特解を得ることができる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} = \delta(t-t') \quad (6.51)$$

であるから,  $G(t-t')$  は  $t=t'$  の一瞬だけ無限大の外力が作用したときの特解と見なすことができる。上式に  $f(t')$  をかけ  $t'$  で積分すると ( $t$  と  $t'$  は独立な変数であるから,  $t$  の微分と  $t'$  の積分の順序は入れ換えてもよい)

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t-t') = f(t)$$

になり, (6.49) は確かに (6.48) の解である。

(6.50) は

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\gamma + i\omega)^2 + \omega'^2}, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

と表せる。(6.47) より

$$G(t) = \theta(t)e^{-\gamma t} \frac{\sin \omega' t}{\omega'} \quad (6.52)$$

である。 $\omega'$  は実数とは限らないが,  $|\operatorname{Im} \omega'| < \gamma$  になるから上式は成り立つ。したがって

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t-t') = \frac{1}{\omega'} \int_{-\infty}^t dt' f(t') e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega'(t-t') \quad (6.53)$$

になる。積分は  $t' \leq t$  の範囲であり,  $x(t)$  は時刻  $t$  よりも未来 ( $t' > t$ ) の外力  $f(t')$  には依存しない (因果律)。

**問題 6.5** (6.52) より  $\frac{dG}{dt}$  と  $\frac{d^2G}{dt^2}$  を求め (6.51) を満たすことを確かめよ。

**問題 6.6**  $f(t) = f_0 \sin \Omega t$  のとき (6.53) は

$$x(t) = C \sin(\Omega t - \phi), \quad \text{ただし} \quad C = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}, \quad \tan \phi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

になることを示せ。

### ヘルムホルツ ( Helmholtz ) 方程式

関数  $f(\mathbf{r})$  が与えられたとき, 微分方程式

$$(\nabla^2 - m^2)V(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

を満たす  $V(\mathbf{r})$  を求める。ただし,  $m$  は正の定数である。 $m \rightarrow 0$  とするとポアソン方程式になる。強制振動と同様に

$$(\nabla^2 - m^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (6.54)$$

を満たすグリーン関数  $G(\mathbf{r})$  が求まれば

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}'), \quad \text{ただし} \quad d^3r' = dx' dy' dz'$$

であるから  $G(\mathbf{r})$  を求めればよい。

$G(\mathbf{r})$  をフーリエ変換して

$$G(\mathbf{r}) = \int d^3q g(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.55)$$

とする。 $\nabla \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = i\mathbf{q} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$  より

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \int d^3q g(\mathbf{q}) \nabla^2 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = - \int d^3q g(\mathbf{q}) q^2 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$$

である。これから (6.55) を (6.54) に代入すると

$$\int d^3q (-q^2 - m^2) g(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad \therefore g(\mathbf{q}) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m^2}$$

である。これを (6.55) に代入する。 $\mathbf{r}$  方向を  $\mathbf{q}$  の  $z$  軸にとり  $\mathbf{q}$  を極座標で表せば  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \theta$  より

$$G(\mathbf{r}) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq q^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{iqr \cos \theta}}{q^2 + m^2}$$

になる。  $t = \cos \theta$  とすると

$$G(r) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m^2} \int_{-1}^1 dt e^{iqrt} = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} (e^{iqr} - e^{-iqr})$$

$e^{-iqr}$  を含む項では  $q' = -q$  と変数変換すると

$$\int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} e^{-iqr} = -\int_0^{-\infty} dq' \frac{-q'}{q'^2 + m^2} e^{iq'r} = -\int_{-\infty}^0 dq \frac{q}{q^2 + m^2} e^{iqr}$$

になるから

$$G(r) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dq g(q) e^{iqr}, \quad g(q) = \frac{q}{q^2 + m^2} \quad (6.56)$$

$g(q)$  は  $q = \pm im$ , ( $m > 0$ ) に一位の極をもち  $g(q) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0$  である。  $r > 0$  であるから (5.48) より

$$G(r) = -\frac{1}{2\pi r} \text{Res}(g(q)e^{iqr}, q = im) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$$

になる。  $m \rightarrow 0$  とすれば (3.82) になる。

## 6.5 ラプラス変換

フーリエ変換 (6.38) で  $s = iq$  とおいた

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-sx} f(x) \quad (6.57)$$

を  $f(x)$  のラプラス変換という。ここで  $s$  は一般に複素数である。  $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(x)]$  で表す。通常、ラプラス変換は

$$x < 0 \text{ のとき } f(x) = 0$$

である関数に対して適用する。このとき (6.57) は

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty dx e^{-sx} f(x) \quad (6.58)$$

になる。これを片側ラプラス変換という。以下では、主に片側ラプラス変換を扱う。

### 例題

$a$  を実数として  $f(x) = e^{ax}$  のとき

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^\infty dx e^{(a-s)x} = \left[ \frac{e^{(a-s)x}}{a-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad \text{ただし } \text{Re}(s) > a \quad (6.59)$$

である。  $b$  を実数として

$$f(x) = \cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$$

のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos bx] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \left( e^{(ib-s)x} + e^{-(ib+s)x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-ib} + \frac{1}{s+ib} \right) = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad \text{ただし } \text{Re}(s) > 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

同様にして

$$\mathcal{L}[\sin bx] = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-ib} - \frac{1}{s+ib} \right) = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad \text{ただし } \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (6.61)$$

次に  $n = 0, 1, 2, \dots$  のとき,  $\operatorname{Re}(s) > 0$  ならば

$$\mathcal{L}[x^n] = \int_0^\infty dx x^n e^{-sx} = \left[ x^n \frac{e^{-xs}}{-s} \right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-sx} = \frac{n}{s} \mathcal{L}[x^{n-1}]$$

したがって

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[x^{n-1}] = \dots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty dx e^{-sx} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (6.62)$$

である。

### ラプラス変換の性質

$\mathcal{L}[f(x)]$  と  $\mathcal{L}[g(x)]$  が存在する共通領域では

$$\mathcal{L}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{L}[f(x)] + b\mathcal{L}[g(x)] \quad (6.63)$$

が成り立つことは明らかであろう。

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = \int_0^\infty dx e^{-(s-a)x} f(x) = \tilde{f}(s-a) \quad (6.64)$$

$$\mathcal{L}[f(ax)] = \int_0^\infty dx e^{-sx} f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^\infty dx e^{-(s/a)x} f(x) = \frac{1}{a} \tilde{f}(s/a), \quad a > 0 \quad (6.65)$$

(6.64) の適用例として  $f(x) = \cos bx$  とすると  $\tilde{f}(s) = s/(s^2 + b^2)$  であるから

$$\mathcal{L}[e^{ax} \cos bx] = \tilde{f}(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > a \quad (6.66)$$

同様にして

$$\mathcal{L}[e^{ax} \sin bx] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > a \quad (6.67)$$

である。

次に

$$\mathcal{L}[f'(x)] = \int_0^\infty dx e^{-sx} f'(x) = \left[ e^{-sx} f(x) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty dx e^{-sx} f(x)$$

$e^{-sx} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  ならば

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

である。更に  $e^{-sx} f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  ならば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(x)] &= \int_0^\infty dx e^{-sx} f''(x) = \left[ e^{-sx} f'(x) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty dx e^{-sx} f'(x) \\ &= -f'(0) + s \left( s\tilde{f}(s) - f(0) \right) = s^2 \tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \quad (6.68)$$

一般に,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  に対して  $e^{-sx} f^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  ならば

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (6.69)$$

である。

たたみ込み (コンボリューション) を

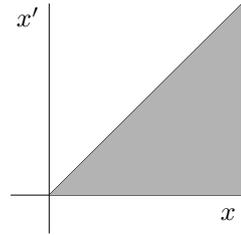
$$(f * g)(x) = \int_0^x dx' f(x-x')g(x') = \int_0^x dx' f(x')g(x-x')$$

で定義する。 $(f * g)(x) = (g * f)(x)$  である。たたみ込みのラプラス変換は

$$\mathcal{L}[(f * g)(x)] = \int_0^\infty dx \int_0^x dx' e^{-sx} f(x')g(x-x')$$

積分範囲を図示すると図のようになるから、積分範囲は  $x' \geq 0, x \geq x'$  と表すこともできる。したがって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)(x)] &= \int_0^\infty dx' \int_{x'}^\infty dx e^{-sx} f(x')g(x-x') \\ &= \int_0^\infty dx' e^{-sx'} f(x') \int_{x'}^\infty dx e^{-s(x-x')} g(x-x') \end{aligned}$$



$y = x - x'$  とすれば

$$\mathcal{L}[(f * g)(x)] = \int_0^\infty dx' e^{-sx'} f(x') \int_0^\infty dy e^{-sy} g(y) = \mathcal{L}[f(x)] \mathcal{L}[g(x)] \quad (6.70)$$

たたみ込みのラプラス変換はラプラス変換の積になる。

### ラプラス逆変換

$s$  の実部を  $u$ , 虚部を  $v$  とすると

$$\tilde{f}(u + iv) = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-(u+iv)x} f(x)$$

である。ここで

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv e^{(u+iv)x} \tilde{f}(u + iv) \quad (6.71)$$

を考えると

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv e^{(u+iv)x} \int_{-\infty}^\infty dx' e^{-(u+iv)x'} f(x') \\ &= \int_{-\infty}^\infty dx' e^{-u(x-x')} f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv e^{iv(x-x')} = \int_{-\infty}^\infty dx' e^{-u(x-x')} f(x') \delta(x-x') = f(x) \end{aligned}$$

片側ラプラス変換の場合,  $x < 0$  のとき  $f(x) = 0$  であるから

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

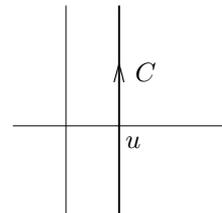
になる。したがって, (6.71) が (6.57) あるいは (6.58) の逆変換でありラプラス逆変換という。

(6.71) において, 積分変数を  $s = u + iv$  に変更すると, 積分は図の虚軸に平行な積分路  $C$  に沿った複素積分になる。  $ds = idv$  であるから

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds e^{sx} \tilde{f}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} ds e^{sx} \tilde{f}(s) \quad (6.72)$$

である。例題で示したように, 任意の複素数  $s$  に対して積分 (6.57), (6.58) が有限で  $\tilde{f}(s)$  が存在するとは限らない。片側ラプラス変換の場合

$$|\tilde{f}(s)| \leq \int_0^\infty dx |e^{-sx} f(x)| = \int_0^\infty dx e^{-ux} |f(x)|$$



である。ある  $\operatorname{Re}(s) = u_0$  で  $\tilde{f}(s)$  が有限ならば、 $\operatorname{Re}(s) > u_0$  である任意の  $s$  に対して、 $x > 0$  で  $e^{-ux} < e^{-u_0x}$  になるから  $\tilde{f}(s)$  は有限になる。逆変換の経路は、 $\tilde{f}(s)$  が有限になる領域に  $u$  をとる必要がある。この領域にあれば、逆ラプラス変換は  $u$  に依存しない。

多くの場合、ラプラス変換の性質と例題に示したような既知のラプラス変換の結果を組み合わせれば、(6.72) の積分を実行しなくても  $f(x)$  は得られる。しかし、(6.72) の意味を理解しておくことは重要である。

例えば  $a \neq b$  のとき

$$\tilde{f}(s) = \frac{a-b}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \quad (6.73)$$

は (6.59) より

$$f(x) = e^{ax} - e^{bx} \quad (6.74)$$

になる。 $b > a$  とすると、(6.73) は  $\operatorname{Re}(s) > b$  のとき (6.74) の片側ラプラス変換を表す。積分 (6.72)

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds e^{sx} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right)$$

を実行する。実軸上の点  $u$  を中心とした半径  $R$  の円周上では  $s = u + Re^{i\theta}$  とおけるから

$$|e^{sx}| = |\exp(ux + Rx \cos \theta + iRx \sin \theta)| = \exp(ux + Rx \cos \theta)$$

$x \cos \theta < 0$ 、つまり

$$x > 0, \cos \theta < 0 \quad \text{または} \quad x < 0, \cos \theta > 0$$

ならば  $R \rightarrow \infty$  のとき  $e^{sx} \rightarrow 0$  になる。そこで、図のような半円の経路  $C_{\pm}$  を考え

$$I_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} ds e^{sx} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right)$$

とする。 $ds = iRe^{i\theta}d\theta$  であるから

$$|I_{+}| \leq \frac{R}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \left| e^{sx} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \right| \leq \frac{R}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta e^{ux+Rx \cos \theta} \left( \frac{1}{|s-a|} + \frac{1}{|s-b|} \right)$$

ところで、 $R$  が十分大きく  $R > |a+u|, |b+u|$  ならば

$$|s-a| = |(s-u) - (a+u)| \geq |s-u| - |a+u| = R - |a+u|, \quad |s-b| \geq R - |b+u|$$

である。したがって

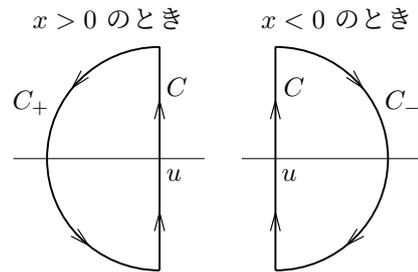
$$|I_{+}| \leq \frac{e^{ux}}{2\pi} \left( \frac{R}{R-|a+u|} + \frac{R}{R-|b+u|} \right) \int_0^{\pi} d\phi e^{-Rx \sin \phi}, \quad \phi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

(5.39) と同様にすれば

$$|I_{+}| < \frac{e^{ux}}{2x} \left( \frac{1}{R-|a+u|} + \frac{1}{R-|b+u|} \right) (1 - e^{-xR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad \text{ただし } x > 0$$

である。同様にして  $x < 0$  のとき  $I_{-} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  になるから、閉曲線の経路  $D_{\pm} = C + C_{\pm}$  を用いて

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_{\pm}} ds e^{sx} \tilde{f}(s)$$



になる。(6.74)の片側ラプラス変換が有限である  $u > b$  の場合,  $\tilde{f}(s)$  の一位の極  $s = a, b$  は  $D_+$  内に存在するから, 留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_+} ds e^{sx} \tilde{f}(s) = e^{ax} - e^{bx}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{D_-} ds e^{sx} \tilde{f}(s) = 0$$

になるから

$$F(x) = \begin{cases} e^{ax} - e^{bx}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (6.75)$$

である。したがって, (6.72) から  $f(x)$  が求まる。

一方,  $a < u < b$  の場合,  $s = a$  は  $D_+$  内,  $s = b$  は  $D_-$  内に存在する。 $D_-$  は時計回りであることに注意すると

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_+} ds e^{sx} \tilde{f}(s) = e^{ax}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{D_-} ds e^{sx} \tilde{f}(s) = e^{bx},$$

であるから

$$F(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x > 0 \\ e^{bx}, & x < 0 \end{cases} \quad (6.76)$$

になる。 $u < a$  の場合,  $s = a, b$  は  $D_-$  内に存在し

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -e^{ax} + e^{bx}, & x < 0 \end{cases} \quad (6.77)$$

である。(6.73)は  $s \neq a, b$  であれば  $\operatorname{Re}(s) \leq a$  でも定義されるが, (6.74)ではなく, 別の関数 (6.76), (6.77)のラプラス変換である。

一般に

$$\tilde{f}(s) \text{ は有限個の極 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ を除いて正則, } \tilde{f}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

の場合, (5.48)を (6.71)に適用する。(5.48)での  $f(x)$  は, ここでは  $v$  の関数  $e^{ux} \tilde{f}(u + iv)$  になる。この関数の極  $b_k$  は

$$a_k = u + ib_k, \quad \text{つまり } b_k = -ia_k + iu$$

であるから,  $b_k$  が実数でないならば

$$x \geq 0 \text{ のとき } F(x) = \pm i \sum_{\operatorname{Im}(b_k) \geq 0} \operatorname{Res}\left(e^{(u+iv)x} \tilde{f}(u+iv), v = b_k\right)$$

になる。複素  $v$  平面での  $v = b_k$  を中心とした微小半径の円を  $C_k$  とすると, 留数の定義 (5.32) から

$$\operatorname{Res}\left(e^{(u+iv)x} \tilde{f}(u+iv), v = b_k\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} dv e^{(u+iv)x} \tilde{f}(u+iv)$$

積分変数を  $s = u + iv$  にする。 $v = b_k$  のとき  $s = a_k$  になるから,  $s = a_k$  を中心とした微小半径の円を  $D_k$  とすると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} dv e^{(u+iv)x} \tilde{f}(u+iv) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{i} \oint_{D_k} ds e^{sx} \tilde{f}(s) = \frac{1}{i} \operatorname{Res}\left(e^{sx} \tilde{f}(s), a_k\right)$$

である。 $\operatorname{Im}(b_k) = u - \operatorname{Re}(a_k)$  より

$$x \geq 0 \text{ のとき } F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} ds e^{sx} \tilde{f}(s) = \pm \sum_{\operatorname{Re}(a_k) \leq u} \operatorname{Res}\left(e^{sx} \tilde{f}(s), a_k\right)$$

になる。これから (6.75)~(6.77) は直ちに求まる。\$u\$ を \$\text{Re}(a\_k)\$ の最大値よりも大きくとれば

$$x > 0 \text{ のとき } F(x) = \sum_k \text{Res} \left( e^{sx} \tilde{f}(s), a_k \right), \quad x < 0 \text{ のとき } F(x) = 0 \quad (6.78)$$

である。

**例題** \$\tilde{f}(s) = 1/(s+a)^2\$ の場合

(6.62) より \$\mathcal{L}[x] = 1/s^2\$ である。これと (6.64) から \$f(x) = xe^{-ax}\$ になる。一方、\$s = -a\$ は \$\tilde{f}(s)\$ の 2 位の極であるから (6.78) より

$$f(x) = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d}{ds} (s+a)^2 e^{sx} \tilde{f}(s) = xe^{-ax}$$

## 6.6 ラプラス変換と微分方程式

強制振動の微分方程式 (6.48)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.79)$$

をラプラス変換を用いて解く。

$$\tilde{x}(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} x(t), \quad \tilde{f}(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} f(t)$$

として、上式を片側ラプラス変換すると (6.69) より

$$s^2 \tilde{x}(s) - x_0 s - v_0 + 2\gamma (s \tilde{x}(s) - x_0) + \omega_0^2 \tilde{x}(s) = \tilde{f}(s)$$

ここで \$x\_0 = x(0)\$, \$v\_0 = \dot{x}(0)\$ は初期値である。これから

$$\tilde{x}(s) = \tilde{x}_1(s) + \tilde{x}_2(s)$$

ただし

$$\tilde{x}_1(s) = \frac{x_0(s+\gamma) + \gamma x_0 + v_0}{(s+\gamma)^2 + \omega'^2}, \quad \tilde{x}_2(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{(s+\gamma)^2 + \omega'^2}, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

になる。(6.66), (6.67) より \$\tilde{x}\_1(s)\$ のラプラス逆変換 \$x\_1(t)\$ は

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega' t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega'} \sin \omega' t \right)$$

\$\tilde{x}\_2(s)\$ は \$f(t)\$ と \$e^{-\gamma t} \sin \omega' t\$ のラプラス変換の積であるから、(6.70) よりラプラス逆変換はたたみ込み

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega'} \int_0^t dt' f(t') e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega'(t-t')$$

になる。したがって、(6.79) の解は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega' t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega'} \sin \omega' t \right) + \frac{1}{\omega'} \int_0^t dt' f(t') e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega'(t-t') \end{aligned}$$

である。

ラプラス変換を用いると、微分方程式の一般解が代数的に求まる。一般解の任意定数は初期条件  $x_0 = x(0)$ ,  $v_0 = \dot{x}(0)$  として表されるから、ラプラス変換は微分方程式の初期値問題を解くときに便利である。なお、 $x_1(t)$  は (6.79) で  $f(t) = 0$  とした同次微分方程式の一般解であり、 $x_2(t)$  は  $x_0 = v_0 = 0$  とした (6.79) の特解である。片側ラプラス変換では  $t < 0$  のとき  $f(t) = 0$  であるから、フーリエ変換で求めた特解 (6.53) と  $x_2(t)$  は一致する。

具体的な  $f(t)$  に対して、たまたみ込み積分を実行しなくても  $x_2(t)$  を求められる場合がある。例えば  $f(t) = \sin \omega t$  のとき (6.61) より  $\tilde{f}(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$  であるから

$$\tilde{x}_2(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)((s + \gamma)^2 + \omega'^2)} = a \left( \frac{s + \gamma + \omega'c}{(s + \gamma)^2 + \omega'^2} - \frac{s + \omega b}{s^2 + \omega^2} \right)$$

ただし

$$a = \frac{2\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \quad b = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}, \quad c = \frac{\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2}{2\gamma\omega'}$$

になる。したがって、(6.66), (6.67) より

$$x_2(t) = ae^{-\gamma t}(\cos \omega' t + c \sin \omega' t) - a(\cos \omega t + b \sin \omega t)$$

である。時間が十分経過すれば  $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$  より

$$x_1(t) \rightarrow 0, \quad x_2(t) \rightarrow -a(\cos \omega t + b \sin \omega t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

になる。ここで

$$A = a\sqrt{1 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad \cos \phi = -\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}, \quad \sin \phi = -\frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$$

である。

あるいは、 $\tilde{x}_2(s)$  は  $s = \pm i\omega$ ,  $-\gamma \pm i\omega'$  に一位の極をもつから、(6.78) より

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega((i\omega + \gamma)^2 + \omega'^2)} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega((-i\omega + \gamma)^2 + \omega'^2)} \\ &\quad + \frac{\omega e^{-\gamma t + i\omega' t}}{2i\omega'((-\gamma + i\omega')^2 + \omega^2)} - \frac{\omega e^{-\gamma t - i\omega' t}}{2i\omega'(\gamma + i\omega')^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(i\omega + \gamma)^2 + \omega'^2} &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = A e^{i\phi} \\ \frac{1}{(\gamma - i\omega')^2 + \omega^2} &= \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 - 2i\gamma\omega'} = A e^{i\phi'}, \quad \tan \phi' = \frac{2\gamma\omega'}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2} \end{aligned}$$

と表せるから

$$x_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) + A \frac{\omega}{\omega'} e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \phi')$$

になる。

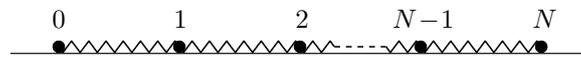
## 7 2階偏微分方程式

$u$  を2個以上の独立な変数  $x, y, \dots$  の関数を  $u = u(x, y, \dots)$  とするとき, 独立な変数と  $u$  及び  $u$  の偏導関数の間に成り立つ方程式を**偏微分方程式**という。この方程式に含まれる偏導関数の最高次数を**階数**という。以下では, 2階の偏微分方程式を扱う。偏微分方程式を満たす未知関数  $u(x, y, \dots)$  を求めることを偏微分方程式を解くという。偏微分方程式が  $u$  及びその偏導関数について1次であるとき**線形**という。

### 7.1 代表的な偏微分方程式

#### 波動方程式

19 ページで弦の振動を例にして波動方程式を導出した。弦の振動は波の進む方向と変位の方向が垂直な**横波**である。ここでは, 波の進む方向と変位の方向が平行な**縦波**について波動方程式を求める。



質量  $0$ , 自然長  $a$ , バネ定数  $k$  のバネで結ばれた質量  $m$  の質点系を考える。バネの方向を  $x$  軸にとり, 質点が  $x$  軸上を振動する場合,  $n$  番目の質点の変位を  $u_n$  とすると, 運動方程式は  $1 \leq n \leq N-1$  のとき

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k \left( (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) \right) = k (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

である。  $x = na$ ,  $u_n(t) = u(x, t)$  としテイラー展開を行うと

$$u_{n\pm 1}(t) = u(x \pm a, t) = u(x, t) \pm a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{a^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots$$

より

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ka^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)$$

になる。  $N$  個のばねの自然長の和  $L = aN$  を一定に保って  $N \rightarrow \infty$  の極限を考える。質点系の全質量  $M$  は  $M = mN$  である。質点系の両端を張力  $T$  で引っ張ると, 平衡状態では, 個々のバネの伸びは  $T/k$  であるから, 全体では  $\Delta L = TN/k$  になる。これから

$$\frac{ka^2}{m} = \frac{T(aN)^2}{M\Delta L} = \frac{TL^2}{M\Delta L}$$

$N \rightarrow \infty$  においても  $M, \Delta L$  は有限になるべきである。したがって,  $N \rightarrow \infty$  のとき  $a \rightarrow 0$  であるが  $c = \sqrt{ka^2/m}$  は有限になるから波動方程式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0$$

が求まる。  $c$  の次元は速度である。2次元, 3次元の場合

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{または} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

になる。

#### 拡散方程式

$x$  軸を等間隔  $a$  に分割し  $k$  番目の点を  $x_k = ka$  とする。時間  $t$  も等間隔  $\tau$  に分割し  $t_n = n\tau$  とお

く。時刻  $t_n$  において  $x_k$  にある粒子が、時刻  $t_{n+1}$  では  $x_{k-1}$  または  $x_{k+1}$  にそれぞれ確率  $p$  で移動し、確率  $1-2p$  で  $x_k$  に留まるとする。ここで  $0 < p \leq 1/2$  である。粒子の数が非常に大きく、また、各粒子が互いに独立に上の運動を繰り返すと、時刻  $t_n$  で位置  $x_k$  における粒子数  $n(x_k, t_n)$  は

$$n(x_k, t_{n+1}) = (1-2p)n(x_k, t_n) + pn(x_{k+1}, t_n) + pn(x_{k-1}, t_n)$$

を満たす。 $a, \tau \rightarrow 0$  の極限を考える。テイラー展開すると ( $x = x_k, t = t_n$ )

$$\begin{aligned} n(x_k, t_{n+1}) &= n(x, t + \tau) = n(x, t) + \tau \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \cdots \\ n(x_{k\pm 1}, t_n) &= n(x \pm a, t) = n(x, t) \pm a \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{6} \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + \frac{a^4}{24} \frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + \cdots \end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{pa^2}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{pa^4}{12\tau} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots = 0$$

になる。ただし、 $u(x, t) = n(x, t)/a$  は密度 (単位長さあたりの粒子数) である。

$$\text{全粒子数} = \sum_k n(x_k, t) = a \sum_k u(x_k, t) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int dx u(x, t)$$

であるから、 $a \rightarrow 0$  のとき  $u$  は有限である。速さ  $a/\tau$  の粒子が、 $x_k$  から  $x_{k+1}$  に向け  $pu(x_k, t_n)$  個移動し、逆に、 $x_{k+1}$  から  $x_k$  に  $pu(x_{k+1}, t_n)$  個移動するから、 $x_k$  と  $x_{k+1}$  の間を通過する粒子の流れ  $J$  は

$$J = \frac{a}{\tau} p (u(x_k, t_n) - u(x_{k+1}, t_n)) = -\frac{pa^2}{\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \right)$$

である。 $a, \tau \rightarrow 0$  の極限でも  $J$  は有限のはずであるから

$$\lim_{a, \tau \rightarrow 0} \frac{pa^2}{\tau} = \text{一定} = \lambda$$

である。このとき  $pa^4/\tau \rightarrow \lambda a^2 \rightarrow 0$  になるから

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = 0$$

この方程式を**拡散方程式**という。2次元、3次元の拡散方程式は

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.1)$$

である。なお、一般には拡散方程式は

$$\nabla \cdot (\lambda(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}, t)) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

になる。(7.1)は  $\lambda(\mathbf{r}) = \text{一定}$  の場合である。 $u(\mathbf{r}, t)$  を時刻  $t$ , 位置  $\mathbf{r}$  における物体の温度とすると、 $u(\mathbf{r}, t)$  は (7.1) を満たす。このとき (7.1) を**熱伝導方程式**という。(7.1) で時間  $t$  を純虚数  $it$  に置き換えると、量子力学の基礎方程式である**シュレディンガー方程式**になる。

### ラプラス方程式とポアソン方程式

波動方程式と拡散方程式において、 $u$  が時間  $t$  に依存しない場合

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.2)$$

になる。これを**ラプラス方程式**という。ラプラス方程式に非同次項  $f(\mathbf{r})$  を加えた

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (7.3)$$

を**ポアソン方程式**という。ラプラス方程式とポアソン方程式は、電磁気学や流体力学など広範囲に現れる。

## 7.2 波動方程式

6.2 (156 ページ) ではフーリエ級数を用いて 1 次元の波動方程式を扱った。ここでは 3 次元の波動方程式を考える。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.4)$$

の解  $u(\mathbf{r}, t)$  をフーリエ変換して

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) w(\mathbf{k}, t), \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z$$

とする。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\mathbf{r}, t) = \int d^3k w(\mathbf{k}, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = - \int d^3k w(\mathbf{k}, t) k_x^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$y$  と  $z$  の偏微分についても同様であるから

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r}, t) = - \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left(k^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w(\mathbf{k}, t) = 0$$

フーリエ逆変換より

$$\left(k^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w(\mathbf{k}, t) = 0, \quad \therefore w(\mathbf{k}, t) = a(\mathbf{k}) \cos(kct) + \frac{b(\mathbf{k})}{kc} \sin(kct)$$

第 2 項で  $b(\mathbf{k})/(kc)$  としたのは、単に便宜上のことである。任意の関数  $a(\mathbf{k})$ ,  $b(\mathbf{k})$  に対して

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left(a(\mathbf{k}) \cos(kct) + \frac{b(\mathbf{k})}{kc} \sin(kct)\right) \quad (7.5)$$

は波動方程式の解になる。

特別な初期条件を満たす波動方程式の解を

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) D(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{初期条件 } D(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\mathbf{r}) \quad (7.6)$$

とするとき

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) g_0(\mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) f_0(\mathbf{r}') \quad (7.7)$$

を考える。 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  とすれば  $\nabla_{\mathbf{R}} = \nabla$  であるから

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' g_0(\mathbf{r}') \left(\nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) D(\mathbf{R}, t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' f_0(\mathbf{r}') \left(\nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) D(\mathbf{R}, t) = 0 \end{aligned}$$

になり (7.7) は波動方程式を満たす。また

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, 0) &= \int d^3r' \left.\frac{\partial D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t}\right|_{t=0} f_0(\mathbf{r}') = \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_0(\mathbf{r}') = f_0(\mathbf{r}) \\ \left.\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \int d^3r' \left.\frac{\partial D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t}\right|_{t=0} g_0(\mathbf{r}') + \int d^3r' \left.\frac{\partial^2 D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} f_0(\mathbf{r}') \\ &= g_0(\mathbf{r}) + c^2 \nabla^2 \int d^3r' D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) f_0(\mathbf{r}') = g_0(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

したがって、任意の初期条件

$$u(\mathbf{r}, 0) = f_0(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g_0(\mathbf{r}) \quad (7.8)$$

を満たす解  $u(\mathbf{r}, t)$  は (7.7) で与えられる。

$D(\mathbf{r}, t)$  を (7.5) で表わすと

$$D(\mathbf{r}, 0) = \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) a(\mathbf{k}) = 0, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial t} \right|_{t=0} = \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) b(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{r})$$

である。フーリエ逆変換より

$$a(\mathbf{k}) = 0, \quad b(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}$$

になるから

$$D(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{\sin(ckt)}{kc} \quad (7.9)$$

である。 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$  とすると

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \exp(ikr \cos \theta) \frac{\sin(ckt)}{kc} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 icr} \int_0^\infty dk \sin(ckt) (e^{ikr} - e^{-ikr}) \end{aligned}$$

$e^{-ikr}$  を含む部分では  $k' = -k$  とすれば

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2 icr} \int_{-\infty}^\infty dk \sin(ckt) e^{ikr} = -\frac{1}{2(2\pi)^2 cr} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ikct} - e^{-ikct}) e^{ikr} \\ &= \frac{1}{4\pi cr} (\delta(r - ct) - \delta(r + ct)) \end{aligned} \quad (7.10)$$

になる。これから (7.7) は

$$u(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t)$$

ただし

$$g(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' D(-\mathbf{r}', t) g_0(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi c} \int d^3r' g_0(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \frac{\delta(r' - ct) - \delta(r' + ct)}{r'}$$

$f(\mathbf{r}, t)$  は上式で  $g_0$  を  $f_0$  に置き換えればよい。 $\mathbf{r}'$  を極座標で表し

$$\mathbf{r}' = r' \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' = (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta'), \quad \int d\Omega' \cdots = \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \cdots$$

とすれば ( $\theta(x)$  は階段関数 (3.99) )

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi c} \int d\Omega' \int_0^\infty dr' r' g_0(\mathbf{r} + r' \mathbf{e}') (\delta(r' - ct) - \delta(r' + ct)) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int d\Omega' (\theta(t) g_0(\mathbf{r} + ct \mathbf{e}') + \theta(-t) g_0(\mathbf{r} - ct \mathbf{e}')) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int d\Omega' g_0(\mathbf{r} + |ct| \mathbf{e}') \end{aligned} \quad (7.11)$$

になるから

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{t}{4\pi} \int d\Omega' g_0(\mathbf{r} + |ct| \mathbf{e}') + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \int d\Omega' f_0(\mathbf{r} + |ct| \mathbf{e}') \right) \quad (7.12)$$

である。これを**ポアソンの公式**という。 $r$ における波動は、 $r$ を中心とした半径 $|ct|$ の球面上の初期値だけで決まる(ホイヘンスの原理)。波動は速さ $c$ で伝わる。例えば、 $g_0(\mathbf{r}) = g_0 \theta(a - r)$ のとき、 $g(\mathbf{r}, t) \neq 0$ であるためには

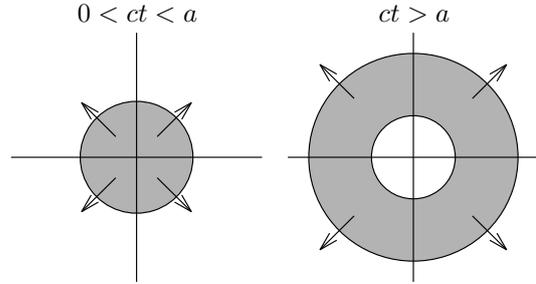
$$(r + |ct|e')^2 = r^2 + 2|ct|r \cos \theta' + (ct)^2 < a^2, \quad \therefore \cos \theta' < \frac{a^2 - r^2 - (ct)^2}{2|ct|r}$$

これを満たす角 $\theta'$ が存在する領域は

$$\frac{a^2 - r^2 - (ct)^2}{2|ct|r} \geq -1$$

$$\therefore |ct| - a \leq r \leq |ct| + a, \quad r \geq 0$$

この領域を右図に示す。 $t > 0$ のとき、時間の経過とともに $u \neq 0$ の領域は速さ $c$ で広がる。また、中央部分に $u = 0$ の領域が現れ、これも速さ $c$ で拡大する。



**問題 7.1** (7.12) が波動方程式と初期条件 (7.8) を満たすことを確かめよ。

**問題 7.2**  $g_0(\mathbf{r}) = g_0 \theta(a - r)$  の場合, (7.11) の積分を実行して,  $ct > a$  のとき

$$g(\mathbf{r}, t) = \frac{g_0}{4cr} (a^2 - (r - ct)^2) \theta(a - |r - ct|)$$

になることを示せ。

**2次元** (7.9) は

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{\sin(kct)}{kc} = \frac{1}{(2\pi)^2 c} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk e^{ikr \cos \theta} \sin(kct)$$

になる。被積分関数に  $e^{-k\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  を乗ずると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk e^{ikr \cos \theta - k\varepsilon} \sin(kct) &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty dk \left( e^{ik(r \cos \theta + ct + i\varepsilon)} - e^{ik(r \cos \theta - ct + i\varepsilon)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \cos \theta + ct + i\varepsilon} - \frac{1}{r \cos \theta - ct + i\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

より

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2 cr} \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{1}{\cos \theta + \eta + i\varepsilon} - \frac{1}{\cos \theta - \eta + i\varepsilon} \right), \quad \eta = \frac{ct}{r}$$

第2項で積分変数を  $\theta' = \pi - \theta$  とし  $\theta'$  を改めて  $\theta$  とすれば

$$D(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2 cr} \left( \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\cos \theta - \eta + i\varepsilon} + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{\cos \theta - \eta - i\varepsilon} \right)$$

第2項の積分を  $[-\pi, 0]$  と  $[0, \pi]$  に分け,  $[-\pi, 0]$  では  $\theta + 2\pi$  を  $\theta$  と置き換えれば

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2 cr} \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{1}{\cos \theta + \eta + i\varepsilon} + \frac{1}{\cos \theta + \eta - i\varepsilon} \right) = \frac{1}{(2\pi)^2 cr} \operatorname{Re} I$$

ただし

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta + \eta + i\varepsilon} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2(\eta + i\varepsilon)z + 1} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - \lambda_+)(z - \lambda_-)}$$

ここで (5.40) を用いて複素積分に変換した。\$\lambda\_{\pm}\$ は \$z^2 + 2(\eta + i\varepsilon)z + 1 = 0\$ の解であり

$$\lambda_{\pm} = -\eta - i\varepsilon \pm \sqrt{\eta^2 - 1 + 2i\eta\varepsilon} = -\eta - i\varepsilon \pm \sqrt{\eta^2 - 1} \pm \frac{i\eta\varepsilon}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$$

\$|\eta| < 1\$ の場合

$$\lambda_{\pm} = -\eta \left( 1 \mp \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) \pm i\sqrt{1 - \eta^2} \left( 1 \mp \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right), \quad |\lambda_{\pm}| = 1 \mp \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \eta^2}}$$

原点を中心とした半径1の円 \$C\$ 内に存在する極は \$z = \lambda\_+\$ であるから

$$I = \frac{4\pi}{\lambda_+ - \lambda_-} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi}{i\sqrt{1 - \eta^2}} = \text{純虚数}, \quad \therefore D(\mathbf{r}, t) = 0$$

\$|\eta| > 1\$ の場合, \$\varepsilon = 0\$ としてよいから \$\lambda\_{\pm} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 1}\$ である。\$\eta > 1\$ のとき \$\lambda\_+\$, \$\eta < -1\$ のとき \$\lambda\_-\$ が \$C\$ 内の極になるから

$$I = \frac{4\pi}{\lambda_{\pm} - \lambda_{\mp}} = \pm \frac{2\pi}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$$

したがって, 2次元の場合

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi v \sqrt{(ct)^2 - r^2}} \left( \theta(ct - r) - \theta(-ct - r) \right) \quad (7.13)$$

になる。\$\mathbf{r}\$ における波動は, \$\mathbf{r}\$ を中心とした半径 \$|ct|\$ の円上の初期値だけでなく, 円内部の初期値にも依存し, ホイヘンスの原理は成り立たない。

**1次元** (7.9) は (6.44) より

$$D(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \frac{\sin(kcv t)}{kc} = \frac{\theta(ct - |x|) - \theta(-ct - |x|)}{2c}$$

になるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' D(x - x', t) g_0(x') = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dx' g_0(x')$$

である。したがって, (7.7) より

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dx' g_0(x') + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-ct}^{x+ct} dx' f_0(x') \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dx' g_0(x') + \frac{1}{2} \left( f_0(x + ct) + f_0(x - ct) \right) \end{aligned}$$

これはフーリエ級数で求めたダランベールの解 (6.29) である。

### 7.3 波動方程式と境界条件

ある領域 \$V\$ の境界を \$S\$ とする。\$V\$ 内で波動方程式 (7.4) と初期条件 (7.8) を満たし, \$S\$ 上で与えられた境界条件を満たす解を求める。境界条件として, \$u(\mathbf{r}, t)\$ を与える **ディリクレの境界条件** と \$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla u(\mathbf{r}, t)\$ を与える **ノイマンの境界条件** などがある。ただし, \$\mathbf{n}(\mathbf{r})\$ は \$S\$ の外向き単位法線ベクトルである。以下では, 境界条件を

$$\mathbf{r} \text{ が } S \text{ 上の点 } (\mathbf{r} \in S) \text{ のとき } u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.14)$$

とする。1次元の場合、157 ページで扱った両端固定の境界条件である。

変数分離して  $u(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})T(t)$  とすると、波動方程式から

$$T(t)\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) - \frac{\varphi(\mathbf{r})}{c^2} \frac{d^2T}{dt^2} = 0, \quad \therefore \frac{1}{\varphi(\mathbf{r})}\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2T(t)} \frac{d^2T}{dt^2}$$

左辺は  $\mathbf{r}$  の関数、右辺は  $t$  の関数であるから、上式は定数である。この定数を  $-\lambda$  とおく。 $\lambda$  は実数とは限らない。

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -c^2\lambda T, \quad \therefore T(t) = A \cos(\sqrt{\lambda} ct) + B \sin(\sqrt{\lambda} ct)$$

境界条件を考慮すると

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\lambda\varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \text{ のとき } \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.15)$$

である。1次元の両端固定  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  の場合

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

であるが、これと同様に、(7.15) の  $\lambda$  も正の実数で離散的な値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  をとる。 $\lambda > 0$  の証明は簡単である。 $\varphi(\mathbf{r})$  は実数とは限らないが

$$\varphi^*(\mathbf{r})\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\varphi^*(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r})) - |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2, \quad |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 = (\nabla\varphi^*(\mathbf{r})) \cdot (\nabla\varphi(\mathbf{r})) > 0$$

であるから

$$-\lambda \int_V d^3r |\varphi(\mathbf{r})|^2 = \int_S dS \mathbf{n} \cdot (\varphi^*(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r})) - \int_V d^3r |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2$$

右辺第1項ではガウスの定理を用いた。 $S$  上では  $\varphi(\mathbf{r}) = 0$  であるから、右辺第1項は0になり  $\lambda > 0$  である。 $\lambda_n = k_n^2, k_n > 0$  とおくと

$$\nabla^2\varphi_n(\mathbf{r}) = -k_n^2\varphi_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \text{ のとき } \varphi_n(\mathbf{r}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.16)$$

である。

$$\varphi_m^*(\mathbf{r})\nabla^2\varphi_n(\mathbf{r}) - \varphi_n(\mathbf{r})\nabla^2\varphi_m^*(\mathbf{r}) = (k_m^2 - k_n^2)\varphi_m^*(\mathbf{r})\varphi_n(\mathbf{r})$$

より

$$\begin{aligned} (k_m^2 - k_n^2) \int_V d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r})\varphi_n(\mathbf{r}) &= \int_V d^3r \nabla \cdot (\varphi_m^*(\mathbf{r})\nabla\varphi_n(\mathbf{r}) - \varphi_n(\mathbf{r})\nabla\varphi_m^*(\mathbf{r})) \\ &= \int_S dS \mathbf{n} \cdot (\varphi_m^*(\mathbf{r})\nabla\varphi_n(\mathbf{r}) - \varphi_n(\mathbf{r})\nabla\varphi_m^*(\mathbf{r})) = 0 \end{aligned}$$

になるから  $k_m \neq k_n$  のとき  $\varphi_m$  と  $\varphi_n$  は直交する。 $\varphi_m$  と  $\varphi_n$  が1次独立でも  $\lambda_m = \lambda_n$  の場合がある。この場合でもシュミットの直交化(214 ページ)を行えばよいから

$$\int_V d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r})\varphi_n(\mathbf{r}) = \delta_{mn}$$

にでき正規直交関数系である。 $S$  で  $F(\mathbf{r}) = 0$  である関数は

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(\mathbf{r})$$

と展開できるとする。

$$\int_V d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_V d^3r \varphi_m^*(\mathbf{r}) \varphi_n(\mathbf{r}) = c_m$$

になるから

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}) \int_V d^3r' \varphi_n^*(\mathbf{r}') F(\mathbf{r}') = \int_V d^3r' F(\mathbf{r}') \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}')$$

したがって、 $V$  内の点に対しては

$$\sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7.17)$$

である。一般に、ある演算子  $\Gamma$  が関数  $\varphi(\mathbf{r})$  に作用すると  $\varphi(\mathbf{r})$  とは全く異なる関数になるが、特定の関数に作用すると単に定数倍した結果になることがある。このとき、特定の関数  $\varphi(\mathbf{r})$  を演算子  $\Gamma$  の固有関数、定数倍の数を固有値という。(7.16) はラプラス演算子の固有値問題である。

境界条件 (7.14) を満たす波動方程式の解は

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) \varphi_n(\mathbf{r}), \quad \omega_n = ck_n \quad (7.18)$$

になる。任意定数  $A_n, B_n$  は初期条件 (7.8) から決まる。 $\varphi_n$  の正規直交性から

$$A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t = \int_V d^3r \varphi_n^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t)$$

したがって、上式とこれを  $t$  で微分して  $t=0$  とすれば

$$A_n = \int_V d^3r \varphi_n^*(\mathbf{r}) f_0(\mathbf{r}), \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_V d^3r \varphi_n^*(\mathbf{r}) g_0(\mathbf{r})$$

(7.18) に代入すると

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r' D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) g_0(\mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r' D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) f_0(\mathbf{r}') \quad (7.19)$$

ただし

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}') \quad (7.20)$$

になる。(7.6) に対応して  $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  は

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \left( \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0$$

$$\text{初期条件 } D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial t} \right|_{t=0} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\text{境界条件 } \mathbf{r} \in S \text{ または } \mathbf{r}' \in S \text{ のとき } D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0$$

を満たす。 $\varphi_n(\mathbf{r})$  が複素数でも  $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  は実数である。

### 1次元

境界条件が  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  の場合、 $k_n = n\pi/a$ 、 $\varphi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin k_n x$  であるから

$$D(x, x', t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \sin k_n x \sin k_n x', \quad \omega_n = ck_n$$

であり, (7.19) は

$$u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_n \left( \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \int_0^a dx' g_0(x') \sin k_n x' + \cos \omega_n t \int_0^a dx' f_0(x') \sin k_n x' \right) \sin k_n x \quad (7.21)$$

になるが, これは (6.28) である。

## 2次元の円形領域

領域  $V$  が  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$  の場合を考える。境界条件は  $r = a$  で  $u(x, y, t) = 0$  になるから, 直角座標  $x, y$  ではなく 2次元極座標  $r, \theta$  で扱う。(2.48) より (7.16) は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi(r, \theta) = -k^2 \varphi(r, \theta) \quad (7.22)$$

になる。変数分離法を適用して  $\varphi(r, \theta) = R(r)S(\theta)$  とすれば

$$S \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = -k^2 RS \quad \text{つまり} \quad \frac{r^2}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2}$$

左辺は  $r$  だけの関数, 右辺は  $\theta$  だけの関数であるから, 上式は定数である。この定数を  $K$  とすると

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{K}{r^2} \right) R = 0, \quad \frac{d^2 S}{d\theta^2} + KS = 0$$

になる。 $\theta$  と  $\theta + 2\pi$  は同じ点を表わすから  $S(\theta) = S(\theta + 2\pi)$  でなければならぬ。 $K < 0$  の場合  $S(\theta)$  は  $e^{\pm\sqrt{-K}\theta}$  の線形結合になり  $S(\theta) = S(\theta + 2\pi)$  を満たさない。 $K > 0$  の場合

$$S(\theta) = Ae^{i\sqrt{K}\theta} + A^*e^{-i\sqrt{K}\theta}$$

$S(\theta) = S(\theta + 2\pi)$  より  $\sqrt{K} = n = 1, 2, \dots$  である。 $K = 0$  のとき  $S(\theta) = A + B\theta$  になるから  $S(\theta) = A \neq 0$  も周期  $2\pi$  を満たす。したがって,  $S(\theta)$  の独立な解として

$$S_n(\theta) = A_n e^{in\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

を得る。 $\rho = kr$  とすると  $R$  の微分方程式は

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

これはベッセルの微分方程式 (4.45) であるから, 原点で有界な  $R(r)$  は  $J_n(\rho)$  に比例し, 境界条件は  $J_n(ka) = 0$  になる。102 ページの図に示したように  $J_n(x)$  は  $x \geq 0$  に無限個のゼロ点が存在する。 $J_n(x)$  のゼロ点を  $0 < z_{n1} < z_{n2} < \dots$  とすると  $ka = z_{nm}$  でなければならない。したがって, 境界条件を満たすためには  $k$  は離散的になり

$$\varphi_{nm}(r, \theta) = C_{nm} J_n(k_{nm}r) e^{in\theta}, \quad k_{nm} = \frac{z_{nm}}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

になる。なお

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad \therefore z_{-n,m} = z_{nm}$$

である。 $\varphi_{nm}(r, \theta)$  の正規直交性は

$$\begin{aligned} \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\theta \varphi_{nm}(r, \theta) \varphi_{n'm'}^*(r, \theta) &= C_{nm} C_{n'm'}^* \int_0^a dr r J_n(k_{nm}r) J_{n'}(k_{n'm'}r) \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-n')\theta} \\ &= 2\pi \delta_{nn'} C_{nm} C_{n'm'}^* \int_0^a dr r J_n(k_{nm}r) J_n(k_{n'm'}r) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

である。  $m = m'$  とすると、定数  $C_{nm}$  は

$$2\pi|C_{nm}|^2 \int_0^a dr r J_n^2(k_{nm}r) = \frac{2\pi|C_{nm}|^2}{k_{nm}^2} \int_0^{z_{nm}} d\rho \rho J_n^2(\rho) = 1$$

で決まる。(7.20) より

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |C_{nm}|^2 \frac{\sin \omega_{nm} t}{\omega_{nm}} J_n(k_{nm}r) J_n(k_{nm}r') e^{in(\theta-\theta')}, \quad \omega_{nm} = ck_{nm}$$

$k_{-n,m} = k_{nm}$  であるから  $n$  を  $-n$  で置き換えると  $\text{Im } D = 0$  になり

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |C_{nm}|^2 \frac{\sin \omega_{nm} t}{\omega_{nm}} J_n(k_{nm}r) J_n(k_{nm}r') \cos(n(\theta - \theta'))$$

である。  $n \geq 0$  に制限すれば

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (2 - \delta_{n0}) |C_{nm}|^2 \frac{\sin \omega_{nm} t}{\omega_{nm}} J_n(k_{nm}r) J_n(k_{nm}r') \cos(n(\theta - \theta'))$$

とも表せる。

$$g(\mathbf{r}, t) = \int_V d^2r' D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) g_0(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{nm} t}{\omega_{nm}} J_n(k_{nm}r) (A_{nm} \cos n\theta + B_{nm} \sin n\theta)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} A_{nm} \\ B_{nm} \end{array} \right\} = (2 - \delta_{n0}) |C_{nm}|^2 \int_0^a dr r J_n(k_{nm}r) \int_0^{2\pi} d\theta g_0(r, \theta) \times \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases}$$

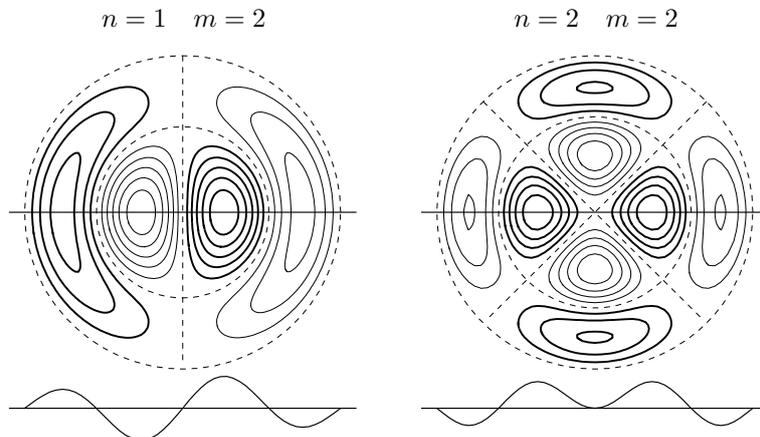
になる。

$$\text{Re } \varphi_{nm}(r, \theta) \propto J_n(k_{nm}r) \cos n\theta = u_{nm}(r, \theta), \quad \text{Im } \varphi_{nm}(r, \theta) \propto J_n(k_{nm}r) \sin n\theta$$

は角振動数  $\omega_{nm}$  で単振動する波動方程式の解である (**固有振動**)。一般の波動  $g(\mathbf{r}, t)$  は固有振動の重ね合わせである。下図に  $u_{nm}(r, \theta)$  の等高線を示す。実線の直線での断面を図の下に示す。太い曲線は正、細い曲線は負、破線は  $u_{nm}(r, \theta) = 0$ 、つまり

$$\frac{r}{a} = \frac{z_{nm'}}{z_{nm}}, \quad 1 \leq m' \leq m \quad \text{または} \quad \cos n\theta = 0$$

であり振動の節を表わす。太い曲線と細い曲線は反対符号で振動する。最も内側の破線の円内は  $m = 1$  の場合に対応する。



## 7.4 ポアソン方程式とラプラス方程式

### グリーンの定理

ガウスの定理 (3.68) から, ある領域  $V$  の境界を  $S$  とすると

$$\int_V d^3r \nabla \cdot (v(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r})) = \int_S dS v(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = \int_S dS v(\mathbf{r}) \partial_n u(\mathbf{r}) \quad (7.23)$$

ただし,  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  は  $S$  の外向き単位法線ベクトルであり

$$\partial_n = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla = n_x \partial_x + n_y \partial_y + n_z \partial_z$$

である。(2.40) より

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \nabla^2 u + (\nabla v) \cdot \nabla u$$

になるから

$$\int_V d^3r (v(\mathbf{r}) \nabla^2 u(\mathbf{r}) + (\nabla v(\mathbf{r})) \cdot \nabla u(\mathbf{r})) = \int_S dS v(\mathbf{r}) \partial_n u(\mathbf{r}) \quad (7.24)$$

上式で  $u$  と  $v$  を入れ替え, 差を取れば

$$\int_V d^3r (u(\mathbf{r}) \nabla^2 v(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r}) \nabla^2 u(\mathbf{r})) = \int_S dS (u(\mathbf{r}) \partial_n v(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r}) \partial_n u(\mathbf{r})) \quad (7.25)$$

である。(7.24), (7.25) を**グリーンの定理**という。2次元の場合, ガウスの定理の代わりに (3.47) を用いれば

$$\int_V dx dy \nabla \cdot (v(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r})) = \oint_C ds v(\mathbf{r}) \partial_n u(\mathbf{r})$$

ただし,  $V$  は  $xy$  平面上の領域,  $C$  は  $V$  を囲む反時計回りの閉曲線である。したがって

$$\int_V d^3r \dots \implies \int_V dx dy \dots, \quad \int_S dS \dots \implies \oint_C ds \dots$$

の置換えをすれば, (7.24), (7.25) は2次元でも成り立つ。1次元の場合, (7.25) は

$$\int_a^b dx \left( u(x) \frac{d^2 v}{dx^2} - v(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left( u(x) \frac{dv}{dx} - v(x) \frac{du}{dx} \right) = \left[ u(x) \frac{dv}{dx} - v(x) \frac{du}{dx} \right]_a^b \quad (7.26)$$

になる。

### 境界条件

ある領域  $V$  でのラプラス方程式 (7.2) またはポアソン方程式 (7.3) の解  $u(\mathbf{r})$  を求めるとき,  $V$  の境界  $S$  での境界条件が必要になる。 $g(\mathbf{r})$  が既知関数のとき,  $S$  上で境界条件として

$$1. u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \quad \text{または} \quad 2. \partial_n u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \quad (7.27)$$

を考える。1. を**ディリクレの境界条件**, 2. を**ノイマンの境界条件**という。(7.23) で  $v(\mathbf{r}) = 1$  とすると

$$\int_V d^3r \nabla^2 u(\mathbf{r}) = \int_S dS \partial_n u(\mathbf{r}) \quad (7.28)$$

になるから, ノイマン条件では

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r}) = \int_S dS g(\mathbf{r})$$

を満たす必要がある。ディリクレ条件の場合, このような付加的条件はない。

## 解の一意性

境界条件 (7.27) を満たすポアソン方程式  $\nabla^2 u = f(\mathbf{r})$  の解が  $u_1(\mathbf{r})$  と  $u_2(\mathbf{r})$  の2つ存在するとする。  $\delta u(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) - u_2(\mathbf{r})$  はラプラス方程式  $\nabla^2 \delta u = 0$  を満たす。(7.24) で  $u = v = \delta u$  とすれば,  $S$  上では  $\delta u = 0$  または  $\partial_n \delta u = 0$  であるから

$$\int_V d^3 r (\nabla \delta u)^2 = \int_S dS \delta u \partial_n \delta u = 0$$

$(\nabla \delta u)^2 \geq 0$  より  $V$  内で  $\nabla \delta u = 0$ , つまり  $\delta u(\mathbf{r}) = \text{定数}$  になる (ディリクレ条件の場合, 連続性から  $\delta u(\mathbf{r}) = 0$ )。したがって, 境界条件 (7.27) を満たすポアソン方程式  $\nabla^2 u = f(\mathbf{r})$  の解は, 定数を除けば, 一意である。ラプラス方程式 ( $f(\mathbf{r}) = 0$ ) の解も一意である。

## 7.5 ポアソン・ラプラス方程式とグリーン関数

$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を  $\nabla^2 H = \nabla'^2 H = 0$  を満たす任意関数として

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad G_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|}, & 3 \text{次元の場合} \\ \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{r}|, & 2 \text{次元の場合} \\ \frac{|\mathbf{r}|}{2}, & 1 \text{次元の場合} \end{cases} \quad (7.29)$$

とする。(3.82), (3.90), (3.101) より  $G$  は

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7.30)$$

を満たすグリーン関数である。グリーン関数には  $H$  だけの不定性がある。

(7.25) で積分変数を  $\mathbf{r}'$  とし  $v(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  とする。 $u$  がポアソン方程式  $\nabla^2 u = f$  の解ならば

$$\begin{aligned} (7.25) \text{の左辺} &= \int_V d^3 r' \left( u(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 u(\mathbf{r}') \right) \\ &= \int_V d^3 r' \left( u(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right) \end{aligned}$$

になるから,  $\mathbf{r}$  が  $V$  内の点の場合 ( $\mathbf{r} \in V$ )

$$u(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \int_S dS' \left( u(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') \right) \quad (7.31)$$

右辺第2, 3項が境界の影響を表わす。 $V$  の外側の無限に広がった領域を  $\bar{V}$  とする。 $S$  を内部に含む無限遠の仮想的な境界面を  $S_\infty$  とすれば,  $\mathbf{r} \in \bar{V}$  のとき

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\bar{V}} d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \int_S dS' \left( u(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') \right) + u_\infty(\mathbf{r}) \quad (7.32)$$

ただし

$$u_\infty(\mathbf{r}) = \int_{S_\infty} dS' \left( u(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') \right) \quad (7.33)$$

になる。 $S$  上での  $\mathbf{n}$  は  $\bar{V}$  に対して外向きであるから, (7.31) の  $\mathbf{n}$  とは逆向きである。 $u_\infty$  は無限遠での  $u(\mathbf{r})$  の境界条件に依存する。 $u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u_\infty(\mathbf{r})$  ではない。

## 3次元の例題

$V$  として原点を中心とする半径  $a$  の球を考える。

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{a}{r} G_0((a/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{a/r}{|(a/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2 r'^2/a^2}}$$

とする。  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$  または  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \bar{V}$  のとき  $(a/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}' \neq 0$  であるから

$$\nabla'^2 \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{a}{r} \delta((a/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$$

$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  について対称であるから  $\nabla^2 \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  も満たす。したがって, (7.31), (7.32) で

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2 r'^2/a^2}} \right) \quad (7.34)$$

としてよい。  $r' = a$  のとき

$$\sqrt{a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2 r'^2/a^2} = \sqrt{r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad \therefore G(\mathbf{r}, r' = a) = 0$$

である。(7.31) の場合  $\mathbf{n}(\mathbf{r}') = \mathbf{r}'/r'$  であるから

$$\partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial r'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r'} \left( \frac{r'^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' - r^2 r'^2/a^2}{(a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2 r'^2/a^2)^{3/2}} \right)$$

これから

$$\partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{r'=a} = \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

になり

$$u(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_S dS' \frac{u(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{r} \in V \quad (7.35)$$

と表せる。 $G(\mathbf{r}, r' = a) = 0$  であるため, 球面上の  $u(\mathbf{r})$  を与えると, 球内部の  $u(\mathbf{r})$  が決まる。これはディリクレ条件の解である。(7.32) の場合,  $S$  上では  $\mathbf{n}(\mathbf{r}') = -\mathbf{r}'/r'$  になるから

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\bar{V}} d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \frac{r^2 - a^2}{4\pi a} \int_S dS' \frac{u(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + u_\infty(\mathbf{r}) \quad (7.36)$$

である。(7.34) より

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi r'} \left( 1 - \frac{a}{r} + \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^2} + \dots \right)$$

であるから,  $S_\infty$  として半径  $\infty$  の球面を考えると (7.33) は

$$u_\infty(\mathbf{r}) = C_1 \left( 1 - \frac{a}{r} \right) + \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}_3 + \dots \quad (7.37)$$

ただし

$$C_1 = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \left( u(\mathbf{r}') + r' \frac{\partial u}{\partial r'} \right), \quad C_3 = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi r'^2} \int d\Omega' r' \left( 2u(\mathbf{r}') + r' \frac{\partial u}{\partial r'} \right)$$

である。

ラプラス方程式 ( $f(\mathbf{r}) = 0$ ) の解は (7.35), (7.36) をまとめて

$$u(\mathbf{r}) = u_S(\mathbf{r}) + \theta(r - a) u_\infty(\mathbf{r}), \quad u_S(\mathbf{r}) = \frac{|r^2 - a^2|}{4\pi a} \int_S dS' \frac{u(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.38)$$

になる。球面上で  $u(\mathbf{r}) = \text{一定} = u_0$  の場合, 積分変数  $\mathbf{r}'$  の角度の基準を  $\mathbf{r}$  方向にとれば ( $t = \cos \theta'$ )

$$\begin{aligned} u_S(\mathbf{r}) &= u_0 \frac{|r^2 - a^2|}{2a} a^2 \int_{-1}^1 dt \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{3/2}} \\ &= u_0 \frac{|r^2 - a^2|}{2r} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2art}} \right]_{-1}^1 = \frac{u_0}{2r} (r + a - |a - r|) = \begin{cases} u_0 \frac{a}{r}, & r > a \\ u_0, & r < a \end{cases} \end{aligned} \quad (7.39)$$

$u(\mathbf{r})$  が角度に依らない場合  $C_3 = 0$  になり

$$u(\mathbf{r}) = \begin{cases} u_0 \frac{a}{r} + C_1 \left(1 - \frac{a}{r}\right), & r > a \\ u_0, & r < a \end{cases}$$

$u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  とすれば  $C_1 = 0$  になるから (3.67) を再現する。

ノイマン条件の解を求めることもできる。(7.28) より

$$\int_S dS' \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V d^3 r' \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V d^3 r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1, \quad \text{ただし } \mathbf{r} \in V$$

であるから  $\partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r'=a} = 0$  とはできないが  $\partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r'=a} = 1/(4\pi a^2)$  は可能である。このとき (7.31) は

$$u(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') - \int_S dS' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') + \langle u \rangle, \quad \langle u \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_S dS u(\mathbf{r})$$

ノイマン条件を満たす解は, 球面上での  $u(\mathbf{r})$  の平均値である定数  $\langle u \rangle$  を除いて, 一意に決まる。 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の具体形は「自然科学者のための数学概論」656 ページ参照。

**問題 7.3** 球面上で  $z \geq 0$  のとき  $u(\mathbf{r}) = \pm u_0$  及び  $u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  とする。この場合, (7.38) の解析的表現を一般に求めることは困難であるが,  $z$  軸上に限れば

$$u(0, 0, z) = u_0 \left( \frac{|z + a| + |z - a|}{2z} - \frac{|z^2 - a^2|}{z\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

になることを示せ。また

$$r/a \gg 1 \text{ の場合 } u(\mathbf{r}) \approx u_0 \frac{3a^2}{2r^2} \cos \theta, \quad r/a \ll 1 \text{ の場合 } u(\mathbf{r}) \approx u_0 \frac{3r}{2a} \cos \theta$$

を示せ。

**問題 7.4** 球面  $S$  上で  $u(\mathbf{r}) = \text{一定} = u_0$  であり, 無限遠で  $u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u_0 - E_0 z$  とする。半径  $R \rightarrow \infty$  の球面を  $S_\infty$  とすると, (7.37) より

$$u_\infty(\mathbf{r}) = u_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right) - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) z$$

になることを示せ。(7.36) よりラプラス方程式の解は (2.58) に一致する。

## 2次元の例題

原点を中心とする半径  $a$  の円を反時計回りに1周する経路を  $C$  とし,  $C$  内部の領域を  $V$ , 外部の領域を  $\bar{V}$  とすると

$$u(\mathbf{r}) = \int_V dx' dy' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \oint_C ds' \left( u(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') \right), \quad \mathbf{r} \in V$$

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\bar{V}} dx' dy' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \oint_C ds' \left( u(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') \right) + u_\infty(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \bar{V}$$

である。\$C\$ 上の法線ベクトル \$\mathbf{n}\$ は \$\mathbf{r} \in V\$ の場合 \$\mathbf{n}(\mathbf{r}') = \mathbf{r}'/r'\$, \$\mathbf{r} \in \bar{V}\$ の場合 \$\mathbf{n}(\mathbf{r}') = -\mathbf{r}'/r'\$ である。また, \$C\$ を内部に含む無限遠の仮想的な閉曲線経路を \$C\_\infty\$ とすると

$$u_\infty(\mathbf{r}) = \oint_{C_\infty} ds' \left( u(\mathbf{r}') \partial'_n G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \partial'_n u(\mathbf{r}') \right)$$

である。

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \log \frac{a/r}{|(a/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2 r'^2/a^2}}$$

とすると, 3次元と同様に \$\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V\$ または \$\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \bar{V}\$ のとき \$\nabla^2 \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla'^2 \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0\$ になるから

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\sqrt{a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r^2 r'^2/a^2}} \quad (7.40)$$

としてよい。

$$G(\mathbf{r}, r' = a) = 0, \quad \partial'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{r'=a} = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=a} = \frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

より

$$u(\mathbf{r}) = \int_V dx' dy' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \frac{1}{2\pi a} \oint_C ds' \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} u(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V$$

になる。\$C\$ 上の点 \$\mathbf{r}'\$ は \$x' = a \cos \theta'\$, \$y' = a \sin \theta'\$ とおけるから \$ds' = a d\theta'\$ であり

$$u(r, \theta) = \int_V dx' dy' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta' - \theta)} u(a, \theta'), \quad \text{ただし } r < a$$

になる。ラプラス方程式 (\$f = 0\$) の場合, これはポアソンの公式 (5.24) に一致する。\$\mathbf{r} \in \bar{V}\$, つまり \$r > a\$ の場合

$$u(r, \theta) = \int_{\bar{V}} dx' dy' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{r^2 - a^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta' - \theta)} u(a, \theta') + u_\infty(\mathbf{r})$$

である。(7.40) より

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi} \left( \log \frac{r}{a} + \frac{r^2 - a^2}{r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^2} + \dots \right)$$

になるから, \$C\_\infty\$ として原点を中心とする半径 \$\infty\$ の円を考えると

$$u_\infty(\mathbf{r}) = C_L \log \frac{r}{a} + \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}$$

ただし

$$C_L = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r'}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial r'}, \quad \mathbf{C} = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi r'^2} \int_0^{2\pi} d\theta' \mathbf{r}' u(\mathbf{r}')$$

である。

ラプラス方程式の解は

$$u(\mathbf{r}) = u_C(\mathbf{r}) + \theta(r - a) u_\infty(\mathbf{r}), \quad u_C(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{|a^2 - r^2|}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta' - \theta)} u(a, \theta')$$

である。\$u(a, \theta) = \text{一定} = u\_0\$ の場合, (5.41) より

$$u_C(\mathbf{r}) = \frac{u_0}{2\pi} \frac{|a^2 - r^2|}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + (a/r)^2 - 2(a/r) \cos \theta} = u_0$$

になる。 $u(\mathbf{r})$  は角度に依らない場合  $C = 0$  になるから

$$u(\mathbf{r}) = u_0 + \theta(r - a) C_L \log \frac{r}{a}$$

2次元の場合  $u(a, \theta) = u_0 \neq 0$ ,  $u(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  を満たす解は存在しない。

次に  $u_0 > 0$  として

$$u(a, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ -u_0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

のとき

$$\begin{aligned} u_C(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{|a^2 - r^2|}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta' - \theta)} u(a, \theta') \\ &= \frac{u_0}{2\pi} \int_0^\pi d\theta' \frac{|a^2 - r^2|}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta' - \theta)} - \frac{u_0}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} d\theta' \frac{|a^2 - r^2|}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta' - \theta)} \end{aligned}$$

第2項で  $\theta' - \pi$  を  $\theta'$  と置き直せば

$$u_C(\mathbf{r}) = \frac{u_0 \alpha}{\pi} \int_0^\pi d\theta' \frac{\cos(\theta' - \theta)}{\alpha^2 + \sin^2(\theta' - \theta)}, \quad \alpha = \frac{|a^2 - r^2|}{2ar}$$

になる。 $t = \sin(\theta' - \theta)$  とすると

$$\int d\theta' \frac{\cos(\theta' - \theta)}{\alpha^2 + \sin^2(\theta' - \theta)} = \int \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \frac{t}{\alpha}$$

であるから

$$u_C(\mathbf{r}) = \frac{u_0}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{t}{\alpha} \right]_{-\sin \theta}^{\sin \theta} = \frac{2u_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2ar \sin \theta}{|a^2 - r^2|}$$

になる。 $|\tan^{-1} x| < \pi/2$  より  $|u_C(\mathbf{r})| < u_0$  である。 $u_C(\mathbf{r}) = \text{一定} = u$  の曲線は

$$\frac{2ar \sin \theta}{|a^2 - r^2|} = \frac{2ay}{|a^2 - x^2 - y^2|} = t, \quad \text{ただし} \quad t = \tan \frac{\pi u}{2u_0}$$

つまり  $y$  と  $u$  は同符号で

$$x^2 + (y \mp a/t)^2 = a^2(1 + 1/t^2)$$

になる。これは  $(0, \pm a/t)$  を中心とする半径  $a\sqrt{1 + 1/t^2}$  の円の一部である。右図で実線は  $0 < u < u_0$ , 破線は  $-u_0 < u < 0$  の場合を表わす。 $u \rightarrow \pm u_0$  のとき  $a/t \rightarrow 0$  である。 $x \approx \pm a$  では  $|a^2 - r^2| \approx 2a|x \mp a|$  になるから

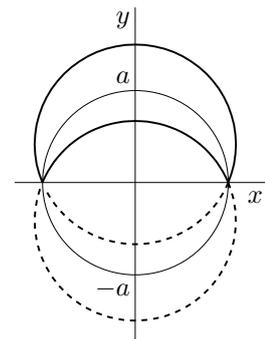
$$y \approx t|x \mp a|$$

$u_C(\mathbf{r}) = u$  の曲線は傾き  $t$  または  $-t$  の直線で  $(x, y) = (\pm a, 0)$  に近づく。

### 1次元の例題

ディリクレ条件  $u(a) = u_a$ ,  $u(b) = u_b$  及び  $a < x < b$  でポアソン方程式  $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$  を満たす解を求める。 $(x - a)/(b - a)$  を改めて  $x$  とおけば  $0 < x < 1$  になるから

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad (7.41)$$



を求める。(7.26)で積分変数を  $x'$  とし  $v(x') = G(x, x')$  とすれば,  $0 < x < 1$  のときポアソン方程式の解は

$$u(x) = \int_0^1 dx' G(x, x') f(x') + \left[ u(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'} - G(x, x') \frac{du}{dx'} \right]_{x'=0}^{x'=1}$$

と表せる。 $G(x, 0) = G(x, 1) = 0$  ならば

$$u(x) = \int_0^1 dx' G(x, x') f(x') + u_1 \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'} \Big|_{x'=1} - u_0 \frac{\partial G(x, x')}{\partial x'} \Big|_{x'=0} \quad (7.42)$$

になり  $u_0, u_1$  を与えると  $u(x)$  が決まる。したがって,  $G(x, 0) = G(x, 1) = 0$  を満たすグリーン関数を求めればよい。(7.29)より

$$G(x, x') = \frac{|x - x'|}{2} + H(x, x'), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} = 0$$

である。 $H(x, x')$  は  $x, x'$  についてそれぞれ高々1次であるから

$$H(x, x') = Axx' + B(x + x') + C$$

とおける。 $0 < x < 1$  のとき

$$G(x, 0) = \frac{x}{2} + Bx + C = 0, \quad G(x, 1) = \frac{1-x}{2} + Ax + B(x+1) + C = 0$$

より  $A = 1, B = -1/2, C = 0$  になるから

$$G(x, x') = \frac{|x - x'| - x - x'}{2} + xx' = \begin{cases} x'(x-1), & x > x' \\ x(x'-1), & x < x' \end{cases}$$

である。(7.42)の積分を  $0 \leq x' \leq x, x \leq x' \leq 1$  に分割すれば

$$u(x) = (x-1) \int_0^x dx' x' f(x') + x \int_x^1 dx' (x'-1) f(x') + u_1 x - u_0 (x-1)$$

が(7.41)の解になる。これは(4.20)から求めることもできる。

## 7.6 極座標によるラプラス方程式の解法

3次元の場合, 球面調和関数が必要になるのでここでは扱わない。軸対称に限定した問題は33ページ, 103ページ参照。2次元のラプラス方程式  $\nabla^2 u(r) = 0$  は(2.48)より

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

(7.22)と同様にして, 変数分離すれば  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  として

$$u(r, \theta) = R(r) e^{in\theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} R = 0$$

である。 $R \propto r^k$  とすると  $(k^2 - n^2)r^{k-2} = 0$  になるから  $k = \pm n$  である。 $n \neq 0$  の場合, 2つの独立な解  $r^n$  と  $r^{-n}$  から  $R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$  になる。 $n = 0$  の場合

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = 0, \quad \text{つまり} \quad r \frac{dR}{dr} = A_0, \quad \therefore R = A_0 \log r + B_0$$

である。2次元ラプラス方程式の一般解は

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= A_0 \log r + B_0 + \sum_{n \neq 0} (A_n r^n + B_n r^{-n}) e^{in\theta} \\ &= A_0 \log r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (A_n r^n + B_n r^{-n}) e^{in\theta} + (A_{-n} r^{-n} + B_{-n} r^n) e^{-in\theta} \right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

と表せる。

原点を中心とする半径  $a$  の円上で  $u(a, \theta)$  が与えられた場合、任意定数  $A_n, B_n$  を決める。最初に、円内部の解を求める。 $r < a$  で  $u(r, \theta)$  が有界であるためには、 $n > 0$  のとき  $B_n = A_{-n} = 0$  及び  $A_0 = 0$  であるから

$$u(r, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n e^{in\theta} + B_{-n} e^{-in\theta}) \quad (7.44)$$

これから

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ik\theta} u(a, \theta) &= B_0 \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ik\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left( A_n \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-k)\theta} + B_{-n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i(n+k)\theta} \right) \\ &= 2\pi B_0 \delta_{k0} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \delta_{kn} + B_{-n} \delta_{k, -n}) \end{aligned}$$

したがって

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta u(a, \theta), \quad A_n = \frac{1}{2\pi a^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} u(a, \theta), \quad B_{-n} = \frac{1}{2\pi a^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} u(a, \theta)$$

になり、 $u(a, \theta)$  を与えると一意に決まる。これらを (7.44) に代入すると

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' u(a, \theta') \left( 1 + S(\theta - \theta') + S^*(\theta - \theta') \right), \quad S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} e^{in\theta}$$

$S$  は公比  $z = re^{i\theta}/a$ ,  $|z| < 1$  の等比級数であるから  $S = z/(1-z)$  になり

$$1 + S(\theta) + S^*(\theta) = \frac{1 - |z|^2}{(1-z)(1-z^*)} = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re} z} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$$

したがって、ポアソンの公式 (5.24)

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' u(a, \theta') \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \theta')}$$

を得る。 $r > a$  の場合、 $r \rightarrow \infty$  で  $u(r, \theta)$  は有界とすると (7.43) より

$$u(r, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (B_n e^{in\theta} + A_{-n} e^{-in\theta})$$

$r < a$  の場合と同様にすると

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta u(a, \theta), \quad A_{-n} = \frac{a^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} u(a, \theta), \quad B_n = \frac{a^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} u(a, \theta)$$

になり

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' u(a, \theta') \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{r^n} \left( e^{in(\theta-\theta')} + e^{-in(\theta-\theta')} \right) \right)$$

これは  $S(\theta)$  で  $a$  と  $r$  を入れ替えればよいから

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' u(a, \theta') \frac{r^2 - a^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \theta')}$$

になる。

## 7.7 拡散方程式

(7.1) は  $\lambda t$  を  $t$  と置き直せば

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.45)$$

になる。以下ではこの微分方程式を扱う。

全空間で初期値  $u(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r})$  が与えられたとき,  $t > 0$  での  $u(\mathbf{r}, t)$  を求める。

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right) D(\mathbf{r}, t) = 0, \quad D(\mathbf{r}, t = +0) = \delta(\mathbf{r}) \quad (7.46)$$

とすると

$$u(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) f(\mathbf{r}')$$

は (7.45) 及び  $u(\mathbf{r}, +0) = f(\mathbf{r})$  を満たすから, 初期値問題は  $D(\mathbf{r}, t)$  を求めることに帰結する。

$$D(\mathbf{r}, t) = \int d^3 k w(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

とフーリエ変換を行えば

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right) D(\mathbf{r}, t) = \int d^3 k \left(-k^2 w(\mathbf{k}, t) - \frac{dw}{dt}\right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0, \quad \therefore \quad k^2 w + \frac{dw}{dt} = 0$$

これから  $w(\mathbf{k}, t) = w_0(\mathbf{k}) e^{-k^2 t}$  になり

$$D(\mathbf{r}, t) = \int d^3 k w_0(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k^2 t)$$

である。

$$D(\mathbf{r}, +0) = \int d^3 k w_0(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \therefore \quad w_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}$$

したがって

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k^2 t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x x - k_x^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik_y y - k_y^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z z - k_z^2 t}$$

である。(5.16) より  $t > 0$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - k^2 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp\left(-t \left(k - \frac{ix}{2t}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}\right) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$$

であるから

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-r^2/4t}}{(4\pi t)^{3/2}}$$

になる。 $r \neq 0$  のとき  $\frac{r^2}{4t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \infty$  より  $D(\mathbf{r}, t = +0) = 0$ ,  $D(0, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \infty$  である。

また, (3.26) より

$$\int d^3 r D(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{(4\pi t)^{3/2}} \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-r^2/4t} = 1$$

になるから, 確かに  $D(\mathbf{r}, t = +0) = \delta(\mathbf{r})$  である。1次元, 2次元の場合

$$1 \text{次元} : D(x, t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}, \quad 2 \text{次元} : D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k^2 t) = \frac{e^{-r^2/4t}}{4\pi t}$$

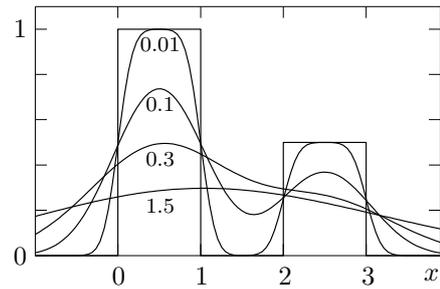
であり  $t \rightarrow +0$  でデルタ関数になる。1次元の  $D(x, t)$  は, 分散  $2t$  の正規分布である。

初期条件が

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 1/2, & 2 < x < 3 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

の場合

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' D(x - x', t) f(x')$$



を右図に示す。曲線に付けた数値は  $t$  である。 $t$  の増加とともに  $u(x, t)$  は滑らかになる。

1次元の半無限区間  $0 < x < \infty$  で

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = f(x), \quad \text{境界条件 } u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.47)$$

を満たす解を求める。

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} dx' f(x') (D(x - x', t) - D(x + x', t)) \quad (7.48)$$

とする。これが拡散方程式を満たすことは明らかである。

$$u(x, +0) = \int_0^{\infty} dx' f(x') (D(x - x', +0) - D(x + x', +0)) = \int_0^{\infty} dx' f(x') (\delta(x - x') - \delta(x + x'))$$

$x, x' > 0$  のとき  $\delta(x + x') = 0$  になるから、初期条件  $u(x, +0) = f(x)$  を満たす。 $D(x, t)$  は  $x$  の偶関数であるから  $u(0, t) = 0$  である。したがって、(7.48) が条件 (7.47) を満たす解である。同様にして

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = f(x), \quad \text{境界条件 } \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad t > 0$$

の解は

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} dx' f(x') (D(x - x', t) + D(x + x', t))$$

で与えられる。

## 7.8 1次元拡散方程式と境界条件

### 例題 1

$$\text{初期条件 : } u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a, \quad \text{境界条件 : } u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.49)$$

を満たす解を求める。 $u(x, t)$  を変数分離して  $u(x, t) = X(x)T(t)$  とすれば、拡散方程式より

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$$

左辺は  $x$  の関数、右辺は  $t$  の関数であるから、上式は定数になる。この定数を  $-k^2$  とおくと

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 X, \quad \frac{dT}{dt} = -k^2 T$$

これから

$$u(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) e^{-k^2 t} \quad \text{または} \quad u(x, t) = A + Bx$$

境界条件  $u(0, t) = 0$  より  $A = 0$  である。  $u(a, t) = 0$  より  $B \sin ka = 0$ ,  $B \neq 0$  であるから

$$k = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

になり

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k_n^2 t} \sin k_n x \quad (7.50)$$

が境界条件を満たす解である。初期条件より

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = f(x), \quad \therefore B_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin k_n x$$

ただし,  $\sqrt{2/a} \sin k_n x$  の正規直交性を使った。したがって

$$u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 t} \sin k_n x \int_0^a dx' f(x') \sin k_n x' \quad (7.51)$$

が求める解である。(7.51) は

$$u(x, t) = \frac{1}{a} \int_0^a dx' f(x') \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 t} (\cos k_n(x - x') - \cos k_n(x + x'))$$

とも書ける。

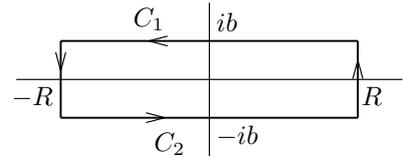
$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 t} \cos k_n x = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-k_n^2 t + ik_n x} + e^{-k_n^2 t - ik_n x}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 t + ik_n x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-k_n^2 t + ik_n x}$$

であるから

$$u(x, t) = \int_0^a dx' f(x') (F(x - x', t) - F(x + x', t)), \quad F(x, t) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-k_n^2 t + ik_n x}$$

になる。複素平面上の図のような積分路を  $C$  とする ( $R \rightarrow \infty$ ,  $b > 0$ )。  $1/(e^{2iaz} - 1)$  は  $n$  を任意の整数として  $2az = 2n\pi$ , つまり  $z = k_n$  に 1 位の極をもつから, 留数定理及び (5.36) より

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C dz \frac{e^{-tz^2 + izx}}{e^{2iaz} - 1} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k_n^2 t + ik_n x}}{2ia} = F(x, t)$$



である。  $t > 0$  のとき  $\operatorname{Re} z = \pm R$  の経路の寄与は  $R \rightarrow \infty$  で 0 になるから

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} dz \frac{e^{-tz^2 + izx}}{e^{2iaz} - 1} + \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} dz \frac{e^{-tz^2 + izx}}{e^{2iaz} - 1}$$

$C_1$  上では  $z = r + ib$ ,  $r: \infty \rightarrow -\infty$  と表せる。

$$|e^{2iaz}| = |e^{2iar - 2ab}| = e^{-2ab} < 1, \quad \therefore \frac{1}{e^{2iaz} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{2ianz}$$

これから  $t > 0$  のとき

$$\int_{C_1} dz \frac{e^{-tz^2 + izx}}{e^{2iaz} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dr \exp(-tz^2 + izx + 2ianz) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x+2an)^2/4t}$$

$C_2$  上では  $z = r - ib$ ,  $r : -\infty \rightarrow \infty$  である。  $|e^{-2iaz}| = |e^{-2iar-2ab}| = e^{-2ab} < 1$  より

$$\frac{1}{e^{2iaz} - 1} = \frac{e^{-2iaz}}{1 - e^{-2iaz}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2iazn} = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{2iazn}$$

になるから

$$\int_{C_2} dz \frac{e^{-tz^2+ixz}}{e^{2iaz} - 1} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-(x+2an)^2/4t}$$

したがって

$$F(x, t) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-k_n^2 t + ik_n x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x+2an)^2/4t} \quad (7.52)$$

であり, (7.51) は

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a dx' f(x') \left( e^{-(x-x'+2an)^2/4t} - e^{-(x+x'+2an)^2/4t} \right)$$

と表せる。  $a \rightarrow \infty$  の場合,  $n \neq 0$  は  $e^{-(2an)^2/4t} \rightarrow 0$  になり寄与しないから (7.48) を再現する。

## 例題 2

$$\text{初期条件 : } u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a, \quad \text{境界条件 : } u(0, t) = u_0, \quad u(a, t) = u_a, \quad t > 0 \quad (7.53)$$

とする。  $u_0(a-x)/a + u_a x/a$  は境界条件を満たす拡散方程式の特解であるから

$$u(x, t) = u_0 \frac{a-x}{a} + u_a \frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k_n^2 t} \sin k_n x \quad (7.54)$$

とする。右辺第3項の和は (7.50) である。  $u(x, t)$  は拡散方程式を満たす。また, 第3項の和は  $x=0$ ,  $x=a$  で0になるから,  $u(x, t)$  は (7.53) の境界条件も満たす。初期条件から

$$u(x, 0) = u_0 \frac{a-x}{a} + u_a \frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = f(x)$$

で  $B_n$  が決まる。

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{a-x}{a} \sin k_n x = \frac{2}{n\pi}, \quad \frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{x}{a} \sin k_n x = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \quad (7.55)$$

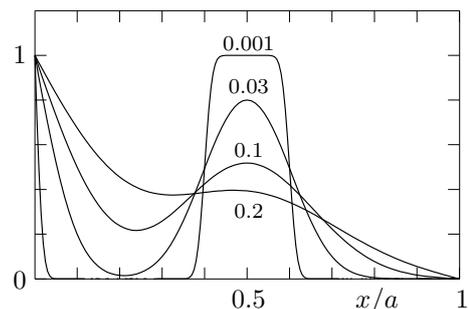
であるから

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx \left( f(x) - u_0 \frac{a-x}{a} - u_a \frac{x}{a} \right) \sin k_n x = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin k_n x - \frac{2}{n\pi} (u_0 + (-1)^{n+1} u_a)$$

になる。右図に  $u(x, t)$  の具体例として

$$u_0 = 1, \quad u_a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0.4 < x/a < 0.6 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

の場合を示す。曲線に付けた値は  $\tau = (\pi/a)^2 t$  である。  $t$  が十分大きくなれば  $e^{-k_n^2 t} \rightarrow 0$  であるから (7.54) の第3項は無視でき, 最終的に  $u(x, t)$  は直線になる。



## 例題 3

$x = 0$  での境界条件が  $t$  に依存する

$$\text{初期条件 : } u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a, \quad \text{境界条件 : } u(0, t) = g(t), \quad u(a, t) = 0, \quad t > 0$$

の場合を考える。これは、160 ページで扱った波動方程式での一端固定の境界条件である。その場合と同様に

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

とする。

$$A_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a dx u(x, t) \sin k_n x, \quad \therefore \frac{dA_n}{dt} = \frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{\partial u}{\partial t} \sin k_n x = \frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin k_n x$$

部分積分を 2 回行えば

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dt} &= \frac{2}{a} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \sin k_n x \right]_0^a - \frac{2k_n}{a} \left[ u(x, t) \cos k_n x \right]_0^a - \frac{2k_n^2}{a} \int_0^a dx u(x, t) \sin k_n x \\ &= \frac{2k_n}{a} g(t) - k_n^2 A_n(t) \end{aligned}$$

1 階の非同次微分方程式の一般解は (4.5) になるが,  $A_n = e^{-k_n^2 t} B_n(t)$  とすれば

$$\frac{dB_n}{dt} = \frac{2k_n}{a} g(t) e^{k_n^2 t}, \quad \therefore A_n(t) = e^{-k_n^2 t} \left( A_n(0) + \frac{2k_n}{a} \int_0^t dt' g(t') e^{k_n^2 t'} \right)$$

したがって

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) e^{-k_n^2 t} \sin k_n x + v(x, t), \quad v(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin k_n x \int_0^t dt' g(t') e^{-k_n^2 (t-t')} \quad (7.56)$$

になる。 $A_n(0)$  は初期条件から

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin k_n x = f(x), \quad \therefore A_n(0) = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin k_n x$$

である。 $g(t) = \text{一定} = u_0$  の場合, (7.55) より

$$v(x, t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n x}{n\pi} \left( 1 - e^{-k_n^2 t} \right) = u_0 \frac{a-x}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi} e^{-k_n^2 t} \sin k_n x$$

になるから, (7.56) は  $u_a = 0$  とした (7.54) に一致する。

$v(x, t)$  は

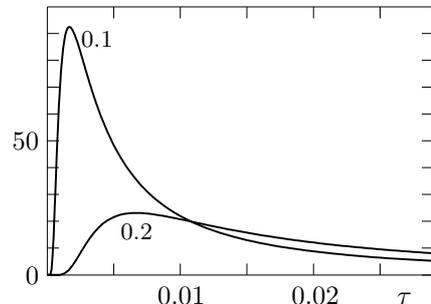
$$v(x, t) = \int_0^t dt' g(t') V(x, t-t')$$

ただし

$$V(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-k_n^2 t} \sin k_n x$$

と書ける。 $x$  を固定したとき,  $V(x, t)$  を  $\tau = (\pi/a)^2 t$  の関

数として図示すると右図になる。曲線に付けた値は  $\pi x/a$  である。 $x$  が非常に小さいとき,  $V(x, t)$  は  $t \approx 0$  近傍に鋭いピークを持つ。



$$V(x, t) = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 t} \left( e^{ik_n x} + e^{-ik_n x} \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-k_n^2 t + ik_n x}$$

に (7.52) を代入すると

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x+2an)^2/4t} \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/4t} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \sum_{n \neq 0} (x+2an) e^{-(x+2an)^2/4t} \end{aligned} \quad (7.57)$$

$x \rightarrow +0$  の場合, 第2項では  $x=0$  としてよい。このとき  $n$  の項と  $-n$  の項は打ち消し合い

$$V(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +0} V_0(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/4t}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial t} = -\frac{3x(t-x^2/6)}{4t^3\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

である。 $V_0(x, t)$  は  $t = x^2/6$  で極大になり

$$V_0(x, t = x^2/6) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{3e^{-3/2}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +0} \infty$$

である。また  $t = 1/s^2$  とすると

$$\int_0^{\infty} dt V_0(x, t) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} ds e^{-x^2 s^2/4} = 1$$

であるから

$$V_0(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +0} \delta(t - x^2/6)$$

になる。したがって

$$v(x, t) = \int_0^t dt' g(t') V(x, t-t') \xrightarrow{x \rightarrow +0} \int_0^t dt' g(t') \delta(t-t'-x^2/6) = g(t-x^2/6) = g(t)$$

であり,  $x=0$  での境界条件を満たすことになる。

半無限区間 ( $a \rightarrow \infty$ ) の場合, (7.57) において  $n \neq 0$  は  $e^{-(2an)^2/4t} \rightarrow 0$  のため寄与しないから  $V(x, t) = V_0(x, t)$  になり

$$v(x, t) = \int_0^t dt' g(t') \frac{x e^{-x^2/4(t-t')}}{2\sqrt{\pi(t-t')^3}} \quad (7.58)$$

である。

**問題 7.5** (7.56) で  $a \rightarrow \infty$  として (7.58) を求めよ。

## 8 行列

### 8.1 行列

$m, n$  を正の整数として  $mn$  個の数を並べた

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を**行列**という。また、横の並びを**行**、縦の並びを**列**という。この行列は  $m$  行  $n$  列の行列であるが、単に  $m \times n$  行列とも呼ぶ。行列  $A$  の  $i$  行  $j$  列にある数を  $(i, j)$  **要素**あるいは  $(i, j)$  **成分**といい  $(A)_{ij}$  で表す。上の場合  $(A)_{ij} = a_{ij}$  である。行列を1つの要素で代表させて  $A = (a_{ij})$  とも書く。行列要素は一般に複素数である。特に、すべての要素が実数である行列を**実行列**という。行の数と列の数が等しい  $n \times n$  行列を **$n$ 次正方行列**という。物理で使う行列はほとんど正方行列である。

1 行だけの  $1 \times n$  行列  $(v_1 \cdots v_n)$  を**行ベクトル** (**横ベクトル**), 1 列だけの  $n \times 1$  行列

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を**列ベクトル** (**縦ベクトル**) という。

$A = (a_{ij})$  と  $B = (b_{ij})$  を  $m \times n$  行列とする。

- すべての  $i, j$  に対して  $a_{ij} = b_{ij}$  であるとき  $A$  と  $B$  は等しいといい  $A = B$  で表す。
- 行列の和  $A + B$  を  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  で定義する。明らかに  $A + B = B + A$  である。
- 行列  $A$  に数  $\lambda$  をかけた  $\lambda A$  を  $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$  で定義する。

#### 行列と行列の積

$A$  を  $m \times n$  行列,  $B$  を  $n \times p$  行列とするととき, 積  $AB$  を

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p \quad (8.1)$$

で定義する。 $(AB)_{ij}$  は下記の枠で囲んだ  $A$  の  $i$  行目と  $B$  の  $j$  列目の行列要素の積の和である。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$AB$  は  $m \times p$  行列である。行列  $A$  の列の数と  $B$  の行の数が等しい場合だけ積  $AB$  を定義する。 $m \neq p$  のとき  $BA$  は定義できない。 $p = m$  の場合, つまり,  $m \times n$  行列  $A$  と  $n \times m$  行列  $B$  に対しては  $AB$  と  $BA$  が定義できる。 $AB$  は  $m \times m$  行列であり  $BA$  は  $n \times n$  行列であるから,  $m \neq n$  ならば  $AB = BA$  になることはない。 $m = n$  でも, 例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$$

のように、一般には  $AB \neq BA$  である。

$C = (c_{ij})$  を  $p \times q$  行列とすると

$$\left( (AB)C \right)_{ij} = \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \sum_{k=1}^p b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} (BC)_{\ell j}$$

であるから  $(AB)C = A(BC)$  になる。積の順番に依存しないから括弧は省略できて、単に  $ABC$  と書いてよい。 $A$  が正方行列のとき、数と同様に  $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 個}}$  で表す。

$m \times n$  行列  $A = (a_{ij})$  と  $n$  次元の列ベクトル ( $n \times 1$  行列)  $V = (v_i)$  の積  $AV$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \text{つまり } (AV)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, \quad 1 \leq i \leq m$$

は  $m$  次元の列ベクトル ( $m \times 1$  行列) である。 $m$  次元の行ベクトル ( $1 \times m$  行列)  $U = (u_i)$  の積  $UA$

$$(u_1 \cdots u_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (UA)_i = \sum_{k=1}^m u_k a_{ki}, \quad 1 \leq i \leq n$$

は  $n$  次元の行ベクトルになる。列ベクトル ( $n \times 1$  行列)  $U$  と行ベクトル ( $1 \times n$  行列)  $V$  に対しては2つの積  $UV$  と  $VU$  が存在する。 $w_{ij} = u_i v_j$  とすると、積の定義から

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \cdots v_n) = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}, \quad (v_1 \cdots v_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n v_k u_k \quad (8.2)$$

になる。 $UV$  は  $n \times n$  行列、一方、 $VU$  は  $1 \times 1$  行列 (単なる数) である。

### 各種の行列

$m \times n$  行列  $A = (a_{ij})$  に対して行と列を入れ換えた  $n \times m$  行列を**転置行列**といい  $A^T$  で表す。 $A^T$  の各要素の複素共役をとった行列を  $A$  の**エルミート共役行列**といい  $A^\dagger$  で表す。

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji}, \quad (A^\dagger)_{ij} = (A)_{ji}^* = a_{ji}^*$$

である。この定義から

$$(A^T)^T = A, \quad (A^\dagger)^\dagger = A, \quad (cA)^\dagger = c^* A^\dagger$$

ただし、 $c$  は複素数である。 $B = (b_{ij})$  を  $n \times p$  行列とすると

$$\left( (AB)^T \right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}, \quad \therefore (AB)^T = B^T A^T$$

一般に

$$(AB \cdots C)^T = C^T \cdots B^T A^T, \quad \text{複素共役をとれば } (AB \cdots C)^\dagger = C^\dagger \cdots B^\dagger A^\dagger \quad (8.3)$$

である。行列の順番に注意すること。

非対角要素が 0 である正方行列を**対角行列**という。特に、対角要素が 1 である対角行列を**単位行列**といい  $I$  と書くことにする。 $(I)_{ij} = \delta_{ij}$  である。

$$(IA)_{ij} = \sum_{k=1}^n (I)_{ik} (A)_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} (A)_{kj} = (A)_{ij}$$

同様にして  $IA = AI = A$  が成り立つ。単位行列は代数での数 1 と同じ役割をする。

$n$  次正方行列  $A$  に対して  $AX = XA = I$  を満たす  $n$  次正方行列  $X$  が存在するとき、 $X$  を  $A$  の**逆行列**といい  $A^{-1}$  で表す。逆行列が存在する行列を**正則行列**という。 $(A^{-1})^{-1} = A$  である。

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I, \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

になるから

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

この場合も順番に注意する必要がある。 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  の転置をとると

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I^T = I, \quad \therefore (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$$

である。

固有の名称をもつ正方行列をまとめておく。

- $A^T = A$     **対称行列**     $a_{ji} = a_{ij}$
- $A^T = -A$     **反対称行列または交代行列**     $a_{ji} = -a_{ij}, a_{ii} = 0$
- $A^\dagger = A$     **エルミート行列**     $a_{ji}^* = a_{ij}, a_{ii} = \text{実数}$   
実対称行列は実エルミート行列であり、エルミート行列に含まれる。
- $A^\dagger = -A$     **反エルミート行列**     $a_{ji}^* = -a_{ij}, a_{ii} = \text{純虚数}$
- $A^T = A^{-1}$     **直交行列**    ただし、行列要素は実数とする。
- $A^\dagger = A^{-1}$     **ユニタリー行列**    直交行列は実ユニタリー行列である。
- $AA^\dagger = A^\dagger A$     **正規行列**    エルミート行列とユニタリー行列は正規行列である。

列ベクトル ( $n \times 1$  行列) の転置行列またはエルミート共役行列は  $1 \times n$  行列、つまり、行ベクトルになる。以下では列ベクトルを太文字 (ボールド体) の  $\mathbf{u}$  などで表す。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^T = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n), \quad \mathbf{u}^\dagger = (u_1^* \ u_2^* \ \cdots \ u_n^*)$$

である。

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = \mathbf{v}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n u_k^* v_k = (\mathbf{v}^\dagger \mathbf{u})^* \quad (8.4)$$

になる。 $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}$  を  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  の**内積**という。ここで定義した内積は一般に複素数であるが、3次元実ベクトルの場合には通常の内積  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  になる。 $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = 0$  のとき  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  は**直交**するという。(8.4) より  $u_k$  が複素数であっても  $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$  は非負の実数である。 $\sqrt{\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}}$  をベクトル  $\mathbf{u}$  の**ノルム**または**大きさ**という。ノルムが 0 になるのは、全ての成分が 0 である零ベクトルだけである。零列ベクトルを  $\mathbf{0}$  で表す。なお、 $\mathbf{v} \mathbf{u}^T$  あるいは  $\mathbf{v} \mathbf{u}^\dagger$  は (8.2) で示したように  $n \times n$  行列である。

$m \times n$  行列  $A = (a_{ij})$  は列ベクトルあるいは行ベクトルの並びと見なせる。例えば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n), \quad \text{ただし} \quad \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

であり,  $n$  個の  $m$  次元列ベクトル  $\mathbf{a}_k, (k = 1, 2, \dots, n)$  で表せる。

$A$  を正方行列とすると

$$\mathbf{u}^\dagger A \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}^\dagger)_i (A)_{ij} (\mathbf{v})_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i^* a_{ij} v_j$$

この複素共役は

$$(\mathbf{u}^\dagger A \mathbf{v})^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j^* a_{ij}^* u_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j^* (A^\dagger)_{ji} u_i = \mathbf{v}^\dagger A^\dagger \mathbf{u} \quad (8.6)$$

である。特に, エルミート行列  $A^\dagger = A$  の場合

$$(\mathbf{u}^\dagger A \mathbf{v})^* = \mathbf{v}^\dagger A \mathbf{u} \quad (8.7)$$

になる。

## 8.2 行列式

$n$  個の整数の並び  $1, 2, \dots, n$  を並び換えて  $p_1, p_2, \dots, p_n$  にする。ただし  $p_k, (1 \leq k \leq n)$  は  $1$  から  $n$  までの整数のどれかであり, 互いに異なる。この並び換えを置換といい

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

と書く。 $n$  個の並びの場合,  $n!$  個の置換が存在する。ある 2 つ  $i, j$  だけを入れ換える置換を互換といい  $(ij)$  で表す。任意の置換は, ある置換から出発して互換を繰り返せば得られる。8 ページで  $n = 3$  の場合に具体的に示したように, 繰り返す互換の組み合わせは一意に決まらないが, 互換の回数が偶数回か奇数回かは決まる。偶数 (奇数) 回の互換で表せる置換を偶置換 (奇置換) という。置換  $p$  の符号  $\text{sgn}(p)$  を

$$\text{sgn}(p) = \begin{cases} +1, & p \text{ が } 1, 2, \dots, n \text{ の偶置換} \\ -1, & p \text{ が } 1, 2, \dots, n \text{ の奇置換} \end{cases}$$

で定義する。

$n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  が与えられたとき,  $n!$  個の全ての置換  $p$  についての和

$$\sum_p \text{sgn}(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (8.8)$$

を行列式という。行列  $A$  の行列式を  $\det A, |A|$  あるいは

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表す。  $n = 2$  の場合, 何も入れ換えない恒等置換  $p_i = i$  と互換 (12) だけであるから

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n = 3$  の場合, (1.26) の  $\varepsilon_{ijk}$  を用いれば  $\text{sgn}(p) = \varepsilon_{p_1 p_2 p_3}$  であるから

$$\det A = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8.10)$$

になる。(8.10) は後で導く余因子展開の例である。

### 行列式の性質

1.  $\det A^T = \det A$  この結果, 行列式の列について成り立つ性質は, 行についても成り立つ。
2. 1つの行(列)を  $\lambda$  倍すると, 行列式も  $\lambda$  倍になる。(8.5) の表記法を用いれば

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \lambda \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) = \lambda \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) \quad (8.11)$$

これから

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{0} \cdots \mathbf{a}_n) = 0, \quad \det(\lambda A) = \det(\lambda \mathbf{a}_1 \cdots \lambda \mathbf{a}_i \cdots \lambda \mathbf{a}_n) = \lambda^n \det A$$

になる。一般に  $\det(A+B) \neq \det A + \det B$  であるが

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_i \cdots \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{a}_n)$$

3. 2つの行(列)を交換すると, 行列式は符号だけ変わる。したがって, 2つの行(列)が等しい行列の行列式は 0 である。

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) \quad (8.12)$$

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a} \cdots \mathbf{a} \cdots \mathbf{a}_n) = 0 \quad (8.13)$$

4. 行(列)に他の行(列)の定数倍を加えても, 行列式は変わらない。

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n), \quad \text{ただし } j \neq i \quad (8.14)$$

5.  $A$  と  $B$  が  $n$  次正方行列のとき

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \quad (8.15)$$

### 証明

1. 転置行列の定義から

$$\det A^T = \sum_p \text{sgn}(p) (A^T)_{1p_1} (A^T)_{2p_2} \cdots (A^T)_{np_n} = \sum_p \text{sgn}(p) a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \quad (8.16)$$

最後の和を  $a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$  のように並べ換える。 $a_{k i_k}$  は左辺の表現では  $a_{p_{i_k} i_k}$  であるから  $p_{i_k} = k$  になる。置換  $p$  は  $i_k$  を  $k$  に置き換える。 $k$  を  $i_k$  に置き換える逆置換を  $q$  とすると  $q_k = i_k$  であるから  $a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = a_{1 q_1} a_{2 q_2} \cdots a_{n q_n}$  と表せる。ところで  $i_k \xrightarrow{p} k \xrightarrow{q} i_k$  より置換  $qp$  は恒等置換になる。恒等置換は偶置換であるから  $\text{sgn}(p) = \text{sgn}(q)$  である。 $p$  と  $q$  は一対一に対応し、 $p$  が全ての置換を動くとき  $q$  も全ての置換を動くから、 $p$  の和を  $q$  の和で置き換えてよい。したがって

$$\det A^T = \sum_q \text{sgn}(q) a_{1 q_1} a_{2 q_2} \cdots a_{n q_n} = \det A$$

になる。(8.8) の代わりに (8.16) を  $\det A$  の定義としてもよい。

$$\begin{aligned} 2. \quad \det(\mathbf{a}_1 \cdots \lambda \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) &= \sum_p \text{sgn}(p) a_{1 p_1} \cdots \lambda a_{i p_i} \cdots a_{n p_n} \\ &= \lambda \sum_p \text{sgn}(p) a_{1 p_1} \cdots a_{i p_i} \cdots a_{n p_n} = \lambda \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{a}_n) &= \sum_p \text{sgn}(p) a_{1 p_1} \cdots (b_{i p_i} + c_{i p_i}) \cdots a_{n p_n} \\ &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_i \cdots \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

3.  $A$  の  $i$  行目と  $j$  行目を交換した行列を  $A'$  とすると  $(A')_{ik} = a_{jk}$ ,  $(A')_{jk} = a_{ik}$  であるから

$$\det A' = \sum_p \text{sgn}(p) a_{1 p_1} \cdots a_{j p_i} \cdots a_{i p_j} \cdots a_{n p_n}$$

置換  $p$  を行ったのち互換  $(p_i p_j)$  を行う置換を  $q$  とすると、 $q_i = p_j$ ,  $q_j = p_i$ ,  $k \neq i, j$  のとき  $q_k = p_k$  であるから

$$\det A' = \sum_p \text{sgn}(p) a_{1 q_1} \cdots a_{j q_j} \cdots a_{i q_i} \cdots a_{n q_n}$$

$p$  が偶置換 (奇置換) のとき  $q$  は奇置換 (偶置換) になるから  $\text{sgn}(p) = -\text{sgn}(q)$  である。 $p$  の和は  $q$  の和で置き換えてよいから

$$\det A' = - \sum_q \text{sgn}(q) a_{1 q_1} \cdots a_{j q_j} \cdots a_{i q_i} \cdots a_{n q_n} = - \det A$$

4.  $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j$  のとき  $i < j$  とすれば

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) + \lambda \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

5. 行列の積の定義 (8.1) より

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_p \text{sgn}(p) (AB)_{1 p_1} \cdots (AB)_{n p_n} \\ &= \sum_p \text{sgn}(p) \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n a_{1 k_1} b_{k_1 p_1} \cdots a_{n k_n} b_{k_n p_n} \\ &= \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n a_{1 k_1} \cdots a_{n k_n} \sum_p \text{sgn}(p) b_{k_1 p_1} \cdots b_{k_n p_n} \\ &= \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n a_{1 k_1} \cdots a_{n k_n} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \cdots & b_{k_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k_n 1} & \cdots & b_{k_n n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$k_1, \dots, k_n$  で等しいものがあれば, (8.13) より行列式は 0 になるから,  $k_1, \dots, k_n$  は全て互いに異なる組み合わせについて和をとればよい。これは  $1, 2, \dots, n$  の置換  $q$  の和になるから

$$\det(AB) = \sum_q a_{1q_1} \cdots a_{nq_n} \begin{vmatrix} b_{q_1 1} & \cdots & b_{q_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q_n 1} & \cdots & b_{q_n n} \end{vmatrix}$$

$q_1, \dots, q_n$  を  $1, \dots, n$  に並び換える互換の数を  $N$  とすると,  $(-1)^N = \text{sgn}(q)$  である。行列式は 2 つの行を交換すると符号が変わるから

$$\begin{vmatrix} b_{q_1 1} & \cdots & b_{q_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q_n 1} & \cdots & b_{q_n n} \end{vmatrix} = (-1)^N \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \text{sgn}(q) \det B$$

したがって

$$\det(AB) = \sum_q \text{sgn}(q) a_{1q_1} \cdots a_{nq_n} \det B = (\det A)(\det B)$$

である。 ■

**三角行列の行列式** 正方行列  $A$  が下三角行列 ( $i < j$  のとき  $a_{ij} = 0$ ) または上三角行列 ( $i > j$  のとき  $a_{ij} = 0$ ) ならば

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \quad (8.17)$$

である。上三角行列の転置は下三角行列になるから, 下三角行列の場合を考える。(8.8) に寄与する  $a_{1p_1}$  は  $1 \geq p_1$ , つまり  $p_1 = 1$  である。次に,  $a_{2p_2} \neq 0$  になる可能性があるのは  $p_2 = 1, 2$  であるが,  $p_2 \neq p_1 = 1$  より  $p_2 = 2$  だけある。以下同様にして  $p_k = k$  になる。これ以外の置換は寄与しないから (8.17) が成り立つ。

$B, C, D$  をそれぞれ  $m \times m, n \times m, n \times n$  行列,  $O$  を  $m \times n$  の零行列とすると, 行列式

$$\det A = \sum_p \text{sgn}(p) a_{1p_1} \cdots a_{mp_m} a_{m+1,p_{m+1}} \cdots a_{m+n,p_{m+n}}, \quad \text{ただし } A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

を求める。 $A$  は  $m+n$  次正方行列である。 $1 \leq p_i \leq m+n$  であるが,  $1 \leq i \leq m$  の場合  $p_i > m$  ならば  $a_{ip_i} = 0$  になるから  $1 \leq p_i \leq m$  を考えればよい。置換  $p$  で  $1 \leq i \leq m$  の部分は  $1 \sim m$  の任意の置換  $q$  になる。 $m+1 \leq i \leq m+n$  のとき  $p_i \neq 1, 2, \dots, m$  より  $m+1 \leq p_i \leq m+n$  になるから, 置換  $p$  で  $m+1 \leq i \leq m+n$  の部分は  $m+1 \sim m+n$  の任意の置換である。 $1 \sim n$  の任意の置換を  $r$  とすれば,  $1 \leq i \leq n$  として  $p_{m+i} = m+r_i$  である。したがって

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{q,r} \text{sgn}(qr) a_{1q_1} \cdots a_{mq_m} a_{m+1,m+r_1} \cdots a_{m+n,m+r_n} \\ &= \sum_{q,r} \text{sgn}(q)\text{sgn}(r) b_{1q_1} \cdots b_{mq_m} d_{1r_1} \cdots d_{nr_n} = (\det B)(\det D) \end{aligned}$$

になる。 $B_{ij}$  を  $n_i \times n_j$  行列とした正方行列  $A$

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & O & O \\ B_{21} & B_{22} & O \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ C & D \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} B_{22} & O \\ B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

の場合

$$\det A = (\det B_{11})(\det D) = (\det B_{11})(\det B_{22})(\det B_{33})$$

一般に

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & O & \cdots & O \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ O & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix}$$

のとき

$$\det A = (\det B_{11})(\det B_{22}) \cdots (\det B_{kk})$$

である。

**ヴァンデルモンド行列式**  $n$  次正方行列  $V = (v_{ij})$ ,  $v_{ij} = x_j^{i-1}$  の行列式が

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad (8.18)$$

になることを示す。 $V$  を**ヴァンデルモンド行列**という。

$$\det V = \sum_p \operatorname{sgn}(p) v_{p_1 1} v_{p_2 2} \cdots v_{p_n n} = \sum_p \operatorname{sgn}(p) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1}$$

である。 $p_i$  は互いに異なる  $1 \sim n$  の整数であるから  $p_1 + \cdots + p_n = 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$  になる。したがって、 $\det V$  は  $x_1, \dots, x_n$  の  $n(n+1)/2 - n = n(n-1)/2$  次だけの多項式である。 $x_1 = x_i$ ,  $i \geq 2$  とすると 1 列と  $i$  列は同じになり  $\det V = 0$  であるから、 $V$  は  $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)$  の因子をもつ。以下、同様に  $x_2, \dots, x_{n-1}$  まで考えれば、 $\det V$  は

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i>j} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) && n-1 \text{ 個の積} \\ & \times (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) && n-2 \text{ 個の積} \\ & \cdots \cdots && \vdots \\ & \times (x_n - x_{n-1}) && 1 \text{ 個の積} \end{aligned}$$

の因子をもつ。 $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n(n-1)/2$  より  $F$  も  $x_1, \dots, x_n$  の  $n(n-1)/2$  次の多項式だけになるから、 $C$  を定数と  $\det V = CF(x_1, \dots, x_n)$  とおける。 $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$  の係数は、 $\det V$  では恒等置換  $p_i = i$  の寄与から  $+1$  である。一方、 $F(x_1, \dots, x_n)$  の方でも、上の表現から分かるように  $+1$  になるから  $C = 1$  である。したがって、(8.18) が成り立つ。

### 8.3 余因子展開と逆行列

$n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  から  $i$  行目と  $j$  列目を取り除いた  $(n-1)$  次正方行列を  $A_{ij}$  とし

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \quad (\hat{A})_{ij} = \Delta_{ji} \quad (8.19)$$

とする。行列  $A_{ij}$  を  $A$  の**小行列**、 $\Delta_{ij}$  を**余因子**、行列  $\hat{A}$  を**余因子行列**あるいは**随伴行列**という。

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{ik}, \quad \det A = (\hat{A}A)_{ii} = (A\hat{A})_{ii} \quad (8.20)$$

が成り立つ。 $i$  は  $1, 2, \dots, n$  のいずれでもよい。 $a_{ki}$  の展開を第  $i$  列に関する展開,  $a_{ik}$  の展開を第  $i$  行に関する展開という。

**証明** 列ベクトル  $\mathbf{a}_i$  は  $k$  行目以外の成分が 0 である単位列ベクトル  $\mathbf{e}_k$  で表すと

$$\mathbf{a}_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \mathbf{e}_k$$

になるから

$$\det A = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n) = \sum_{k=1}^n a_{ki} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{e}_k \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n)$$

$i$  列目を  $i-1$  列,  $i-2$  列,  $\dots$ , 第 1 列と次々に交換すると, 交換するごとに符号だけ変わるから

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^n a_{ki} \det(\mathbf{e}_k \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^n a_{ki} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{k1} & \cdots & a_{k,i-1} & a_{k,i+1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$k$  行目を  $k-1$  行,  $k-2$  行,  $\dots$ , 第 1 行と次々に交換すると

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i-1} (-1)^{k-1} a_{ki} \begin{vmatrix} 1 & a_{k1} & \cdots & a_{k,i-1} & a_{k,i+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{k-1,1} & \cdots & & & & a_{k-1,n} \\ 0 & a_{k+1,1} & \cdots & & & & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8.21)$$

枠で囲った部分は  $k$  行,  $i$  列を取り除いた小行列  $A_{ki}$  である。ここで  $b_{21} = \cdots = b_{n1} = 0$  である行列  $B$  の行列式を考えると

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_p \operatorname{sgn}(p) b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots b_{p_n n}$$

$p_1 \neq 1$  のとき  $b_{p_1 1} = 0$  になるから,  $p_1 = 1$  を満たす置換についてだけ和をとればよい。これは  $2, 3, \dots, n$  の任意の置換についての和になるから

$$\det B = b_{11} \sum_p \operatorname{sgn}(p) b_{p_2 2} \cdots b_{p_n n} = b_{11} \det B_{11}$$

$B_{11}$  は 1 行目と 1 列目を取り除いた小行列である。これから (8.21) は

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ki} \det A_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta_{ki}, \quad \text{したがって} \quad \det A = \det A^T = \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{ik}$$

になる。 ■

$n \geq 3$  の場合, (8.8), (8.16) から行列式を求めることは煩雑である。(8.11), (8.13), 特に (8.14) を用いて, できるだけ 0 を含む行または列を作って余因子展開し  $n$  次の行列式を  $n-1$  次の行列式で表す。これを  $n=2$  まで繰り返す。あるいは, 三角行列にして (8.17) を使う (ガウスの掃き出し法)。

**逆行列**  $i \neq j$  のとき  $A$  の  $j$  列目を  $i$  列目で置き換えた行列を  $A'$  とすると (8.13) より

$$\det A' = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_{j-1} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{j+1} \cdots \mathbf{a}_n) = 0$$

である。一方,  $\det A'$  を  $j$  列に関して余因子展開すると

$$\det A' = \sum_{k=1}^n (A')_{kj} \Delta'_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta'_{kj}$$

$A'$  は  $j$  列目以外は  $A$  と同じであるから,  $j$  列目を取り除く小行列  $A'_{kj}$  については  $A'_{kj} = A_{kj}$  になり  $\Delta'_{kj} = \Delta_{kj}$  である。したがって  $i \neq j$  のとき

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta_{kj} = 0, \quad \text{同様に} \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta_{kj} = 0$$

(8.20) と合わせれば

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \Delta_{kj} = \delta_{ij} \det A, \quad \therefore \quad A\hat{A} = \hat{A}A = (\det A)I \quad (8.22)$$

になるから,  $\det A \neq 0$  のとき

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

が  $A$  の逆行列である。

$\det A \neq 0$  ならば逆行列が存在するが, 逆に,  $AA^{-1} = I$  を満たす行列  $A^{-1}$  が存在する場合

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$$

になるから  $\det A \neq 0, \det A^{-1} \neq 0, \det A^{-1} = 1/\det A$  である。

## 8.4 行列に関する幾つかの性質

**トレース** 正方行列  $A$  の対角要素の和を**トレース**といい  $\text{tr } A$  で表す。

$$\text{tr } A \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \text{これから} \quad \text{tr } A^T = \text{tr } A, \quad \text{tr } A^\dagger = (\text{tr } A)^*, \quad \text{tr } (cA) = c \text{tr } A$$

である。

$$\text{tr } (AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i,j=1}^n (A)_{ij}(B)_{ji} = \sum_{i,j=1}^n (B)_{ji}(A)_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj}$$

より

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \quad \text{同様にして} \quad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB) \quad (8.24)$$

が成り立つ。

**行列式の微分** 正方行列  $A$  の行列要素  $a_{ij}$  が変数  $x$  の関数  $a_{ij} = a_{ij}(x)$  の場合

$$\frac{d}{dx} \det A = \sum_{i,j=1}^n \frac{da_{ij}}{dx} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A$$

である。 $i$  行目を取り除いた小行列は  $a_{ij}$  を含まない。したがって, (8.20) より

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{ik} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{ij}} \Delta_{ik} = \sum_{k=1}^n \delta_{kj} \Delta_{ik} = \Delta_{ij} = (\hat{A})_{ji}$$

になる。 $\hat{A}$  は余因子行列 (8.19) である。これから

$$\frac{d}{dx} \det A = \sum_{i,j=1}^n \frac{da_{ij}}{dx} (\hat{A})_{ji} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dA}{dx} \hat{A} \right)_{ii} = \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{dx} \hat{A} \right), \quad \text{ただし} \quad \left( \frac{dA}{dx} \right)_{ij} = \frac{da_{ij}}{dx}$$

$\det A \neq 0$  の場合 (8.23) より

$$\frac{d}{dx} \det A(x) = (\det A) \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{dx} A^{-1} \right), \quad \text{あるいは} \quad \frac{d}{dx} \log(\det A(x)) = \operatorname{tr} \left( \frac{dA}{dx} A^{-1} \right) \quad (8.25)$$

になる。

**行列の指数関数** 指数関数のマクローリン展開  $e^x = \sum_k x^k/k!$  に対応して, 正方行列  $A$  の指数関数を

$$e^A = \exp(A) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad A^0 = I$$

で定義する。 $AB = BA$  とき

$$(A+B)^k = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} A^m B^{k-m}$$

になるから ( $AB \neq BA$  のとき上式は成り立たない)

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{A^m B^{k-m}}{m!(k-m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k-m=0}^{\infty} \frac{A^m B^{k-m}}{m!(k-m)!} = e^A e^B$$

したがって

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \quad (8.26)$$

である。特に,  $B = -A$  とすると

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = I, \quad \therefore (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

である。 $AB \neq BA$  の場合,  $e^{A+B}$  は  $e^A$  と  $e^B$  で簡単には表せない。

$A$  が変数  $x$  に依存しないとき

$$\frac{d}{dt} e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dx} (xA)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} A^k = A e^{xA} = e^{xA} A \quad (8.27)$$



である。もう 1 組の独立な変数  $z_1, \dots, z_n$  を考えると

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \det B, \quad \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \det C, \quad \text{ただし } b_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j}, \quad c_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial z_j}$$

である。 $d_{ij} = \partial z_i / \partial y_j$  とすると, (2.15) より

$$a_{ij} = \sum_k \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} = \sum_k b_{ik} d_{kj}, \quad \delta_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial z_k} = \sum_k c_{ik} d_{kj}$$

つまり  $A = BD, CD = 1$  であるから  $A = BC^{-1}$  になる。したがって

$$\det A = \frac{\det B}{\det C}, \quad \therefore \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \bigg/ \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}$$

である。1 変数の場合  $dy/dz = (dz/dy)^{-1}$  である。多変数の場合, これに対応する関係式は行列の関係式  $C = D^{-1}$  になる。 $\partial y / \partial z \neq (\partial z / \partial y)^{-1}$  である。

## 8.5 正方行列の固有値と固有ベクトル

$n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  が与えられたとき

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad \text{つまり } (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (8.29)$$

を満たす列ベクトル  $\mathbf{u}$  及びある数  $\lambda$  を求める。ただし, 自明な解  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  は考えない。この方程式は  $\mathbf{u}$  に行列  $A$  を作用させることと, 単なる数  $\lambda$  をかけることが同じになることを意味する。このような特別な性質をもつベクトル  $\mathbf{u}$  を行列  $A$  の固有ベクトル,  $\lambda$  を固有値という。

(8.28) から (8.29) が自明でない解  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  をもつためには

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8.30)$$

でなければならない。これは固有値  $\lambda$  についての  $n$  次方程式であり特性方程式または固有方程式という。特性方程式の解を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とする。 $\lambda = \lambda_k, (k = 1, 2, \dots, n)$  の場合だけ (8.29) は  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  である自明でない解をもつ。この解を  $\mathbf{u}_k$  とすると

$$A\mathbf{u}_k = \lambda_k\mathbf{u}_k \quad (8.31)$$

である。

(8.31) に複素定数  $c$  をかければ  $A(c\mathbf{u}_k) = \lambda_k(c\mathbf{u}_k)$  であるから  $c\mathbf{u}_k$  も固有ベクトルである。したがって, 固有ベクトルには複素定数倍の不定性があり一意には決まらない。通常, この任意定数  $c$  を

$$(c\mathbf{u}_k)^\dagger(c\mathbf{u}_k) = |c|^2 \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_k = 1, \quad \therefore |c| = (\mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_k)^{-1/2}$$

で決める。これを規格化という。 $c\mathbf{u}_k$  を改めて  $\mathbf{u}_k$  とおけば  $\mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_k = 1$  である。

固有ベクトル  $\mathbf{u}_k$  は成分に関する連立方程式  $(A - \lambda_k I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$  から決まる。この解の一般的表現を求める。 $B_{ij}^{(k)}$  を  $B^{(k)} \equiv A - \lambda_k I$  の  $i$  行と  $j$  列を取り除いた小行列とする。 $\det B^{(k)} = 0$  であるから (8.22) より

$$\sum_{\ell=1}^n b_{i\ell} \Delta_{j\ell} = \delta_{ij} \det B^{(k)} = 0, \quad b_{ij} = B^{(k)} \text{ の行列要素, } \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}^{(k)}$$

である。これは

$$\left( (A - \lambda_k I) \mathbf{u}_k \right)_i = 0, \quad (\mathbf{u}_k)_\ell = \Delta_{j\ell} = (-1)^{\ell+j} \det B_{j\ell}^{(k)}$$

と表せるから、 $\mathbf{u}_k$  が求める固有ベクトルである。 $j$  は  $1, 2, \dots, n$  のどれかに固定しておけばよい。

## 8.6 エルミート行列の対角化

最初に、物理で最も重要になるエルミート行列を扱う。 $A^\dagger = A$ 、要素で表せば  $a_{ji}^* = a_{ij}$  である。全ての  $a_{ij}$  が実数という特別な場合  $A$  は実対称行列になる。以下では  $\mathbf{u}_k$  は規格化されているとする。エルミート行列の次の性質は重要である。

- エルミート行列の固有値は実数である。

(8.31) に左側から  $\mathbf{u}_k^\dagger$  をかけると  $\mathbf{u}_k^\dagger A \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_k = \lambda_k$  である。(8.7) で  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{u}_k$  とすれば  $\mathbf{u}_k^\dagger A \mathbf{u}_k$  は実数であるから、固有値  $\lambda_k$  も実数である。

- エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

$A \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$  に  $\mathbf{u}_\ell^\dagger$  をかけ複素共役をとると  $(\mathbf{u}_\ell^\dagger A \mathbf{u}_k)^* = \lambda_k^* (\mathbf{u}_\ell^\dagger \mathbf{u}_k)^*$  である。(8.4), (8.7) 及び固有値は実数であるから

$$\mathbf{u}_k^\dagger A \mathbf{u}_\ell = \lambda_k \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell$$

になる。これと  $A \mathbf{u}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{u}_\ell$  に  $\mathbf{u}_k^\dagger$  をかけた式の差をとれば

$$(\lambda_k - \lambda_\ell) \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell = 0$$

したがって、 $\lambda_k \neq \lambda_\ell$  ならば  $\mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell = 0$  である。

特性方程式 (8.30) の解  $\lambda_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) が全て異なれば  $k \neq \ell$  のとき  $\lambda_k \neq \lambda_\ell$  であるから、規格化と合わせて

$$\mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell = \delta_{k\ell} \quad (8.32)$$

になる。 $\lambda_k$  に同じものがある場合、縮退があるという。以下に示すように、縮退がある場合でも (8.32) は成り立つ。(8.32) を満たすベクトルの集合を正規直交系という。

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$  の場合を考える。 $1 \leq k, \ell \leq m$  のとき  $\lambda_k = \lambda_\ell$  であるから  $k \neq \ell$  でも  $\mathbf{u}_\ell^\dagger \mathbf{u}_k = 0$  とは限らない。ところで、 $c_k$  を任意定数として

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{u}_k$$

とすると

$$A \mathbf{v} = \sum_{k=1}^m c_k A \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \mathbf{u}_k = \lambda_1 \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{u}_k = \lambda_1 \mathbf{v}$$

であるから  $\mathbf{v}$  も同じ固有値に属する固有ベクトルである。したがって、 $c_k$  を適当にとれば、互いに直交する  $m$  個の固有ベクトル  $\mathbf{v}$  を作る事ができる。例えば、2重に縮退する  $\lambda_1 = \lambda_2$  のとき

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - c \mathbf{u}_1}{\sqrt{1 - |c|^2}}, \quad \text{ただし } c = \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2$$

とすると

$$\mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2 - c \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_1}{\sqrt{1 - |c|^2}} = \frac{c - c}{\sqrt{1 - |c|^2}} = 0, \quad \mathbf{v}_2^\dagger \mathbf{v}_2 = 1$$

になる。 $\mathbf{u}_1$  と  $\mathbf{u}_2$  が直交しない場合 ( $c \neq 0$ ) でも, 互いに直交する規格化された固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  を作れる。 $m \geq 3$  の場合にも同様の処理を行えば (シュミットの直交化)

$$\mathbf{v}_k^\dagger \mathbf{v}_\ell = \delta_{k\ell}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, m$$

になる。最初の縮退する固有ベクトルの組  $\mathbf{u}_k$  の代わりに  $\mathbf{v}_k$  の組を固有ベクトルとして採用すれば, 縮退がある場合でも (8.32) は成り立つ。

**対角化** エルミート行列の固有ベクトル  $\mathbf{u}_k$  を並べた  $n$  次正方行列  $U$

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n), \quad (U)_{ij} = (\mathbf{u}_j)_i \quad (8.33)$$

を考える。

$$(AU)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (U)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (\mathbf{u}_j)_k = (A\mathbf{u}_j)_i = \lambda_j (\mathbf{u}_j)_i = \lambda_j (U)_{ij}$$

ここで, 対角要素が固有値である  $n$  次対角行列を

$$(A)_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} \quad (8.34)$$

とする。

$$(UA)_{ij} = \sum_{k=1}^n (U)_{ik} (A)_{kj} = \sum_{k=1}^n (U)_{ik} \lambda_j \delta_{kj} = \lambda_j (U)_{ij}$$

になるから

$$(AU)_{ij} = (UA)_{ij}, \quad \therefore AU = UA \quad (8.35)$$

である。次に

$$(U^\dagger U)_{ij} = \sum_{k=1}^n (U^\dagger)_{ik} (U)_{kj} = \sum_{k=1}^n (U)_{ki}^* (U)_{kj} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_i)_k^* (\mathbf{u}_j)_k = \mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \quad (8.36)$$

したがって  $U^\dagger U = I$  になり  $U$  はユニタリ行列である。(8.35) に左側から  $U^\dagger$  をかけると

$$U^\dagger AU = A \quad (8.37)$$

になる。エルミート行列  $A$  は, 固有ベクトルから作ったユニタリ行列  $U$  により, 固有値を対角要素とする対角行列に変換される。これを行列の**対角化**という。実対称行列 (要素が実数のエルミート行列)  $A$  の場合, 固有ベクトルの成分は実数にとることができ  $U^{-1} = U^T$  になるから  $U$  は直交行列である。実対称行列は直交行列で対角化できる。

(8.36) より  $U^\dagger U = I$  は固有ベクトルの正規直交性を表す。 $U^\dagger U = I$  ならば  $UU^\dagger = I$  も成り立つ。これは固有ベクトルの完全性, つまり, 任意のベクトルは固有ベクトルの線形結合で表せることを意味する。 $(UU^\dagger)_{ij} = \delta_{ij}$  を固有ベクトルで表すと

$$(UU^\dagger)_{ij} = \sum_{k=1}^n (U)_{ik} (U)_{jk}^* = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_k)_i (\mathbf{u}_k^*)_j = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger)_{ij} = \delta_{ij}, \quad \therefore \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger = I$$

$\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger$  は  $n \times n$  行列である。任意のベクトル  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k v_k, \quad v_k = \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{v}$$

$v_k$  は  $\mathbf{u}_k$  と  $\mathbf{v}$  の内積であり数である。したがって、任意のベクトルは固有ベクトルの線形結合で表せる。これは 3 次元空間の (1.22) を  $n$  次元で成分が複素数の場合に拡張したものである。

**ユニタリー行列**  $n$  次正方行列で  $U^{-1} = U^\dagger$  を満たすユニタリー行列  $U$  を考える。行列要素が実数の場合  $U^{-1} = U^T$  になるから  $U$  は直交行列である。 $U$  を列ベクトルの並び (8.33) で表す。(8.36) より  $I = U^\dagger U$  の行列要素は  $\delta_{ij} = (U^\dagger U)_{ij} = \mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j$  になり  $i \neq j$  のとき  $\mathbf{u}_i$  と  $\mathbf{u}_j$  は直交する。

$U^\dagger = (U^T)^*$  より  $\det U^\dagger = (\det U^T)^* = (\det U)^*$  になるからユニタリー行列の場合

$$\det(U^\dagger U) = (\det U^\dagger)(\det U) = |\det U|^2 = 1, \quad \therefore |\det U| = 1$$

ユニタリー行列の行列式は一般に複素数であるが、その絶対値は 1 である。 $U$  が直交行列の場合、行列式は実数になるから  $\det U = \pm 1$  である。

列ベクトル  $\mathbf{a}$  にユニタリー行列  $U$  をかけたもの  $U\mathbf{a}$  も列ベクトルである。2 つのベクトル  $U\mathbf{a}$  と  $U\mathbf{b}$  の内積は

$$(U\mathbf{a})^\dagger U\mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger U^\dagger U\mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger I\mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$$

であり不変である。

**2 次形式の標準形**  $n$  個の実変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の 2 次形式

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = \text{実数}$$

を考える。 $i$  と  $j$  を入れ換えれば

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j x_i, \quad \therefore f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j$$

$(a_{ij} + a_{ji})/2$  を改めて  $a_{ij}$  とすれば  $a_{ij} = a_{ji}$  であり

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\dagger A \mathbf{x}$$

になる。 $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  は実対称行列である。(8.33) で定義した  $A$  の固有ベクトルから作られる  $U$  を用いて  $\mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x}$ , つまり  $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$  とすると,  $\mathbf{x}^\dagger = (U\mathbf{y})^\dagger = \mathbf{y}^\dagger U^\dagger$  であるから

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\dagger U^\dagger A U \mathbf{y} = \mathbf{y}^\dagger \Lambda \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i (\Lambda)_{ij} y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

になり  $i \neq j$  である  $y_i y_j$  の項を含まない。これを 2 次形式の標準形という。

$n = 2$  の場合,  $x_1, x_2$  を直交座標系とすると

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \mathbf{x}^\dagger A \mathbf{x} = 1, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

は曲線を表す。実対称行列  $A$  の固有値  $\lambda$  は

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0, \quad \therefore \lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

この 2 次方程式の根を  $\lambda_1, \lambda_2$  とすると  $f(x_1, x_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$  になる。したがって,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  が正ならば楕円,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の符号が異なれば双曲線になる。2 根が負ならば  $f(x_1, x_2) = 1$  を満たす点は存在しない。

$A$  の固有ベクトル  $\mathbf{u}_k$ , ( $k = 1, 2$ )

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix}$$

を求める。固有値は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( a + c \pm \frac{a - c}{\cos 2\theta} \right), \quad \text{ただし} \quad \tan 2\theta = \frac{2b}{a - c}$$

と表せる。 $a - c = 0$  のときは  $a - c \rightarrow 0$  の極限を考えればよい。複号で  $+$  のとき  $\lambda_1$ ,  $-$  のとき  $\lambda_2$  とする。 $au_{11} + bu_{21} = \lambda_1 u_{11}$  より

$$u_{21} = \frac{\lambda_1 - a}{b} u_{11} = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} u_{11} = u_{11} \tan \theta$$

規格化条件  $u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1$  より  $u_{11} = \cos \theta$  とすればよい。これから  $u_{21} = \sin \theta$  になる。 $\lambda = \lambda_2$  の場合、 $2\theta$  を  $2\theta + \pi$  で置き換えればよいから  $u_{12} = -\sin \theta$ ,  $u_{22} = \cos \theta$  になり

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。 $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$  は角度  $\theta$  の座標系の回転 (8.51) である。

## 8.7 正方行列の対角化

### 正規行列

$AA^\dagger = A^\dagger A$  を満たす正方行列を**正規行列**という。エルミート行列, ユニタリ-行列は正規行列である。対角行列  $(A)_{ij} = a_i \delta_{ij}$  の場合

$$(AA^\dagger)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (A^\dagger)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (A)_{jk}^* = |a_i|^2 \delta_{ij}, \quad \text{同様に} \quad (A^\dagger A)_{ij} = |a_i|^2 \delta_{ij}$$

であるから、対角行列も正規行列である。

正規行列  $A$  の固有値を  $\lambda_k$ , 規格化された固有ベクトルを  $\mathbf{u}_k$  とする。

$$A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k, \quad \text{つまり} \quad (A - \lambda_k I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_k = 1$$

$\lambda_k$  は実数とは限らない。 $AA^\dagger = A^\dagger A$  より

$$(A^\dagger - \lambda_k^* I)(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_k I)(A^\dagger - \lambda_k^* I)$$

になるから

$$(A^\dagger - \lambda_k^* I)(A - \lambda_k I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0} = (A - \lambda_k I)(A^\dagger - \lambda_k^* I)\mathbf{u}_k$$

である。 $\mathbf{y} = (A^\dagger - \lambda_k^* I)\mathbf{u}_k$  とおくと

$$\mathbf{y}^\dagger = \mathbf{u}_k^\dagger (A^\dagger - \lambda_k^* I)^\dagger = \mathbf{u}_k^\dagger (A - \lambda_k I), \quad \therefore \mathbf{y}^\dagger \mathbf{y} = 0$$

ノルムが 0 になるベクトルは零ベクトル  $\mathbf{0}$  だけであるから

$$\mathbf{y} = (A^\dagger - \lambda_k^* I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \quad \therefore A^\dagger \mathbf{u}_k = \lambda_k^* \mathbf{u}_k \quad (8.38)$$

である。\$AA^\dagger = A^\dagger A\$ の場合、\$A^\dagger\$ は \$A\$ と同じ固有ベクトルをもつが、固有値は複素共役になる。エルミート行列 \$A^\dagger = A\$ の場合、これから \$\lambda\_k\$ は実数になる。ユニタリー行列 \$A^\dagger = A^{-1}\$ の場合

$$A^{-1}\mathbf{u}_k = \lambda_k^*\mathbf{u}_k, \quad \therefore \quad \mathbf{u}_k = \lambda_k^*A\mathbf{u}_k = |\lambda_k|^2\mathbf{u}_k$$

になるから \$|\lambda\_k| = 1\$ であり \$\lambda\_k = e^{i\theta\_k}\$, \$\theta\_k = \text{実数}\$ とおける。

\$A\mathbf{u}\_\ell = \lambda\_\ell\mathbf{u}\_\ell\$ に \$\mathbf{u}\_k^\dagger\$ をかければ

$$\mathbf{u}_k^\dagger A\mathbf{u}_\ell = \lambda_\ell\mathbf{u}_k^\dagger\mathbf{u}_\ell$$

(8.38) に \$\mathbf{u}\_\ell^\dagger\$ をかけ複素共役をとると

$$\left(\mathbf{u}_\ell^\dagger A^\dagger \mathbf{u}_k\right)^* = \lambda_k \left(\mathbf{u}_\ell^\dagger \mathbf{u}_k\right)^* = \lambda_k \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell$$

左辺に (8.6) を用いると

$$\mathbf{u}_k^\dagger A\mathbf{u}_\ell = \lambda_k \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell, \quad \therefore \quad (\lambda_\ell - \lambda_k) \mathbf{u}_k^\dagger \mathbf{u}_\ell = 0$$

\$\lambda\_k \neq \lambda\_\ell\$ のとき \$\mathbf{u}\_k^\dagger \mathbf{u}\_\ell = 0\$ になる。エルミート行列と同様に、縮退がある場合でも \$k \neq \ell\$ のとき \$\mathbf{u}\_k^\dagger \mathbf{u}\_\ell = 0\$ とできるから、正規行列の固有ベクトルは正規直交系 \$\mathbf{u}\_k^\dagger \mathbf{u}\_\ell = \delta\_{k\ell}\$ をなす。(8.37) と同様にして、正規行列 \$A\$ はユニタリー行列 \$U\$ で \$U^\dagger A U = \Lambda\$ と対角化できる。ただし \$U\$ は (8.33), \$\Lambda\$ は (8.34) で与えられる。

\$A\$ は正規行列 \$\iff\$ ユニタリー行列で対角化 または 固有ベクトルは直交系

\$\implies\$ は示した。\$\impliedby\$ を示す。\$A\$ はユニタリー行列 \$U\$ で対角化できるから、\$\Lambda\$ を対角行列として \$A = U\Lambda U^\dagger\$ とおける。\$A^\dagger = U\Lambda^\dagger U^\dagger\$ になるから

$$AA^\dagger = U\Lambda U^\dagger U\Lambda^\dagger U^\dagger = U\Lambda\Lambda^\dagger U^\dagger, \quad A^\dagger A = U\Lambda^\dagger U^\dagger U\Lambda U^\dagger = U\Lambda^\dagger\Lambda U^\dagger$$

対角行列 \$\Lambda\$ は \$\Lambda\Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger\Lambda\$ を満たすから \$AA^\dagger = A^\dagger A\$ である。

### 非正規行列の対角化

正規行列でない \$n\$ 次正方行列 \$A\$ の固有値 \$\lambda\_1, \lambda\_2, \dots, \lambda\_n\$ がすべて異なる場合を扱う。固有値 \$\lambda\_k\$ の固有ベクトルを \$\mathbf{u}\_k\$ とする。\$A\mathbf{u}\_k = \lambda\_k\mathbf{u}\_k\$ である。(8.38) は成り立たないから、\$\mathbf{u}\_k\$ と \$\mathbf{u}\_\ell\$ は直交するとは限らない。しかし、**1 次独立 (線形独立)** ではある。\$c\_1 = c\_2 = \dots = c\_n = 0\$ の場合だけ

$$c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \tag{8.39}$$

が成り立つとき、\$\mathbf{u}\_1, \dots, \mathbf{u}\_n\$ は 1 次独立であるという。\$\mathbf{u}\_k\$ が正規直交系ならば簡単に示せるが、ここでは直交性は使えない。(8.39) に \$A\$ を作用させると

$$\sum_{k=1}^n A\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad \text{ただし } \mathbf{v}_k = c_k\mathbf{u}_k$$

更に、\$A\$ を繰り返し作用すると \$i = 1, 2, \dots, n\$ に対して

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^{i-1}\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad \text{つまり } \sum_{k=1}^n r_{ik}v_{kj} = (RV)_{ij} = 0, \quad \therefore \quad RV = O = \text{零行列}$$

ただし、\$r\_{ik} = \lambda\_k^{i-1}\$, \$v\_{kj} = (\mathbf{v}\_k)\_j\$ である。\$R\$ は (8.18) のヴァンデルモンド行列であるから、固有値 \$\lambda\_k\$ が互いに異なるとき \$\det R \neq 0\$ であり逆行列 \$R^{-1}\$ が存在する。したがって \$R^{-1}RV = V = O\$、つまり、\$\mathbf{v}\_k = c\_k\mathbf{u}\_k = \mathbf{0}\$ である。全ての \$c\_k\$ は 0 になるから、\$\mathbf{u}\_1, \dots, \mathbf{u}\_n\$ は 1 次独立である。

(8.39) を成分で表すと

$$\sum_{k=1}^n c_k (\mathbf{u}_k)_i = \sum_{k=1}^n (U)_{ik} c_k = (U\mathbf{c})_i = 0, \quad \therefore U\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (8.40)$$

ただし,  $U$  は固有ベクトルを並べた  $n$  次正方行列 (8.33) である。  $\det U = 0$  ならば  $U\mathbf{c} = \mathbf{0}$  は自明な解 ( $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ) 以外の解も存在する。したがって,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  が 1 次独立の場合  $\det U \neq 0$  であり, 逆行列  $U^{-1}$  が存在する。

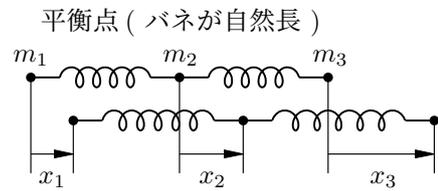
(8.35) を導いたのと同様にすれば,  $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$  より  $AU = UA$  であるから

$$U^{-1}AU = A, \quad (A)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$

になる。  $n$  次正方行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  が互いに異なる場合,  $A$  は固有ベクトルを並べた行列  $U$  で対角化される。ただし,  $U$  はユニタリー行列とは限らない。

## 8.8 連成振動

2 個以上の振動子が互いに力を及ぼしあいながら行う振動を**連成振動**という。具体例として, 右図のように  $x$  軸上にある質量  $m_1, m_2, m_3$  の 3 個の質点がバネ定数  $k$  のバネで結ばれている系を考える。3 個の質点の平衡点からの変位を  $x_1, x_2, x_3$  とする。力がどの向きに働くかは  $x_1 < x_2 < x_3$  の場合を考えれば十分である。このとき, 質点 1 には  $x$  軸正方向に  $k(x_2 - x_1)$  の力が作用する。質点 2 に作用する力は,  $x$  軸正方向に  $k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$  である。また, 質点 3 には  $x$  軸負方向に  $k(x_3 - x_2)$  の力が作用する。したがって, 運動方程式は



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1), \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2 + x_3), \quad m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) \quad (8.41)$$

になる。各質点の運動方程式は他の質点の変位を含むから独立には解けない。

$$M = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad V = (v_{ij}) = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\sum_{j=1}^3 m_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \sum_{j=1}^3 v_{ij} x_j, \quad \therefore M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + V \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{つまり} \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + M^{-1} V \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と表せる。  $M$  と  $V$  は実対称行列である。また

$$\mathbf{x}^\dagger M \mathbf{x} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2, \quad \mathbf{x}^\dagger V \mathbf{x} = k \left( (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right)$$

より  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  のとき  $\mathbf{x}^\dagger M \mathbf{x} > 0$ ,  $\mathbf{x}^\dagger V \mathbf{x} \geq 0$  になる。  $m_1 = m_2 = m_3$  の場合  $M^{-1}V$  は実対称行列であるが, これ以外では正規行列ではない。

一般に,  $M$  と  $V$  が  $n \times n$  実対称行列のとき

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n v_{ij} x_j = 0, \quad \text{つまり} \quad M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + V \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (8.42)$$

を考える。\$M\$ は対角行列である必要はない。\$\mathbf{x} \neq 0\$ のとき

$$\mathbf{x}^\dagger M \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i x_j > 0, \quad \mathbf{x}^\dagger V \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n v_{ij} x_i x_j \geq 0 \quad (8.43)$$

とする。(8.42) の特別な場合が (8.41) である。\$M^{-1}V\$ の固有値を \$\lambda\_i\$, 固有ベクトルを \$\mathbf{u}\_i\$ とする。

$$M^{-1}V \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \text{つまり} \quad (V - \lambda_i M) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

である。\$M^{-1}V\$ は正規行列とは限らない。\$\lambda\_i\$ は \$\det(V - \lambda M) = 0\$ の解である。これは \$n\$ 個の解をもつが、簡単のため、互いに異なるとする。

$$\mathbf{u}_i^\dagger (V - \lambda_j M) \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^\dagger V \mathbf{u}_j - \lambda_j \mathbf{u}_i^\dagger M \mathbf{u}_j = 0$$

\$i = j\$ とすると \$\lambda\_i = \mathbf{u}\_i^\dagger V \mathbf{u}\_i / \mathbf{u}\_i^\dagger M \mathbf{u}\_i\$ になる。(8.43) より \$\lambda\_i\$ は非負の実数である。また、\$i\$ と \$j\$ を入れ換え複素共役をとると \$M^\dagger = M, V^\dagger = V\$ であるから (8.7) より

$$\mathbf{u}_i^\dagger V \mathbf{u}_j - \lambda_i \mathbf{u}_i^\dagger M \mathbf{u}_j = 0, \quad \therefore (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{u}_i^\dagger M \mathbf{u}_j = 0$$

\$i \neq j\$ のとき \$\lambda\_i \neq \lambda\_j\$ であるから \$\mathcal{M}\_i = \mathbf{u}\_i^\dagger M \mathbf{u}\_i > 0\$ として

$$\mathbf{u}_i^\dagger M \mathbf{u}_j = \mathcal{M}_i \delta_{ij}, \quad \mathbf{u}_i^\dagger V \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_i^\dagger M \mathbf{u}_j = \mathcal{M}_i \lambda_j \delta_{ij} \quad (8.44)$$

になる。\$\mathbf{u}\_i\$ を定数倍したベクトルも固有ベクトルであるから \$\mathcal{M}\_i\$ は正であれば任意にとれる。

\$\sum\_j c\_j \mathbf{u}\_j = \mathbf{0}\$ のとき \$\mathbf{u}\_i^\dagger M\$ をかけると

$$\sum_j c_j \mathbf{u}_i^\dagger M \mathbf{u}_j = \sum_j c_j \mathcal{M}_i \delta_{ij} = \mathcal{M}_i c_i = 0, \quad \therefore \sum_i c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \iff \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

したがって \$\mathbf{u}\_i\$ は 1 次独立である。\$i \neq j\$ のとき、\$\mathbf{u}\_i^\dagger M \mathbf{u}\_j = 0\$ であるが \$\mathbf{u}\_i^\dagger \mathbf{u}\_j = 0\$ とは限らない。

\$\mathbf{u}\_i\$ は 1 次独立であるから、(8.42) の解 \$\mathbf{x}(t)\$ は

$$\mathbf{x}(t) = \sum_j y_j(t) \mathbf{u}_j \quad (8.45)$$

とおける。(8.44) より

$$\mathbf{u}_i^\dagger \left( M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + V \mathbf{x} \right) = \mathcal{M}_i \left( \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \lambda_i y_i \right), \quad \therefore \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \lambda_i y_i = 0 \quad (8.46)$$

になる。\$y\_i\$ は独立に運動し、角速度 \$\sqrt{\lambda\_i} > 0\$ の単振動あるいは等速運動 (\$\lambda\_i = 0\$) する。独立に運動する \$y\_i\$ を **基準座標**、これが行う単振動を **基準振動** という。

列ベクトル \$\mathbf{u}\_i\$ を並べた行列 \$U = (\mathbf{u}\_1 \ \mathbf{u}\_2 \ \cdots \ \mathbf{u}\_n)\$, 成分で表せば \$U\_{ij} = (\mathbf{u}\_j)\_i\$ を考える。(8.40) と同様に、\$\mathbf{u}\_i\$ は 1 次独立であるから \$\det U \neq 0\$ になり逆行列 \$U^{-1}\$ が存在する。一般に

$$(U^\dagger A U)_{ij} = \sum_{k\ell} U_{ki}^* A_{k\ell} U_{\ell j} = \sum_{k\ell} (\mathbf{u}_i)_k^* A_{k\ell} (\mathbf{u}_j)_\ell = \mathbf{u}_i^\dagger A \mathbf{u}_j$$

であるから (8.44) は

$$(U^\dagger M U)_{ij} = \mathcal{M}_i \delta_{ij}, \quad (U^\dagger V U)_{ij} = \lambda_j (U^\dagger M U)_{ij}$$

と表せる。対角行列 \$A\_{ij} = \lambda\_i \delta\_{ij}\$ を導入すると、第 2 式は

$$U^\dagger V U = U^\dagger M U A, \quad \therefore V U = M U A, \quad U^{-1} M^{-1} V U = A$$

$U^{-1}M^{-1}VU$  は対角行列になる。 $\mathbf{u}_i$  が直交系でない場合,  $(U^\dagger U)_{ij} = \mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j$  より  $U$  をユニタリ行列にできないから,  $U^\dagger M U$  と  $U^\dagger V U$  が対角行列であっても,  $U^\dagger M^{-1} V U$  は対角行列ではない。

$U$  を用いて (8.45), (8.46) を導く。 $d^2 \mathbf{x}/dt^2 = -M^{-1}V\mathbf{x}$  に  $U^{-1}$  をかけ  $\mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x}$  とすると

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = -U^{-1}M^{-1}VU\mathbf{y} = -\Lambda \mathbf{y}, \quad \therefore \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\lambda_i y_i$$

である。また  $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$  より

$$x_k = \sum_i U_{ki} y_i = \sum_i y_i (\mathbf{u}_i)_k, \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \sum_i y_i \mathbf{u}_i$$

になる。

以上の一般論を (8.41) に適用する。両端の質点の質量が同じ場合 ( $m_1 = m_3$ )

$$(V - \lambda M)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k - m_1 \lambda & -k & 0 \\ -k & 2k - m_2 \lambda & -k \\ 0 & -k & k - m_1 \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

になる。

$$\det(V - \lambda M) = -m_1^2 m_2 \lambda (\lambda - \omega_1^2) (\lambda - \omega_2^2)$$

ただし

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{k \frac{2m_1 + m_2}{m_1 m_2}} = \omega_1 \sqrt{1 + 2\mu}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_2}$$

である。3つの異なる固有値が求まるが, これを  $\lambda_1 = \omega_1^2$ ,  $\lambda_2 = \omega_2^2$ ,  $\lambda_3 = 0$  とする。

$$u_2 = \left(1 - \frac{m_1}{k} \lambda\right) u_1, \quad u_3 = \left(\left(1 - \frac{m_1}{k} \lambda\right) \left(2 - \frac{m_2}{k} \lambda\right) - 1\right) u_1$$

であるから, 固有ベクトル  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(\lambda = \lambda_i)$  は  $u_1 = 1$  とすると

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mu \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2\mu & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_3 = 0$ ,  $\mathbf{u}_2^\dagger \mathbf{u}_3 = 2(1 - \mu)$  になり  $m_1 \neq m_2$  のとき  $\mathbf{u}_2$  と  $\mathbf{u}_3$  は直交しないが

$$\mathbf{u}_1^\dagger M \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\dagger M \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2^\dagger M \mathbf{u}_3 = 0$$

である。 $d^2 y_i/dt^2 + \lambda_i y_i = 0$  より  $C_i, D_i$  を任意定数として

$$y_1 = C_1 \sin \omega_1 t + D_1 \cos \omega_1 t, \quad y_2 = C_2 \sin \omega_2 t + D_2 \cos \omega_2 t, \quad y_3 = C_3 t + D_3$$

(8.41) の一般解は

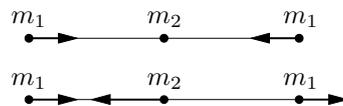
$$\mathbf{x} = U\mathbf{y}, \quad \text{つまり} \quad x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = -2\mu y_2 + y_3, \quad x_3 = -y_1 + y_2 + y_3$$

になる。 $y_3 = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_1 x_3)/(2m_1 + m_2)$  は重心である。

初期条件を適当にとれば, 基準振動だけの運動

$$(a) \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -y_1$$

$$(b) \quad x_1 = y_2, \quad x_2 = -2\mu y_2, \quad x_3 = y_2$$



は可能である。(a) の場合, 中心の質点は静止し, 両端の質点は逆向きに振動する。一方, (b) の場合, 両端の質点は同じ振動をする。中心の質点は逆向きに振動し, 重心は静止したままである。

## 8.9 座標系の回転

3次元空間の座標系  $S$  を原点  $O$  のまわりに回転させて、新しい座標系  $S'$  に変換する。 $S$  の直交単位ベクトルを  $e_i$ ,  $S'$  の直交単位ベクトルを  $e'_i$  とする ( $i = 1, 2, 3$ )。 (1.19) より

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij}$$

である。 $a_{ij} = e'_i \cdot e_j$  とすると

$$e'_i = \sum_{k=1}^3 e'_i \cdot e_k e_k = \sum_{k=1}^3 a_{ik} e_k, \quad e_i = \sum_{k=1}^3 e_i \cdot e'_k e'_k = \sum_{k=1}^3 a_{ki} e'_k \quad (8.47)$$

になる。

$$e'_i \cdot e'_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 a_{ik} a_{j\ell} e_k \cdot e_\ell = \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$$

3次正方行列  $A = (a_{ij})$  で表せば

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^3 (A)_{ik} (A^T)_{kj} = (A A^T)_{ij} = \delta_{ij}, \quad \therefore A A^T = I$$

行列  $A$  は直交行列である。(8.47) は

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$$

と書ける。

(1.23) と同様に  $e'_1 \times e'_2 = e'_3$  であるから (1.28) より

$$1 = (e'_1 \times e'_2) \cdot e'_3 = \sum_{i,j,k} a_{1i} a_{2j} a_{3k} (e_i \times e_j) \cdot e_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \det A$$

である。座標変換が3つの座標軸を全て反転させる空間反転を含む場合  $e'_1 \times e'_2 = -e'_3$  になるから  $\det A = -1$  である。以下では空間反転は考えない。

$S$  と  $S'$  でのベクトル  $v$  の成分をそれぞれ  $v_i, v'_i$  とすると

$$v = \sum_{i=1}^3 v'_i e'_i = \sum_{j=1}^3 v_j e_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_j a_{ij} e'_i, \quad \therefore v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j, \quad v_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} v'_j \quad (8.48)$$

である。行列で表せば

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

ベクトル  $(v'_1, v'_2, v'_3)$  は別のベクトルではなく  $v$  の  $S'$  系での成分である。座標変換に対して (8.48) の変換則を満たす3つの成分で表される量が、3次元空間のベクトルの正確な定義である。一方、座標変換に対して不変な量をスカラーと定義する。例えば、2つのベクトルの内積は

$$\sum_{i=1}^3 u'_i v'_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j \sum_{k=1}^3 a_{ik} v_k = \sum_{jk} u_j (A^T A)_{jk} v_k = \sum_{k=1}^3 u_k v_k$$

になるからスカラーである。

以上では、あるベクトル  $\boldsymbol{v}$  の S 系と S' 系の成分間の関係を求めた。一方、 $\boldsymbol{v}$  を S' 系に固定して、つまり、S' 系と一緒に回転させたベクトル  $\boldsymbol{v}'$  を考え、 $\boldsymbol{v}'$  と  $\boldsymbol{v}$  の関係を調べてもよい。 $\boldsymbol{v}'$  の S' 系での成分は  $\boldsymbol{v}$  の S 系での成分と同じであるから

$$\boldsymbol{v}' = \sum_{k=1}^3 v_k \boldsymbol{e}'_k = \sum_{k=1}^3 v_k \sum_{i=1}^3 a_{ki} \boldsymbol{e}_i$$

$\boldsymbol{v}'$  の S 系での成分を  $v'_i$  とすると

$$v'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ki} v_k, \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}' = A^T \boldsymbol{v} = A^{-1} \boldsymbol{v} \quad (8.50)$$

になる。(8.49) と (8.50) は逆の関係にある。ただし、(8.49) では  $v'_i$  は  $\boldsymbol{v}$  の S' 系での成分、(8.50) では  $\boldsymbol{v}$  を回転したベクトル  $\boldsymbol{v}'$  の S 系での成分である。

座標系を  $z$  軸まわりに  $\theta$  回転させた場合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \cos \theta \boldsymbol{e}_1 + \sin \theta \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= -\sin \theta \boldsymbol{e}_1 + \cos \theta \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 &= \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

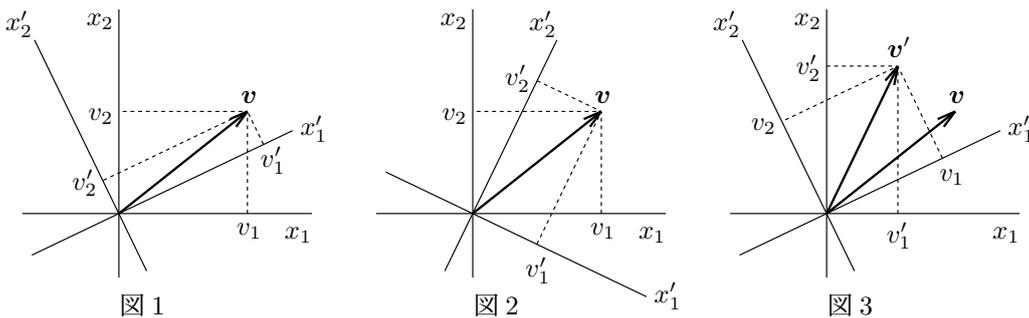
である。

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{d\theta} = \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{d\theta} = -\boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{d\theta} = \mathbf{0}$$

及び  $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}'_2$ ,  $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}'_1$  より

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_i}{d\theta} = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.52)$$

である。(8.49) の関係を図示すると下の図 1 になる。図 2 は座標系を逆回転 ( $-\theta$ ) させたときの (8.49) である。一方、(8.50) の関係は図 3 になる。図 2 と図 3 の  $v'_i$  は一致する。



上の例で、ある点  $\boldsymbol{x}$  を S' 系と一緒に回転させた点を  $\boldsymbol{x}'$  とすれば  $\boldsymbol{x}' = A^T \boldsymbol{x}$  より

$$x'_1 = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, \quad x'_2 = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, \quad x'_3 = x_3$$

になるから、回転軸 ( $z$  軸) 上の点  $x_1 = x_2 = 0$  の場合  $x'_1 = x'_2 = 0$  になり  $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$  である。一般の  $A$  について、回転しても変わらない点

$$\boldsymbol{x}' = A^{-1} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{つまり} \quad (A - I) \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad (8.53)$$

が原点を通る直線をなすことを示す。 $(A - I)^T = A^T - I = A^{-1} - I = A^{-1}(I - A)$  より

$$\det(A - I) = \det(A - I)^T = \det(-A^{-1}(A - I)) = \det(-A^{-1}) \det(A - I)$$

ところで  $\det(-A^{-1}) = (-1)^3 \det(A^{-1}) = -(\det A)^{-1} = -1$  になるから  $\det(A - I) = 0$  である。したがって, (8.28) より (8.53) は  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  である解をもつ。このとき  $c$  を任意の実数として  $c\mathbf{x}$  も (8.53) の解であるから, 原点を通る直線上で  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  になる。この直線が回転軸である。ただし  $A = I$  は除く。これは2つに座標系が一致する場合であり, 任意の点で  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  になる。

$S'$  系の直交単位ベクトルが変数  $s$  の関数  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i(s)$  として変化する場合を考える。

$$a_{ij}(s) = \mathbf{e}'_i(s) \cdot \mathbf{e}_j, \quad A(s) A^T(s) = A^T(s) A(s) = I$$

である。 $\Delta s$  が微小のとき

$$A(s + \Delta s) = A(s) + \Delta s \frac{dA}{ds} + \cdots = \left( I + \Delta s B(s) \right) A(s), \quad B(s) \equiv \frac{dA}{ds} A^{-1}(s)$$

とおける。 $(\Delta s)^2$  を無視するとき

$$A(s + \Delta s) A^T(s + \Delta s) = (I + \Delta s B) A(s) A^T(s) (I + \Delta s B^T) = I + \Delta s (B + B^T) = I$$

であるから  $B$  は反対称行列  $B^T = -B$  である。 $B$  の行列要素を  $b_{ij}$  とすると  $b_{ii} = 0$  であり

$$b_{12} = -b_{21} = n_3, \quad b_{23} = -b_{32} = n_1, \quad b_{31} = -b_{13} = n_2$$

とおける。(1.26) の  $\varepsilon_{ijk}$  を用いれば

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kij} n_k(s)$$

である。 $(S_k)_{ij} = -i\varepsilon_{kij}$ , つまり

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

である3つの  $3 \times 3$  エルミート行列  $S_1, S_2, S_3$  を用いれば

$$b_{ij} = i \sum_{k=1}^3 (S_k)_{ij} n_k(s) = i \sum_{k=1}^3 (S_k n_k)_{ij}$$

$B = (dA/ds)A^{-1}$  より

$$\frac{dA}{ds} = BA, \quad B = i \sum_{k=1}^3 S_k n_k(s) \quad (8.55)$$

になる。この関係式を  $\mathbf{e}'_i(s)$  で表すと

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{ds} = \sum_{k=1}^3 \frac{da_{ik}}{ds} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 (BA(s))_{ik} \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^3 b_{ij} \mathbf{e}'_j(s) = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{kij} n_k(s) \mathbf{e}'_j(s)$$

(1.28) と同様に

$$\mathbf{e}'_k \times \mathbf{e}'_i = \sum_j \varepsilon_{kij} \mathbf{e}'_j$$

であるから

$$\frac{de'_i}{ds} = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{e}'_i(s), \quad \text{ただし} \quad \mathbf{n}(s) = \sum_k n_k(s) \mathbf{e}'_k(s) \quad (8.56)$$

になる。ある点  $\mathbf{x}$  を  $S'$  系と一緒に回転させた点を  $\mathbf{x}'(s)$  とすると

$$\mathbf{x}'(s) = \sum_i x_i \mathbf{e}'_i(s)$$

である。 $x_i$  は  $s$  に依存しない。これから

$$\frac{d\mathbf{x}'}{ds} = \sum_i x_i \frac{de'_i}{ds} = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{x}'(s)$$

$\mathbf{n}(s)$  軸上の点  $\mathbf{x}' = c\mathbf{n}(s)$  ならば  $d\mathbf{x}'/ds = 0$  になるから、 $\mathbf{n}(s)$  は回転軸の方向を表す。ただし、回転軸は  $s$  の関数としてその向きを変える。

回転軸の方向  $\mathbf{n}$  が一定の場合を考える。 $n_k$  を定数として

$$\mathbf{n} = \sum_k n_k \mathbf{e}_k$$

とおける。回転軸まわりの角度  $\theta$  を  $s$  とすれば (8.56) は

$$\frac{de'_i}{d\theta} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}'_i(\theta)$$

(8.52) と比較すれば、 $\mathbf{n}$  は回転軸方向の単位ベクトルである。回転軸の方向は  $\mathbf{n}$  でも  $-\mathbf{n}$  でもよいわけだが、右ネジを角  $\theta$  回転させたとき、ネジの進む方向を回転軸の方向とする。(8.55) は

$$\frac{dA}{d\theta} = iS_n A(\theta), \quad S_n \equiv S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 = \begin{pmatrix} 0 & -in_3 & in_2 \\ in_3 & 0 & -in_1 \\ -in_2 & in_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_n = 0$$

$S_n$  は  $\theta$  に依存しないから行列の指数関数の微分 (8.27) より

$$A(\theta) = \exp(i\theta S_n) A(0) = \exp(i\theta S_n)$$

$\theta = 0$  のとき  $S$  系と  $S'$  系は一致しているとして  $A(0) = I$  とした。上に示した  $S_n$  の具体形あるいは  $S_i$  の定義 (8.54) より  $\mathbf{n}$  が単位ベクトル  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  のとき  $S_n^3 = S_n$  になるから

$$S_n^{2k} = S_n^3 S_n^{2k-3} = S_n^{2k-2} = \dots = S_n^2, \quad (k \geq 1) \quad S_n^{2k+1} = S_n, \quad (k \geq 0)$$

これから

$$\begin{aligned} A &= \exp(i\theta S_n) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} S_n^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} S_n^{2k+1} \\ &= I + S_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + iS_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I + S_n^2 (\cos \theta - 1) + iS_n \sin \theta \end{aligned}$$

$z$  軸まわりの回転 ( $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$ ) の場合 (8.51) を再現する。

### 回転座標系でのニュートン方程式

時刻  $t$  における質点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}(t)$ 、質点に作用する力を  $\mathbf{F}$  とすると、ニュートン方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

通常、ベクトルを空間固定の座標系 (慣性系) の成分で表すが、例えば、地球の自転の影響を調べる場合、自転する地球に固定した回転座標系で運動を記述する必要がある。座標系  $S$  を空間固定の座標系、 $S'$  を回転座標系とする。 $S'$  の回転軸と回転角は時間  $t$  の関数である。変数  $s$  として  $t$  を採用すると (8.56) は

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}'_i(t), \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \sum_k \omega_k(t) \mathbf{e}'_k(t)$$

ただし  $\mathbf{n}$  を  $\boldsymbol{\omega}$  で表す。 $\boldsymbol{\omega}(t)$  は時刻  $t$  での回転軸の方向を表すが単位ベクトルではない。回転軸方向が一定で (その方向を単位ベクトル  $\mathbf{n}$  で表す)、回転軸まわりの角度  $\theta$  が  $\theta = \theta(t)$  のとき

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{e}'_i}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n} \times \mathbf{e}'_i, \quad \therefore \boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n}$$

したがって、回転軸方向が一定でない場合も含めて、 $\boldsymbol{\omega}$  の大きさは角速度になる。 $\boldsymbol{\omega}$  を角速度ベクトルという。ベクトル  $\mathbf{v}$  を  $S'$  系の成分で表して

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v'_i(t) \mathbf{e}'_i(t)$$

とすると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dv'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + v'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{dv'_i}{dt} \mathbf{e}'_i(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (8.57)$$

回転座標系  $S'$  と一緒に回転する観測者から見れば、 $\mathbf{e}'_i(t)$  は一定方向を向き時間に依存しないように見える。そこで、回転座標系での時間微分を

$$\frac{d'\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dv'_i}{dt} \mathbf{e}'_i(t), \quad \frac{d'^2\mathbf{v}}{dt'^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{d^2v'_i}{dt'^2} \mathbf{e}'_i(t)$$

で定義すると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

になる。(8.57) を更に微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{d^2v'_i}{dt^2} \mathbf{e}'_i(t) + \sum_{i=1}^3 \frac{dv'_i}{dt} \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d'^2\mathbf{v}}{dt'^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{dv'_i}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d'\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) \\ &= \frac{d'^2\mathbf{v}}{dt'^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

を得る。 $\mathbf{v}$  として質点の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を考えると、運動方程式  $m d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}$  は

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

と書ける。 $d'\mathbf{r}/dt$  と  $d'^2\mathbf{r}/dt'^2$  は回転座標系で観測する速度と加速度である。運動方程式を回転座標系での加速度で表すと、実際の力  $\mathbf{F}$  以外の力が発生する。これを見かけの力という。右辺の第2項  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  を遠心力、第3項  $-2m\boldsymbol{\omega} \times d'\mathbf{r}/dt$  をコリオリの力という。

## 8.10 曲線座標

直交座標  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$  が 3 つの変数  $q_1, q_2, q_3$  の関数の場合を考える。 $q_i =$  一定 は一般に曲面になる。2 つの平面  $x_2 =$  一定,  $x_3 =$  一定 の交線が  $x_1$  軸になるが, これと同様に, 2 つの曲面  $q_2 =$  一定,  $q_3 =$  一定 の交線が  $q_1$  軸である。この軸は一般に曲線になる。3 次元極座標の場合  $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$  とすれば,  $q_1 =$  一定 は原点を中心とした球面,  $q_2 =$  一定 は  $z$  軸を対称軸とする円錐面,  $q_3 =$  一定 は  $xy$  平面に直交する平面になる。

$x_i$  の微分と  $q_i$  の微分は

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_j b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{ただし} \quad a_{ij} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad b_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (8.58)$$

で結ばれる。

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = (AB)_{ij}, \quad \therefore \quad AB = BA = I = \text{単位行列}$$

行列  $A, B$  は互いに逆行列である。 $D_b = \det B$  とする。 $D_b$  はヤコビアン (3.21) である。(8.25) より

$$\frac{1}{D_b} \frac{\partial D_b}{\partial q_k} = \sum_{ij} (B^{-1})_{ij} \frac{\partial b_{ji}}{\partial q_k} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial b_{ji}}{\partial q_k}$$

ところで

$$\frac{\partial b_{ji}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_j} \quad (8.59)$$

であるから

$$\frac{1}{D_b} \frac{\partial D_b}{\partial q_k} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_i}$$

になる。任意関数  $F$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ki} a_{nk} F) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_{ni} F) = \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ki} a_{nk} F) &= \sum_{ik} \left( \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_i} a_{nk} F + b_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{nk} F) \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{1}{D_b} \frac{\partial D_b}{\partial q_k} a_{nk} F + \frac{\partial}{\partial q_k} (a_{nk} F) \right) = \frac{1}{D_b} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (D_b a_{nk} F) \end{aligned}$$

したがって, 演算子の関係式として

$$\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{1}{D_b} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} D_b a_{nk} \quad (8.60)$$

が成り立つ。これと (8.58) から

$$\nabla^2 = \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \frac{1}{D_b} \sum_{nkl} \frac{\partial}{\partial q_k} D_b a_{nk} a_{nl} \frac{\partial}{\partial q_l}$$

になる。対称行列を

$$h_{kl} = \sum_n a_{nk} a_{nl} = \sum_n \frac{\partial q_k}{\partial x_n} \frac{\partial q_l}{\partial x_n}, \quad g_{kl} = \sum_n b_{kn} b_{ln} = \sum_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial q_l} \quad (8.61)$$

で定義する。  $H = A^T A$ ,  $G = B B^T$  より  $HG = GH = I$  であり  $G$  と  $H$  は互いに逆行列である。

$$\det G = (\det B)^2 = D_b^2, \quad \det H = D_b^{-2}$$

になるから

$$\nabla^2 = \sqrt{\det H} \sum_{k\ell} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{h_{k\ell}}{\sqrt{\det H}} \frac{\partial}{\partial q_\ell} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{k\ell} \frac{\partial}{\partial q_k} \sqrt{\det G} (G^{-1})_{k\ell} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \quad (8.62)$$

と表せる。  $dx_i = \sum_k b_{ki} dq_k$  より  $q_i$  と  $q_i + dq_i$  の2点間の距離  $ds$  は

$$(ds)^2 = \sum_i (dx_i)^2 = \sum_i \sum_{k\ell} b_{ki} dq_k b_{\ell i} dq_\ell = \sum_{k\ell} g_{k\ell} dq_k dq_\ell$$

になる。  $G$  を計量テンソルという。

### 直交曲線座標

$q_i = \text{一定}$  の座標面が互いに直交する曲線座標を直交曲線座標という。  $q_i = \text{一定}$  の曲面上の2点を  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  とすると ( $\mathbf{e}_i = x_i$  軸の単位ベクトル)

$$dq_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_j a_{ji} dx_j = \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \text{ただし} \quad \mathbf{a}_i = \sum_j a_{ji} \mathbf{e}_j$$

になるから、 $\mathbf{a}_i$  は  $q_i = \text{一定}$  の曲面に直交する法線ベクトルである。したがって、直交曲線座標である条件は

$$i \neq j \text{ のとき} \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \sum_n a_{ni} a_{nj} = h_{ij} = 0, \quad \text{つまり} \quad H, G \text{ が対角行列}$$

である。このとき

$$\nabla^2 = \sqrt{\det H} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{h_{kk}}{\sqrt{\det H}} \frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\sqrt{\det G}}{g_{kk}} \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (8.63)$$

行列式及び  $ds$  は

$$(\det B)^2 = \det G = g_{11} g_{22} g_{33}, \quad (ds)^2 = \sum_k g_{kk} (dq_k)^2$$

になる。

### 直交曲線座標の単位ベクトル

$x_k$  軸の単位ベクトル  $\mathbf{e}_k$  は平面  $x_k = \text{一定}$  の法線ベクトルである。これと同様に、曲線座標軸  $q_k$  の単位ベクトル  $\mathbf{u}_k$  は曲面  $q_k = \text{一定}$  の法線ベクトルであるから、 $\mathbf{u}_k$  は  $\mathbf{a}_k$  に比例する。

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_\ell = h_{k\ell} = \delta_{k\ell} h_{kk} = \frac{\delta_{k\ell}}{g_{kk}}, \quad \therefore \quad \mathbf{u}_k = \sqrt{g_{kk}} \mathbf{a}_k = \sqrt{g_{kk}} \sum_i a_{ik} \mathbf{e}_i$$

になる。  $H = A^T A$ ,  $AB = BA = I$  より  $A = B^T H$  になるから

$$a_{ik} = \sum_j b_{ji} h_{jk} = b_{ki} h_{kk} = \frac{b_{ki}}{g_{kk}}$$

したがって

$$\mathbf{u}_k = \sum_i \frac{b_{ki}}{\sqrt{g_{kk}}} \mathbf{e}_i, \quad \text{逆に} \quad \mathbf{e}_i = \sum_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_i) = \sum_k \frac{b_{ki}}{\sqrt{g_{kk}}} \mathbf{u}_k \quad (8.64)$$

とも書ける。

$$\sqrt{g_{kk}} \mathbf{u}_k = \sum_i b_{ki} \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}, \quad \mathbf{r} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$$

である。

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3 = \sum_{ijk} \frac{b_{1i} b_{2j} b_{3k}}{\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{ijk} b_{1i} b_{2j} b_{3k} \varepsilon_{ijk} = \frac{\det B}{|\det B|}$$

であるから、 $\det B > 0$  ならば  $\mathbf{u}_k$  は通常の右手系座標系である。 $\det B < 0$  の場合  $\mathbf{u}_k$  の向きを逆にすると右手系座標系になる。

単位ベクトル  $\mathbf{u}$  は  $q_i$  に依存して方向が変化する。 $\gamma_i = \sqrt{g_{ii}}$  とすると

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{b_{ki}}{\gamma_k} = \sum_{in} \mathbf{u}_n \frac{b_{ni}}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{b_{ki}}{\gamma_k} \quad (8.65)$$

である。

$$\sum_i b_{ni} b_{ki} = g_{nk} = \delta_{kn} g_{kk} = \delta_{kn} \gamma_k^2 \quad (8.66)$$

より (8.65) で  $n = k$  の部分は

$$\sum_i \frac{b_{ki}}{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{b_{ki}}{\gamma_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \sum_i \frac{b_{ki}^2}{\gamma_k^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2} = 0$$

になる。(2.23) と同様に、 $\partial \mathbf{u}_k / \partial q_\ell$  は  $\mathbf{u}_k$  と直交するから  $\mathbf{u}_k$  を含まない。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = \sum_{n \neq k} \mathbf{u}_n \sum_i \frac{b_{ni}}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial q_\ell} \frac{b_{ki}}{\gamma_k} = \sum_{n \neq k} \mathbf{u}_n \sum_i \frac{b_{ni}}{\gamma_n} \left( \frac{1}{\gamma_k} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_\ell} - \frac{b_{ki}}{\gamma_k^2} \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_\ell} \right)$$

第2項は  $n \neq k$  であるから (8.66) より 0 になり

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n \gamma_k} \sum_i b_{ni} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_\ell} \quad (8.67)$$

である。(8.59), (8.66) より

$$\begin{aligned} \sum_i b_{ni} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_\ell} &= \sum_i b_{ni} \frac{\partial b_{\ell i}}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_k} (b_{ni} b_{\ell i}) - \sum_i b_{\ell i} \frac{\partial b_{ni}}{\partial q_k} \\ &= 2 \delta_{n\ell} \gamma_\ell \frac{\partial \gamma_\ell}{\partial q_k} - \sum_i b_{\ell i} \frac{\partial b_{ni}}{\partial q_k} \end{aligned}$$

になるから

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = 2 \frac{\mathbf{u}_\ell}{\gamma_k} \frac{\partial \gamma_\ell}{\partial q_k} \sum_{n \neq k} \delta_{n\ell} - \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n \gamma_k} \sum_i b_{\ell i} \frac{\partial b_{ni}}{\partial q_k}$$

である。

$\ell = k$  の場合、第1項は 0 になる。第2項は (8.59) より

$$\sum_i b_{ki} \frac{\partial b_{ni}}{\partial q_k} = \sum_i b_{ki} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_n} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial b_{ki}^2}{\partial q_n} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_k^2}{\partial q_n} = \gamma_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_n}$$

したがって

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_k} = - \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_n} = - \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\sqrt{g_{nn}}} \frac{\partial}{\partial q_n} \sqrt{g_{kk}} \quad (8.68)$$

になる。

$\ell \neq k$  の場合

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = 2 \frac{\mathbf{u}_\ell}{\gamma_k} \frac{\partial \gamma_\ell}{\partial q_k} - \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n \gamma_k} \sum_i b_{\ell i} \frac{\partial b_{ni}}{\partial q_k} = 2 \frac{\mathbf{u}_\ell}{\gamma_k} \frac{\partial \gamma_\ell}{\partial q_k} - \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n \gamma_k} \sum_i b_{\ell i} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_n}$$

である。ただし、(8.59) より第2項で  $n$  と  $k$  を入れ換えた。 $\ell \neq k$  であるから (8.66) より

$$\sum_i b_{\ell i} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_n} = - \sum_i b_{ki} \frac{\partial b_{\ell i}}{\partial q_n} = - \sum_i b_{ki} \frac{\partial b_{ni}}{\partial q_\ell} = \sum_i b_{ni} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_\ell}$$

最後では再び (8.66) を用いた ( $n \neq k$ )。したがって

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = 2 \frac{\mathbf{u}_\ell}{\gamma_k} \frac{\partial \gamma_\ell}{\partial q_k} - \sum_{n \neq k} \frac{\mathbf{u}_n}{\gamma_n \gamma_k} \sum_i b_{ni} \frac{\partial b_{ki}}{\partial q_\ell}$$

第2項は (8.67) であるから

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial q_\ell} = \frac{\mathbf{u}_\ell}{\gamma_k} \frac{\partial \gamma_\ell}{\partial q_k} = \frac{\mathbf{u}_\ell}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial q_k} \sqrt{g_{\ell\ell}}, \quad \text{ただし } k \neq \ell \quad (8.69)$$

になる。

#### 勾配, 発散, 回転

ベクトル  $\mathbf{V}$  の  $x_k$  成分を  $V_k$ ,  $q_k$  成分を  $U_k$  とすると

$$\mathbf{V} = \sum_i V_i \mathbf{e}_i = \sum_k U_k \mathbf{u}_k = \sum_{ik} U_k \frac{b_{ki}}{\sqrt{g_{kk}}} \mathbf{e}_i, \quad \therefore V_i = \sum_k \frac{b_{ki}}{\sqrt{g_{kk}}} U_k \quad (8.70)$$

$$\mathbf{V} = \sum_k U_k \mathbf{u}_k = \sum_i V_i \mathbf{e}_i = \sum_{ik} V_i \frac{b_{ki}}{\sqrt{g_{kk}}} \mathbf{u}_k, \quad \therefore U_k = \sum_i \frac{b_{ki}}{\sqrt{g_{kk}}} V_i \quad (8.71)$$

である。勾配は

$$\nabla = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{ik} \mathbf{e}_i a_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} = \sum_k \frac{\mathbf{u}_k}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial q_k} \quad (8.72)$$

発散は (8.60), (8.70) から

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{1}{D_b} \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial q_k} D_b a_{ik} \frac{b_{ji}}{\sqrt{g_{jj}}} U_j$$

である。

$$\sum_i a_{ik} b_{ji} = (BA)_{jk} = \delta_{jk}$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \sqrt{\frac{\det G}{g_{kk}}} U_k \quad (8.73)$$

になる。 $U_k$  として  $\nabla F$  の  $q_k$  成分

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (8.74)$$

を代入すれば (8.63) を得る。回転は

$$\nabla \times \mathbf{V} = \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial}{\partial q_i} \times \mathbf{u}_j U_j = \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \times \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial q_i} U_j + \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial U_j}{\partial q_i}$$

(8.69) より  $j \neq i$  のとき  $\partial \mathbf{u}_j / \partial q_i \propto \mathbf{u}_i$  であるから, 第1項で寄与するのは  $j = i$  だけである。(8.68) から

$$\nabla \times \mathbf{V} = - \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \times \frac{\mathbf{u}_j}{\sqrt{g_{jj}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial q_j} U_i + \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial U_j}{\partial q_i}$$

第1項で  $i$  と  $j$  を入れ換えれば

$$\nabla \times \mathbf{V} = \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \left( \frac{\partial \sqrt{g_{jj}}}{\partial q_i} U_j + \sqrt{g_{jj}} \frac{\partial U_j}{\partial q_i} \right) = \sum_{ij} \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{g_{jj}} U_j$$

になる。 $\mathbf{u}_i$  が右手系ならば

$$\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{u}_k$$

であるから

$$\nabla \times \mathbf{V} = \sum_{ijk} \mathbf{u}_k \sqrt{\frac{g_{kk}}{\det G}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{g_{jj}} U_j \quad (8.75)$$

ただし,  $i, j, k$  は異なるから  $g_{ii} g_{jj} g_{kk} = \det G$  である。成分で表せば

$$\mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \sqrt{\frac{g_{11}}{\det G}} \left( \frac{\partial}{\partial q_2} \sqrt{g_{33}} U_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} \sqrt{g_{22}} U_2 \right), \quad \text{他の成分は } 1, 2, 3 \text{ の循環}$$

になる。 $U_j$  が  $\nabla F$  の成分 (8.74) の場合, 当然の結果

$$\nabla \times (\nabla F) = \sum_{ijk} \mathbf{u}_k \sqrt{\frac{g_{kk}}{\det G}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} = 0$$

になる。

### 3次元極座標

$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$  とすれば

$$B = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}, \quad \therefore G = B B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

あるいは

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

から行列  $G$  は直ちに求まる。極座標は直交曲線座標である。 $\sqrt{\det G} = r^2 \sin \theta$  であるから (8.63) より

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \end{aligned}$$

になる。これは (2.55) である。(8.64) より  $\tilde{b}_{ij} = b_{ij} / \sqrt{g_{ii}}$  とすると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

になり (2.50) を再現する。また, (8.72), (8.73), (8.75) から

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\phi \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

になる。これらは (2.51), (2.52), (2.53) である。

## 索引

## あ

アインシュタインの規約	9
鞍点	15, 142
鞍点法	143
1次従属	83
1次独立	83, 217
一様収束	134
一致の定理	136
一般解	77
因果律	168
ヴァンデルモンド行列	207
エルミート共役行列	201
エルミート行列	202, 213
演算子法	89
遠心力	225
円柱座標	46
オイラー型の微分方程式	98
オイラーの公式	4
オイラーの定数	141

## か

外積	7
解析関数	137
解析接続	137
階段関数	69, 70, 125
ガウス積分	45
ガウスの定理	58
ガウスの法則	60, 62
拡散方程式	177
角速度ベクトル	225
確定特異点	95
重ね合わせの原理	82
片側ラプラス変換	169
完全微分型	80
ガンマ関数	101, 141, 143
規格化	212
基準座標	219
基準振動	219
ギブスの現象	153

基本解	83
逆行列	202, 209
鏡像原理	140
行ベクトル	200
共役複素数	3
行列	200
行列式	203
極	119
極形式	3
極座標	30, 41, 43
曲線座標	226
極値(多変数関数)	15
曲率	23
曲率半径	23
虚軸	3
虚数単位	3
虚部	3
グラジエント(勾配)	24
クラメールの公式	211
グリーン関数	168, 187
グリーンの定理	50, 61, 186
クロネッカーのデルタ記号	6
計量テンソル	227
撃力	69
原始関数(複素関数)	112
懸垂曲線	95
コーシーの主値	132
コーシーの積分公式	115
コーシーの積分定理	111
コーシーの不等式	116
コーシー・リーマンの微分方程式	109
互換	203
固有値	212
固有ベクトル	212
固有方程式	212
コリオリの力	225
孤立特異点	119

## さ

最急降下曲線	142
--------	-----

最大勾配曲線	142	多重積分	38
最大値の原理	116	たたみ込み	166, 170
三角行列	206	ダランベールの解	19, 158, 181
指数関数 (行列の)	210, 224	単位行列	202
実行列	200	単純 (閉) 曲線	111
実軸	3	単連結領域	111
実部	3	力のなす仕事	48
自明な解	211	置換	8, 203
収束半径	135	直交	202
縮退	213	直交行列	215
主値	4	直交行列	202, 214
主値 (対数)	106	定数変化法	79
シュミットの直交化	182, 214	テイラー級数	1, 13, 118
小行列	207	テイラー展開	117
上極限	134	ディリクレ核	152
常微分方程式	77	ディリクレの境界条件	181, 186
真性特異点	119	ディリクレ問題	117
随伴行列	207	停留点	15
スカラー	221	デルタ関数	63
スカラー積	6	転置行列	201
スターリングの公式	144	同次	78, 85
ストークスの定理	70	同次型	78
正規行列	202, 216	特異点	108
正規直交関数系	156, 182	特性方程式	85, 212
正規直交系	213	特解	77, 79, 87
正則	108	ド・モアブルの公式	5
正則行列	202	トレース	209
正方行列	200		
接線ベクトル	22		
絶対収束	134		
切断線 (カット)	106		
線形独立	217		
線形微分方程式	78		
線積分	47		
全微分	13		

## た

対角化	214
対角行列	202
対称行列	202
代数学の基本定理	116
ダイバージェンス (発散)	27

## な

内積	6, 202
ナブラ演算子	24
ねじれ率	23
熱伝導方程式	177
ノイマン関数	102
ノイマンの境界条件	181, 186
ノルム	202

## は

パーセバルの等式	155
陪法線ベクトル	23
波動方程式	19, 156, 178
反エルミート行列	202
反対称行列	202

非同次	78, 87	メリン変換	125
微分演算子	17, 89	面積分	55
標準形	215		
フーリエ逆変換	162	や	
フーリエ級数	151	ヤコビアン	43, 211
フーリエ正弦級数	152	ユニタリー行列	202, 214
フーリエ変換	124, 162	余因子	207
フーリエ余弦級数	152	余因子行列	207
不確定性	163	ら	
複素関数	105	ラプラシアン	28
複素三角関数	105	ラプラス逆変換	171
複素指数関数	4, 105	ラプラス変換	169
複素積分	110	ラプラス方程式	33, 103, 177
複素対数関数	106	リーマン面	107
複素フーリエ級数	151	リウビルの定理	116
複素平面	3	リッカチ微分方程式	82
複素べき関数	106	留数	120
フレネ・セレの公式	23	累次積分	38
フレネル積分	114	ルジャンドル関数	148
分岐点	106	ルジャンドル多項式	99
分散公式	133	ルジャンドルの微分方程式	33, 98, 145
平均値の定理	115	列ベクトル	200
べき級数	134	レビ・チビタの記号	8
ベクトル	221	連成振動	218
ベクトル積	7	連立1次方程式	211
ベッセル関数	102	ローテーション(回転)	28
ベッセルの微分方程式	100, 184	ローラン展開	118
ベルヌーイ微分方程式	81	ロドリグの公式	100, 148
ベルヌーイ数	5, 131	ロンスキアン	83
ヘルムホルツ方程式	168		
偏角	3		
変数分離型	77		
変数分離法	33, 156, 184		
偏微分	12		
偏微分方程式	19, 176		
ポアソンの公式	117, 180		
ポアソン方程式	177		
法線ベクトル	22, 25, 56		

## ま

マクローリン級数	1, 118
未定係数法	79