

目次

1	特殊相対論のまとめ	1
1.1	ローレンツ変換	1
1.2	テンソル	4
1.3	真空中のマクスウェル方程式	6
1.4	相対論的運動方程式	11
2	クライン・ゴールドン方程式	14
2.1	クライン・ゴールドン方程式	14
2.2	階段ポテンシャル	16
2.3	クライン・ゴールドン方程式の2成分形式	19
3	ディラック方程式	23
3.1	ディラック方程式の導出	23
3.2	非相対論との比較	26
3.3	ガンマ行列	27
4	ディラック方程式の共変性	31
4.1	無限小ローレンツ変換	31
4.2	ディラック方程式の共変性	33
4.3	双線形形式	38
4.4	状態の変換	39
5	自由粒子	43
5.1	自由粒子	43
5.2	自由スピノールの性質	45
5.3	ブースト	48
5.4	ゴールドン分解	49
5.5	波束の運動	50
5.6	空孔理論	52
6	1次元ポテンシャル	54
6.1	階段ポテンシャルとクラインのパラドクス	55
6.2	井戸型ポテンシャル	59
7	中心力	64
7.1	動径方向の方程式	64
7.2	自由球面波	68
7.3	クーロン・ポテンシャル	70

8	場の量子化	74
8.1	場の量子化	74
8.2	クライン・ゴールドン場の量子化	75
8.3	ディラック場の量子化	80
9	摂動論	87
9.1	相互作用表示と S 行列	87
9.2	ウィックの定理	91
10	具体例	94
10.1	散乱	94
10.2	プロパゲータ	98
10.3	次元正則化法	102
10.4	繰込み	103

1 特殊相対論のまとめ

1.1 ローレンツ変換

ローレンツ変換の導出

簡単のため2つの慣性系 S と S' の座標軸は平行で、時刻 $t = t' = 0$ のとき両方の座標原点は一致しており、 S' は S の x 軸の正方向へ速さ v で移動しているとする。 S 系で時刻 t 、座標 (x, y, z) で起きた現象が、 S' 系では時刻 t' 、座標 (x', y', z') で起きたとする。ガリレイ変換では (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の関係は

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

である。この場合、 S 系で x 軸正方向に進む光の速さが c ならば S' 系での光速は $c - v$ になるから、光速不変の原理「真空中の光速は、光源の運動状態に無関係である。」を満たさない。そこでガリレイ変換を拡張して

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.1)$$

$$x = \alpha(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z' \quad (1.2)$$

とし、光速不変の原理が成り立つように係数 α を決定してみよう。

$t = t' = 0$ で原点から x 軸正方向に発射された光を考える。この光の速さを S 系で c 、 S' 系では c' としておく。時刻 t では光は $x = ct$ に到達する。 S' 系から見ると、時刻は t' で光は $x' = c't'$ に到達している。 $x = ct$ 、 $x' = c't'$ を (1.1) と (1.2) に代入すると

$$c't' = \alpha(ct - vt) = \alpha(c - v)t, \quad ct = \alpha(c't' + vt') = \alpha(c' + v)t'$$

2つの式の両辺を掛け合わせると

$$cc'tt' = \alpha^2(c - v)(c' + v)tt'$$

$v = 0$ のとき $\alpha = 1 > 0$ になる解は

$$\alpha = \sqrt{\frac{cc'}{(c - v)(c' + v)}}$$

である。ガリレイ変換に従うとすると $c' = c - v$ であるから $\alpha = 1$ という当然の結果になる。一方、光速不変の原理から $c' = c$ とすると

$$\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{(c - v)(c + v)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.3)$$

を得る。次に時間に対する変換を求める。(1.1) の x' を (1.2) に代入すると

$$x = \alpha(\alpha(x - vt) + vt') = \alpha^2 x - \alpha^2 vt + \alpha vt', \quad \text{つまり} \quad t' = \alpha \left(t + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{x}{v} \right)$$

ガリレイ変換である $\alpha = 1$ を代入すると $t' = t$ となり、時間は慣性系に依らない。光速不変の原理を満たす (1.3) の場合には

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.4)$$

になる。以上まとめると、ある現象の S と S' における時空座標 (x, y, z, t) の変換公式は

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

あるいは、時間 t の代わりに長さの次元である ct を用いれば ($\beta = v/c$)

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.5)$$

である。これはローレンツ変換の 1 例である。

ローレンツ変換の特徴は

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.6)$$

が成り立つことである。上付きの添字を使って

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

と書くことにする。これをまとめて x^μ で表す。 μ は 0, 1, 2, 3 の値をとる。

規約 1 ギリシャ文字の添字は 0, 1, 2, 3 の値を、ローマ字の添字は空間成分を表し 1, 2, 3 の値をとるとする。例えば

$$x^\mu = (x^0, x^k) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

である。

規約 2 同一の式中で 2 度現れる添字については、ギリシャ文字の添字ならば 0 ~ 3, ローマ字ならば 1 ~ 3 まで和をとるとし、和の記号 \sum は省略する。

ここで

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.7)$$

を定義すると、(1.6) は

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.8)$$

になる。ただし、規約 2 を適用して μ, ν の和の記号は省略した。和の記号を書けば

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

である。

さて、(1.5) を一般化して

$$x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (1.9)$$

を考える。16 個の a^μ_ν は x^μ に依存しない定数である。一般に、この変換が (1.8) を満たすときローレンツ変換という。2 度現れる添字は和をとるから他の文字に変えてもよい。したがって (1.8) は

$$g_{\sigma\rho} x'^\sigma x'^\rho = g_{\sigma\rho} a^\sigma_\mu a^\rho_\nu x^\mu x^\nu = g_{\sigma\rho} a^\sigma_\mu a^\rho_\nu x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

になり

$$g_{\sigma\rho} a^\sigma_\mu a^\rho_\nu = g_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

でなければならない。この条件は μ, ν について対称であるから、 $\mu = \nu$ の 4 個と $\mu \neq \nu$ の場合の $(16 - 4)/2 = 6$ 個の計 10 個の条件式になる。したがって、16 個の a^μ_ν のうち独立なものは 6 個である。なお、(1.8) では $a_{\mu\nu}$ あるいは $a^{\mu\nu}$ と書かずに a^μ_ν としたが、以下で述べるように添字の上付き、下付きには約束ごとがあり、これとの整合性のためである。

a^μ_ν を行列要素とする 4×4 行列 A 、つまり $A_{\mu\nu} = a^\mu_\nu$ を考える。 A の転置行列を \tilde{A} とする。

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} = a^\nu_\mu \quad (1.11)$$

である。(1.10) は

$$\tilde{A}_{\mu\sigma} g_{\sigma\rho} A_{\rho\nu} = (\tilde{A}GA)_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$$

ここで、 4×4 行列 G は $G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ である。行列式は $\det(\tilde{A}) = \det(A)$ であるから

$$\det(\tilde{A}GA) = \det(G) (\det(A))^2 = \det(G)$$

したがって

$$\det(A) = \det(a^\mu_\nu) = \pm 1$$

である。(1.10) で $\mu = \nu = 0$ とすると

$$(a^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (a^k_0)^2 = 1, \quad \text{つまり} \quad a^0_0 = \pm \left(1 + \sum_{k=1}^3 (a^k_0)^2\right)^{1/2}$$

である。ローレンツ変換は $\det(a^\mu_\nu)$ と a^0_0 の符号で分類され

$$\begin{array}{ll} \det(a^\mu_\nu) = +1 & \text{固有 (proper) 変換} \\ \det(a^\mu_\nu) = -1 & \text{非固有 (improper) 変換} \end{array} \quad \begin{array}{ll} a^0_0 \geq +1 & \text{順時間的 (orthochronous) 変換} \\ a^0_0 \leq -1 & \text{逆時間的 (non-orthochronous) 変換} \end{array}$$

という。特に、順時間的固有変換を単に固有ローレンツ変換ともいう。(1.5) の変換では

$$a^0_0 = a^1_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a^0_1 = a^1_0 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a^2_2 = a^3_3 = 1, \quad \text{その他} = 0$$

つまり

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} = 1 \quad (1.12)$$

であるから固有ローレンツ変換である。固有ローレンツ変換には、(1.5) のようなブースト (一定の速度で動く慣性系に移すローレンツ変換) と 3次元空間の座標回転及びこれらを組み合わせたものがある。非固有ローレンツ変換は 3次元空間の反転 ($a^0_0 \geq 1$) あるいは時間反転 ($a^0_0 \leq -1$) を含む変換である。時空を全て反転する変換は固有変換 ($\det(a^\mu_\nu) = 1$) である。

ブーストも“回転”と見なせる。 $x^4 = ix^0$ とすると (1.5) は

$$x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x^1 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x^4, \quad x'^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x^4 - \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x^1$$

であり

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = 1$$

であるから

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin \phi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

を満たす純虚数 ϕ が存在する。これから

$$x'^1 = x^1 \cos \phi + x^4 \sin \phi, \quad x'^4 = x^4 \cos \phi - x^1 \sin \phi$$

これは時間軸と x 軸を複素数 ϕ だけ“回転”させる変換である。 θ を実数として $\phi = i\theta$ とおけば $\cos \phi = \cosh \theta$, $\sin \phi = i \sinh \theta$ であるから

$$x'^1 = x^1 \cosh \theta - x^0 \sinh \theta, \quad x'^0 = x^0 \cosh \theta - x^1 \sinh \theta \quad (1.13)$$

ただし

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

とも表せる。

1.2 テンソル

相対論では、物理量がローレンツ変換に対してどのように変換されるかが重要である。この変換性により物理量を分類する。

スカラー (0 階のテンソル)

慣性系 S で定義された物理量で時間と位置の関数 $F(x^0, x^1, x^2, x^3)$ を単に $F(x)$ と書くことにする。 S' 系で見たとき、同じ時空点 $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ でその物理量 $F'(x')$ が

$$F'(x') = F(x)$$

であるとき、 $F(x)$ をスカラーという。 $F(x) = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ はスカラーである。

ベクトル (1 階のテンソル)

4 個の物理量の組 $V^\mu(x)$ が、 x^μ と同じ変換

$$V'^\mu(x') = a^\mu_\nu V^\nu(x) \quad (1.14)$$

を満たすとき $V^\mu(x)$ を反変ベクトル (contravariant vector) という。反変ベクトルの場合、成分を表す添字は上につける。これに対して反変ベクトルから

$$V_\mu \equiv g_{\mu\nu} V^\nu, \quad \text{つまり} \quad V_0 = V^0, \quad V_k = -V^k$$

で定義される V_μ を共変ベクトル (covariant vector) という。共変ベクトルの添字は下につける。逆に、 V^μ を V_μ で表すと

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu, \quad \text{ただし} \quad g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$$

である。 V^μ と V_μ は空間成分の符号が逆になるだけで同じものであり、どちらか一方だけを扱ってもよいが、両者を定義すると相対論の定式化がすっきりしたものになる。

規約 3 ベクトルに限らず, 一般に添字を下げる操作は $g_{\mu\nu}$ で行う。逆に, 添字を上げる操作は $g^{\mu\nu}$ で行う。

V_μ のローレンツ変換は

$$V'_\mu = g_{\mu\sigma} V'^\sigma = g_{\mu\sigma} a^\sigma_\rho V^\rho = g_{\mu\sigma} a^\sigma_\rho g^{\rho\nu} V_\nu = a_\mu^\nu V_\nu, \quad a_\mu^\nu = g_{\mu\sigma} a^\sigma_\rho g^{\rho\nu} \quad (1.15)$$

ここで添字の上げ下げは規約 3 による。つまり, a_μ^ν の下付き添字 μ は a^σ_ρ の上付き添字 σ を $g_{\mu\sigma}$ で引き下げたものである。下付き添字 $\rho \rightarrow$ 上付き添字 ν も同様である。(1.10) より

$$g_{\sigma\rho} a^\sigma_\mu a^\rho_\lambda = g_{\mu\lambda}, \quad \text{つまり} \quad a^\sigma_\mu \underbrace{g_{\sigma\rho} a^\rho_\lambda g^{\lambda\nu}}_{a_\sigma^\nu} = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu}$$

であるから

$$a^\sigma_\mu a_\sigma^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad \delta_\mu^\nu = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.16)$$

になる。 δ_μ^ν はクロネッカーのデルタ記号である。

(1.14), (1.15) の逆変換を求める。(1.16) を使うと

$$V'^\mu a_\mu^\sigma = a^\mu_\nu a_\mu^\sigma V^\nu = \delta_\nu^\sigma V^\nu = V^\sigma, \quad V'_\mu a^\mu_\sigma = a^\mu_\sigma a_\mu^\nu V_\nu = \delta_\sigma^\nu V_\nu = V_\sigma$$

つまり

$$V^\mu = V'^\nu a_\nu^\mu, \quad V_\mu = V'_\nu a^\nu_\mu \quad (1.17)$$

である。

2つのベクトル A^μ, B^μ の内積 $A \cdot B$ を

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B^0 - A^k B^k = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

で定義する。

$$A'^\mu B'_\mu = a^\mu_\sigma a_\mu^\rho A^\sigma B_\rho = \delta_\sigma^\rho A^\sigma B_\rho = A^\sigma B_\sigma$$

であるから, 内積はローレンツ変換に対して不変, つまり, スカラーである。 A^μ のノルム $A \cdot A$ を単に A^2 とも書く:

$$A^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$$

である。 A^2 と書くが正の値とは限らない。 $A^2 > 0$ のとき, 時間成分は空間成分より大きいので時間的ベクトル (time-like vector), $A^2 < 0$ のとき空間的ベクトル (space-like vector), $A^2 = 0$ のときゼロベクトル (null vector) という。 A^2 はスカラーでありその値は慣性系によらないから, ベクトルが3種類のどれに属するかは絶対的性質である。

(1.17) より $x^\nu = x'^\mu a_\mu^\nu$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = a_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

になる。これは共変ベクトルの変換 (1.15) である。反変ベクトル x^μ の微分 $\partial/\partial x^\mu$ は共変ベクトルであるから ∂_μ で表す。

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.18)$$

である。反変ベクトル ∂^μ は

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (1.19)$$

である。ダランベルシアン \square は

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial^\mu \partial_\mu$$

と書ける。これから \square がローレンツ変換に対して不変 ($\partial'^\mu \partial'_\mu = \partial^\mu \partial_\mu$) であることは一目瞭然である。(1.18), (1.19) で空間成分の符号が $A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$, $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ とは逆になる。

$$A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \partial^\mu B_\mu = \partial_\mu B^\mu = \partial^0 B^0 + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

である。

2 階のテンソル

2つの反変ベクトルの積

$$T^{\mu\nu}(x) = V^\mu(x)U^\nu(x)$$

を考える。ローレンツ変換に対して

$$T'^{\mu\nu}(x') = V'^\mu(x')U'^\nu(x') = a^\mu_\sigma a^\nu_\rho V^\sigma(x)U^\rho(x) = a^\mu_\sigma a^\nu_\rho T^{\sigma\rho}(x)$$

である。そこで、一般に

$$T'^{\mu\nu}(x') = a^\mu_\sigma a^\nu_\rho T^{\sigma\rho}(x) \quad (1.20)$$

を満たす量を **2 階の反変テンソル** という。同様にして、**2 階の共変テンソル** $T_{\mu\nu}(x)$, **2 階の混合テンソル** $T_\mu^\nu(x)$ も定義できる。

一般のテンソル

一般のテンソル $T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}$ も同様に定義できる。

縮約 (contraction)

混合テンソルにおいて上下 1 対の添字を同じくして、その添字について和をとり、2 階低いテンソルを作ることを縮約 (contraction) という。例えば、2 階のテンソル $T^\mu_\nu = A^\mu B_\nu$ から 0 階のテンソル (スカラー) である内積 $T^\mu_\mu = A^\mu B_\mu$ を求めることである。

1.3 真空中のマクスウェル方程式

テンソル形式に慣れるため、真空中のマクスウェル方程式をテンソル形式に書き直そう。マクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1.22)$$

である。(1.21) と

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.23)$$

は同値である。これを (1.22) に代入すると

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \right) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (1.24)$$

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ であるから

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.25)$$

になる。ここで

$$A^0 = \frac{1}{c} \phi, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z$$

$$j^0 = c\rho, \quad j^1 = j_x, \quad j^2 = j_y, \quad j^3 = j_z$$

とする。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \partial_0 A^0 + \partial_k A^k = \partial_\nu A^\nu$$

であるから (1.24) の両辺を c で割ると

$$\square A^0 - \frac{\partial}{\partial x^0} \partial_\nu A^\nu = \square A^0 - \partial^0 \partial_\nu A^\nu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \rho = \mu_0 c \rho = \mu_0 j^0 \quad (1.26)$$

(1.25) は

$$\square A^k + \frac{\partial}{\partial x^k} \partial_\nu A^\nu = \square A^k + \partial_k \partial_\nu A^\nu = \square A^k - \partial^k \partial_\nu A^\nu = \mu_0 j^k \quad (1.27)$$

になる。(1.26), (1.27) は1つの式

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \mu_0 j^\mu \quad (1.28)$$

にまとまる。これがマクスウェル方程式のテンソル表現であり, (1.22) に比べて非常に簡潔な構造をしている。

(1.28) の両辺に ∂_μ を作用すると

$$\mu_0 \partial_\mu j^\mu = \square \partial_\mu A^\mu - \square \partial_\nu A^\nu = 0, \quad \text{つまり} \quad \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

これは電荷保存則である。 $j^\mu(x)$ が反変ベクトルならば, $\partial_\mu j^\mu$ はスカラーである。したがって, ある慣性系で $\partial_\mu j^\mu = 0$ ならば任意の慣性系で $\partial_\mu j^\mu = 0$ になる。実際, $\partial'_\mu = a_\mu^\nu \partial_\nu$ であるから

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') = a_\mu^\nu \partial_\nu j'^\mu(x')$$

反変ベクトルの変換 $j'^\mu(x') = a^\mu_\lambda j^\lambda(x)$ を代入すると

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') = a_\mu^\nu a^\mu_\lambda \partial_\nu j^\lambda(x) = \delta_\lambda^\nu \partial_\nu j^\lambda(x) = \partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

である。もし $j^\mu(x)$ が反変ベクトルでないならば, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ であっても $\partial'_\mu j'^\mu(x') = 0$ になるとは限らない。任意の慣性系で電荷保存は成り立つべきであるから, $j^\mu(x)$ は反変ベクトルでなければならない。電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} は独立な物理量ではない。 $(c\rho, \mathbf{j})$ で1つのローレンツ・ベクトルをなし, ローレンツ変換でこれらは混ざり合う。 ϕ と \mathbf{A} も同様である。

A^μ, j^μ が反変ベクトルならば, 反変ベクトルの変換と $\square' = \square, \partial'_\nu A'^\nu = \partial_\nu A^\nu$ を使うと

$$\square' A'^\mu - \partial'^\mu \partial'_\nu A'^\nu - \mu_0 j'^\mu = a^\mu_\lambda \left(\square A^\lambda - \partial^\lambda \partial_\nu A^\nu - \mu_0 j^\lambda \right)$$

であるから、慣性系 S で (1.28) が成り立つとき別の慣性系 S' でも方程式は同じ形で成り立つ。一般に、テンソル形式で書かれた方程式はローレンツ変換に対してその形を変えず、特殊相対性原理を満たすことが明白になる。このような形式を共変形式という。

(1.28) の左辺は

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)$$

であるから (1.28) は

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu} \quad (1.29)$$

と表せる。2階のテンソル $F^{\mu\nu}$ は \mathbf{E} と \mathbf{B} で書ける。 $\partial^k = \partial/\partial x_k = -\partial/\partial x^k$ に注意すると

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 = F^{32}, & B_y &= F^{13}, & B_z &= F^{21} \\ E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = c(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) = cF^{10}, & E_y &= cF^{20}, & E_z &= cF^{30} \end{aligned}$$

であるから

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

になる。 \mathbf{E} , \mathbf{B} はローレンツ変換に対してはベクトルではなく、一体となって2階のテンソル $F^{\mu\nu}$ として変換される。

\mathbf{E} と \mathbf{B} , つまり $F^{\mu\nu}$ が観測により決まったとしても A^μ は一意には決まらない。 $\chi(x)$ を任意のスカラ関数として

$$\bar{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \quad \text{つまり} \quad \bar{\phi} = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (1.31)$$

とする。これをゲージ変換という。 \bar{A}^μ に対応する $\bar{F}^{\mu\nu}$ は

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{A}^\nu - \partial^\nu \bar{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\nu \partial^\mu \chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

であるから \bar{A}^μ は A^μ と同じ電磁場を与える。また

$$\square \bar{A}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \bar{A}^\nu = \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \square \partial^\mu \chi + \partial^\mu \partial_\nu \partial^\nu \chi = \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$$

であるから、 \bar{A}^μ は A^μ と同じマクスウェル方程式を満たす。 A^μ にはゲージの任意性があり、逆に、この任意性を利用してマクスウェル方程式をより簡単な方程式にすることができる。よく使われるゲージとしてはローレンツ・ゲージとクーロン・ゲージ(輻射ゲージ)がある。ローレンツ・ゲージは

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

という条件を課す。これは常に可能である。 $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ の場合

$$\partial_\mu \bar{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu - \square \chi$$

であるから $\square \chi = \partial_\mu A^\mu$ を満たすように $\chi(x)$ をとればよい。ローレンツ・ゲージでは (1.28) は

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

という簡単な方程式になる。

運動している点電荷による電磁場

$F^{\mu\nu}$ が2階の反変テンソルとして変換されることを利用して、運動している点電荷が作る電磁場を求めてみる。2階の反変テンソルの変換 (1.20) は (1.11) で定義した 4×4 行列 A を使うと

$$F'^{\mu\nu} = a^\mu_\sigma a^\nu_\rho F^{\sigma\rho} = A_{\mu\sigma} F^{\sigma\rho} \tilde{A}_{\rho\nu}, \quad \therefore \quad F' = A F \tilde{A}$$

である。 A としてローレンツ変換 (1.12) に対応する

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

の場合 (A の $0, 1$ は 2×2 のゼロ行列, 単位行列), F を4つの 2×2 行列に分けて

$$F' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を計算すれば

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.32)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + vE_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - vE_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.33)$$

を得る。

S 系から見て、一様磁場 \mathbf{B} 中に電荷 q の粒子が静止しているとする。このとき粒子には力は働かず静止したままである。一方、 S' から見ると、粒子は磁場 \mathbf{B} 中を x' 軸方向に $-v$ の速度で移動するから、ローレンツ力が働き円運動するように思えるが、そんなことはないはずである。上式で $\mathbf{E} = 0$ とすると

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (0, -vB_z, vB_y) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{v} = (v, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= (B_x, B_y/\sqrt{1-\beta^2}, B_z/\sqrt{1-\beta^2}) \\ &= \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) (B_x, 0, 0) = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v}}{v^2} \end{aligned}$$

S' 系での粒子の速度を \mathbf{V}' とすると、粒子に働く力 \mathbf{F}' は

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q\mathbf{V}' \times \mathbf{B}' = q \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{V}') \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{V}' \times \mathbf{v})}{v^2}$$

になる。 $\mathbf{V}' = -\mathbf{v}$ とすると $\mathbf{F}' = 0$ である。運動方程式は

$$m \frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{V}'}{\sqrt{1-\mathbf{V}'^2/c^2}} = \mathbf{F}'$$

であるから、 $\mathbf{V}' = \text{一定} = -\mathbf{v}$ は運動方程式の解である。 S' から見ると、粒子は一定速度 $-\mathbf{v}$ で運動する。 S' では、粒子には $q\mathbf{V}' \times \mathbf{B}' = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ 以外に電氣的力 $q\mathbf{E}'$ も作用し、両者は打ち消しあう。 S' から見ても粒子に力は働かない。

次に、運動している点電荷による電磁場を求める。電荷 q の粒子が一定の速さ v で x 軸上を運動している場合、 S' 系として粒子に固定した座標系をとれば

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3}, \quad E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

である。 S 系は S' から見れば x 軸負の方向に速さ v で移動しているから (1.32), (1.33) で $v \rightarrow -v$ の置き換えをすれば、逆に \mathbf{E}, \mathbf{B} を \mathbf{E}', \mathbf{B}' を表せる。これに上式を代入すると

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_z = \frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

更に $x' = (x - vt)/\sqrt{1-\beta^2}$, $y' = y$, $z' = z$ を代入すると

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - v\mathbf{t}}{r'^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad r' = \sqrt{\frac{(x - vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2} \quad (1.34)$$

になる。ただし $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ である。ポテンシャル A^μ は

$$A^0 = \frac{\phi}{c} = \frac{A'^0 + \beta A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \beta A'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z$$

及び

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad \mathbf{A}' = 0$$

から

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mu_0 q \mathbf{v}}{4\pi r'} \quad (1.35)$$

になる。 $\phi(x) = \text{一定}$ である等電位面は

$$r'^2 = \frac{(x - vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 = \text{一定}$$

であるから、 $(vt, 0, 0)$ を中心とし x 軸方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍に圧縮された回転楕円体になる。等電位面はローレンツ収縮する。

非相対論的極限 ($\beta \rightarrow 0$) では

$$\mathbf{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - v\mathbf{t}}{r'^3}, \quad \mathbf{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times (\mathbf{x} - v\mathbf{t})}{r'^3}, \quad r' = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}$$

となる。 \mathbf{E} は $(vt, 0, 0)$ に電荷 q があるときの静電場、 \mathbf{B} は電流密度が $q\mathbf{v} \delta(x - vt)$ である場合のビオ・サバルの法則と一致する。

問題 1.1 (1.32), (1.33) を導け。

問題 1.2 点 $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ における (1.34) を考える。 $\beta \rightarrow 1$ ($v \rightarrow c$) の場合、粒子がこの点に最接近したときだけ、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は非常に大きくなることを示せ。

問題 1.3 ローレンツ変換を用いずに (1.35) を求める。電荷 q の点電荷が一定速度 v で x 軸上を運動している。このとき、電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ は

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z) = q \delta(x - \beta x_0) \delta(y) \delta(z), \quad \text{ただし } x_0 = ct, \quad \beta = v/c$$

である。ローレンツゲージを採用すると、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ はマクスウェル方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2\right)\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.36)$$

を満たす。

1. $x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $x'_0 = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ とする。ダランベルシアンはローレンツ・スカラーであるから

ら当然の結果ではあるが、具体的に計算して $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_0'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$ を示せ。

2. $\rho = q\delta(\sqrt{1 - \beta^2}x')\delta(y)\delta(z)$ であり x'_0 に依存しないから ϕ も x'_0 に依存しないとする。(1.36) を解き ϕ を求めよ。ただし

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

は $\nabla^2\phi = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ の解である。

1.4 相対論的運動方程式

以下の内容は共変的形式で記述できるが、ここでは時間を特別扱いする形式で行う。相対論的運動量 $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ を速度 $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ で表すと

$$p^\mu = \frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}}, \quad \text{つまり} \quad \mathbf{p} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}}, \quad p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}$$

$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2$ であるから、 $p^\mu p_\mu$ はローレンツスカラーであり p^μ はローレンツベクトルである。電磁場中の粒子の相対論的運動方程式は、電荷を q とすると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \quad (1.37)$$

で与えられる。この方程式をオイラー方程式から導く。

系のラグランジアンを $L = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ とすると、オイラー方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial L}{\partial x^k}$$

である。自由粒子の場合、この方程式が

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} = 0$$

になるためには、 L は $\dot{\mathbf{x}}$ だけの関数で

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}}, \quad \therefore \quad L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}$$

であればよい。電磁場との相互作用がある場合、静電ポテンシャルは $q\phi = qcA^0$ であるから、非相対論的静的極限では

$$L_{\text{NR}} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - qcA^0 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\frac{dx^0}{dt}A^0$$

これとの類似から

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2} - q\frac{dx^\mu}{dt}A_\mu = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2} - qcA^0 + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad (1.38)$$

を採用する。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} + qA^k, \quad \frac{\partial L}{\partial x^k} = -qc\frac{\partial A^0}{\partial x^k} + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} = qc\partial^k A^0 + q\dot{x}_\ell \partial^\ell A^k \quad (1.39)$$

これから、オイラー方程式は

$$\frac{dp^k}{dt} = qc\partial^k A^0 + q\dot{x}_\ell \partial^\ell A^k - q\frac{dA^k}{dt}$$

である。ところで

$$\frac{dA^k}{dt} = \frac{d}{dt}A^k(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial A^k}{\partial t} + \frac{dx^\ell}{dt} \frac{\partial A^k}{\partial x^\ell} = c\partial^0 A^k + \dot{x}_\ell \partial^\ell A^k$$

であるから

$$\frac{dp^k}{dt} = qc(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k) + q\dot{x}_\ell (\partial^k A^\ell - \partial^\ell A^k) = qcF^{k0} + q\dot{x}_\ell F^{k\ell} = qF^{k\nu} \dot{x}_\nu \quad (1.40)$$

になる。(1.30) より

$$F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -\dot{x} \\ -\dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}/c \\ E_x + (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_x \\ E_y + (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_y \\ E_z + (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_z \end{pmatrix}$$

であるから (1.40) は (1.37) に一致する。 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}$ より

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{p^0} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = qF^{0\nu} \frac{dx_\nu}{dt}$$

(1.40) と合わせれば

$$\frac{dp^\mu}{dt} = qF^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dt}$$

である。

ハミルトニアン H

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k - L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left(-mc^2 \sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2} - qcA^0 + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \right) \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} + qcA_0 = cp^0 + qcA_0 \end{aligned}$$

を正準運動量 \mathbf{P}

$$P^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2}} + qA^k = p^k + qA^k$$

で表す。

$$(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + (mc)^2 = \mathbf{p}^2 + (mc)^2 = (p^0)^2$$

より

$$H = c\sqrt{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + (mc)^2} + qcA^0 \quad (1.41)$$

になる。時間成分を $P^0 = p^0 + qA^0$ で定義すれば $H = cP^0$ である。 $P^\mu = (H/c, \mathbf{P})$ はローレンツベクトルになる。

$$p^\mu p_\mu = (P^\mu - qA^\mu)(P_\mu - qA_\mu) = (mc)^2 \quad (1.42)$$

であり, P^0 について解けば (1.41) を得る。

自由粒子の場合 $P^0 = \sqrt{\mathbf{P}^2 + (mc)^2}$ であるが, これに対して

$$P^\mu \longrightarrow P^\mu - qA^\mu \quad (1.43)$$

の置き換えをすると

$$P^0 - qA^0 = \sqrt{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + (mc)^2}$$

であり (1.41) を得る。

問題 1.4 慣性系 S' が S に対して x 軸方向に一定の速度 V で移動する場合 $\beta = V/c$ とすると

$$p'_0 = \frac{p_0 - \beta p_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - \beta p_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z$$

である。自由粒子の場合

$$\frac{d^3 p'}{p'_0} = \frac{d^3 p}{p_0}, \quad \text{つまり} \quad \frac{dp'_x dp'_y dp'_z}{\sqrt{\mathbf{p}'^2 + (mc)^2}} = \frac{dp_x dp_y dp_z}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}}$$

を示せ。 $d^3 p/p_0$ はローレンツ・スカラーである。

2 クライン・ゴールドン方程式

2.1 クライン・ゴールドン方程式

12 ページで定義した正準運動量 P^μ を p^μ で表す。

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + q\mathbf{A}(x), \quad p^0 = \frac{H}{c} = \sqrt{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2 + (mc)^2} + qA^0(x) \quad (2.1)$$

第2式より

$$(p^0 - qA^0)^2 = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + (mc)^2, \quad \therefore (p^\mu - qA^\mu)(p_\mu - qA_\mu) = (mc)^2 \quad (2.2)$$

である。非相対論的量子力学と同様に

$$p^0 = \frac{H}{c} \rightarrow \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad p^k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} = -i\hbar \partial_k = i\hbar \partial^k$$

まとめれば

$$p^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu = i\hbar \partial^\mu \quad (2.3)$$

である。力学的運動量 $p^\mu - qA^\mu$ ではなく正準運動量 p^μ を微分演算子で置き換える。交換関係は

$$[x^k, \hat{p}^\ell] = i\hbar \delta_{k\ell}, \quad [x^0, \hat{p}^0] = -i\hbar, \quad \text{つまり} \quad [x^\mu, \hat{p}^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}$$

になる。

スピン 0 の粒子を考える。(2.1) で (2.3) の置き換えをすれば、相対論的量子力学の方程式として

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \left(q\phi(x) + c\sqrt{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + (mc)^2} \right) \psi(x), \quad \phi(x) = cA^0(x)$$

を得る。この方程式の欠点は

- 時間については 1 階、空間については 2 階の微分であり、時間と空間座標は対称的ではないため、相対論的共変性が明瞭ではない。
- ∇ が $\sqrt{\quad}$ の中にあるため、確率の流れ密度を作ることが困難である。

などである。そこで (2.2) で置き換えをすると

$$\left(P^\mu P_\mu - (mc)^2 \right) \psi(x) = 0, \quad P^\mu = i\hbar \partial^\mu - qA^\mu(x) \quad (2.4)$$

あるいは

$$\left(\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x) \right)^2 - c^2 \left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(x) \right)^2 - (mc^2)^2 \right) \psi(x) = 0, \quad \phi(x) = cA^0(x) \quad (2.5)$$

になる。これをクライン・ゴールドン (Klein-Gordon) 方程式という。 $P^\mu P_\mu$ はローレンツ・スカラーであるから、クライン・ゴールドン (KG) 方程式が特殊相対性原理を満たすには、 $\psi(x)$ はローレンツ・スカラーでなければならない。

KG 方程式の量子力学的解釈を行うためには、連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ を満たし、確率密度 $\rho(x) = j^0(x)/c$ が正定値になる $j^\mu(x)$ が定義できなければならない。 $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ はローレンツ・ベクトルであるから ρ はベクトルの時間成分でありスカラーではない。したがって、ローレンツ・スカラー $\psi(x)$ を用いて $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ とは定義できない。 $F(x) = i\hbar \partial_\mu (\psi^* P^\mu \psi)$ とすると

$$\begin{aligned} F(x) &= (i\hbar \partial_\mu \psi^*) P^\mu \psi + \psi^* i\hbar \partial_\mu P^\mu \psi = (i\hbar \partial_\mu \psi^*) P^\mu \psi + \psi^* (P_\mu + qA_\mu) P^\mu \psi \\ &= \psi^* P_\mu P^\mu \psi + \left(i\hbar (\partial_\mu \psi^*) + qA_\mu \psi^* \right) P^\mu \psi \end{aligned}$$

を考える。(2.4) 及び $(P^\mu\psi)^* = -i\hbar\partial^\mu\psi^* - qA^\mu\psi^*$ より

$$F(x) = (mc)^2|\psi|^2 - (P_\mu\psi)^*P^\mu\psi$$

$F(x)$ は実数になるから

$$F(x) - F^*(x) = i\hbar\partial_\mu(\psi^*P^\mu\psi + \psi(P^\mu\psi)^*) = 0$$

である。したがって

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2m}(\psi^*P^\mu\psi + \psi(P^\mu\psi)^*) = \frac{1}{m}\text{Re}(\psi^*P^\mu\psi) \quad (2.6)$$

とすると $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ であり連続の方程式を満たす。 P^μ の定義より ($\phi = cA^0$)

$$\rho(x) = \frac{j_0(x)}{c} = \frac{1}{mc^2}\text{Re}(\psi^*(i\hbar\partial_t - q\phi(x))\psi) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{j}(x) = \frac{1}{m}\text{Re}(\psi^*(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(x))\psi) \quad (2.8)$$

である。 \mathbf{j} が無限遠で十分早く 0 になるとすれば

$$\mathcal{N} = \int d^3x \rho(x) = \text{一定} \quad (2.9)$$

である。 \mathcal{N} が KG 方程式で記述される状態 $\psi(x)$ の保存するノルムを表す。

$\mathbf{j}(x)$ は非相対論での流れの密度と同じだが、 $\rho(x)$ は非相対論での確率密度 $|\psi(x)|^2$ とは全く異なる。 $A^\mu(x)$ が時間に依存しないとき、KG 方程式の解として定常状態 $\psi(x) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\mathbf{x})$ が存在する。これを (2.5) に代入すると

$$\left((E - q\phi(\mathbf{x}))^2 - (mc^2)^2 - c^2(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \right) \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.10)$$

非相対論と比較するため $E = mc^2 + \varepsilon$ とすると

$$\begin{aligned} (E - q\phi(\mathbf{x}))^2 - (mc^2)^2 &= (E + mc^2 - q\phi(\mathbf{x}))(E - mc^2 - q\phi(\mathbf{x})) \\ &= (2mc^2 + \varepsilon - q\phi(\mathbf{x}))(\varepsilon - q\phi(\mathbf{x})) \\ &= -2mc^2 \left(1 + \frac{\varepsilon - q\phi(\mathbf{x})}{2mc^2} \right) (q\phi(\mathbf{x}) - \varepsilon) \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \varphi(\mathbf{x}) + \left(1 + \frac{\varepsilon - q\phi(\mathbf{x})}{2mc^2} \right) (q\phi(\mathbf{x}) - \varepsilon) \varphi(\mathbf{x}) = 0$$

(2.7) より

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{E - q\phi(\mathbf{x})}{mc^2} |\varphi(\mathbf{x})|^2 = \left(1 + \frac{\varepsilon - q\phi(\mathbf{x})}{mc^2} \right) |\varphi(\mathbf{x})|^2 \quad (2.11)$$

したがって、 $|\varepsilon - q\phi(\mathbf{x})| \ll mc^2$ ならば

$$\left(\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + q\phi(\mathbf{x}) \right) \varphi(\mathbf{x}) \approx \varepsilon \varphi(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) \approx |\varphi(\mathbf{x})|^2$$

になり非相対論を再現する。KG 方程式は連続の方程式を満たし、非相対論的近似ではシュレディンガー方程式になる。

以上は満足すべき結果である。ところで、KG方程式は時間について2階の微分方程式であるから、 $\psi(x)$ を決定するためには、ある時刻で ψ と $\partial\psi/\partial t$ を与える必要がある。これらは独立に与えられる。(2.7) で定義した $\rho(x)$ は ψ と $\partial\psi/\partial t$ を含むから、正にも負にもなり正定値ではない。物理的状態を $\rho(x)$ が正の状態に制限できれば $\rho(x)$ を確率密度と解釈できるだろう。しかし、次の階段ポテンシャルで示すように、 ρ が正の状態と負の状態を分離できない場合がある。

自由粒子

KG方程式は

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x) = 0$$

になる。平面波

$$\psi(x) = \exp(-ip \cdot x/\hbar), \quad p \cdot x = p^\mu x_\mu = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

を代入すると

$$\left(-\frac{p^\mu p_\mu}{\hbar^2} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\exp(-ip \cdot x/\hbar) = \frac{1}{\hbar^2}(\mathbf{p}^2 + (mc)^2 - p_0^2)\exp(-ip \cdot x/\hbar) = 0$$

になるから

$$\psi(x) = \exp(-iEt/\hbar + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar), \quad E = \pm E_p, \quad E_p = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2} > 0$$

は KG方程式の解である。(2.11) より $\rho = E/(mc^2) = \pm E_p/(mc^2)$ になるから、負エネルギー解では $\rho < 0$ である。

2.2 階段ポテンシャル

1次元で $A^0(x, t)$ が時間に依存せず $A_x(x, t) = 0$ の場合、定常状態は (2.10) より

$$\left((\hbar c)^2 \frac{d^2}{dx^2} + (E - q\phi(x))^2 - (mc^2)^2\right)\varphi(x) = 0 \quad (2.12)$$

で決まる。階段ポテンシャル

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}, \quad qV_0 > 0$$

の場合、(2.12) の一般解は

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx/\hbar}, & x < 0 \\ Ce^{iPx/\hbar} + De^{-iPx/\hbar}, & x > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

ただし

$$cp = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}, \quad cP = \sqrt{(E - qV_0)^2 - (mc^2)^2}$$

である。 ρ は

$$\rho = \frac{E - q\phi}{mc^2} |\varphi|^2 = \begin{cases} \frac{E}{mc^2} |\varphi|^2, & x < 0 \\ \frac{E - qV_0}{mc^2} |\varphi|^2, & x > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

になる。 $E > mc^2$ として (p は正の実数), $x < 0$ の側から正エネルギーの粒子が入射する場合を考える。 E を p, P で表せば

$$E = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} = qV_0 \pm \sqrt{(cP)^2 + (mc^2)^2}, \quad \begin{cases} +, & E - qV_0 > 0 \\ -, & E - qV_0 < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

である。

$x < 0$ では $\rho > 0$ になり正ノルムの状態である。 ρ と流れの密度 $j = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \right)$ に対する $\varphi_a = Ae^{ipx/\hbar}$ の寄与は

$$\rho_a = \frac{E}{mc^2} |A|^2, \quad j_a = \frac{p}{m} |A|^2 = \frac{c^2 p}{E} \rho_a, \quad v = \frac{j_a}{\rho_a} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 p}{\sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}} \quad (2.16)$$

流れの密度 = 速度 × 密度 より, v は状態 $e^{ipx/\hbar}$ の粒子の速度であり古典的相対論の速度に一致する。状態 $e^{ipx/\hbar}$, $e^{-ipx/\hbar}$ は速さ cp/E でそれぞれ x 軸正方向, 負方向に進む粒子を表す。

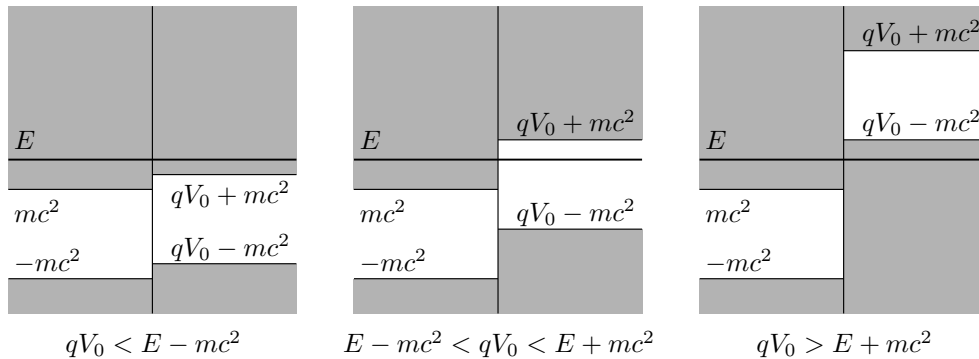
$x > 0$ での状態を考える。

- ポテンシャル障壁が低く $qV_0 < E - mc^2$ のとき, P は実数になり粒子は $x > 0$ の領域を通過する (下の左図。影付き部分は p, P が実数で波動関数が振動解になるエネルギー領域を表す)。 $\varphi_a(x)$ と同様に $\varphi_c(x) = Ce^{iPx/\hbar}$ を考えると

$$\rho_c = \frac{E - qV_0}{mc^2} |C|^2, \quad j_c = \frac{P}{m} |C|^2 = \frac{c^2 P}{E - qV_0} \rho_c, \quad v = \frac{c^2 P}{E - qV_0} = \frac{c^2 P}{\sqrt{(cP)^2 + (mc^2)^2}}$$

$E - qV_0 > mc^2 > 0$ より $\rho > 0, v > 0$ である。 $e^{iPx/\hbar}$ は x 軸正方向に進む粒子を表す。 v は運動量 P の古典粒子の速度である。状態 $e^{-iPx/\hbar}$ の粒子は x 軸負方向に進む。

- ポテンシャル障壁が高くなり $E - mc^2 < qV_0 < E + mc^2$ の場合 (中央の図), P は純虚数になり粒子は $x > 0$ の領域を通過できない。以上は非相対論と同様の現象である。
- $qV_0 > E + mc^2 > 2mc^2$ では再び P が正の実数になり, 粒子は $x > 0$ の領域を通過する。ポテンシャル障壁が非常に大きい場合であり, 非相対論的には粒子は通過できない。 $E - qV_0 < -mc^2$ であるから, $x > 0$ では $\rho < 0$ になり, $\rho < 0$ の状態を分離することはできない。下の右図から分かるように, $x > 0$ の波動関数は, 自由粒子の負エネルギーの振動解に対応する。非相対論的には, この部分は振動解ではないため粒子は透過できない。



$qV_0 > E + mc^2$ の場合, (2.15) より

$$E = qV_0 - \sqrt{(cP)^2 + (mc^2)^2}, \quad v = \frac{c^2 P}{E - qV_0} = - \frac{c^2 P}{\sqrt{(cP)^2 + (mc^2)^2}} \quad (2.17)$$

$v < 0$ になり $e^{iPx/\hbar}$ は x 軸負方向に進む粒子を表す。 v は運動量 $-P$ の古典的粒子の速度である。ところで、電荷 q 、運動量 $-P$ の粒子のエネルギーは $x > 0$ では

$$qV_0 + \sqrt{(cP)^2 + (mc^2)^2}$$

のはずであるが、これは (2.17) とは異なる。したがって、状態 $e^{iPx/\hbar}$ の粒子は電荷 q の粒子とは見なせない。この粒子を反粒子 (質量が同じで電荷が逆符号 $-q$ の粒子) とするならば、反粒子に作用するポテンシャルは $-qV_0$ になるから、反粒子のエネルギー \bar{E} は

$$\bar{E} = -qV_0 + \sqrt{(cP)^2 + (mc^2)^2} = -E$$

である。 $-qV_0 < -(E + mc^2) < -2mc^2$ であり反粒子に作用するポテンシャルは非常に深くなる。したがって、 $\bar{E} < 0$ であっても運動エネルギーは正になり、ポテンシャル中を通過できる。電荷 q の粒子が入射して $x > 0$ に電荷 $-q$ の反粒子が発生するならば、電荷保存から電荷 q の粒子が $x < 0$ の側に発生する。この粒子のエネルギーが $E = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}$ ならば、対生成した 2 粒子のエネルギーの和は $E + \bar{E} = 0$ になりエネルギー保存は成り立つ。また、 $q\rho$ を電荷密度と見なせば、 $x > 0$ では反粒子が存在するため $\rho < 0$ になると解釈できる。

$qV_0 > E + mc^2$ の場合、(2.13) を $x = 0$ で接続する。 $e^{iPx/\hbar}$ は x 軸負方向に進むから、 $x > 0$ で x 軸正方向に進む境界条件を満たすためには $C = 0$ である。したがって

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx/\hbar}, & x < 0 \\ De^{-iPx/\hbar}, & x > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$x = 0$ で φ , $d\varphi/dx$ は連続であるから

$$A + B = D, \quad p(A - B) = -PD, \quad \therefore \frac{B}{A} = \frac{p + P}{p - P}, \quad \frac{D}{A} = \frac{2p}{p - P}$$

になる。入射波 $Ae^{ipx/\hbar}$ 、反射波 $Be^{-ipx/\hbar}$ 、透過波 $De^{-iPx/\hbar}$ の電流密度 qj をそれぞれ j_a , j_b , j_d とすると

$$j_a = \frac{p}{m}|A|^2, \quad j_b = -\frac{p}{m}|B|^2, \quad j_d = -\frac{P}{m}|D|^2$$

になる。電荷密度 $q\rho$ は

$$\rho_a = \frac{E}{mc^2}|A|^2, \quad \rho_b = \frac{E}{mc^2}|B|^2, \quad \rho_d = \frac{E - qV_0}{mc^2}|D|^2 < 0$$

粒子の速度 $v = j/\rho$ は

$$v_a = \frac{c^2 p}{E}, \quad v_b = -\frac{c^2 p}{E}, \quad v_d = -\frac{c^2 P}{E - qV_0} > 0$$

である。単位時間に電荷 q が入射したとき、単位時間に反射されてくる電荷 qR は

$$R = \frac{|v_b|\rho_b}{|v_a|\rho_a} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{p + P}{p - P}\right)^2 > 1$$

透過する電荷 qT は

$$T = \frac{|v_d|\rho_d}{|v_a|\rho_a} = -\frac{P}{p} \frac{|D|^2}{|A|^2} = -\frac{4pP}{(p - P)^2} < 0$$

になる。 $R > 1$ であるから入射粒子よりも反射粒子の方が多い。これは入射した粒子が反射されて戻ってくるだけでなく、ポテンシャル障壁で対生成した $\pm q$ 粒子のうち、電荷 q の粒子も反射粒子の加わるためである。 $T < 0$ は電荷 $-q$ の反粒子に対応する。 $R + T = 1$ であり電荷は保存する。

(2.12)において、 $E \rightarrow -E$, $q \rightarrow -q$ と置き換えても方程式は不変である。したがって、(2.12)を満たす $\varphi(x)$ は、電荷 q の粒子のエネルギー E の状態とも見なせるし、電荷 $-q$ の反粒子のエネルギー $-E$ の状態とも見なせる。上の議論から、ノルムが正の $\varphi(x)$ を電荷 q の粒子の状態、ノルムが負の状態を反粒子の状態とし、 $q\rho(x)$ を電荷密度と解釈すると、物理的に整合性のある形式になる。ノルムの正負とエネルギーの正負は、一般には対応しない。しかし、 A^μ が弱い場合、自由粒子と同様に、正(負)エネルギー解は正(負)ノルムになる。このとき $E < 0$ の解は反粒子を表し、反粒子のエネルギーは $-E > 0$ になる。

一般的な KG 方程式 (2.4) の複素共役をとると

$$\left((i\hbar\partial^\mu + qA^\mu(x)) (i\hbar\partial_\mu + qA_\mu(x)) - (mc)^2 \right) \psi^*(x) = 0$$

になるから、 $\psi(x)$ が電荷 q の KG 方程式 (2.4) の解であるとき、 $\psi^*(x)$ は電荷 $-q$ の KG 方程式の解である。ただし、 $\psi^*(x)$ は電荷 q の KG 方程式の解ではない。(2.9) の \mathcal{N} が正ならば $\psi(x)$ は電荷 q の粒子の状態を表し、負ならば $\psi^*(x)$ が反粒子の状態を表す。定常状態 $\psi(x) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\mathbf{x})$ の場合、 $\psi^*(x) = e^{iEt/\hbar}\varphi^*(\mathbf{x})$ であるから、 $\varphi^*(\mathbf{x})$ はエネルギー $-E$ の反粒子の状態である。したがって、 $\psi(x) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\mathbf{x})$ が電荷 q で負エネルギー $E < 0$ の解であるとき、 $\psi^*(x)$ は電荷 $-q$ で正エネルギー $-E > 0$ の解になる。非物理的解と思われる負エネルギー解はこのような物理的解釈が可能である。KG 方程式は電荷 q の粒子だけでなく、電荷 $-q$ の反粒子も同時に扱う相対論的量子力学の基礎方程式と見なせる。このとき、連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ は電荷保存を表すことになり、確率は保存しない。これは粒子・反粒子の対生成・対消滅が起こりえることを意味する。なお、時間について1階の微分方程式であるシュレディンガー方程式

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x) \right) \psi(x) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(x) \right)^2 \psi(x)$$

の複素共役は

$$-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + q\phi(x) \right) \psi^*(x) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(x) \right)^2 \psi^*(x)$$

であるから、 $\psi^*(x)$ は電荷 $-q$ のシュレディンガー方程式を満たさない。 $\psi^*(\mathbf{x}, -t)$ は電荷 q の状態 $\psi(x)$ を時間反転した状態を表す。シュレディンガー方程式は単一電荷の粒子を記述する方程式である。

2.3 クライン・ゴールドン方程式の2成分形式

H. Feshbach and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 24

KG 方程式は、シュレディンガー方程式と異なり、時間について2階の微分方程式であり、このため ρ に時間微分が現れる。2階の微分方程式は1階の連立微分方程式で表せるから、KG 方程式を時間について1階の連立微分方程式に書き直してみる。ただし、2自由度になる。この自由度が電荷 $\pm q$ の粒子を表す。

(2.4) は

$$\left(P_0^2 - (mc)^2 - \mathbf{P}^2 \right) \psi(x) = - (mc)^2 \left(1 + \frac{1}{mc} P_0 \right) \left(1 - \frac{1}{mc} P_0 \right) \psi(x) - \mathbf{P}^2 \psi(x) = 0$$

になるから

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{mc} P_0 \right) \psi(x), \quad G(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{mc} P_0 \right) \psi(x)$$

つまり

$$\psi(x) = F(x) + G(x), \quad P_0\psi = mc(F(x) - G(x))$$

とすると

$$\left(1 - \frac{1}{mc}P_0\right)F = -\frac{1}{2(mc)^2}\mathbf{P}^2(F + G), \quad \left(1 + \frac{1}{mc}P_0\right)G = -\frac{1}{2(mc)^2}\mathbf{P}^2(F + G)$$

整理すれば

$$i\hbar\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}(F + G) + (q\phi + mc^2)F, \quad i\hbar\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\mathbf{P}^2}{2m}(F + G) + (q\phi - mc^2)G \quad (2.19)$$

になる。これを2成分波動関数で表せば

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix}$$

ただし

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + q\phi = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}(\tau_3 + i\tau_2) + mc^2\tau_3 + q\phi \quad (2.20)$$

ここで τ はパウリ行列

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。(2.6)を F, G で表すと

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{j^0}{c} = \frac{1}{2mc}(\psi^*P_0\psi + \psi(P_0\psi)^*) = |F|^2 - |G|^2 = \Psi^\dagger\tau_3\Psi \\ j &= \frac{1}{2m}((F+G)^*\mathbf{P}(F+G) + (F+G)(\mathbf{P}(F+G))^*) \\ &= \frac{1}{2m}\left(\Psi^\dagger\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{P}\Psi + (\mathbf{P}^*\Psi^\dagger)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Psi\right) \\ &= \frac{1}{2m}\left(\Psi^\dagger(1+\tau_1)\mathbf{P}\Psi + (\mathbf{P}^*\Psi^\dagger)(1+\tau_1)\Psi\right) \end{aligned}$$

になる。2種類の電荷 $\pm q$ を扱うならば、電荷密度 $q\rho$ が2つに正定値の差で表されるのは自然な形式である。

$$H^* = \frac{\tau_3 + i\tau_2}{2m}\left(+i\hbar\nabla - q\mathbf{A}\right)^2 + mc^2\tau_3 + q\phi$$

より

$$\tau_1 H^* \tau_1 = -\frac{\tau_3 + i\tau_2}{2m}\left(-i\hbar\nabla - (-q)\mathbf{A}\right)^2 - mc^2\tau_3 + q\phi = -H(-q)$$

になるから

$$\tau_1(H\Psi)^* = \tau_1 H^* \tau_1 \Psi^* = -H(-q)\tau_1 \Psi^*$$

したがって

$$\Psi_c = \tau_1 \Psi^* = \begin{pmatrix} G^* \\ F^* \end{pmatrix}$$

とすると

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \iff i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -(H\Psi)^* \iff i\hbar \frac{\partial \Psi_c}{\partial t} = H(-q)\Psi_c$$

Ψ が定常状態ならば

$$H\Psi = E\Psi \iff H(-q)\Psi_c = -E\Psi_c$$

$H(q)$ の負 (正) エネルギー解は $H(-q)$ の正 (負) エネルギー解である。 E が $H(q)$ の固有値であるとき、自由粒子以外では、 $-E$ は一般には $H(q)$ の固有値ではない。

密度は

$$\rho_c = \Psi_c^\dagger \tau_3 \Psi_c = |G|^2 - |F|^2 = -\rho$$

になり符号が逆になる。したがって、 Ψ が電荷 q の粒子の状態を表すとき、 Ψ_c は逆の電荷 $-q$ の粒子の状態を表すと解釈できる。 \mathcal{N} は時間に依らないから

$$\mathcal{N} = \int d^3x \rho(x) = \int d^3x \Psi^\dagger \tau_3 \Psi = 1$$

で規格化すると、状態 Ψ の全電荷は q であり電荷 q の粒子である。このとき、自動的に

$$\int d^3x \rho_c(x) = \int d^3x \Psi_c^\dagger \tau_3 \Psi_c = -1$$

であり、 Ψ_c は電荷 $-q$ の粒子を表すことになる。

自由粒子 自由粒子の場合 ($A^\mu = 0$)

$$\Psi(x) = e^{-ip \cdot x / \hbar} \varphi(\mathbf{p}) = e^{-ip \cdot x / \hbar} \begin{pmatrix} f(\mathbf{p}) \\ g(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

とすると (2.19) は

$$(E - mc^2) f = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} (f + g), \quad (E + mc^2) g = -\frac{\mathbf{p}^2}{2m} (f + g)$$

になる。

$$g = -\frac{\mathbf{p}^2/2m}{E + mc^2 + \mathbf{p}^2/2m} f = \frac{(mc^2)^2 - E_p^2}{2mc^2 E + mc^2 + E_p^2} f, \quad E_p = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\mathbf{p})^2}$$

を第1式に代入すると

$$\left(E - mc^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) \left(E + mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) + \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 = 0$$

でなければならないから

$$E^2 = (mc^2)^2 + (c\mathbf{p})^2, \quad \therefore E = \pm E_p$$

これから

$$g = \frac{mc^2 \mp E_p}{mc^2 \pm E_p} f$$

になる。

$$|f|^2 - |g|^2 = \pm \frac{4mc^2 E_p}{(mc^2 \pm E_p)^2} |f|^2 = \pm 1$$

で規格化すると

$$f = \frac{mc^2 \pm E_p}{2\sqrt{mc^2 E_p}}, \quad g = \frac{mc^2 \mp E_p}{2\sqrt{mc^2 E_p}}$$

とすればよい。したがって

$$E = E_p, \quad \Psi_{+, \mathbf{p}}(x) = e^{-ip \cdot x / \hbar} \varphi_+, \quad \varphi_+ = \frac{1}{2\sqrt{mc^2 E_p}} \begin{pmatrix} mc^2 + E_p \\ mc^2 - E_p \end{pmatrix}, \quad \Psi_+^\dagger \tau_3 \Psi_+ = 1$$

$$E = -E_p, \quad \Psi_{-, \mathbf{p}}(x) = e^{-ip \cdot x / \hbar} \varphi_-, \quad \varphi_- = \frac{1}{2\sqrt{mc^2 E_p}} \begin{pmatrix} mc^2 - E_p \\ mc^2 + E_p \end{pmatrix}, \quad \Psi_-^\dagger \tau_3 \Psi_- = -1$$

になる。

$$\tau_1 \Psi_{+, \mathbf{p}}^*(x) = \Psi_{-, -\mathbf{p}}(x), \quad \varphi_+^\dagger \tau_3 \varphi_- = \varphi_+^\dagger \tau_3 \tau_1 \varphi_+ = 0$$

を満たす。非相対論 $\eta = p/mc \ll 1$ では

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} 1 + \eta^4/32 + \dots \\ -\eta^2/4 + \dots \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_- = \begin{pmatrix} -\eta^2/4 + \dots \\ 1 + \eta^4/32 + \dots \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

になる。

3 ディラック方程式

3.1 ディラック方程式の導出

クライン・ゴルドン方程式は時間と空間について2階の微分方程式である。相対論では、時間と空間は同等に扱うべきであり、この点からするとクライン・ゴルドン方程式は満足すべき形式である。しかし、時間についても2階微分であるため、連続の方程式を満たす密度 ρ は、時間微分 $\partial\psi/\partial t$ を含み正定値ではなくなる。時間微分を含まない正定値の ρ を定義するためには、シュレディンガー方程式と同様に、時間について1階の微分方程式を考える必要がある。ただし、シュレディンガー方程式と異なり、空間微分についても1階である。

時間と空間について1階の微分方程式を求める。波動関数 $\psi(x)$ は1成分に限定せず N 個の成分からなるとし

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger(x) = \left(\psi_1^*(x) \ \psi_2^*(x) \ \cdots \ \psi_N^*(x) \right)$$

とする。確率密度 $\rho(x)$ を

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x) \psi(x) = \sum_{a=1}^N |\psi_a(x)|^2 \quad (3.1)$$

で定義する。 $\rho(x)$ は正定値である。 $\psi(x)$ の波動方程式は H を $N \times N$ 行列として

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x), \quad \text{成分で表せば} \quad i\hbar \frac{\partial \psi_a(x)}{\partial t} = \sum_{b=1}^N H_{ab} \psi_b(x) \quad (3.2)$$

の形になる。 H は1階の空間微分を含むから、自由粒子の場合

$$H = c \left(\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_z \hat{p}_z \right) + mc^2 \beta = c \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + mc^2 \beta, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (3.3)$$

とおける。 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ は定数要素の $N \times N$ 行列である。 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ を無次元にするために係数 c, mc^2 を付けた。なお、例えば

$$\alpha_x \hat{p}_x \psi(x) = \alpha_x \begin{pmatrix} \hat{p}_x \psi_1(x) \\ \hat{p}_x \psi_2(x) \\ \vdots \\ \hat{p}_x \psi_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_x)_{11} & \cdots & (\alpha_x)_{1N} \\ (\alpha_x)_{21} & \cdots & (\alpha_x)_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_x)_{N1} & \cdots & (\alpha_x)_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_x \psi_1(x) \\ \hat{p}_x \psi_2(x) \\ \vdots \\ \hat{p}_x \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

である。確率解釈を行うには、 ρ が正定値であることと連続の方程式を満たす必要がある。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi + \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left(-(H\psi)^\dagger \psi + \psi^\dagger H\psi \right)$$

に

$$H\psi = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + mc^2 \beta \psi, \quad (H\psi)^\dagger = i\hbar c (\nabla \psi^\dagger) \cdot \boldsymbol{\alpha}^\dagger + mc^2 \psi^\dagger \beta^\dagger$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -c \left(\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + (\nabla \psi^\dagger) \cdot \boldsymbol{\alpha}^\dagger \psi \right) + \frac{mc^2}{i\hbar} \psi^\dagger (\beta - \beta^\dagger) \psi \\ &= -c \nabla \cdot (\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi) + c (\nabla \psi^\dagger) \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^\dagger) \psi + \frac{mc^2}{i\hbar} \psi^\dagger (\beta - \beta^\dagger) \psi \end{aligned}$$

になる。したがって、 α, β がエルミート行列 $\alpha^\dagger = \alpha, \beta^\dagger = \beta$ ならば連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \text{ただし} \quad \mathbf{j}(x) = c\psi^\dagger(x)\boldsymbol{\alpha}\psi(x) \quad (3.4)$$

が成り立つ。 \mathbf{j} が確率の流れの密度を表す。シュレディンガー方程式と同様に、 H がエルミート演算子ならば (3.2) は確率保存を満たす。

古典的自由粒子のエネルギー E と運動量 \mathbf{p} は $E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + (mc^2)^2$ である。これに対応して、自由粒子の $\psi(x)$ がクライン・ゴルドン方程式

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + (mc^2)^2)\psi$$

を満たすことを要請する。(3.2) を時間で微分すると

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = H i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H^2 \psi(x)$$

したがって

$$H^2 = (c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + (mc^2)^2)I, \quad I = N \times N \text{ の単位行列} \quad (3.5)$$

である。以下では単位行列 I は明示しない。 H が行列でなければ $H = \pm\sqrt{c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + (mc^2)^2}$ であるが、(3.3) の場合、上式はエルミート行列 α, β に制限を与える。4つの行列 α, β は互いに可換とは限らないことに注意すると

$$\begin{aligned} H^2 &= (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + mc^2\beta)^2 = c^2\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + mc^3(\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha}) \cdot \hat{\mathbf{p}} + (mc^2)^2\beta^2 \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \sum_{k\ell} \alpha^k \alpha^\ell \hat{p}^k \hat{p}^\ell = \sum_k (\alpha^k)^2 (\hat{p}^k)^2 + \sum_{k<\ell} (\alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k) \hat{p}^k \hat{p}^\ell \end{aligned}$$

である。したがって

$$\alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k = 2\delta_{k\ell}, \quad \alpha^k \beta + \beta \alpha^k = 0, \quad \beta^2 = 1 \quad (3.6)$$

ならば (3.5) が成り立つ。4つの行列 α^k, β は互いに反交換し、かつ、 $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = 1$ である。

次に、行列の次元 N を求める。 $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = 1$ であるからエルミート行列 α^k, β の固有値は ± 1 である。2番目の式に β あるいは α^k をかけると

$$\alpha^k + \beta \alpha^k \beta = 0, \quad \beta + \alpha^k \beta \alpha^k = 0, \quad (k \text{ について和は取らない})$$

である。したがって、トレースの性質 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ を使うと

$$\text{Tr}(\alpha^k) = -\text{Tr}(\beta \alpha^k \beta) = -\text{Tr}(\alpha^k \beta^2) = -\text{Tr}(\alpha^k) = 0, \quad \text{同様に} \quad \text{Tr}(\beta) = 0$$

である。例えば、エルミート行列 β は適当なユニタリー行列 U により対角形

$$U^{-1}\beta U = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_k = \beta \text{ の固有値} = \pm 1$$

にできる。対角要素が ± 1 の個数を n_\pm とすると ($n_+ + n_- = N$)

$$\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(U^{-1}\beta U) = \sum_k b_k = n_+ - n_- = 0$$

したがって $N = 2n_+ = \text{偶数}$ になる。

最小の N は $N = 2$ である。この場合、パウリ行列

$$\sigma^1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の3個は互いに反交換し $(\sigma^k)^2 = 1$ である。任意のエルミート行列 M は a, c_1, c_2, c_3 を実数として

$$M = \begin{pmatrix} a + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & a - c_3 \end{pmatrix} = a + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

と表せる。これが σ_x と反交換するためには

$$M\sigma_x + \sigma_x M = 2a\sigma_x + 2c_1\sigma_x^2 = 2 \begin{pmatrix} c_1 & a \\ a & c_1 \end{pmatrix} = 0, \quad \therefore a = c_1 = 0$$

σ_y, σ_z についても同様にすると, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と反交換する行列はゼロ行列だけである。したがって, $N = 2$ の場合, (3.6) を満たす4個のエルミート行列は存在しない。

次に小さい N は $N = 4$ である。この場合, 例えば

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

とする。ただし, 0 と 1 はそれぞれ 2×2 の 0 行列と単位行列である。

$$\begin{aligned} \alpha^k \alpha^\ell + \alpha^\ell \alpha^k &= \begin{pmatrix} \sigma_k \sigma_\ell + \sigma_\ell \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \sigma_\ell + \sigma_\ell \sigma_k \end{pmatrix} = 2\delta_{k\ell} \\ \alpha^k \beta + \beta \alpha^k &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \beta^2 = 1 \end{aligned}$$

になるから (3.6) を満たす。したがって, 以下では $N = 4$ とする。

まとめると ψ を4成分スピノール

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

とするとき

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + mc^2\beta, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \quad (3.9)$$

ただし $\boldsymbol{\alpha}$ と β は (3.6) を満たす 4×4 行列である。(3.9) を自由粒子のディラック方程式という。(3.6) を満たす4つの行列の具体的表現は一意には決まらない。最もよく使われる表現は (3.7) であり, これをディラック・パウリ表現という。

電荷 q の粒子が電磁場 $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ 中を運動する場合, (3.9) に対して (1.43) の変換 $\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - qA^\mu$ を行うと

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) + mc^2\beta + cqA^0 \quad (3.10)$$

を得る。これが電磁場中でのディラック方程式である。この場合も, 連続の方程式 (3.4) は何の変更もせずに成り立つ (問 3.5)。自由粒子の場合, $\psi(x)$ がクライン・ゴルドン方程式を満たすことを要請した。しかし, (3.21) で示すように, $A^\mu \neq \text{定数}$ のとき (3.10) の解 $\psi(x)$ は (2.4) を満たさない。

3.2 非相対論との比較

ディラック方程式 (3.10) の妥当性を非相対論的近似を行い検討してみる。\$A^\mu(x)\$ が時間に依存しない場合、定常状態

$$\psi(x) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\mathbf{x})$$

が存在する。非相対論の場合、エネルギー固有値は静止質量 \$mc^2\$ を含まないから、これに対応して \$E = mc^2 + \varepsilon\$ とすると、ディラック方程式 (3.10) は

$$H\varphi(\mathbf{x}) = (mc^2 + \varepsilon)\varphi(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

になる。4成分 \$\varphi(\mathbf{x})\$ を2つの2成分スピノール \$F(\mathbf{x}), G(\mathbf{x})\$ で表して

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}) \\ G(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

とする。ディラック表示 (3.7) を使うと

$$H - mc^2 = c \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - mc^2 + V_0 = \begin{pmatrix} V_0 & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} & V_0 - 2mc^2 \end{pmatrix}$$

ただし

$$V_0(\mathbf{x}) = cqA^0(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\pi} = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A} = -i\hbar\nabla - q\mathbf{A}$$

であるから (3.11) は

$$V_0F + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}G = \varepsilon F, \quad (V_0 - 2mc^2)G + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}F = \varepsilon G \quad (3.12)$$

になる。これはディラック方程式を書き換えただけである。非相対論的近似は \$mc^2\$ が他の量に比べて非常に大きい、つまり \$mc^2 \gg |V_0|\$, \$\varepsilon\$ の場合により近似になるだろう。このとき第2式より

$$G = \frac{c}{2mc^2 + \varepsilon - V_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}F = \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{\varepsilon - V_0}{2mc^2} + \dots \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}F \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc} F \quad (3.13)$$

と近似できる。これを (3.12) の第1式に代入すると

$$H_{\text{NR}}F = \varepsilon F, \quad H_{\text{NR}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2m} + V_0$$

になる。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \therefore \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi})$$

である。

$$\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}F = i\hbar q (\nabla \times (\mathbf{A}F) + \mathbf{A} \times \nabla F) = i\hbar q \mathbf{B}F, \quad \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{磁場}$$

になるから、非相対論のハミルトニアンとして

$$H_{\text{NR}} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 - g \frac{\hbar q}{2m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + V_0, \quad \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad g = 2 \quad (3.14)$$

を得る。シュレディンガー方程式では手で入れたスピン \$\mathbf{S}\$ と磁場の相互作用が、ディラック方程式では自動的に導かれ、また、その大きさも正確な値を与える。電子の場合、実験的には \$g = 2.0023193\$ である。ディラック方程式は電子がスピン 1/2 の固有角運動量を持つことを仮定ではなく導出する。これはディラック方程式の重要な成果の1つある。なお、量子電磁力学により真空偏極の効果などを考慮すると、理論値は

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2) = 2.002323, \quad \alpha = \text{微細構造定数} = \frac{1}{137.03}$$

になり、実験値に驚くほどよく一致する。

問題 3.1 非相対論に対する相対論的補正を考える。ただし、簡単のため $\mathbf{A} = 0$ とし V_0 は $r = |\mathbf{x}|$ だけの関数とする。(3.13)において1次の補正

$$G \approx \frac{1}{2mc} \left(1 - \frac{\varepsilon - V_0}{2mc^2} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} F$$

まで考慮すると

$$(H_{\text{NR}} + H') F = \varepsilon F$$

になる。相対論的補正 H' にはスピン・軌道相互作用

$$H' = \frac{\hbar}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV_0}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \dots$$

が現れることを示せ。ここで $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{p}}$ は軌道角運動量である。

問題 3.2 $V_0 = 0$ の場合, ディラック方程式 (3.11) は

$$H_{\text{NR}} F(\mathbf{x}) = \frac{E^2 - (mc^2)^2}{2mc^2} F(\mathbf{x})$$

になることを示せ。ただし, H_{NR} は (3.14) で $V_0 = 0$ としたものである。 $\mathbf{B} = \text{一定}$ の場合, 非相対論におけるランダウ準位の導出と同様にして E を求めよ。

3.3 ガンマ行列

(3.10) を共変性が見やすくなる形式に書き直す。

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \text{ただし} \quad \gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}$$

とする。(3.10)の両辺の β/c をかけると

$$i\hbar \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \left(q \gamma^0 A^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - q \mathbf{A} \right) + mc \right) \psi$$

であるから

$$\left[\gamma^0 (i\hbar \partial^0 - q A^0) + \boldsymbol{\gamma} \cdot (i\hbar \boldsymbol{\nabla} + q \mathbf{A}) - mc \right] \psi = 0$$

になる。

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot (i\hbar \boldsymbol{\nabla} + q \mathbf{A}) = \gamma^k (i\hbar \partial_k + q A^k) = \gamma^k (i\hbar \partial_k - q A_k)$$

より

$$\left[\gamma^\mu (i\hbar \partial_\mu - q A_\mu) - mc \right] \psi = 0 \quad (3.15)$$

である。あるいは, ファイマンのスラッシュ記号

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a} \quad (3.16)$$

を使うと

$$(i\hbar \not{\partial} - q \not{A} - mc) \psi = 0$$

になる。

(3.6) を γ^μ で表す。 $a^k = \gamma^0 \gamma^k$ であるから

$$\gamma^0 \gamma^k \gamma^0 \gamma^\ell + \gamma^0 \gamma^\ell \gamma^0 \gamma^k = 2\delta_{k\ell}, \quad \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 + (\gamma^0)^2 \gamma^k = 0, \quad (\gamma^0)^2 = 1$$

2番目の式に右側から γ^0 をかければ $\gamma^0\gamma^k + \gamma^k\gamma^0 = 0$ である。これから γ^k と γ^0 は反交換する。したがって、1番目の式は $\gamma^k\gamma^\ell + \gamma^\ell\gamma^k = -2\delta_{k\ell}$ になる。上の3つの関係式は1つの式

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

で表せる。次に、 β はエルミート行列であるから $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ である。 α^k もエルミート行列であるから

$$(\gamma^0\gamma^k)^\dagger = \gamma^{k\dagger}\gamma^{0\dagger} = \gamma^{k\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^k$$

これから

$$\gamma^{k\dagger} = \gamma^0\gamma^k\gamma^0 = -\gamma^k$$

γ^k はエルミート行列ではない。 $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ と合わせて $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ である。まとめると

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad (3.17)$$

になる。添字の上げ下げの規約により $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ で定義する。

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \gamma^{0\dagger}, \quad \gamma_k = -\gamma^k = \gamma^{k\dagger}, \quad \therefore \gamma_\mu = \gamma^{\mu\dagger}$$

である。

$$\gamma_0\gamma^0 = (\gamma^0)^2 = 1, \quad \gamma_k\gamma^k = -(\gamma^k)^2 = 1, \quad (k \text{ について和はとらない})$$

であるから $\gamma_\mu = \gamma^{\mu\dagger}$ は γ^μ の逆行列であり γ^μ はユニタリ行列である。また、よく使う行列として

$$\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3.18)$$

を定義する。 γ_5 は

$$(\gamma_5)^2 = 1, \quad (\gamma_5)^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0$$

を満たす。

連続の方程式 (3.4) を共変形式に書き直す。

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \quad (3.19)$$

とおくと

$$\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad \mathbf{j} = c\bar{\psi}\gamma^0\boldsymbol{\alpha}\psi = c\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$$

であるから $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ とすると

$$j^\mu(x) = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

である。これを使うと (3.4) は $\partial_\mu j^\mu = 0$ という共変形式に表せる。後で示すが j^μ はローレンツ変換に対して反変ベクトルとして変換するから、確率保存は任意の慣性系で成り立つ。

(1.29) で定義した電磁場を表す2階のテンソル $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ が $F^{\mu\nu}(x) \neq 0$ のとき、ディラック方程式 (3.15) の解 $\psi(x)$ は、クライン・ゴルドン方程式 (2.4) を満たさない。(3.15) は

$$\left(\gamma^\mu P_\mu - mc\right)\psi(x) = 0, \quad \text{ただし } P^\mu = i\hbar\partial^\mu - qA^\mu(x)$$

である。これから

$$\left(\gamma^\mu P_\mu + mc\right)\left(\gamma^\nu P_\nu - mc\right)\psi(x) = \left(\gamma^\mu\gamma^\nu P_\mu P_\nu - (mc)^2\right)\psi(x) = 0 \quad (3.20)$$

になる。

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} + \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

より

$$\gamma^\mu \gamma^\nu P_\mu P_\nu = P^\mu P_\mu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] P_\mu P_\nu$$

第2項で μ, ν を入れ換えれば

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] P_\mu P_\nu = [\gamma^\nu, \gamma^\mu] P_\nu P_\mu = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu] P_\nu P_\mu$$

になるから

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] P_\mu P_\nu = \frac{1}{2}([\gamma^\mu, \gamma^\nu] P_\mu P_\nu - [\gamma^\mu, \gamma^\nu] P_\nu P_\mu) = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] [P_\mu, P_\nu]$$

$P_\mu = i\hbar \partial_\mu - qA_\mu(x)$ より

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= [i\hbar \partial_\mu, -qA_\nu(x)] + [-qA_\mu(x), i\hbar \partial_\nu] \\ &= -i\hbar q \left((\partial_\mu A_\nu(x)) - (\partial_\nu A_\mu(x)) \right) = -i\hbar q F_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

である。したがって

$$\gamma^\mu \gamma^\nu P_\mu P_\nu = P^\mu P_\mu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] [P_\mu, P_\nu] = P^\mu P_\mu - \hbar q S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x), \quad S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

になるから (3.20) は

$$\left(P^\mu P_\mu - (mc)^2 - \hbar q S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right) \psi(x) = 0 \quad (3.21)$$

と表せる。後で示すように $S^{\mu\nu}$ は粒子のスピンである。スピンと電磁場の相互作用 $\hbar q S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)$ の存在がクライン・ゴールドン方程式 (2.4) と異なる。

問題 3.3 ディラック・パウリ表現 (3.7) の場合

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

になることを示せ。

問題 3.4 $\not{a}^2 = a^2$, $\gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu = -2a$, $\gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu = 4a \cdot b$ を示せ。

問題 3.5 (3.15) と γ 行列の性質から

$$\left(-i\hbar \partial_\mu - qA_\mu \right) \bar{\psi} \gamma^\mu - mc \bar{\psi} = 0$$

を示せ。これと (3.15) より $\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$ を示せ。

γ 行列のトレース

$\mu \neq \nu$ のとき (3.17) の第1式に γ_ν をかければ $\gamma^\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu$ である (ただし, ν について和はとらない)。したがって

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = -\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\nu) = -\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad \text{同様に} \quad \text{Tr}(\gamma^5) = 0 \quad (3.23)$$

である。また, (3.17) の第 1 式のトレースから

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = g^{\mu\nu} \text{Tr}(1) = 4 g^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

である。これから

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b}) = a_\mu b_\nu \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 a \cdot b \quad (3.25)$$

になる。

n 個の場合

$$\text{Tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n) = \text{Tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5 \gamma_5) = \text{Tr}(\gamma_5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5)$$

γ_5 は γ^μ と反交換するから

$$\gamma_5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n = (-1)^n \not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5$$

したがって

$$n \text{ が奇数のとき } \text{Tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n) = -\text{Tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n) = 0 \quad (3.26)$$

である。 $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$ より $\not{a} \not{b} = 2a \cdot b - \not{b} \not{a}$ であるから, 4 個の場合

$$\not{a} \not{b} \not{c} \not{d} = (2a \cdot b - \not{b} \not{a}) \not{c} \not{d} = 2a \cdot b \not{c} \not{d} - \not{b} (2a \cdot c - \not{c} \not{a}) \not{d} = 2a \cdot b \not{c} \not{d} - 2a \cdot c \not{b} \not{d} + \not{b} \not{c} (2a \cdot d - \not{d} \not{a})$$

$\text{Tr}(\not{b} \not{c} \not{d} \not{a}) = \text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d})$ であるから

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = a \cdot b \text{Tr}(\not{c} \not{d}) - a \cdot c \text{Tr}(\not{b} \not{d}) + a \cdot d \text{Tr}(\not{b} \not{c}) = 4(a \cdot b c \cdot d - a \cdot c b \cdot d + a \cdot d b \cdot c) \quad (3.27)$$

一般に n が偶数のとき

$$\text{Tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n) = a_1 \cdot a_2 \text{Tr}(\not{a}_3 \cdots \not{a}_n) - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}(\not{a}_2 \not{a}_4 \cdots \not{a}_n) + \cdots + a_1 \cdot a_n \text{Tr}(\not{a}_2 \cdots \not{a}_{n-1}) \quad (3.28)$$

が成り立つから, $n-2$ 個のトレースから n 個のトレースが求まる。

4 ディラック方程式の共変性

 これ以降 $\hbar = c = 1$ の自然単位系を使う。

4.1 無限小ローレンツ変換

ディラック方程式の共変性を示す前に、無限小ローレンツ変換を考え、有限のローレンツ変換を無限小ローレンツ変換を逐次適用して表す。これが可能な変換は、行列 a^μ_ν が単位行列から連続的に変化して得られる場合である。一般に a^μ_ν は

$$\det(a^\mu_\nu) = \pm 1, \quad a^0_0 \geq 1 \quad \text{または} \quad a^0_0 \leq -1$$

である。単位行列の場合は $\det(a^\mu_\nu) = 1$, $a^0_0 = 1$ であるから、これに連続的につながる変換は

$$\det(a^\mu_\nu) = 1, \quad a^0_0 \geq 1$$

つまり、固有ローレンツ変換である。

無限小ローレンツ変換の場合 $\Delta\omega^\mu_\nu$ を微小量として

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta\omega^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu) x^\nu, \quad \text{つまり} \quad a^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu \quad (4.1)$$

とおける。ローレンツ変換の条件は $a^\lambda_\mu a^\nu_\lambda = \delta^\nu_\mu$ であるから $\Delta\omega$ の1次まで考えると

$$(\delta^\lambda_\mu + \Delta\omega^\lambda_\mu) (\delta^\nu_\lambda + \Delta\omega^\nu_\lambda) = \delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu$$

したがって

$$\Delta\omega^\nu_\mu + \Delta\omega^\mu_\nu = 0, \quad \text{あるいは} \quad \Delta\omega^{\mu\nu} + \Delta\omega^{\nu\mu} = 0 \quad (4.2)$$

である。これから16個の $\Delta\omega^{\mu\nu}$ のうち独立なものは6個である。固有ローレンツ変換にはブーストと座標系の回転があるが、ここでは、一般的な無限小ローレンツ変換は扱わず、 x 軸方向のブースト (S' が x 軸方向に移動する場合) と z 軸まわりの回転を考える。

x 軸方向のブースト

この場合、 $x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$ であり、 x^0 と x^1 だけがローレンツ変換で変わるから x^0 と x^1 の2次元を考え

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix}$$

とする。(4.1) より

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\omega^0_0 & \Delta\omega^0_1 \\ \Delta\omega^1_0 & \Delta\omega^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\omega^{00} & -\Delta\omega^{01} \\ \Delta\omega^{10} & -\Delta\omega^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

(4.2) より $\Delta\omega^{00} = \Delta\omega^{11} = 0$, $\Delta\omega^{01} = -\Delta\omega^{10}$ であるから

$$\Delta\omega^{01} = \Delta\theta \quad (4.3)$$

とすると

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 - \Delta\theta x^1, & \text{あるいは } \mathbf{x}' &= (1 - \Delta\theta \sigma_x) \mathbf{x}, & \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

と書ける。有限の θ に対しては $\Delta\theta = \theta/N$ とすると

$$\mathbf{x}' = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \Delta\theta \sigma_x)^N \mathbf{x} = \exp(-\theta \sigma_x) \mathbf{x}$$

になる。 $\sigma_x^2 = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \exp(-\theta \sigma_x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \sigma_x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cosh \theta - \sigma_x \sinh \theta = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

したがって

$$x'^0 = x^0 \cosh \theta - x^1 \sinh \theta, \quad x'^1 = x^1 \cosh \theta - x^0 \sinh \theta$$

である。S' 系の原点 $x'^1 = 0$ を S 系で見ると $x^1 = x^0 \tanh \theta$ になるから

$$\tanh \theta = v, \quad \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.6)$$

であり (1.13) が求まる。(4.5) より

$$(a^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\det(a^\mu_\nu) = \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1, \quad a^0_0 = \cosh \theta \geq 1$$

z 軸まわりの回転の場合

x^1 と x^2 が変わるから x^1 と x^2 の 2 次元を考え

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\omega^1_1 & \Delta\omega^1_2 \\ \Delta\omega^2_1 & \Delta\omega^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \Delta\omega^{12} \\ \Delta\omega^{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$\Delta\omega^{21} = -\Delta\omega^{12}$ であるから $\Delta\omega^{21} = \Delta\theta$ とすると

$$\mathbf{x}' = (1 + i \Delta\theta \sigma_y) \mathbf{x}, \quad \text{ただし } \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

になる。前の例と同様にすると、有限の θ に対しては $\mathbf{x}' = \exp(i\theta \sigma_y) \mathbf{x}$ である。 $\sigma_y^2 = 1$ より

$$\exp(i\theta \sigma_y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + i\sigma_y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i\sigma_y \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

これは角度 θ の座標軸の回転である。

$$(a^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\det(a^\mu{}_\nu) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad a^0{}_0 = 1$$

問題 4.1 単位ベクトル \mathbf{n} で表される方向のブーストを考える。

- (4.4)において x^1 を \mathbf{n} 方向成分 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ で置き換えればよい。また, \mathbf{n} と直交する $\mathbf{n} \times \mathbf{x}$ は不変である。これから

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = (1 - \Delta\theta M) \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & n^1 & n^2 & n^3 \\ n^1 & 0 & 0 & 0 \\ n^2 & 0 & 0 & 0 \\ n^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になることを示せ。なお, 任意のベクトル \mathbf{a} は $\mathbf{a} = \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})$ と表せる。

- $\mathbf{n}^2 = 1$ より $M^3 = M$ を示せ。また

$$\exp(-\theta M) = 1 - M \sinh \theta + M^2 (\cosh \theta - 1)$$

を示せ。 $\det M = 0$ であるから逆行列 M^{-1} は存在しない。

- 有限のローレンツ変換の場合, $1 - \Delta\theta M$ を $\exp(-\theta M)$ で置き換えればよい。

$$x'^0 = x^0 \cosh \theta - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \sinh \theta, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n} \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} (\cosh \theta - 1) - x^0 \sinh \theta \right) \quad (4.7)$$

を求めよ。

- 慣性系 S' は S に対して速度 $\mathbf{v} = \mathbf{n} \tanh \theta$ で移動すること示せ。

4.2 ディラック方程式の共変性

ある慣性系 S でディラック方程式 (3.15)

$$\left[\gamma^\mu (i \partial_\mu - q A_\mu(x)) - m \right] \psi(x) = 0 \quad (4.8)$$

が成り立つとき, 同じ状態が別の慣性系 S' では 4 成分スピノール $\psi'(x')$ で表せるとする。ここで

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

である。これを簡略化して $x' = ax$ と書く。つまり $(ax)^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ である。 $\psi(x)$ と $\psi'(x')$ を結びつける 4×4 行列 $R(a)$

$$\psi'(x') = \psi'(ax) = R(a)\psi(x) \quad (4.9)$$

を導入する。 $\psi(x) = R^{-1}(a)\psi'(x')$ を (4.8) に代入すると

$$\left[\gamma^\mu R^{-1} \left(i \partial_\mu - q A_\mu(x) \right) - R^{-1} m \right] \psi'(x') = 0$$

これに R をかければ

$$\left[R \gamma^\mu R^{-1} \left(i \partial_\mu - q A_\mu(x) \right) - m \right] \psi'(x') = 0$$

である。(1.17) より

$$A_\mu(x) = A'_\nu(x') a^\nu{}_\mu, \quad \partial_\mu = \partial'_\nu a^\nu{}_\mu$$

であるから

$$\left[R \gamma^\mu R^{-1} a^\nu{}_\mu \left(i \partial'_\nu - q A'_\nu(x') \right) - m \right] \psi'(x') = 0$$

になる。後で示すように $a^\mu{}_\nu$ が与えられたとき

$$R \gamma^\mu R^{-1} a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu, \quad \text{つまり} \quad a^\nu{}_\mu \gamma^\mu = R^{-1} \gamma^\nu R \quad (4.10)$$

を満たす R を作れるから

$$\left[\gamma^\mu \left(i \partial'_\mu - q A'_\mu(x') \right) - m \right] \psi'(x') = 0$$

である。したがって、ディラック方程式はローレンツ変換に対してその形を変えず、特殊相対性原理を満たす。

無限小ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換 (4.1) に対して (4.10) を満たす R が

$$R = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} \quad (4.11)$$

ただし

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} \left(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \right) = \begin{cases} 0, & \mu = \nu \\ i \gamma_\mu \gamma_\nu, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.12)$$

で与えられることを示す。 $S = \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}$ とおくと $R = 1 - iS/4$ であるが

$$\left(1 + \frac{i}{4} S \right) R = \left(1 + \frac{i}{4} S \right) \left(1 - \frac{i}{4} S \right) = 1 + \frac{S^2}{16}$$

$\Delta\omega$ の1次まで扱う場合 S^2 は無視すべきであるから $R^{-1} = 1 + iS/4$ である。したがって

$$R^{-1} \gamma^\nu R = \gamma^\nu + \frac{i}{4} \left(S \gamma^\nu - \gamma^\nu S \right)$$

$\mu = \nu$ のとき $\Delta\omega^{\mu\nu} = 0$ であるから

$$S = \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} = i \gamma_\alpha \gamma_\beta \Delta\omega^{\alpha\beta}$$

としてよい。これから

$$\frac{i}{4} \left(S \gamma^\nu - \gamma^\nu S \right) = \frac{\Delta\omega^{\alpha\beta}}{4} \left(\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\nu \right)$$

ところで

$$\gamma^\nu \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma^\nu = g_{\alpha\lambda} \left(\gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\nu \right) = 2g_{\alpha\lambda} g^{\lambda\nu} = 2\delta_\alpha^\nu$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{i}{4}(S\gamma^\nu - \gamma^\nu S) &= \frac{\Delta\omega^{\alpha\beta}}{4}(2\delta_\alpha^\nu\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma^\nu\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\nu) \\ &= \frac{\Delta\omega^{\alpha\beta}}{4}(2\delta_\alpha^\nu\gamma_\beta - 2\delta_\beta^\nu\gamma_\alpha) = \frac{1}{2}(\Delta\omega^{\nu\mu}\gamma_\mu - \Delta\omega^{\mu\nu}\gamma_\mu) = \Delta\omega^{\nu\mu}\gamma_\mu\end{aligned}$$

したがって

$$R^{-1}\gamma^\nu R = \gamma^\nu + \Delta\omega^{\nu\mu}\gamma_\mu = (\delta_\mu^\nu + \Delta\omega^\nu_\mu)\gamma^\mu$$

になり (4.10) を満たす。

(3.17) より

$$\sigma_{\mu\nu}^\dagger = -\frac{i}{2}(\gamma_\nu^\dagger\gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger\gamma_\nu^\dagger) = \frac{i}{2}\gamma^0(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma^0 = \gamma^0\sigma_{\mu\nu}\gamma^0$$

であるから

$$R^\dagger = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^\dagger\Delta\omega^{\mu\nu} = \gamma^0\left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)\gamma^0 = \gamma^0 R^{-1}\gamma^0$$

両側から γ^0 をかければ

$$\gamma^0 R^\dagger \gamma^0 = R^{-1} \quad (4.13)$$

である。これは有限のローレンツ変換の場合にも成り立つ。

次に、有限のローレンツ変換に対する R を求める。

x 軸方向のブースト

この場合の R を R_B と書くことにする。(4.3) より $\Delta\omega^{01} = -\Delta\omega^{10} = \Delta\theta$ 以外は 0 であり

$$R_B = 1 - \frac{i}{4}(\sigma_{01}\Delta\omega^{01} + \sigma_{10}\Delta\omega^{10}) = 1 - \frac{i}{2}\sigma_{01}\Delta\omega^{01} = 1 - \frac{i}{2}\sigma_{01}\Delta\theta$$

有限の θ の場合

$$R_B = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{2}\sigma_{01}\frac{\theta}{N}\right)^N = \exp(-i\theta\sigma_{01}/2)$$

になる。ただし、 θ は (4.6) で与えられる。

$$\sigma_{01} = i\gamma_0\gamma_1 = -i\gamma_0\gamma^1 = -i\alpha_x$$

であるから $\alpha_x^2 = 1$ に注意すると

$$R_B = \exp(-i\theta\sigma_{01}/2) = \exp(-\theta\alpha_x/2) = \cosh\frac{\theta}{2} - \alpha_x \sinh\frac{\theta}{2}$$

一般に速度 $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$, (\mathbf{n} は単位ベクトル) の場合は

$$R_B = \cosh\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} \sinh\frac{\theta}{2}, \quad \tanh\theta = v \quad (4.14)$$

である。 $\boldsymbol{\alpha}$ はエルミート行列であるから R_B もエルミート行列であり、ユニタリ行列ではない。

R_B の逆行列 R_B^{-1} は (4.14) で \mathbf{v} の方向を逆にすればよいから

$$R_B^{-1} = \cosh\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} \sinh\frac{\theta}{2}$$

である。実際 $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n})^2 = 1$ であるから

$$R_B R_B^{-1} = \cosh^2\frac{\theta}{2} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n})^2 \sinh^2\frac{\theta}{2} = \cosh^2\frac{\theta}{2} - \sinh^2\frac{\theta}{2} = 1$$

である。

$$\gamma^0 R_B^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 R_B \gamma^0 = \cosh \frac{\theta}{2} - \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} \gamma^0 \cdot \mathbf{n} \sinh \frac{\theta}{2} = \cosh \frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} \sinh \frac{\theta}{2} = R_B^{-1}$$

になり (4.13) を満たす。

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

を用いると (4.6) は $\cosh \theta = E/m$ になる。

$$\cosh \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh \theta}{2}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}, \quad \sinh \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \theta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}$$

ただし $\theta > 0$ より $\sinh(\theta/2) > 0$ である。これから

$$R_B = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} \right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E+m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} \right)$$

$\sqrt{E^2 - m^2} = |\mathbf{p}|$ より

$$R_B = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right) \quad (4.15)$$

である。

z 軸まわりの回転の場合

ディラック表現 (3.22) とパウリ行列の性質 $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$ を使うと

$$\sigma_{12} = i\gamma_1 \gamma_2 = i\gamma^1 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

である。同様にして

$$\sigma_{23} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}, \quad \sigma_{31} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$$

そこで $\boldsymbol{\sigma}$ に対応する 4×4 行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を

$$\Sigma_x = \sigma_{23}, \quad \Sigma_y = \sigma_{31}, \quad \Sigma_z = \sigma_{12}, \quad \text{つまり} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

で定義する。(3.18) の γ^5 を使うと

$$\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 = i\gamma^2 \gamma^3 = \sigma_{23}, \quad \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 = i\gamma^3 \gamma^1 = \sigma_{31}, \quad \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3 = i\gamma^1 \gamma^2 = \sigma_{12}$$

であるから

$$\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \gamma^5 \boldsymbol{\alpha} \quad (4.17)$$

とも書ける。ディラック表示を使えば明らかであるが、使わなくても $\boldsymbol{\Sigma}$ の定義式 (4.16) と γ^μ の性質 (3.17) より

$$\Sigma_x \Sigma_y - \Sigma_y \Sigma_x = 2i\Sigma_z, \quad \Sigma_x^2 = 1, \quad \text{他の成分も同様}$$

であり、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は $\boldsymbol{\sigma}$ と同じ代数を満たす。したがって、有用な公式

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (4.18)$$

が成り立つ。

R を R_R と書くことにする。 $\Delta\omega^{21} = -\Delta\omega^{12} = \Delta\theta$ 以外は 0 であるから

$$R_R = 1 - \frac{i}{4} \left(\sigma_{12} \Delta\omega^{12} + \sigma_{21} \Delta\omega^{21} \right) = 1 - \frac{i}{2} \sigma_{12} \Delta\omega^{12} = 1 + \frac{i}{2} \Sigma_z \Delta\theta$$

有限の θ の場合

$$R_R = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{2} \Sigma_z \frac{\theta}{N} \right)^N = \exp(i\theta \Sigma_z / 2)$$

になる。ただし、 θ は z 軸まわりの回転角である。これから、一般に \mathbf{n} 軸まわりの回転の場合

$$R_R = \exp(i\theta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} / 2)$$

である。粒子がスピン (内部角運動量) \mathbf{S} を持つ場合、 \mathbf{n} 軸まわりの回転に対して波動関数は

$$\psi'(x') = \exp(i\theta \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \psi(x)$$

の変換をする (スピンを持たない粒子の波動関数はスカラー $\psi'(x') = \psi(x)$ である)。したがって、ディラック方程式に従う粒子では

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}$$

であり、スピンは $1/2$ である。

(4.18) より $(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ であるから

$$R_R = \cos \frac{\theta}{2} + i \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.19)$$

になる。 $R_R(2\pi) = -1$ であるから、任意の軸まわりに 1 回転すると波動関数は符号が変わり元には戻らない。したがって、観測量は 1 回転すれば元に戻るから、 ψ の偶数のべき乗で表される。

(3.17) より

$$\Sigma_x^\dagger = (i\gamma_1\gamma_2)^\dagger = -i\gamma_2^\dagger\gamma_1^\dagger = -i\gamma_0\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = -i\gamma_2\gamma_1 = i\gamma_1\gamma_2 = \Sigma_x$$

であるから、当然のことながら $\boldsymbol{\Sigma}$ はエルミート行列である。したがって

$$R_R^\dagger = \exp(-i\theta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} / 2) = R_R^{-1} \neq R_R$$

であり R_R はユニタリ行列である。これは R_B とは異なる。 $\boldsymbol{\Sigma}$ は γ^0 と交換するから

$$\gamma^0 R_R^\dagger \gamma^0 = R_R^{-1}$$

になり (4.13) を満たす。

空間反転 (パリティ)

3次元空間の座標を反転する変換

$$x'^0 = x^0, \quad x'^k = -x^k, \quad \text{したがって} \quad a^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu}$$

を考える。

$$\det(a^\mu{}_\nu) = -1$$

であるから無限小ローレンツ変換からは求まらない。空間反転での R を P で表す。(4.10) に $a^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu}$ を代入すると

$$\gamma^0 = P^{-1} \gamma^0 P, \quad -\gamma^k = P^{-1} \gamma^k P$$

である。\$P\$ は \$\gamma^0\$ と交換し \$\gamma^k\$ と反交換するから

$$P = \gamma^0$$

とすればよい。

問題 4.2 (4.14) の \$R_B\$, (4.19) の \$R_R\$ 及び \$P\$ が (4.13) を満たすことを示せ。

4.3 双線形形式

スピノール \$\psi\$ と \$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0\$ から作られる双線形形式 (bilinear form)

$$\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x), \quad \Gamma = 4 \times 4 \text{ 行列}$$

のローレンツ変換を考える。\$\psi'(x') = R\psi(x)\$ のとき (4.13) より

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)R^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}(x)\gamma^0 R^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}(x)R^{-1}$$

したがって

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma\psi'(x') = \bar{\psi}(x)R^{-1}\Gamma R\psi(x) \quad (4.20)$$

である。

- スカラー (4.20) で \$\Gamma = 1\$ とすれば \$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x)\$ であるから \$\bar{\psi}(x)\psi(x)\$ はスカラーである。
- ベクトル \$V^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\$ とする。(4.10) より \$R^{-1}\gamma^\mu R = a^\mu_\nu\gamma^\nu\$ であるから

$$V'^\mu(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = a^\mu_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) = a^\mu_\nu V^\nu(x)$$

したがって \$V^\mu(x)\$ は反変ベクトルである。前に定義した確率密度と確率流 \$j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\$ はベクトルであり、確率保存 \$\partial_\mu j^\mu = 0\$ は任意の慣性系で成り立つ。

- 2階のテンソル ベクトルの場合と同様にして \$T^{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\$ は

$$T'^{\mu\nu}(x') = a^\mu_\rho a^\nu_\lambda T^{\rho\lambda}(x)$$

であるから、2階の反対称テンソルである。

- 擬スカラー \$S(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\$ を考える。この場合、上記の方法ではなく \$R\$ の具体形 (4.14), (4.19) を扱う。\$\gamma^5\$ は \$\gamma^\mu\$ と反交換するから \$\alpha = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\$ と \$\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5\boldsymbol{\alpha}\$ とは交換する。したがって

$$R_B^{-1}\gamma^5 R_B = \left(\cosh^2 \frac{\theta}{2} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n})^2 \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right) \gamma^5 = \left(\cosh^2 \frac{\theta}{2} - \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right) \gamma^5 = \gamma^5$$

$$R_R^{-1}\gamma^5 R_R = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \gamma^5 = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \gamma^5 = \gamma^5$$

である。これから固有ローレンツ変換に対しては

$$S'(x') = \bar{\psi}(x)R^{-1}\gamma^5 R\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) = S(x)$$

になりスカラーと同じである。ところが空間反転では \$R = \gamma^0\$ であるから \$R^{-1}\gamma^5 R = -\gamma^5\$ になり

$$S'(x') = \bar{\psi}(x)R^{-1}\gamma^5 R\psi(x) = -S(x)$$

符号が変わる。スカラーは空間反転についても不変である。固有ローレンツ変換に対しては不変だが、空間反転で符号が変わる量を擬スカラー (pseudoscalar) という。固有ローレンツ変換 ($\det(a^\mu_\nu) = 1$) と空間反転 ($\det(a^\mu_\nu) = -1$) を合わせて

$$R^{-1}\gamma^5 R = \det(a^\mu_\nu)\gamma^5, \quad S'(x') = \det(a^\mu_\nu)S(x)$$

である。

問題 4.3 擬ベクトル $V^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x)$ とすると

$$V'^\mu(x') = \det(a^\mu_\nu)a^\mu_\nu V^\nu(x)$$

を示せ。 $V^\mu(x)$ は固有ローレンツ変換に対してはベクトルと同じ変換をする。

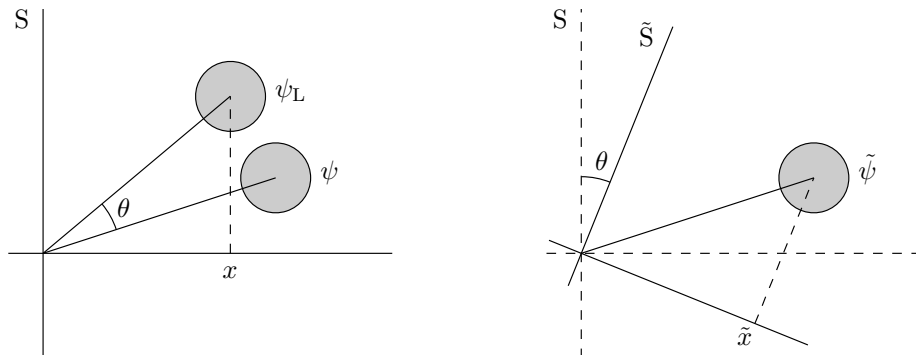
4.4 状態の変換

これまで、状態は固定して座標系を変化させ、ディラック方程式の共変性を調べた。これとは反対に、座標系を固定して状態を変換する見方もできる。この2つの見方は同等である。

座標系 S で状態がスピノール $\psi(x)$ で表せるとする。この状態をローレンツ変換した状態を $\psi_L(x)$ とする。つまり、 $\psi(x)$ を x 軸方向に速さ v で動かす、あるいは、 z 軸まわりに回転させる等の操作をした状態を $\psi_L(x)$ で表す。同じローレンツ変換をすると S になる座標系を \tilde{S} とする。

$$x^\mu = a^\mu_\nu \tilde{x}^\nu, \quad \text{あるいは単に } x = a\tilde{x}$$

である。



\tilde{S} から見た元の状態 $\psi(x)$ を $\tilde{\psi}(\tilde{x})$ とする。図から分かるように x と \tilde{x} が同じ値ならば

$$\tilde{\psi}(x) = \psi_L(x)$$

である。 $\psi(x)$ と $\tilde{\psi}(\tilde{x})$ は (4.9) で結び付けられる。ただし、(4.9) で

$$x \rightarrow \tilde{x}, \quad x' \rightarrow x, \quad \psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{x}), \quad \psi'(x') \rightarrow \psi(x)$$

の置き換えをする:

$$\psi(x) = R(a)\tilde{\psi}(\tilde{x})$$

である。したがって

$$\psi_L(\tilde{x}) = \tilde{\psi}(\tilde{x}) = R(a)^{-1}\psi(x) = R(a)^{-1}\psi(a\tilde{x})$$

つまり

$$\psi_L(x) = R(a)^{-1}\psi(ax) \quad (4.21)$$

である。これは (4.9)

$$\psi'(x') = R(a)\psi(x) = R(a)\psi(a^{-1}x'), \quad (a^{-1}x')^\mu = x'^\nu a_\nu^\mu$$

の逆操作を行ったものである。

(4.21) を

$$\psi_L(x) = U(a)\psi(x) \quad (4.22)$$

の形式にすると便利である。無限小変換の場合 (4.1) と (4.11) より

$$\psi_L(x) = R(a)^{-1}\psi(ax) = \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x^\mu + \Delta\omega^\mu_\nu x^\nu)$$

テイラー展開すれば

$$\begin{aligned} \psi(x^\mu + \Delta\omega^\mu_\nu x^\nu) &= \psi(x) + \Delta\omega^\mu_\nu x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) = \psi(x) + \Delta\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu\psi(x) \\ &= \psi(x) + \Delta\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

$\Delta\omega^{\mu\nu}$ の反対称性 $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$ を使うと

$$\Delta\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\Delta\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu - \Delta\omega^{\nu\mu} x_\nu \partial_\mu\right)\psi(x) = \frac{1}{2}\Delta\omega^{\mu\nu}\left(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu\right)\psi(x)$$

ここで微分演算子

$$L_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right) = \left(x_\mu \hat{p}_\nu - x_\nu \hat{p}_\mu\right), \quad \hat{p}_\mu = +i\partial_\mu$$

を定義すると

$$\psi(x^\mu + \Delta\omega^\mu_\nu x^\nu) = \left(1 + \frac{i}{2}\Delta\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}\right)\psi(x)$$

である。したがって、 $\Delta\omega^{\mu\nu}$ の 1 次まで考えると

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\Delta\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}\right)\psi(x) \\ &= \left(1 + \frac{i}{2}\Delta\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\right)\psi(x), \quad J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

になる。

回転 z 軸まわりの回転の場合 $\Delta\omega^{12} = -\Delta\omega^{21} = -\Delta\theta$ 以外は 0 であるから

$$\psi_L(x) = \left(1 - i\Delta\theta J_{12}\right)\psi(x)$$

ここで (4.16) と同様に軌道角運動量 ($x_1 = -x^1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$)

$$\begin{aligned} L_z = L_{12} &= i\left(x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1\right) = -i\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ L_y = L_{31} &= -i\left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad L_x = L_{23} = -i\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

を定義すると

$$\psi_L(x) = \left(1 - i\Delta\theta J_z\right)\psi(x), \quad \mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$$

である。一般に \mathbf{n} 軸まわりに状態を回転させると

$$\psi_L(x) = \left(1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}\right)\psi(x)$$

更に, 有限の角度 θ のときは

$$\psi_L(x) = U\psi(x), \quad U = \exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J})$$

になる。4成分スピノールで記述される粒子の全角運動量は \mathbf{J} であり, 軌道角運動量 \mathbf{L} とスピン $\mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma}/2$ からなる。

パリティ 空間反転の場合 (4.21) は $R = \gamma^0$ であるから

$$\psi_L(x) = \gamma^0 \psi(ax), \quad (ax)^\mu = (x^0, -\mathbf{x})$$

である。ここで軌道部分に関する演算子 $P^{(0)}$ を

$$P^{(0)}\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(t, -\mathbf{x})$$

で定義すると

$$\psi_L(x) = P\psi(x), \quad P = \gamma^0 P^{(0)}$$

になる。任意の状態に対して $(P^{(0)})^2 \psi(x) = \psi(x)$ であるから $(P^{(0)})^2 = 1$ である。したがって P も

$$P^2 = (\gamma^0)^2 (P^{(0)})^2 = 1$$

である。これからエルミート演算子 P の固有値は ± 1 になる。 P の固有状態をパリティの固有状態という。 P の固有値が η ($\eta = 1$ または $\eta = -1$) である固有状態を $\psi_\eta(x)$ とする:

$$P\psi_\eta(x) = \eta\psi_\eta(x)$$

$\psi_\eta(x)$ を2つの2成分スピノール $F_\eta(x), G_\eta(x)$ で表して

$$\psi_\eta(x) = \begin{pmatrix} F_\eta(x) \\ G_\eta(x) \end{pmatrix}$$

とすると

$$P\psi_\eta(x) = \gamma^0 P^{(0)}\psi_\eta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{(0)}F_\eta(x) \\ P^{(0)}G_\eta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(0)}F_\eta(x) \\ -P^{(0)}G_\eta(x) \end{pmatrix}$$

であるから

$$P^{(0)}F_\eta(x) = \eta F_\eta(x), \quad P^{(0)}G_\eta(x) = -\eta G_\eta(x)$$

になる。非相対論の場合, パリティ演算子は単に $P^{(0)}$ である。したがって, 非相対論的な意味において, F_η と G_η は反対のパリティ固有状態である。1次元で言えば, $F_\eta(x)$ が x の偶関数 (奇関数) であるとき, $G_\eta(x)$ は奇関数 (偶関数) である。

並進 これまでのローレンツ変換では時間と空間の並進は扱わなかった。これは座標系の変換でいえば, b^μ を定数として

$$x'^\mu = x^\mu + b^\mu$$

であり, 原点をずらすことである。状態 $\psi(x)$ を b^μ 並進させるた状態 $\psi_L(x)$ は

$$\psi_L(x) = \psi(x - b)$$

である。 b^μ が微小なら

$$\psi_L(x) = \psi(x) - b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) = \left(1 + i b^\mu \hat{p}_\mu\right) \psi(x)$$

b^μ が有限の場合は

$$\psi_L(x) = U \psi(x), \quad U = \exp(i b^\mu \hat{p}_\mu)$$

になる。 $b^\mu = (0, \mathbf{b})$ ならば

$$U = \exp(-i \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla$$

である。

5 自由粒子

5.1 自由粒子

ディラック方程式 (3.9)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad H = -i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m \beta \quad (5.1)$$

の解で運動量演算子 $-i \boldsymbol{\nabla}$ の固有状態でもある解

$$\psi(x) = \exp(-i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) w(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p^\mu x_\mu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

を求める。 $w(\mathbf{p})$ は 4 成分スピノールである。この $\psi(x)$ をディラック方程式に代入すると

$$H_D w(\mathbf{p}) = E w(\mathbf{p}), \quad H_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m \beta \quad (5.2)$$

(3.6) の性質を使うと $H_D^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ になるから $H_D^2 w = E^2 w$ より

$$E = \pm E_{\mathbf{p}}, \quad E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

である。正のエネルギー解 $E_{\mathbf{p}}$ だけでなく、負のエネルギー解 $-E_{\mathbf{p}}$ も存在する。4 成分スピノール w を 2 つの 2 成分スピノール χ と ζ で表し

$$w(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \chi(\mathbf{p}) \\ \zeta(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

とおくと (5.2) は

$$\begin{pmatrix} m - E & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

になるから $E^2 \neq m^2$ つまり $\mathbf{p} \neq 0$ のとき

$$\zeta = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi \quad \text{または} \quad \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \zeta$$

であるが、 $\mathbf{p} = 0$ の場合

$$(m - E)\chi = 0 \quad \text{かつ} \quad (m + E)\zeta = 0, \quad \therefore \begin{cases} E = m \text{ のとき} & \chi \neq 0, \quad \zeta = 0 \\ E = -m \text{ のとき} & \chi = 0, \quad \zeta \neq 0 \end{cases}$$

になるから

$$\begin{aligned} E = E_{\mathbf{p}} \text{ とき} & \quad \zeta = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi \\ E = -E_{\mathbf{p}} \text{ とき} & \quad \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} \zeta = -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \zeta \end{aligned}$$

とすれば $\mathbf{p} = 0$ も含む。したがって、 $E = \pm E_{\mathbf{p}}$ の固有関数を $w^{(\pm)}(\mathbf{p})$ とすると

$$w^{(+)}(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi \end{pmatrix}, \quad w^{(-)}(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

になる。ここで N は規格化定数、 χ は任意の 2 成分スピノールである。ただし $\chi^\dagger \chi = 1$ とする。

確率密度 $w^\dagger w = \bar{w}\gamma^0 w$ はローレンツ・ベクトル $\bar{w}\gamma^\mu w$ の時間成分でありローレンツ変換で変わる。一方、ローレンツ・スカラー $\bar{w}w$ は不変である。そこで規格化条件を $\bar{w}w$ に対して行う。 $w^\dagger w \neq 1$ になるので、期待値を求める場合は $w^\dagger w$ で割る必要がある。

$$\begin{aligned}\bar{w}^{(+)} &= N^* \left(\chi^\dagger \chi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = N^* \left(\chi^\dagger \quad -\chi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right) \\ \bar{w}^{(-)} &= N^* \left(-\chi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \quad \chi^\dagger \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -N^* \left(\chi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \quad \chi^\dagger \right)\end{aligned}$$

より

$$\bar{w}^{(\pm)} w^{(\pm)} = \pm |N|^2 \left(\chi^\dagger \chi - \chi^\dagger \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} \chi \right) = \pm |N|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} \right) = \pm |N|^2 \frac{2m}{E_{\mathbf{p}} + m}$$

$\bar{w}^{(\pm)} w^{(\pm)} = \pm 1$ を規格化条件とすると $|N| = \sqrt{(E_{\mathbf{p}} + m)/2m}$ になり

$$w^{(+)}(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad w^{(-)}(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

これは

$$\begin{aligned}w^{(+)}(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right) \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\ w^{(-)}(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (5.5)$$

とも書ける。2成分スピノールでは独立な状態は2つあるから、添字 $s = \pm 1$ で識別する：

$$\chi_s^\dagger \chi_{s'} = \delta_{ss'}$$

である。任意の χ_s に対して $w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s)$ は H_D の固有関数である。独立な χ_s が2つあるから、 $E = E_{\mathbf{p}}$ の固有関数も $E = -E_{\mathbf{p}}$ の固有関数も2重に縮退している。Bjorken & Drell に従い

$$u(\mathbf{p}, s) = w^{(+)}(\mathbf{p}, s), \quad v(\mathbf{p}, s) = w^{(-)}(-\mathbf{p}, -s)$$

で表す。負のエネルギー解では運動量とスピンの方向を逆にしたが、これは空孔理論との関連である。ディラック方程式 (5.1) の解は

$$\psi_{\mathbf{p}s}^{(+)}(x) = \exp(-iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) u(\mathbf{p}, s) = e^{-ip \cdot x} u(\mathbf{p}, s) \quad (5.6)$$

$$\psi_{-\mathbf{p}, -s}^{(-)}(x) = \exp(iE_{\mathbf{p}}t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) v(\mathbf{p}, s) = e^{ip \cdot x} v(\mathbf{p}, s) \quad (5.7)$$

になる。ただし、 $p^0 = E_{\mathbf{p}} > 0$ である。

χ_s としては、例えば σ_z の固有関数

$$\sigma_z \chi_s = s \chi_s, \quad s = \pm 1$$

を採用してもよい。しかし、 $w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s)$ は \mathbf{p} が z 軸方向の場合だけ

$$\Sigma_z w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s) = s w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

を満たすが、それ以外では $w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s)$ は Σ_z の固有関数ではない。したがって、 s はよい量子数ではなく、単に状態を識別する指標である。ところで、 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$ であり $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ の固有値は $\pm |\mathbf{p}|$ になるから

$$\sigma_{\mathbf{p}} \chi_s = s \chi_s, \quad s = \pm 1 \quad \text{ただし} \quad \sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (5.8)$$

を満たす χ_s が存在する。このとき

$$\Sigma_{\mathbf{p}} w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s) = s w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s), \quad \Sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

になり、 $w^{(\pm)}(\mathbf{p}, s)$ は H_D と $\Sigma_{\mathbf{p}}$ の同時固有関数である。運動量方向のスピン成分をヘリシティという。

問題 5.1 H_D と $\Sigma_{\mathbf{p}}$ が可換であることを示せ。

問題 5.2 σ としてパウリ行列を用いたとき (5.8) の χ_s を求めよ。

5.2 自由スピノールの性質

ディラック表示に基づく具体的表現 (5.4) を用いてもよいが、ここでは用いない。(5.2) から

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta) u(\mathbf{p}, s) = E_{\mathbf{p}} u(\mathbf{p}, s), \quad (-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta) v(\mathbf{p}, s) = -E_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p}, s)$$

である。 γ^0 をかければ

$$(\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m) u(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) v(\mathbf{p}, s) = 0$$

つまり

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m) u(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (\gamma^{\mu} p_{\mu} + m) v(\mathbf{p}, s) = 0$$

ここで

$$p^0 = p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

である。ファイマンのスラッシュ記号 (3.16) を使えば

$$(\not{p} - m) u(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (\not{p} + m) v(\mathbf{p}, s) = 0 \quad (5.9)$$

である。これらのエルミート共役をとれば

$$u^{\dagger}(\mathbf{p}, s) (\not{p}^{\dagger} - m) = 0, \quad v^{\dagger}(\mathbf{p}, s) (\not{p}^{\dagger} + m) = 0$$

になる。

$$\not{p}^{\dagger} = \gamma^{\mu \dagger} p_{\mu} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 p_{\mu} = \gamma^0 \not{p} \gamma^0$$

より

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) (\not{p} - m) = 0, \quad \bar{v}(\mathbf{p}, s) (\not{p} + m) = 0 \quad (5.10)$$

である。

規格直交性

(5.9) の第 2 式より

$$0 = \bar{u}(\mathbf{p}, s)\not{p}v(\mathbf{p}, s') + m\bar{u}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s') = 2m\bar{u}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s')$$

ただし, (5.10) の第 1 式を使った。規格化と合わせれば

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = \delta_{ss'}, \quad \bar{v}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s') = -\delta_{ss'}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s') = 0 \quad (5.11)$$

である。(5.9) で s を s' に置き換え, 左側から $u^\dagger(\mathbf{p}, s)$ をかければ

$$p^0 u^\dagger(\mathbf{p}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, s') - \mathbf{p} \cdot u^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\gamma}u(\mathbf{p}, s') - m u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = 0$$

この複素共役をとり s と s' を入れ替えれば ($\boldsymbol{\gamma}^\dagger = -\boldsymbol{\gamma}$)

$$p^0 u^\dagger(\mathbf{p}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, s') + \mathbf{p} \cdot u^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\gamma}u(\mathbf{p}, s') - m u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = 0$$

上の 2 式の和をとれば

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = \frac{p^0}{m}\bar{u}(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta_{ss'}$$

同様にして

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s') = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta_{ss'}, \quad v^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s') = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta_{ss'}, \quad u^\dagger(\mathbf{p}, s)v(-\mathbf{p}, s') = 0 \quad (5.12)$$

である。これから

$$U(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}}u(\mathbf{p}, s), \quad V(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}}v(\mathbf{p}, s) \quad (5.13)$$

とすると

$$U^\dagger(\mathbf{p}, s)U(\mathbf{p}, s') = \delta_{ss'}, \quad V^\dagger(\mathbf{p}, s)V(\mathbf{p}, s') = \delta_{ss'}, \quad U^\dagger(\mathbf{p}, s)V(-\mathbf{p}, s') = 0$$

である。

問題 5.3 (5.12) の 2 番目と 3 番目の式及び

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\alpha}u(\mathbf{p}, s) = \frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}}u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s), \quad v^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\alpha}v(\mathbf{p}, s) = \frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}}v^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)$$

を示せ。

射影演算子

各種の計算において

$$\sum_s \bar{u}(\mathbf{p}, s)\Gamma u(\mathbf{p}, s), \quad \sum_s \bar{v}(\mathbf{p}, s)\Gamma v(\mathbf{p}, s), \quad \Gamma = 4 \times 4 \text{ 行列}$$

が必要になる。これは行列要素が

$$(\Lambda_+(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} = \sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s)\bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s), \quad (\Lambda_-(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} = -\sum_s v_\alpha(\mathbf{p}, s)\bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) \quad (5.14)$$

である 4×4 行列 Λ_\pm を使うと

$$\sum_s \bar{u}(\mathbf{p}, s)\Gamma u(\mathbf{p}, s) = \sum_s \sum_{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}, s)(\Gamma)_{\alpha\beta}u_\beta(\mathbf{p}, s) = \sum_{\alpha\beta} (\Gamma)_{\alpha\beta}(\Lambda_+)_{\beta\alpha} = \text{Tr}(\Gamma\Lambda_+) \quad (5.15)$$

であるから計算が容易になる。

具体的表現 (5.4) を用いると

$$\begin{aligned}\Lambda_+(\mathbf{p}) &= \sum_s \frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & -\chi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \chi_s^\dagger & -\chi_s \chi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \chi_s^\dagger & -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \chi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。 $\sum_s \chi_s \chi_s^\dagger = 1 = 2 \times 2$ の単位行列 であるから

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{p}} + m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -\frac{\mathbf{p}^2}{E_{\mathbf{p}} + m} \end{pmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{p}} + m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E_{\mathbf{p}} + m \end{pmatrix} = \frac{E_{\mathbf{p}} \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m}{2m}$$

ただし, (3.22) を用いた。したがって

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \sum_s u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \frac{\not{\mathbf{p}} + m}{2m}, \quad p_0 = E_{\mathbf{p}} \quad (5.16)$$

を得る。同様にして

$$\Lambda_-(\mathbf{p}) = -\sum_s v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \frac{-\not{\mathbf{p}} + m}{2m} \quad (5.17)$$

である。

$$\not{\mathbf{p}} \not{\mathbf{p}} + \not{\mathbf{p}} \not{\mathbf{p}} = a_\mu b_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \therefore \quad \not{\mathbf{p}} \not{\mathbf{p}} = p^2 = m^2$$

より Λ_\pm は

$$\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \quad (5.18)$$

を満たす射影演算子である。4成分スピノール ψ が a_s, b_s を係数として

$$\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}, \quad \psi^{(+)} = \sum_s a_s u(\mathbf{p}, s), \quad \psi^{(-)} = \sum_s b_s v(\mathbf{p}, s)$$

と表せるとき

$$\begin{aligned}\Lambda_+ \psi^{(+)} &= \sum_{ss'} a_s u(\mathbf{p}, s') \bar{u}(\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s) = \sum_{ss'} a_s u(\mathbf{p}, s') \delta_{ss'} = \psi^{(+)} \\ \Lambda_- \psi^{(+)} &= -\sum_{ss'} a_s v(\mathbf{p}, s') \bar{v}(\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s) = 0\end{aligned}$$

同様にして $\Lambda_+ \psi^{(-)} = 0$, $\Lambda_- \psi^{(-)} = \psi^{(-)}$ であるから $\Lambda_\pm \psi = \psi^{(\pm)}$ になる。 Λ_+ は任意の4成分スピノールから正のエネルギー部分を取り出し, Λ_- は負のエネルギー部分を取り出す演算子である。

(5.15) の例として $\Gamma = \gamma^\mu$ の場合を考えると, (3.23), (3.24) より

$$\sum_s \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) = \text{Tr}(\gamma^\mu \Lambda_+(\mathbf{p})) = \frac{1}{2m} \left(p_\nu \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + m \text{Tr}(\gamma^\mu) \right) = \frac{2}{m} p^\mu$$

と簡単に求まるが, u の具体形から求めるのは煩雑である。

問題 5.4 (5.17), (5.18) を導け。

完備性

$$A_+ + A_- = \sum_s \left(u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) - v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) \right) = 1 \quad (5.19)$$

は完備性を表す。つまり、任意の 4 成分スピノール ψ は

$$\psi = \sum_s \left(a_s u(\mathbf{p}, s) + b_s v(\mathbf{p}, s) \right), \quad a_s = \bar{u}(\mathbf{p}, s) \psi, \quad b_s = -\bar{v}(\mathbf{p}, s) \psi$$

と展開できる。完備性の別な表現を求めると, (5.16), (5.17) より

$$\begin{aligned} \sum_s u(\mathbf{p}, s) u^\dagger(\mathbf{p}, s) &= \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 = \frac{1}{2m} \left(E_{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 + m \gamma^0 \right) \\ \sum_s v(\mathbf{p}, s) v^\dagger(\mathbf{p}, s) &= -\frac{-\not{p} + m}{2m} \gamma^0 = \frac{1}{2m} \left(E_{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 - m \gamma^0 \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_s \left(u(\mathbf{p}, s) u^\dagger(\mathbf{p}, s) + v(-\mathbf{p}, s) v^\dagger(-\mathbf{p}, s) \right) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}$$

(5.13) で定義した U, V で表すと

$$\sum_s \left(U(\mathbf{p}, s) U^\dagger(\mathbf{p}, s) + V(-\mathbf{p}, s) V^\dagger(-\mathbf{p}, s) \right) = 1 \quad (5.20)$$

である。

5.3 ブースト

慣性系 S から見て

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{つまり} \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}}$$

の速度 \mathbf{v} で移動する慣性系を S' とする。 S' で運動量 0 の状態 $\psi'(x')$ は, S では運動量 \mathbf{p} の状態 $\psi(x)$ になるはずである。(4.9) より

$$\psi'(x') = R(a)\psi(x), \quad \therefore \quad \psi(x) = R^{-1}\psi'(x')$$

である。ブーストの場合 R は (4.15) で与えられ

$$R^{-1} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right)$$

になる。運動量 0 の状態 $\psi'(x')$ は (5.6), (5.7) で $\mathbf{p} = 0$ とすると

$$\psi'(x') = e^{-iEt'} w^{(\pm)}(0) \quad (5.21)$$

ただし

$$E = m : w^{(+)}(0) = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = -m : w^{(-)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

であるから

$$\psi^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right) e^{\mp imt'} w^{(\pm)}(0)$$

になる。\$x\$ 軸方向のブーストの場合

$$mt' = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}x^0 - \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}x^1 = E_{\mathbf{p}}t - p_x x^1$$

である。一般に、\$mt' = E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p \cdot x\$, \$p^0 = E_{\mathbf{p}}\$ になるから ((4.7) 参照)

$$\psi^{(\pm)}(x) = e^{\mp i p \cdot x} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \right) w^{(\pm)}(0)$$

(5.5) より (5.6), (5.7) を再現する。

5.4 ゴルドン分解

\$\psi_1(x)\$ 及び \$\psi_2(x)\$ が自由なディラック方程式

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi_1 = 0, \quad (i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi_2 = 0$$

の解であるとき、最初の式に \$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu\$ をかければ

$$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = \frac{i}{m} \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi_1 \quad (5.22)$$

である。2番目の式のエルミート共役に \$\gamma^0\$ をかけると

$$0 = \left(-i(\partial_\nu \psi_2^\dagger) \gamma^\nu \dagger - m \psi_2^\dagger \right) \gamma^0 = -i(\partial_\nu \bar{\psi}_2) \gamma^\nu - m \bar{\psi}_2$$

したがって

$$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = -\frac{i}{m} (\partial_\nu \bar{\psi}_2) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_1 \quad (5.23)$$

ここで

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = i(\gamma^\mu \gamma^\nu - g^{\mu\nu}) = i(g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

を使うと (5.22), (5.23) は

$$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = \frac{i}{m} \bar{\psi}_2 \partial^\mu \psi_1 + \frac{1}{m} \bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1, \quad \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = -\frac{i}{m} (\partial^\mu \bar{\psi}_2) \psi_1 + \frac{1}{m} (\partial_\nu \bar{\psi}_2) \sigma^{\mu\nu} \psi_1$$

両者を足し合わせれば

$$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = \frac{i}{2m} \left(\bar{\psi}_2 \partial^\mu \psi_1 - (\partial^\mu \bar{\psi}_2) \psi_1 \right) + \frac{1}{2m} \partial_\nu \left(\bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \psi_1 \right) \quad (5.24)$$

になる。これをゴルドン分解 (Gordon decomposition) という。ディラック流 \$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1\$ は第1項の非相対論的確率流に対応する部分とスピンの依存する部分に分解できる。

\$\psi_1, \psi_2\$ として (5.6)

$$\psi_1(x) = e^{-ip \cdot x} u(\mathbf{p}, s), \quad \psi_2(x) = e^{-ip' \cdot x} u(\mathbf{p}', s')$$

の場合 (5.24) から

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left((p + p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu \right) u(\mathbf{p}, s) \quad (5.25)$$

同様にして

$$\bar{v}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu v(\mathbf{p}, s) = -\frac{1}{2m} \bar{v}(\mathbf{p}', s') \left((p + p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu \right) v(\mathbf{p}, s) \quad (5.26)$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2m} \bar{v}(\mathbf{p}', s') \left((p - p')^\mu - i \sigma^{\mu\nu} (p' + p)_\nu \right) u(\mathbf{p}, s) \quad (5.27)$$

である。

5.5 波束の運動

ディラック方程式 $(i\partial - m)\psi = 0$ の解は、一般に、正エネルギー解 (5.6) と負エネルギー解 (5.7) の線形結合

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

で表せる。ただし

$$\psi^{(+)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} a(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} b^*(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x}$$

任意の係数 $a(\mathbf{p}, s)$, $b^*(\mathbf{p}, s)$ に対して $\psi^{(\pm)}(x)$ は各々ディラック方程式を満たす。確率流の期待値

$$J^\mu(t) = \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) = J_+^\mu(t) + J_-^\mu(t) + K^\mu(t)$$

ただし

$$J_\pm^\mu(t) = \int d^3x \bar{\psi}^{(\pm)}(x) \gamma^\mu \psi^{(\pm)}(x)$$

$$\begin{aligned} K^\mu(t) &= \int d^3x \left(\bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma^\mu \psi^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu \psi^{(+)}(x) \right) \\ &= \int d^3x \left(\left(\bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu \psi^{(+)}(x) \right)^* + \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu \psi^{(+)}(x) \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \int d^3x \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu \psi^{(+)}(x) \end{aligned}$$

を求める。ここで Re は実部を表す。

$$\begin{aligned} J_+^\mu(t) &= \sum_{ss'} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}}} a^*(\mathbf{p}', s') a(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) e^{-i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})t} \int d^3x e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= \sum_{ss'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} a^*(\mathbf{p}, s') a(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) \end{aligned}$$

(5.25) を使うと、 $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ のとき $\sigma^{\mu\nu}$ の項は 0 になるから

$$J_+^\mu(t) = \sum_{ss'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} a^*(\mathbf{p}, s') a(\mathbf{p}, s) \frac{p^\mu}{m} \bar{u}(\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |a(\mathbf{p}, s)|^2 \frac{p^\mu}{E_{\mathbf{p}}}$$

同様にして

$$J_-^\mu(t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |b(\mathbf{p}, s)|^2 \frac{p^\mu}{E_{\mathbf{p}}}$$

である。また

$$\begin{aligned} \int d^3x \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma^\mu \psi^{(+)}(x) &= \sum_{ss'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} a(\mathbf{p}, s) b(-\mathbf{p}, s') \bar{v}(-\mathbf{p}, s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} \\ &= \sum_{ss'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(\mathbf{p}, s) b(-\mathbf{p}, s')}{2E_{\mathbf{p}}} \\ &\quad \times \bar{v}(-\mathbf{p}, s') \left((p - p')^\mu - i \sigma^{\mu\nu} (p' + p)_\nu \right) u(\mathbf{p}, s) e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} \end{aligned}$$

ただし $p'^\mu = (E_{\mathbf{p}'}, -\mathbf{p}')$ である。 $\mu = 0$ のとき

$$(p - p')^0 - i\sigma^{0\nu} (p' + p)_\nu = E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'} - i\sigma^{0k} (p'_k + p_k) = 0$$

$\mu = k$ のとき

$$(p - p')^k - i\sigma^{k\nu} (p' + p)_\nu = 2p^k - i\sigma^{k0} (p'_0 + p_0) = 2p^k - 2iE_{\mathbf{p}}\sigma^{k0} = 2p^k - 2E_{\mathbf{p}}\alpha^k$$

これから

$$K^0 = 0, \quad \mathbf{K} = 2\text{Re} \sum_{ss'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a(\mathbf{p}, s) b(-\mathbf{p}, s') \bar{v}(-\mathbf{p}, s') \left(\frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}} - \boldsymbol{\alpha} \right) u(\mathbf{p}, s) e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}$$

以上から

$$J^0(t) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (|a(\mathbf{p}, s)|^2 + |b(\mathbf{p}, s)|^2)$$

$$\mathbf{J}(t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (|a(\mathbf{p}, s)|^2 + |b(\mathbf{p}, s)|^2) \frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}} + \mathbf{K}(t)$$

になる。規格化条件は $J^0(t) = 1$ である。

負のエネルギー解を無視すれば

$$J^0(t) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |a(\mathbf{p}, s)|^2 = 1, \quad \mathbf{J}(t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |a(\mathbf{p}, s)|^2 \frac{\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}}$$

\mathbf{J} は速度 $\mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$ の期待値であり、シュレディンガー方程式の場合と物理的には同じになる。一方、負のエネルギー解も考慮すると、新たに時間に依存する $\mathbf{K}(t)$ が現れる。この時間依存は $e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}$ であるから非常に激しい振動をする。電子の場合、その周期は

$$\frac{2\pi}{2E_{\mathbf{p}}} < \frac{\pi}{m} \sim 10^{-21} \text{ sec}$$

である。この振動をツィッターベバークング (Zitterbewegung) という。 $\mathbf{K}(t)$ がどのような場合に重要になるか、検討する。 $t = 0$ で波束が広がり d のガウス分布

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\mathbf{x}^2/(2d^2)} w, \quad w = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。 χ は \mathbf{x} に依存しない適当な 2 成分スピノールである。 $\psi(x)$ の展開係数 a, b を $\psi(0, \mathbf{x})$ で表す。

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = e^{2iE_{\mathbf{p}}t} \delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}')$$

であるから

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u^\dagger(\mathbf{p}, s) \psi(x) &= \sum_{s'} \int d^3p' \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}'}}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} (a(\mathbf{p}', s') u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}', s') e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad + b^*(\mathbf{p}', s') u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}', s') e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}) \\ &= \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s'} (a(\mathbf{p}, s') u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') + b^*(-\mathbf{p}, s') u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(-\mathbf{p}, s') e^{2iE_{\mathbf{p}}t}) \end{aligned}$$

u, v の直交性 (5.12) より

$$\sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u^\dagger(\mathbf{p}, s) \psi(x) = a(\mathbf{p}, s) \quad (5.28)$$

同様にして

$$\sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} v^\dagger(\mathbf{p}, s) \psi(x) = b^*(\mathbf{p}, s) \quad (5.29)$$

$t = 0$ とすると

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} u^\dagger(\mathbf{p}, s) w \int d^3x e^{-\mathbf{x}^2/(2d^2) - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} u^\dagger(\mathbf{p}, s) w = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} \chi_s^\dagger \chi \\ b^*(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} v^\dagger(\mathbf{p}, s) w = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} (4\pi d^2)^{3/4} e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2} \chi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi \end{aligned}$$

になる。これから

$$\left| \frac{b^*(\mathbf{p}, s)}{a(\mathbf{p}, s)} \right| \sim \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}} + m}$$

したがって $|\mathbf{p}| \gtrsim m$ のとき $|b(\mathbf{p}, s)| \sim |a(\mathbf{p}, s)|$ になる。一方、 $e^{-\mathbf{p}^2 d^2/2}$ から a, b に寄与する \mathbf{p} の範囲は $|\mathbf{p}| \lesssim 1/d$ であるから、 $m \lesssim 1/d$, つまり $d \lesssim 1/m$ ならば負エネルギー解の効果は無視できない。波束の広がり方がコンプトン波長 \hbar/mc (電子の場合 $3.9 \times 10^{-13} \text{ m}$) 程度以下である。逆に、コンプトン波長以下というような局所化でない場合には、負エネルギー解の効果は無視しても十分よい近似である。水素原子を扱う場合、波動関数の広がり方はボーア半径 $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ 程度であるから、まずは負エネルギー解を無視してもよいだろう (静止質量 m の分だけエネルギーはかさ上げされているから、束縛状態のエネルギーも正である)。しかし、満足すべき理論を作るには、負エネルギー解について明確な物理的解釈が必要である。それはディラックによる空孔理論 (hole theory) によって与えられる。

5.6 空孔理論

ディラック方程式 (5.1) の解として (5.6) のエネルギー $E = E_{\mathbf{p}} > 0$, 運動量 \mathbf{p} , スピン s の解

$$\psi_{\mathbf{p}s}^{(+)}(x) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{p}, s)$$

と (5.7) のエネルギー $E = -E_{\mathbf{p}} < 0$, 運動量 $-\mathbf{p}$, スピン $-s$ の解

$$\psi_{\mathbf{p}s}^{(-)}(x) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} v(\mathbf{p}, s)$$

が得られた。負のエネルギー解が存在すると、例えば、正のエネルギー解の状態にある電子は、電磁相互作用で負のエネルギー解に遷移することが可能で、安定な正エネルギーの電子は存在しないという困難に直面する。

この困難を回避するため、ディラックは次のような解釈を与えた。真空は何も存在しない状態ではなく、負のエネルギー状態が全て占められた状態である。この真空をディラック海 (Dirac sea) ともいう。この真空に電子を1つ加えると、パウリの排他律から負のエネルギー状態に加えることはできず、必ず正のエネルギー状態になり、かつ、負のエネルギー状態に遷移することはできないから、正のエネルギー状態の安定性は保証される。また、我々が観測する物理量の観測値は、真空から

のずれだけであって真空が持っている値は観測不可能である。したがって、電子 + 真空系の測定値は加えた電子の値である。

この解釈は、次のような新しい現象を予言し、実際、実験的に確かめられた。ディラック海中で負のエネルギー状態 $\psi_{ps}^{(-)}$ の電子が欠落し空孔 (hole) ができると

$$\text{電荷 } -e > 0, \quad \text{エネルギー } -(-E_p) = E_p > 0, \quad \text{運動量 } -(-\mathbf{p}) = \mathbf{p}, \quad \text{スピン } -(-s) = s$$

の状態として観測される。つまり、電荷が電子と逆符号で正エネルギーの粒子として観測される。この空孔を反粒子 (anti-particle) という。電子の反粒子は陽電子である。 $\psi_{ps}^{(-)}$ はエネルギー $E_p > 0$, 運動量 \mathbf{p} , スピン s の反粒子の状態を表すことになる。また、光子のエネルギーが $2mc^2$ よりも大きいならば、電磁相互作用で負エネルギー状態にある電子を正エネルギー状態に遷移することができ、1 空孔-1 粒子の状態になる。つまり、真空から電子-陽電子が生成される (これを電子-陽電子の対生成 (pair creation) という)。逆に、空孔がある場合、正エネルギーの電子が負エネルギーの状態に遷移し光子を放出する現象も起こる。これを電子-陽電子の対消滅 (pair annihilation) という。

空孔理論は物理学に大きな進歩をもたらしたが、それでもまだ困難が存在する。最も簡単な1電子系を扱うときでも、背景にディラック海を埋め尽くす無限個の負エネルギーの電子が存在する。電子と負エネルギーの電子は電磁相互作用で互いに影響を及ぼし合うから、1電子系でも実は無限自由度の多体系であり、ディラック海の効果を扱える理論が必要になる。また、負のエネルギー状態は、例えば、自由粒子の場合とクーロンポテンシャルが存在する場合では異なるから、ディラック海の構造は変化する。この構造変化も取り込む必要がある。結局、場の量子化が必要になる。

6 1次元ポテンシャル

x 軸上を運動する1次元のディラック方程式を考える。 $A_x(x, t) = 0$, $A^0(x, t) = A^0(x)$ のときディラック方程式は

$$\left(\alpha_x p_x + m\beta + V(x) - E\right)\psi(x) = 0, \quad p_x = -i\frac{d}{dx}, \quad V(x) = qA^0(x) \quad (6.1)$$

になる。4成分スピノール $\psi(x)$ を2つの2成分スピノール $\varphi_u(x)$, $\varphi_d(x)$ で表して

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_u(x) \\ \varphi_d(x) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\alpha_x p_x + m\beta + V(x) - E = \begin{pmatrix} m + V(x) - E & \sigma_x p_x \\ \sigma_x p_x & -m + V(x) - E \end{pmatrix}$$

であるから

$$\left(m + V(x) - E\right)\varphi_u(x) - i\sigma_x \frac{d\varphi_d}{dx} = 0, \quad -i\sigma_x \frac{d\varphi_u}{dx} - \left(m - V(x) + E\right)\varphi_d(x) = 0$$

第2式から

$$\varphi_d(x) = \frac{-i\sigma_x}{m - V(x) + E} \frac{d\varphi_u}{dx} \quad (6.2)$$

これを第1式に代入すると

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m - V(x) + E} \frac{d\varphi_u}{dx} \right) - \left(m + V(x) - E\right)\varphi_u(x) = 0 \quad (6.3)$$

これはスピンに依存しないから、2成分スピノール $\varphi_u(x)$ を x 依存部分とスピン依存部分に分離して

$$\varphi_u(x) = F(x)\chi, \quad \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \chi^\dagger \chi = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

とする。 a, b は定数である。(6.3)は

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m - V(x) + E} \frac{dF}{dx} \right) - \left(m + V(x) - E\right)F(x) = 0 \quad (6.4)$$

(6.2)より

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} F(x)\chi \\ G(x)\sigma_x \chi \end{pmatrix}, \quad G(x) = \frac{-i}{m - V(x) + E} \frac{dF}{dx} \quad (6.5)$$

である。 $V(x)$ が定数の場合

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \left((E - V)^2 - m^2\right)F = 0$$

になりクライン・ゴールドン方程式 (2.12) と同じになる。(3.21) で示したように、 $A^\mu = \text{一定}$ の場合、ディラック方程式の解はクライン・ゴールドン方程式を満たす。確率密度 $\rho(x)$ と確率の流れの密度 $J(x)$ は

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) = \left(F^*\chi^\dagger \quad G^*\chi^\dagger\sigma_x\right) \begin{pmatrix} F\chi \\ G\sigma_x\chi \end{pmatrix} = |F(x)|^2 + |G(x)|^2 \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} J(x) &= \psi^\dagger(x)\alpha_x\psi(x) = \left(F^*\chi^\dagger \quad G^*\chi^\dagger\sigma_x\right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F\chi \\ G\sigma_x\chi \end{pmatrix} \\ &= F^*G + FG^* = 2\text{Re}\left(F^*(x)G(x)\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

になる。

6.1 階段ポテンシャルとクラインのパラドクス

$V(x)$ が

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}, \quad V_0 \text{ は正の定数}$$

のとき, $x < 0$ の側からエネルギー $E > m$ の粒子が入射する場合を考える。なお, クライン・ゴールドン方程式での階段ポテンシャル (16 ページ) と内容が重複する部分がある。

$x < 0$ では $k = \sqrt{E^2 - m^2} =$ 正の実数 とすれば

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = -k^2 F, \quad G(x) = \frac{-i}{E+m} \frac{dF}{dx}$$

したがって A, B を任意定数として

$$F(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad G(x) = \frac{k}{E+m} (Ae^{ikx} - Be^{-ikx}) \quad (6.8)$$

になるから

$$\psi(x) = \psi_i(x) + \psi_r(x), \quad \psi_i(x) = Ae^{ikx} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{k}{E+m} \sigma_x \chi \end{pmatrix}, \quad \psi_r(x) = Be^{-ikx} \begin{pmatrix} \chi \\ -\frac{k}{E+m} \sigma_x \chi \end{pmatrix}$$

である。 ψ_i の確率密度 ρ_i と確率の流れ J_i は (6.6), (6.7) で $F = Ae^{ikx}$, $G = Ak/(E+m)e^{ikx}$ とすると

$$\rho_i = \left(1 + \frac{k^2}{(E+m)^2}\right) |A|^2 = \frac{2E}{E+m} |A|^2, \quad J_i = \frac{2k}{E+m} |A|^2 = \frac{k}{E} \rho_i = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \rho_i \quad (6.9)$$

になる。 ψ_r の確率密度 ρ_r と確率の流れ J_r は k を $-k$ で置き換えればよいから

$$\rho_r = \frac{2E}{E+m} |B|^2, \quad J_r = -\frac{2k}{E+m} |B|^2 = -\frac{k}{E} \rho_r \quad (6.10)$$

である。 ρ と J の関係 $J =$ 速度 \times ρ から, ψ_i は x 軸正方向に速さ k/E で進む粒子を表し, ψ_r は x 軸負方向に速さ k/E で進む粒子を表す。したがって, ψ_i は入射波, ψ_r は反射波である。 k/E は相対論的古典力学での運動量と速度の関係式である。

$x > 0$ では

$$K = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2} = \sqrt{(E - V_0 + m)(E - V_0 - m)} \quad (6.11)$$

とすれば $d^2 F/dx^2 = -K^2 F$ より

$$F(x) = C_+ e^{iKx} + C_- e^{-iKx}, \quad G(x) = \frac{-i}{E - V_0 + m} \frac{dF}{dx} = \frac{K}{E - V_0 + m} (C_+ e^{iKx} - C_- e^{-iKx})$$

になるから

$$\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x), \quad \psi_{\pm}(x) = C_{\pm} e^{\pm iKx} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\pm K}{E - V_0 + m} \sigma_x \chi \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

である。 K は実数とは限らない。 K が実数の場合, $\psi_{\pm}(x)$ の確率密度 ρ_{\pm} と流れの密度 J_{\pm} は

$$\rho_{\pm} = \left(1 + \frac{K^2}{(E - V_0 + m)^2}\right) |C_{\pm}|^2 = \frac{2(E - V_0)}{E - V_0 + m} |C_{\pm}|^2 \quad (6.13)$$

$$J_{\pm} = 2 \operatorname{Re} \left(C_{\pm}^* e^{\mp iKx} C_{\pm} \frac{\pm K}{E - V_0 + m} e^{\pm iKx} \right) = \frac{\pm 2K}{E - V_0 + m} |C_{\pm}|^2 = \frac{\pm K}{E - V_0} \rho_{\pm} \quad (6.14)$$

になる。 $(E - V_0)^2 > m^2$ のとき K は正の実数である。これは

$$E - V_0 > m, \quad \text{つまり} \quad \text{運動エネルギー} \quad E - m > V_0 \quad (6.15)$$

または

$$E - V_0 < -m, \quad \text{つまり} \quad E - m < V_0 - 2m \quad (6.16)$$

である。 $E - m > 0$ であるから、(6.16) はポテンシャル障壁が非常に大きい $V_0 > 2m$ の場合に起こる。非相対論では、運動エネルギー $E - m > V_0$ のとき K は実数であるが、 $E - m < V_0$ のとき K は純虚数になるから、(6.16) の場合、非相対論では K は純虚数である。

$V_0 < E - m$ の場合

非相対論的にはポテンシャル障壁が運動エネルギーよりも低い場合である。右図で影付きの部分は k, K が実数になる E の領域を表す。 K は正の実数であり、粒子は $x > 0$ の領域を通過する。 $E - V_0 > m > 0$ のとき (6.11) を E について解けば $E = V_0 + \sqrt{K^2 + m^2}$ になるから、(6.14) より $\psi_{\pm}(x)$ は速度

$$\pm \frac{K}{E - V_0} = \pm \frac{K}{\sqrt{K^2 + m^2}}$$

の粒子を表す。これは運動量 $\pm K$ の相対論的な古典的粒子の速度である。

$x > 0$ では x 軸正方向に進む透過波だけであるから $\psi_-(x) = 0$, つまり $C_- = 0$ である。 $x < 0$ での波動関数 $\psi_i + \psi_r$ と $x > 0$ での波動関数 ψ_+ は $x = 0$ で連続であるから

$$A + B = C_+, \quad \frac{k}{E + m}(A - B) = \frac{K}{E - V_0 + m} C_+$$

したがって

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - f}{1 + f}, \quad \frac{C_+}{A} = \frac{2}{1 + f}, \quad \text{ただし} \quad f = \frac{K}{k} \frac{E + m}{E - V_0 + m} \quad (6.17)$$

である。(6.9), (6.10), (6.14) より

$$\frac{J_r}{J_i} = -\frac{|B|^2}{|A|^2} = -\left(\frac{1 - f}{1 + f}\right)^2, \quad \frac{J_+}{J_i} = \frac{K}{k} \frac{E + m}{E - V_0 + m} \frac{|C_+|^2}{|A|^2} = \frac{4f}{(1 + f)^2} \quad (6.18)$$

になり連続の方程式 $J_i + J_r = J_t$ は成り立つ。反射率 R , 透過率 T は、非相対論と同様に確率の流れの比で与えられる。 $f > 0$ より

$$R = \frac{|J_r|}{|J_i|} = \left(\frac{1 - f}{1 + f}\right)^2, \quad T = \frac{|J_t|}{|J_i|} = \frac{4f}{(1 + f)^2}, \quad R + T = 1 \quad (6.19)$$

になる。

$E - V_0 - m > 0$ の場合

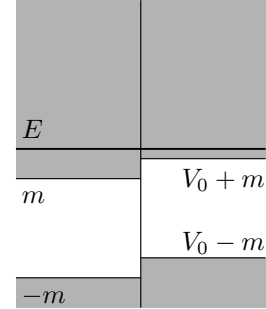
$$f = \sqrt{\frac{(E + m)(E - V_0 - m)}{(E - m)(E - V_0 + m)}} = \sqrt{\frac{1 - V_0/(E - m)}{1 - V_0/(E + m)}}$$

であるから $V_0 \approx 0$ のとき

$$f \approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V_0}{E - m}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V_0}{E + m}\right) \approx 1 - \frac{mV_0}{E^2 - m^2}$$

$R \approx 0, T \approx 1$ になり殆ど透過する。一方、 $V_0 \approx E - m$ のとき

$$f \approx \sqrt{\frac{E + m}{E - m} \frac{E - V_0 - m}{2m}}$$



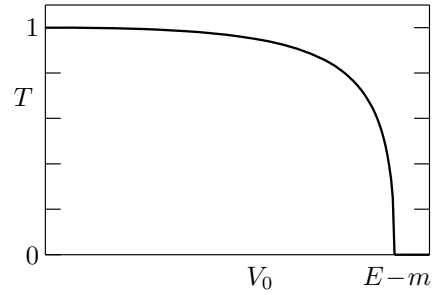
$V_0 = E - m$ では $f = 0$ であるから $R = 1, T = 0$ になり全て反射する。 T を V_0 の関数として図示すると右図になる。
 $E = m + \varepsilon$ とし, $m \gg \varepsilon > V_0$ の場合

$$f = \sqrt{\frac{(2m + \varepsilon)(\varepsilon - V_0)}{\varepsilon(2m + \varepsilon - V_0)}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon - V_0}{\varepsilon}}$$

より

$$R \approx \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon - V_0}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon - V_0}} \right)^2$$

になり, シュレディンガー方程式の結果を再現する。



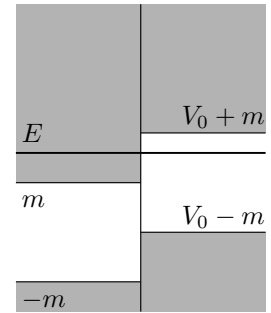
$E - m < V_0 < E + m$ の場合

K は純虚数になる。非相対論的には, 運動エネルギーがポテンシャル障壁よりも小さい場合であり粒子は全て反射される。

$$\kappa = \sqrt{m^2 - (E - V_0)^2} = \text{正の実数}$$

とし K を $i\kappa$ で置き換えると (6.12) は

$$\psi_{\pm}(x) = C_{\pm} e^{\mp \kappa x} \begin{pmatrix} \chi \\ \pm \frac{i\kappa}{E - V_0 + m} \sigma_x \chi \end{pmatrix}$$



になる。 $x \rightarrow \infty$ で $\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$ が有限であるためには $C_- = 0$ であり $V_0 < E - m$ の場合と同じ条件になる。(6.7) で

$$F = C_+ e^{-\kappa x}, \quad G = \frac{iC_+ \kappa}{E - V_0 + m} e^{-\kappa x}$$

とすると F^*G は純虚数になるから, $x > 0$ での流れの密度 J_+ は $J_+ = 0$ である。 $x = 0$ での接続条件は (6.17) で K を $i\kappa$ で置き換えればよいから

$$\frac{B}{A} = \frac{1-f}{1+f}, \quad \frac{C_+}{A} = \frac{2}{1+f}, \quad \text{ただし} \quad f = \frac{i\kappa}{k} \frac{E+m}{E-V_0+m}$$

f は純虚数になるから

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{|1-f|^2}{|1+f|^2} = 1, \quad T = \frac{|J_+|}{|J_i|} = 0$$

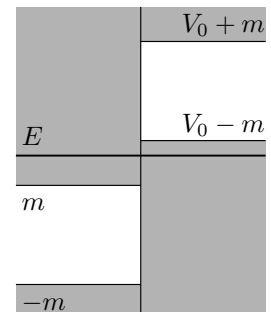
非相対論と同様に, 粒子は全て反射する。

$V_0 > E + m > 2m$ の場合

ポテンシャル障壁は非常に高く, 非相対論的には粒子は全て反射されるが, 相対論では K は再び正の実数になり, 粒子はこのポテンシャル障壁を通過する。 K が実数である $V_0 < E - m$ の結果を使うと, $E - V_0 + m < 0$ であるから $C_- = 0$ とした (6.17) の f は負の実数になり

$$R = \left(\frac{1-f}{1+f} \right)^2 > 1, \quad \frac{J_+}{J_i} = \frac{4f}{(1+f)^2} < 0 \quad (6.20)$$

である。 $E - m < V_0 - 2m < V_0$ であるから, 運動エネルギー $E - m$ はポテンシャル障壁よりも小さいが, 粒子はポテンシャルを透過し, しかも, 反射係数が $R > 1$ というこ



とは、透過側から入射側に粒子が流入する ($J_+/J_i < 0$)。これをクラインのパラドクスという。上図から、 $x > 0$ の領域の波動関数は、自由粒子の負エネルギーの振動解に対応する。このため、奇妙な現象が発生する。非相対論的では、負エネルギーの振動解は存在せず、指数関数的に減少する解になるから、粒子は透過できない。

ところで、(6.14) より ψ_+ の粒子の速度 $K/(E - V_0)$ は $V_0 > E + m$ のとき負になるから、 ψ_+ は x 軸負方向に進む粒子を表す。クライン・ゴールドン方程式の (2.18) で $x > 0$ での波動関数を e^{iKx} から e^{-iKx} に置き換えた。これと同様に、 $x > 0$ の領域で粒子が x 軸正方向に運動するためには、 $C_- = 0$ の代わりに $C_+ = 0$ とし、 K の符号を変えた ψ_- を採用する。(6.17) で $K \rightarrow -K$ とすると f は

$$f = \frac{K}{k} \frac{E + m}{V_0 - E - m} = \sqrt{\frac{(E + m)(V_0 - E + m)}{(E - m)(V_0 - E - m)}} > 0$$

になり $R < 1$ である。 $x > 0$ から $x < 0$ の領域に粒子が流入することはない。 $V_0 \gg E$ のとき

$$f \approx \sqrt{\frac{E + m}{E - m}}, \quad \therefore \quad T = \frac{4f}{(1 + f)^2} \approx \frac{2\sqrt{E^2 - m^2}}{E + \sqrt{E^2 - m^2}} = \frac{2k}{E + k}$$

であり、無限大の障壁でも粒子は透過するという物理的に奇妙な結果になる。

(6.11) を E について解くと $E = V_0 \pm \sqrt{K^2 + m^2}$ であるが、 $V_0 > E + m > E$ より

$$E = V_0 - \sqrt{K^2 + m^2}$$

になる。運動量の大きさが K である粒子のエネルギーは、 $x > 0$ では $V_0 + \sqrt{K^2 + m^2}$ であるから、 $x > 0$ の状態は電荷 q の粒子とは考えられない。クライン・ゴールドン方程式と同様に、 $x > 0$ での粒子を反粒子と見なせば、ポテンシャル障壁は反粒子に対しては引力のポテンシャル $-V_0$ になるから、反粒子はこのポテンシャルを通過する。このとき、反粒子のエネルギー \bar{E} は

$$\bar{E} = -V_0 + \sqrt{K^2 + m^2} = -E$$

である。 $x > 0$ に反粒子が発生するならば、 $x < 0$ には電荷 q 、エネルギー E の粒子が発生する必要がある。しかし、 $R < 1$ であるから、反射してくる電荷 q の粒子は減少する。これでは電荷保存が成り立たない。クライン・ゴールドン方程式の場合 $R > 1$ になり、粒子・反粒子の対生成として物理的解釈が可能である。

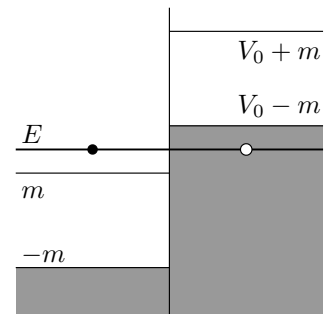
以上の困難さを空孔理論により再解釈する。空孔理論では、自由粒子の場合、負エネルギーの状態は電荷 q の粒子で占有されている(右図の影付きの部分)。ポテンシャル V_0 が存在する場合、(6.11) より

$$E = E_{\pm}, \quad E_{\pm} = V_0 \pm \sqrt{K^2 + m^2}$$

であるが、 E_+ が自由粒子の正エネルギー、 E_- が負エネルギーに対応するから、エネルギーが E_- の状態は電荷 q の粒子で占められている。 $V_0 > E + m$ の場合、 $x > 0$ では $E = E_-$ であり粒子が占有している。この状態に空孔ができると、電荷 $-q$ でエネルギー \bar{E} は

$$\bar{E} = -E_- = -V_0 + \sqrt{K^2 + m^2}$$

になる。電荷 $-q$ の粒子に作用するポテンシャルは $(-q)A^0 = -V_0$ であるから、このエネルギーは運動量の大きさが K の反粒子のエネルギーである。状態 ψ_+ の粒子の速度 $K/(E - V_0)$ は $V_0 >$



$E + m$ のとき負であるが、この状態が空孔になれば、空孔の速度は符号が変わり

$$-\frac{K}{E - V_0} = \frac{K}{\sqrt{K^2 + m^2}} > 0$$

であり、空孔は x 軸正方向に進む。したがって、 $x > 0$ の状態は ψ_+ でよい。(6.17), (6.18) が再び成り立ち $f < 0$ になる。ただし、解釈は次のようになる。

$x > 0$ に空孔が生成するならば $x < 0$ に電荷 q の粒子が発生する。この粒子のエネルギーは $E = \sqrt{k^2 + m^2}$ であり、対生成した粒子・空孔のエネルギーの和は $E + \bar{E} = 0$ であるから、エネルギー保存は成り立つ。ポテンシャル障壁が非常に高いため、非相対論と同様に、入射した粒子は全て反射される。対生成した粒子も反射粒子に加わる。このため、反射粒子は入射粒子より多くなり $R > 1$ になる。 J を電流密度と解釈すれば、電荷 $-q$ の反粒子が x 軸正方向に運動するから $J_+/J_i < 0$ である。連続の方程式 $J_i + J_r = J_+$ は電荷保存を表す。 $R > 1$, $J_+/J_i < 0$ は、空孔理論により粒子・空孔の対生成として、一応、理解できる。

6.2 井戸型ポテンシャル

一般に (6.4) を満たす解が2つあるとする。 $D_{\pm}(x) = m \pm (V(x) - E)$ とすると

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{D_-(x)} \frac{dF_1}{dx} - D_+(x)F_1(x) = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{D_-(x)} \frac{dF_2}{dx} - D_+(x)F_2(x) = 0$$

である。このとき

$$\frac{d}{dx} \frac{F_2}{D_-} \frac{dF_1}{dx} = \frac{1}{D_-} \frac{dF_2}{dx} \frac{dF_1}{dx} + F_2 \frac{d}{dx} \frac{1}{D_-} \frac{dF_1}{dx} = \frac{1}{D_-} \frac{dF_2}{dx} \frac{dF_1}{dx} + D_+ F_1 F_2$$

1と2を入れ替えて差をとれば

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{F_2}{D_-} \frac{dF_1}{dx} - \frac{F_1}{D_-} \frac{dF_2}{dx} \right) = 0, \quad \therefore \frac{F_2}{D_-} \frac{dF_1}{dx} - \frac{F_1}{D_-} \frac{dF_2}{dx} = \text{定数}$$

束縛状態の場合 $|x| \rightarrow \infty$ では $F \rightarrow 0$ であるから 定数 = 0 である。したがって

$$F_2 \frac{dF_1}{dx} - F_1 \frac{dF_2}{dx} = 0$$

になるから $F_2 \propto F_1$ であり、シュレディンガー方程式と同様に、1次元の束縛状態に縮退はない。

$V(x) = V(-x)$ のとき (6.4) より $F(x)$ が解ならば $F(-x)$ も解である。束縛状態では縮退はないから $F(-x) = cF(x)$ とおける。これから $F(x) = cF(-x) = c^2F(x)$ になり $c = \pm 1$ である。したがって、 $V(x) = V(-x)$ の場合、束縛状態の $F(x)$ は偶関数か奇関数になる。(6.5) より $F(x)$ が偶関数(奇関数)のとき $G(x)$ は奇関数(偶関数)である。 $F(x)$ と $G(x)$ ではパリティが逆になる。束縛状態を扱う場合 (6.5) の代わりに

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} F(x)\chi \\ -iG(x)\sigma_x\chi \end{pmatrix}, \quad G(x) = \frac{1}{m - V(x) + E} \frac{dF}{dx}$$

とする。これは $F(x), G(x)$ を実数にするためである。

井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ -V_0, & |x| < a \end{cases}, \quad V_0 > 0 \quad (6.21)$$

の束縛状態を求める。これは $V(x) = V(-x)$ を満たすから、束縛状態の $F(x)$, $G(x)$ は偶関数あるいは奇関数になり、 $x \geq 0$ だけを考えれば十分である。 $x < a$ では (6.4) は

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \left((E + V_0)^2 - m^2 \right) F = 0$$

になるから $K = \sqrt{(E + V_0)^2 - m^2}$ とすると

$$F(x) = A \sin(Kx) + B \cos(Kx), \quad G(x) = \frac{K}{E + V_0 + m} (A \cos(Kx) - B \sin(Kx))$$

$x > a$ では $V_0 = 0$ であるから自由粒子になり

$$F(x) = C e^{-q(x-a)} + D e^{q(x-a)}, \quad G(x) = -\frac{q}{m+E} (C e^{-q(x-a)} - D e^{q(x-a)}), \quad q = \sqrt{m^2 - E^2}$$

になる。 $x \rightarrow \infty$ で $F \rightarrow 0$ であるためには q は実数で $D = 0$ でなければならない。したがって

$$F(x) = C e^{-q(x-a)}, \quad G(x) = -\frac{q}{m+E} C e^{-q(x-a)}, \quad \text{ただし } E^2 < m^2$$

である。 $x = a$ で $F(x)$ と $G(x)$ は連続であるから

$$A \sin(Ka) + B \cos(Ka) = C, \quad \frac{K}{m+E+V_0} (A \cos(Ka) - B \sin(Ka)) = -\frac{q}{m+E} C$$

偶関数の場合、 $A = 0$ より

$$B \cos(Ka) = C, \quad \frac{K}{m+E+V_0} B \sin(Ka) = \frac{q}{m+E} C$$

両辺の比を取れば

$$\tan(Ka) = \frac{q}{K} \frac{m+E+V_0}{m+E} = \sqrt{\frac{(m-E)(E+V_0+m)}{(m+E)(E+V_0-m)}} \quad (6.22)$$

である。奇関数では $B = 0$ より

$$-\cot(Ka) = \frac{q}{K} \frac{m+E+V_0}{m+E} = \sqrt{\frac{(m-E)(E+V_0+m)}{(m+E)(E+V_0-m)}} \quad (6.23)$$

になる。 K が純虚数の場合 K' を実数として $K = iK'$ とおける。これから

$$K \tan(Ka) = K' \frac{1 - e^{2K'a}}{1 + e^{2K'a}} < 0, \quad -K \cot(Ka) = K' \frac{1 + e^{2K'a}}{1 - e^{2K'a}} < 0$$

一方、 $-m < E < m$ より

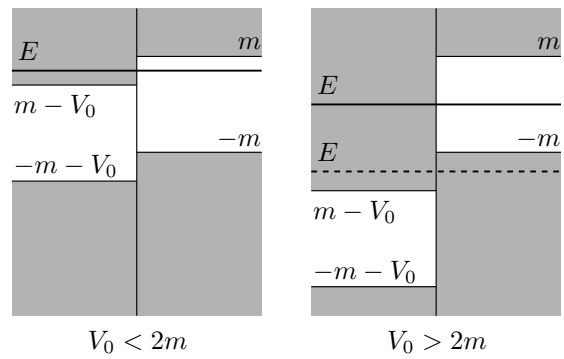
$$q \frac{m+E+V_0}{m+E} > 0$$

になるから (6.22), (6.23) を満たすためには K は実数でなければならない。したがって

$$(E + V_0)^2 - m^2 > 0, \quad \therefore E > m - V_0 \quad \text{または} \quad E < -m - V_0$$

$E > -m$ であるから、束縛状態が存在する範囲は $-m < E < m$ かつ $E > m - V_0$ になる。波動関数は $|x| > a$ では指数関数的に減少し ($-m < E < m$), $|x| < a$ では振動する ($E > m - V_0$)。

$0 < V_0 < 2m$ の場合, $m - V_0 > -m$ より $m - V_0 < E < m$ が束縛状態の存在する範囲である (左図。影付き部分は波動関数が振動するエネルギー領域)。非相対論と同様に, 束縛状態のエネルギーはポテンシャルの底よりも大きい。 $V_0 > 2m$ の場合, $m - V_0 < -m$ であるから $-m < E < m$ が束縛状態の存在する範囲になる。非相対論的に考えれば $m - V_0 < E < -m$ にも (図の破線の E) 束縛状態が存在しそ

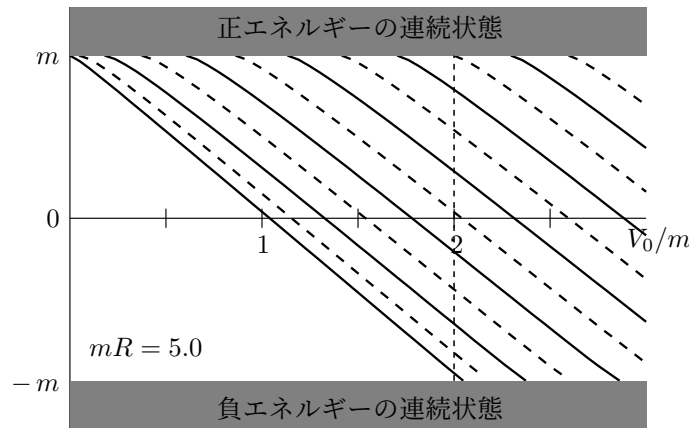


あるが, これは許されない。図から $|x| > a$ での波動関数は, 振動する負エネルギー解になるから, 束縛状態ではない。クラインのパラドクスと同様に, 振動する負エネルギー解の存在が非相対論と異なる現象をもたらす。

下図に (6.22), (6.23) を数値的に解き, E を V_0 の関数として図示した。実線が (6.22), 破線線が (6.23) の解である。 E の V_0 依存性, 及び固有値の数は定性的にはシュレディンガー方程式と同様である。シュレディンガー方程式では, V_0 を大きくする程, より強く束縛し, $V_0 \rightarrow \infty$ で $|x| < a$ に閉じ込められ, エネルギーは

$$E - m = -V_0 + \frac{m}{2} \left(\frac{n\pi}{2ma} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

になる。一方, ディラック方程式では $E < -2m$ では束縛状態ではなくなる。



図に示したように, ある状態が束縛状態であるためには $V_{\min} < V_0 < V_{\max}$ である。偶関数の場合, 最小値 V_{\min} は (6.22) で $E = m$ とすると

$$\tan \left(a\sqrt{V_{\min}^2 + 2mV_{\min}} \right) = 0, \quad \therefore V_{\min} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} - m = \frac{m}{2} \left(\frac{n\pi}{ma} \right)^2 + \dots$$

最大値 V_{\max} は $E = -m$ とすると $\tan \left(a\sqrt{V_{\max}^2 - 2mV_{\max}} \right) = +\infty$ より

$$V_{\max} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{2n+1}{2a} \pi \right)^2} + m = 2m \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{2n+1}{2ma} \pi \right)^2 + \dots \right)$$

同様にして、奇関数の場合は

$$V_{\min} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2} - m = \frac{1}{2m} \left(\frac{2n+1}{2ma}\pi\right)^2 + \dots$$

$$V_{\max} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n+1}{a}\pi\right)^2} + m = 2m \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{ma}\pi\right)^2 + \dots\right)$$

になる。ただし $n = 0, 1, 2, \dots$ である。

$E = m - \varepsilon$ とする。 $0 < \varepsilon < V_0 \ll m$ の場合

$$K = \sqrt{(V_0 - \varepsilon)(2m + V_0 - \varepsilon)} \approx \sqrt{2m(V_0 - \varepsilon)}$$

$$\sqrt{\frac{(m - E)(E + V_0 + m)}{(m + E)(E + V_0 - m)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(2m + V_0 - \varepsilon)}{(2m - \varepsilon)(V_0 - \varepsilon)}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{V_0 - \varepsilon}}$$

であるから (6.22), (6.23) は

$$\beta = \alpha \tan \alpha, \quad \beta = -\alpha \cot \alpha$$

ただし

$$\alpha = \sqrt{2ma^2(V_0 - \varepsilon)}, \quad \beta = \sqrt{2ma^2\varepsilon}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2ma^2V_0$$

になる。したがって、シュレディンガー方程式の結果を再現する。

波動関数

偶関数の場合

$$F(x) = \begin{cases} B \cos(Kx) \\ C e^{-q(x-a)} \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} -\frac{K}{E + V_0 + m} B \sin(Kx) \\ -\frac{q}{m + E} C e^{-q(x-a)} \end{cases}$$

である。

$$\cos^2(Ka) = \frac{1}{1 + \tan^2(Ka)} = \frac{(m + E)(E + V_0 - m)}{2mV_0}$$

であるから

$$\int_0^\infty dx |F|^2 = \frac{B^2}{2} \left(a + \frac{\sin(Ka) \cos(Ka)}{K} + \frac{\cos^2(Ka)}{q} \right) = \frac{aB^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2ma} \sqrt{\frac{m+E}{m-E}} \right)$$

$$\int_0^\infty dx |G|^2 = \frac{aB^2}{2} \frac{E + V_0 - m}{E + V_0 + m} \left(1 + \frac{1}{2ma} \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} \right)$$

したがって

$$\int_{-\infty}^\infty dx (|F|^2 + |G|^2) = aB^2 \left(1 + \frac{1}{2ma} \sqrt{\frac{m+E}{m-E}} + \frac{E + V_0 - m}{E + V_0 + m} \left(1 + \frac{1}{2ma} \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} \right) \right) = 1$$

$E \approx -m$ の場合 $E = -m + \varepsilon$ とすると

$$\sqrt{a} B \approx \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \alpha - 2m/V_0}}, \quad \text{ただし } \alpha = \sqrt{2ma^2\varepsilon}$$

になる。\$\tan(Ka) \rightarrow +\infty\$ であるから \$\cos(Ka) \rightarrow 0\$ になるが、符号を考慮すると

$$\cos(Ka) \approx (-1)^n \frac{\alpha}{2ma} \sqrt{\frac{V_0 - 2m}{V_0}}, \quad \text{ただし } Ka \rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

であるから

$$\frac{C}{B} = \cos(Ka) \approx (-1)^n \frac{\alpha}{2ma} \sqrt{\frac{V_0 - 2m}{V_0}}, \quad \frac{K}{E + V_0 + m} B \approx \sqrt{\frac{V_0 - 2m}{V_0}} B$$

$$\frac{q}{m + E} C = \frac{K}{E + V_0 + m} B \sin(Ka) \approx (-1)^n \sqrt{\frac{V_0 - 2m}{V_0}} B$$

\$\varepsilon \rightarrow 0\$ では \$B, C \rightarrow 0\$ になるが、\$C/B \propto \alpha \propto \sqrt{\varepsilon}\$ であるから \$C\$ は \$B\$ に比べて早く \$0\$ に近づく。したがって \$E \approx -m\$ では

$$F(x) \approx \begin{cases} B \cos(Kx) \\ 0 \end{cases}, \quad G(x) \approx \sqrt{\frac{V_0 - 2m}{V_0}} B \times \begin{cases} -\sin(Kx) & , |x| < a \\ (-1)^{n+1} & , x > a \end{cases}$$

上 2 成分の波動関数 \$F(x)\$ は \$|x| < a\$ に閉じ込められるが、下 2 成分波動関数 \$G(x)\$ は非常に浅く束縛された状態に対応する。

奇関数の場合

$$F(x) = \begin{cases} A \sin(Kx) \\ C e^{-q(x-a)} \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{K}{E + V_0 + m} A \cos(Kx) \\ -\frac{q}{m + E} C e^{-q(x-a)} \end{cases}$$

である。

$$\sin^2(Ka) = \frac{(m + E)(E + V_0 - m)}{2mV_0}$$

であるから

$$\int_0^\infty dx |F|^2 = \frac{aA^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2ma} \sqrt{\frac{m + E}{m - E}} \right)$$

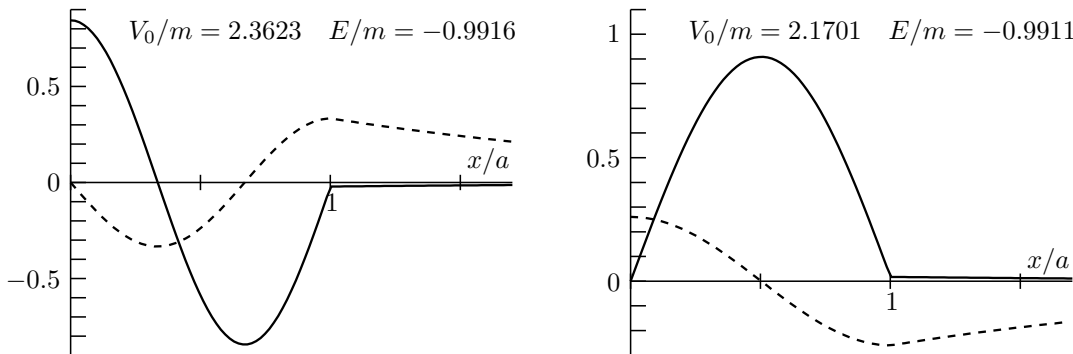
$$\int_0^\infty dx |G|^2 = \frac{aA^2}{2} \frac{E + V_0 - m}{E + V_0 + m} \left(1 + \frac{1}{2ma} \sqrt{\frac{m - E}{m + E}} \right)$$

したがって、規格化条件は偶関数の場合と同じになる。これから \$E \approx -m\$ のとき

$$F(x) \approx \begin{cases} A \sin(Kx) \\ 0 \end{cases}, \quad G(x) \approx \sqrt{\frac{V_0 - 2m}{V_0}} A \times \begin{cases} \cos(Kx) & , |x| < a \\ (-1)^{n+1} & , x > a \end{cases}$$

になる。

\$F(x), G(x)\$ の数値計算例を次に示す。実線が \$\sqrt{a} F(x)\$, 破線が \$\sqrt{a} G(x)\$ である。左側は \$n = 1\$ の偶関数, 右側は \$n = 0\$ の奇関数である。



7 中心力

7.1 動径方向の方程式

ディラック方程式の1つの重要な成果は、原子スペクトルの微細構造を説明したことである。原子中の電子を扱う場合、負エネルギーの効果を見捨ててもよい近似であろうから、ディラック海の存在は無視し、単に1電子のディラック方程式の正エネルギー解だけを扱う。中心力ポテンシャル $V(r)$, $r = |\mathbf{x}|$ の場合、解くべきディラック方程式は (3.10) で $q\phi = V$, $\mathbf{A} = 0$ とした

$$H\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}), \quad H = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m + V(r)$$

である。

交換関係

H が全角運動量 $\mathbf{J} = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\Sigma}/2$ とパリティ演算子 $P = \gamma^0 P^{(0)}$ と交換することを示す。軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell} = -i\mathbf{x}\times\nabla$ は $m\beta, V(r)$ と交換するから

$$[H, \boldsymbol{\ell}] = -i[\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla, \boldsymbol{\ell}] = -i\alpha^k[\partial_k, \boldsymbol{\ell}], \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\ell_x = -ix^2\partial_3 + ix^3\partial_2$ の場合

$$[\partial_k, \ell_x] = -i[\partial_k, x^2]\partial_3 + i[\partial_k, x^3]\partial_2 = -i\delta_{k2}\partial_3 + i\delta_{k3}\partial_2$$

であるから

$$[H, \ell_x] = -\alpha^2\partial_3 + \alpha^3\partial_2 = -(\boldsymbol{\alpha}\times\nabla)_x$$

したがって

$$[H, \boldsymbol{\ell}] = -\boldsymbol{\alpha}\times\nabla \quad (7.1)$$

になる。 $\Sigma_x = i\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^3 = -i\alpha^2\alpha^3$ であるから Σ_x も $m\beta, V(r)$ と交換する。したがって

$$[H, \Sigma_x] = -[\alpha^k, \alpha^2\alpha^3]\partial_k$$

$\alpha^k\alpha^\ell = 2\delta_{k\ell} - \alpha^\ell\alpha^k$ より

$$\alpha^k\alpha^2\alpha^3 = (2\delta_{k2} - \alpha^2\alpha^k)\alpha^3 = 2\delta_{k2}\alpha^3 - \alpha^2(2\delta_{k3} - \alpha^3\alpha^k) = 2\delta_{k2}\alpha^3 - 2\delta_{k3}\alpha^2 + \alpha^2\alpha^3\alpha^k$$

であるから

$$[H, \Sigma_x] = 2(\alpha^2\partial_3 - \alpha^3\partial_2) = 2(\boldsymbol{\alpha}\times\nabla)_x$$

つまり

$$[H, \boldsymbol{\Sigma}] = 2\boldsymbol{\alpha}\times\nabla \quad (7.2)$$

(7.1) と (7.2) より

$$[H, \mathbf{J}] = 0$$

である。 H は $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\Sigma}$ とは非可換であるが $\mathbf{J} = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\Sigma}/2$ とは可換である。

$P^{(0)}\psi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x})$, $P^{(0)}V(r)\psi(\mathbf{x}) = V(r)\psi(-\mathbf{x})$ であるから

$$HP\psi(\mathbf{x}) = (-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m + V(r))\gamma^0\psi(-\mathbf{x}) = \gamma^0(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m + V(r))\psi(-\mathbf{x})$$

$$PH\psi(\mathbf{x}) = \gamma^0 P^{(0)}(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m + V(r))\psi(\mathbf{x}) = \gamma^0(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\nabla) + \beta m + V(r))\psi(-\mathbf{x})$$

任意のスピンールに対して $(HP - PH)\psi(\mathbf{x}) = 0$ であるから H と P は交換する。

角度部分の分離

H, \mathbf{J}^2, J_z, P の同時固有関数 $\psi(\mathbf{x})$ を2つの2成分スピンール φ_u, φ_d で表して

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_u(\mathbf{x}) \\ \varphi_d(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

とする。ディラック表示では

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}, \quad j = \ell + \sigma/2, \quad P = \gamma^0 P^{(0)} = \begin{pmatrix} P^{(0)} & 0 \\ 0 & -P^{(0)} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\mathbf{J}^2\psi = j(j+1)\psi, \quad J_z\psi = m_3\psi, \quad P\psi = \eta\psi, \quad (\eta = \pm 1)$$

は

$$\begin{aligned} j^2\varphi_u &= j(j+1)\varphi_u, & j_z\varphi_u &= m_3\varphi_u, & P^{(0)}\varphi_u &= \eta\varphi_u \\ j^2\varphi_d &= j(j+1)\varphi_d, & j_z\varphi_d &= m_3\varphi_d, & P^{(0)}\varphi_d &= -\eta\varphi_d \end{aligned}$$

になる。 φ_u と φ_d は異なる軌道パリティの状態である。 j^2, j_z, ℓ^2 の同時固有関数である2成分スピンールを $\mathcal{Y}_{\ell j m_3}(\theta, \phi)$ とする：

$$j^2\mathcal{Y}_{\ell j m_3} = j(j+1)\mathcal{Y}_{\ell j m_3}, \quad j_z\mathcal{Y}_{\ell j m_3} = m_3\mathcal{Y}_{\ell j m_3}, \quad \mathbf{L}^2\mathcal{Y}_{\ell j m_3} = \ell(\ell+1)\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$$

$\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$ は軌道角運動量の固有関数である球面調和関数 $Y_{\ell m}$ とスピンの固有関数を合成したものである。 j が与えられたとき、 ℓ は $\ell_{\pm} = j \pm 1/2$ の2つの値が可能である。したがって

$$\varphi_u(\mathbf{x}) = F_+(r)\mathcal{Y}_{\ell_+ j m_3} + F_-(r)\mathcal{Y}_{\ell_- j m_3}$$

とおける。 $P^{(0)}\mathcal{Y}_{\ell j m_3} = (-1)^\ell\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$ であるから

$$P^{(0)}\varphi_u = (-1)^{\ell_+}F_+(r)\mathcal{Y}_{\ell_+ j m_3} + (-1)^{\ell_-}F_-(r)\mathcal{Y}_{\ell_- j m_3} = (-1)^{\ell_+}\left(F_+(r)\mathcal{Y}_{\ell_+ j m_3} - F_-(r)\mathcal{Y}_{\ell_- j m_3}\right)$$

φ_u が $P^{(0)}$ の固有関数であるためには

$$\varphi_u(\mathbf{x}) = F_+(r)\mathcal{Y}_{\ell_+ j m_3}, \quad \text{または} \quad \varphi_u(\mathbf{x}) = F_-(r)\mathcal{Y}_{\ell_- j m_3}$$

でなければならない。 φ_d は φ_u と逆の軌道パリティであるから

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_u(\mathbf{x}) \\ \varphi_d(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_u(\mathbf{x}) = \frac{F(r)}{r}\mathcal{Y}_{\ell j m_3}, \quad \varphi_d(\mathbf{x}) = \frac{iG(r)}{r}\mathcal{Y}_{\ell' j m_3} \quad (7.4)$$

とおける(後での便宜上、 $1/r$ と虚数単位 i を取り出した)。ここで

$$\ell' = \begin{cases} j-1/2, & \ell = j+1/2 \text{ のとき} \\ j+1/2, & \ell = j-1/2 \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \ell' = \begin{cases} \ell-1, & j = \ell-1/2 \text{ のとき} \\ \ell+1, & j = \ell+1/2 \text{ のとき} \end{cases} \quad (7.5)$$

である。なお、 $\ell = 0$ の場合は $j = \ell - 1/2$ の状態はない。任意の $F(r), G(r)$ に対して $\psi(\mathbf{x})$ は \mathbf{J}^2, J_z, P の同時固有関数である。 φ_u と φ_d の各々は ℓ^2 の固有関数であるが、 φ_u と φ_d の ℓ は異なる

から, $\psi(\mathbf{x})$ は ℓ^2 の固有関数ではない。非相対論の場合, 中心力のハミルトニアン H と ℓ は可換であるが, 相対論では中心力の場合でも H と ℓ は非可換である。後は H の固有関数になるように $F(r), G(r)$ を決める。

動径方向の微分方程式

ディラック表示では

$$H = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m + V(r) = \begin{pmatrix} m + V(r) & -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla & -m + V(r) \end{pmatrix}$$

であるから $H\psi = E\psi$ は

$$(m + V(r) - E)\varphi_u - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_d = 0 \quad (7.6)$$

$$-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_u - (m - V(r) + E)\varphi_d = 0 \quad (7.7)$$

になる。

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla = \mathbf{x}\cdot\nabla + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{x}\times\nabla) = r\frac{\partial}{\partial r} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell} = \frac{\partial}{\partial r}r + K, \quad K = -1 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell} \quad (7.8)$$

K を $j = \ell + \sigma/2$ で表すと

$$j^2 = \ell^2 + \frac{\sigma^2}{4} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell} = \ell^2 + \frac{3}{4} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}, \quad \therefore K = \ell^2 - j^2 - \frac{1}{4}$$

になる。 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x} = r^2$ を使うと

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_u(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_u(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r + K\right)\varphi_u(\mathbf{x})$$

である。

$$\varphi_u(\mathbf{x}) = \frac{F(r)}{r}\mathcal{Y}_{\ell j m_3}(\theta, \phi)$$

とおくと

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_u(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r^2}\left(\frac{dF}{dr}\mathcal{Y}_{\ell j m_3} + \frac{F}{r}K\mathcal{Y}_{\ell j m_3}\right)$$

になる。ところで

$$K\mathcal{Y}_{\ell j m_3} = \left(\ell^2 - j^2 - \frac{1}{4}\right)\mathcal{Y}_{\ell j m_3} = \kappa\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$$

ただし

$$\begin{aligned} \kappa = \ell(\ell+1) - j(j+1) - \frac{1}{4} &= \begin{cases} -(\ell+1), & j = \ell + \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ \ell, & j = \ell - \frac{1}{2} \text{ のとき} \end{cases} \\ &= (-1)^{j+\ell+1/2} \left(j + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

であるから

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi_u(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}\left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r}F(r)\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r}\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$$

になる。これを (7.7) に代入すると

$$-\frac{i}{r}\left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r}F(r)\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{r}\mathcal{Y}_{\ell j m_3} - (m - V(r) + E)\varphi_d = 0$$

になるから

$$\varphi_d(\mathbf{x}) = -\frac{iG(r)}{r} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}, \quad G(r) = \frac{1}{m - V(r) + E} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F(r) \right)$$

である。これから

$$\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F(r) - (m - V(r) + E)G(r) = 0$$

である。次に, (7.6) を $F(r), G(r)$ で表すと

$$(m + V(r) - E) \frac{F(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \frac{G(r)}{r^2} \mathcal{Y}_{\ell j m_3} = 0$$

である。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = \nabla \cdot \mathbf{x} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{x}) = 3 + r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} = r \frac{\partial}{\partial r} + 2 - K$$

より

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \frac{G(r)}{r^2} \mathcal{Y}_{\ell j m_3} = \left(r \frac{d}{dr} \frac{G}{r^2} + \frac{2 - \kappa}{r^2} G \right) \mathcal{Y}_{\ell j m_3} = \frac{1}{r} \left(\frac{dG}{dr} - \frac{\kappa}{r} G \right) \mathcal{Y}_{\ell j m_3}$$

になるから

$$\frac{dG}{dr} - \frac{\kappa}{r} G(r) - (m + V(r) - E)F(r) = 0$$

である。まとめると, 中心力の場合

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{F(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}(\theta, \phi) \\ -i \frac{G(r)}{r} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

とおけ, ディラック方程式は

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{\kappa}{r} F(r) + (m + E - V(r))G(r) \quad (7.11)$$

$$\frac{dG}{dr} = +\frac{\kappa}{r} G(r) + (m - E + V(r))F(r) \quad (7.12)$$

になる。これから $F(r)$ と $G(r)$ は実関数にできる。

(7.10) が (7.4) と同じであることを示す。

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} K - K \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = 2\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\ell} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = 2\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{x})$$

ただし $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x} = 0$ である。ところで

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{x})_k &= \varepsilon_{kij} x_i (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\ell})_j + \varepsilon_{kji} (\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{x})_j x_i \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{mni} (x_i x_m \ell_n - x_m \ell_n x_i) \\ &= i \varepsilon_{kij} \varepsilon_{mij} x_m = i (\delta_{km} \delta_{ii} - \delta_{ki} \delta_{im}) x_m = 2i x_k \end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} K + K \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \therefore \quad K \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3} = -\kappa \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}$$

一方

$$K \mathcal{Y}_{\ell' j m_3} = \kappa' \mathcal{Y}_{\ell' j m_3}, \quad \kappa' = (-1)^{j+\ell'+1/2} \left(j + \frac{1}{2} \right) = -(-1)^{j+\ell+1/2} \left(j + \frac{1}{2} \right) = -\kappa$$

であるから $N_{\ell j}$ を定数として

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x}}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3} = N_{\ell j} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}, \quad |N_{\ell j}| = 1$$

とおける。 $\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$ の具体形を使うと $N_{\ell j} = -1$ を示せる。したがって, (7.10) は (7.4) と同じである。

非相対論との比較

$E = m + \varepsilon$ とすると (7.11) より

$$G(r) = \frac{1}{2m + \varepsilon - V(r)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) F(r)$$

これを (7.12) に代入すると

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) \frac{1}{2m + \varepsilon - V(r)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) F(r) = (-\varepsilon + V(r)) F(r)$$

$2m \gg |\varepsilon - V(r)|$ の場合

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) F(r) \approx (-\varepsilon + V(r)) F(r)$$

になる。

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) F(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} \right) F(r)$$

であるから

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2mr^2} + V(r) \right) F(r) \approx \varepsilon F(r)$$

$j = \ell \pm 1/2$ のどちらにしても $\kappa(\kappa+1) = \ell(\ell+1)$ になるから

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r) \right) F(r) \approx \varepsilon F(r)$$

になり, 動径方向のシュレディンガー方程式を再現する。シュレディンガー方程式では固有値は ℓ にだけ依存し j には依存しない。 $V(r)$ はスピンに依存しないから, 非相対論的固有値は j に依存しないことになる。一方, (7.11), (7.12) は κ に依存するから, $j = \ell + 1/2$ と $j = \ell - 1/2$ の相対論的固有値は一般には異なる。

問 7.1 次元解析により (7.11) と (7.12) を \hbar, c を明示した式にせよ。

問 7.2 波動関数の規格化 (7.10) より

$$\int d^3x \psi^\dagger(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x}) = \int_0^\infty dr (F^2(r) + G^2(r))$$

を示せ。

7.2 自由球面波

$V(r) = 0$ の場合を考えよう。(7.11) から

$$G(r) = \frac{1}{E + m} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F(r) \right)$$

これを (7.12) に代入すると

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + E^2 - m^2 \right) F(r) = 0$$

になる。(7.9) より $\kappa(\kappa+1) = \ell(\ell+1)$ である。 $q = \sqrt{E^2 - m^2}$ とおくと

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + q^2 \right) F(r) = 0$$

この微分方程式の一般解は球ベッセル関数 $rj_\ell(qr)$ と球ノイマン関数 $rn_\ell(qr)$ の線型結合で表せるが、原点で正則は解は

$$F(r) = Nrj_\ell(qr), \quad N = \text{規格化定数}$$

である。

$$G = \frac{1}{E+m} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F \right) = \frac{N}{E+m} \left((\kappa+1) j_\ell(qr) + qr j'_\ell(qr) \right), \quad j'_\ell(x) = \frac{dj_\ell}{dx}$$

$j = \ell - 1/2$ のとき (7.5), (7.9) より $\ell' = \ell - 1$, $\kappa = \ell$ である。 j_ℓ の漸化式

$$j_{\ell-1}(\rho) = j'_\ell(\rho) + \frac{\ell+1}{\rho} j_\ell(\rho)$$

を使うと

$$G = \frac{Nq}{E+m} rj_{\ell-1}(qr) = \frac{Nq}{E+m} rj_{\ell'}(qr)$$

$j = \ell + 1/2$ の場合 $\ell' = \ell + 1$, $\kappa = -\ell - 1$ 及び

$$j_{\ell+1}(\rho) = -j'_\ell(\rho) + \frac{\ell}{\rho} j_\ell(\rho)$$

から

$$G = -\frac{Nq}{E+m} rj_{\ell'}(qr)$$

角運動量とパリティの固有関数である自由粒子の波動関数は $j = \ell \mp 1/2$ のとき

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{F(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3} \\ \frac{iG(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell' j m_3} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} j_\ell(qr) \mathcal{Y}_{\ell j m_3} \\ \frac{\pm i q}{E+m} j_{\ell'}(qr) \mathcal{Y}_{\ell' j m_3} \end{pmatrix}$$

になる。

複素数 z が $|z| \rightarrow \infty$ のとき

$$j_\ell(z) \rightarrow \frac{\sin(z - \ell\pi/2)}{z}$$

である。 $E^2 < m^2$ のとき q は純虚数になるから $j_\ell(qr)$ は $r \rightarrow \infty$ で発散する。したがって $E^2 \geq m^2$ でなければならない。

$E \geq m$ の場合 $E = \sqrt{m^2 + q^2}$ である。 $m \gg q$ の非相対論的極限では

$$\frac{q}{E+m} = \frac{q}{2m} \left(1 - \frac{q^2}{4m^2} + \dots \right)$$

になるから

$$\psi(\mathbf{x}) \approx N \begin{pmatrix} j_\ell(qr) \mathcal{Y}_{\ell j m_3} \\ \frac{\pm i q}{2m} j_{\ell'}(qr) \mathcal{Y}_{\ell' j m_3} \end{pmatrix} \approx N \begin{pmatrix} j_\ell(qr) \mathcal{Y}_{\ell j m_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2成分スピノールの自由球面波を再現する。

問 7.3 負のエネルギー解 $E \leq -m$ の場合, $q \ll m$ では $\psi(\mathbf{x})$ は下2成分だけになることを示せ。

7.3 クーロン・ポテンシャル

原点に Ze の点電荷があるとき, 中心力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \text{微細構造定数} \approx \frac{1}{137}$$

であるから (7.11), (7.12) は

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{\kappa}{r} F + \left(m + E + \frac{Z\alpha}{r}\right) G, \quad \frac{dG}{dr} = \frac{\kappa}{r} G + \left(m - E - \frac{Z\alpha}{r}\right) F$$

になる。 $r \rightarrow \infty$ では

$$\frac{dF}{dr} = (m + E)G, \quad \frac{dG}{dr} = (m - E)F$$

であるから

$$\frac{d^2 F}{dr^2} = (m + E) \frac{dG}{dr} = (m^2 - E^2)F$$

これから $m^2 - E^2 > 0$ のとき

$$F(r), G(r) \rightarrow e^{-\sqrt{m^2 - E^2} r}, \quad r \rightarrow \infty$$

という解が存在し束縛状態になる。一方, $r \rightarrow 0$ では

$$\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F - \frac{Z\alpha}{r} G = 0, \quad \frac{dG}{dr} - \frac{\kappa}{r} G + \frac{Z\alpha}{r} F = 0$$

$F = c_f r^\lambda, G = c_g r^\lambda, (\lambda > 0)$ とすると

$$\begin{pmatrix} \lambda + \kappa & -Z\alpha \\ Z\alpha & \lambda - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_f \\ c_g \end{pmatrix} = 0, \quad \therefore \begin{vmatrix} \lambda + \kappa & -Z\alpha \\ Z\alpha & \lambda - \kappa \end{vmatrix} = \lambda^2 - \kappa^2 + (Z\alpha)^2 = 0$$

より $\lambda = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$ である。 $Z < 137$ ならば $Z\alpha \approx Z/137 < 1$ であり, κ は 0 でない整数であるから λ は実数である。一方 $Z > 137$ の場合 λ が純虚数になる κ が存在する。このとき $\lambda = i|\lambda|$ であるから

$$r^\lambda = e^{i|\lambda| \log r} = \cos(|\lambda| \log r) + i \sin(|\lambda| \log r)$$

波動関数は $r \rightarrow 0$ で振動し 1 つの値に収束しないから, λ が純虚数になる κ に対しては束縛状態は存在しない。引力が強すぎて束縛状態が存在しないことは, ポテンシャルの深さが $-2m$ を超える井戸型ポテンシャルでも起きた。以下では $Z < 137$ とする。

以上の漸近形を考慮して方程式を書き直す。束縛状態のみを考えることにして

$$\rho = 2\sqrt{m^2 - E^2} r$$

とすると

$$\frac{dG}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} G - \left(\frac{\nu}{2} - \frac{Z\alpha}{\rho}\right) F = 0, \quad \frac{dF}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} F - \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{Z\alpha}{\rho}\right) G = 0$$

ただし

$$\nu = \frac{m - E}{\sqrt{m^2 - E^2}} = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}}$$

漸近形を取り出して

$$F = \rho^\lambda e^{-\rho/2} f, \quad G = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}} \rho^\lambda e^{-\rho/2} g$$

とすると

$$\rho \frac{dg}{d\rho} + \left(\lambda - \kappa - \frac{\rho}{2} \right) g + \left(\frac{Z\alpha}{\nu} - \frac{\rho}{2} \right) f = 0, \quad \rho \frac{df}{d\rho} + \left(\lambda + \kappa - \frac{\rho}{2} \right) f - \left(Z\alpha\nu + \frac{\rho}{2} \right) g = 0$$

である。両者の和と差から $f_1 = f + g$ 及び $f_2 = f - g$ は

$$\rho \frac{df_1}{d\rho} + (\lambda + \nu_1 - \rho) f_1 + (\kappa + \nu_2) f_2 = 0, \quad \rho \frac{df_2}{d\rho} + (\lambda - \nu_1) f_2 + (\kappa - \nu_2) f_1 = 0 \quad (7.13)$$

を満たす。ただし

$$\nu_1 = \frac{Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{\nu} - \nu \right) = \frac{Z\alpha E}{\sqrt{m^2 - E^2}}, \quad \nu_2 = \frac{Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{\nu} + \nu \right) = \frac{Z\alpha m}{\sqrt{m^2 - E^2}}$$

(7.13) の第 2 式より

$$f_1 = \frac{1}{\nu_2 - \kappa} \left(\rho \frac{df_2}{d\rho} + (\lambda - \nu_1) f_2 \right)$$

である。これを (7.13) の第 1 式に代入すると

$$\rho \frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + (2\lambda + 1 - \rho) \frac{df_2}{d\rho} - \left(\lambda - \nu_1 - \frac{\lambda^2 - \kappa^2 + \nu_2^2 - \nu_1^2}{\rho} \right) f_2 = 0$$

であるが, $\nu_2^2 - \nu_1^2 = (Z\alpha)^2$, $\lambda^2 - \kappa^2 = -(Z\alpha)^2$ より最後の項は打ち消しあい

$$\rho \frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + (2\lambda + 1 - \rho) \frac{df_2}{d\rho} - (\lambda - \nu_1) f_2 = 0$$

になる。同様に, (7.13) の第 1 式を用いて f_2 を f_1 で表し (7.13) の第 2 式に代入すると

$$\rho \frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + (2\lambda + 1 - \rho) \frac{df_1}{d\rho} - (\lambda - \nu_1 + 1) f_1 = 0$$

これらは合流型超幾何微分方程式

$$\left(z \frac{d^2}{dz^2} + (b - z) \frac{d}{dz} - a \right) w(z) = 0$$

であり, 原点で正則な解は合流型超幾何関数 $M(a, b, z)$

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

で与えられるから

$$f_1(\rho) = C_1 M(\lambda - \nu_1 + 1, 2\lambda + 1, \rho), \quad f_2(\rho) = C_2 M(\lambda - \nu_1, 2\lambda + 1, \rho)$$

になる。(7.13) で $\rho = 0$ とすると

$$(\lambda + \nu_1) C_1 + (\kappa + \nu_2) C_2 = 0, \quad \therefore C_1 = -\frac{\kappa + \nu_2}{\lambda + \nu_1} C_2 \quad (7.14)$$

である。 $M(a, b, z)$ は $a = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき n 次の多項式になるが, $a \neq -n$ ならば $z \rightarrow \infty$ のとき $M(a, b, z) \rightarrow e^z$ で発散する。したがって $r \rightarrow \infty$ で $F, G \rightarrow 0$ であるためには

$$\lambda - \nu_1 = \lambda - \frac{Z\alpha E}{\sqrt{m^2 - E^2}} = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

これを E について解くと

$$E = m \frac{n_r + \lambda}{\sqrt{(n_r + \lambda)^2 + (Z\alpha)^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} \quad (7.15)$$

になる。ただし、 $\lambda - \nu_1 = -n_r = 0$ の場合、 $f_1(\rho) = C_1 M(1, 2\lambda + 1, \rho)$ であるから $C_1 = 0$ でなければならぬ。 $\nu_1 = \lambda$ のとき

$$\nu_2 = \sqrt{(Z\alpha)^2 + \nu_1^2} = \sqrt{(Z\alpha)^2 + \lambda^2} = |\kappa|, \quad \therefore C_1 = -\frac{\kappa + \nu_2}{\lambda + \nu_1} C_2 = -\frac{\kappa + |\kappa|}{2\lambda} C_2$$

したがって、 $n_r = 0$ は $\kappa < 0$ のときだけ許される。

$n_r + \lambda$ が小さいほど E は小さくなるから、基底状態は $n_r = 0, \kappa = -1$ であり

$$E = m\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} = m \left(1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2} - \frac{(Z\alpha)^4}{8} - \dots \right)$$

になる。 $-m(Z\alpha)^2/2$ は非相対論における基底状態の固有値である。一般に、非相対論と比較するため

$$n = n_r + |\kappa| = n_r + j + \frac{1}{2}, \quad \delta_j = |\kappa| - \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} = \frac{(Z\alpha)^2}{2j+1} + \frac{(Z\alpha)^4}{(2j+1)^3} + \dots \quad (7.16)$$

とする。 $Z\alpha \ll 1$ では

$$\begin{aligned} E &= m \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n - \delta_j)^2} \right)^{-1/2} \\ &= m \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(Z\alpha)^2}{(n - \delta_j)^2} + \frac{3}{8} \frac{(Z\alpha)^4}{(n - \delta_j)^4} + \dots \right) \\ &= m \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(1 + \frac{2\delta_j}{n} \right) + \frac{3}{8} \frac{(Z\alpha)^4}{n^4} + \dots \right) \\ &= E_{\text{NR}} - \frac{m(Z\alpha)^4}{n^4} \left(\frac{n}{2j+1} - \frac{3}{8} \right) + \dots, \quad E_{\text{NR}} = m - \frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2} \end{aligned} \quad (7.17)$$

$(Z\alpha)^4$ 以上の項を無視するとシュレディンガー方程式の結果 E_{NR} になる。 E_{NR} は n だけに依存するから、 j が異なっても n が同じならば状態は縮退する。一方、相対論的固有値 E は j にも依存するからこの縮退は部分的に解ける。これを微細構造 (fine structure) という。

下表は状態を $n\ell_j$ で表した一覧である。 \times を付けた状態は $n_r = 0, \kappa > 0$ であり存在しない状態である。非相対論では

$$n = n_r + \ell + 1, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots$$

である。 $\kappa < 0$ のとき $|\kappa| = \ell + 1$ であるから (7.16) と同じ表現である。一方、 $\kappa > 0$ のときは $\kappa = \ell$ であるから (7.16) の n は $n = n_r + \ell$ になる。非相対論では $n = \ell$ の状態は存在しないから、 $\kappa > 0$ の場合 $n_r = 0$ の状態は許されないことになる。

1	0	-1	0	1/2	$1S_{1/2}$	\times	3	2	-1	0	1/2	$3S_{1/2}$	} 縮退
	0	1	1	1/2	$1P_{1/2}$			2	1	1	1/2	$3P_{1/2}$	
2	1	-1	0	1/2	$2S_{1/2}$	} 縮退		1	-2	1	3/2	$3P_{3/2}$	} 縮退
	1	1	1	1/2	$2P_{1/2}$			1	2	2	3/2	$3D_{3/2}$	
	0	-2	1	3/2	$2P_{3/2}$			0	-3	2	5/2	$3D_{5/2}$	
	0	2	2	3/2	$2D_{3/2}$			\times	0	3	3	5/2	

水素原子について、ディラック方程式の結果 (7.15) と実験値* を比較する。表は状態 i と f の間のエネルギー差 $\Delta E = E_i - E_f$ である (単位は 10^{-5}eV)。

i	f	$\Delta E (10^{-5} \text{eV})$	
		(7.15)	実験値
$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$	0.0000	0.4375
$2P_{3/2}$	$2S_{1/2}$	4.5284	4.0989
$3S_{1/2}$	$3P_{1/2}$	0.0000	0.1302
$3P_{3/2}$	$3S_{1/2}$	1.3418	1.2139
$3D_{3/2}$	$3P_{1/2}$	1.3418	1.3419
$3D_{5/2}$	$3D_{3/2}$	0.4472	0.4458

理論と実験の一致はよい。ただし、この一致も完全ではない。また、 $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ 、 $3S_{1/2}$ と $3P_{1/2}$ 、 $3P_{3/2}$ と $3D_{3/2}$ は (7.15) では縮退するが、実験的にはこの縮退は僅かに破れる (Lamb shift)。電子と陽子間のスピン・スピン相互作用及び場を量子化してディラック海の効果を考慮すると、理論と実験は驚くほどよく一致する。

基底状態 ($n_r = 0$, $\kappa = -1$) の波動関数

$$F = \rho^\lambda e^{-\rho/2} \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad G = \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} \rho^\lambda e^{-\rho/2} \frac{f_1 - f_2}{2}$$

は $E = m\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}$, $n_r = 0$ のとき $f_1 = 0$, $M(0, 2\lambda + 1, \rho) = 1$ であるから

$$F = C\rho^\lambda e^{-\rho/2}, \quad G = -C\frac{1-\lambda}{Z\alpha} \rho^\lambda e^{-\rho/2}$$

になる。ただし

$$\lambda = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \quad \rho = 2\sqrt{m^2 - E^2} r = 2Z\alpha m r = \frac{2Z}{a_B} r$$

ここで $a_B = 1/(\alpha m)$ はボーア半径である。したがって (7.10) より

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{F(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}(\theta, \phi) \\ -i \frac{G(r)}{r} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m_3}(\theta, \phi) \end{pmatrix} = C' \left(\frac{Zr}{a_B} \right)^{\lambda-1} e^{-Zr/a_B} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ i \frac{1-\lambda}{Z\alpha} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \chi_\pm \end{pmatrix}$$

になる。 $\ell = 0$, $j = 1/2$ であるから $\mathcal{Y}_{\ell j m_3}$ はパウリスピノール χ_\pm に比例する ($\sigma_z \chi_\pm = \pm \chi_\pm$)。非相対論が成り立つ $Z\alpha \ll 1$ では $\lambda - 1 = -(Z\alpha)^2/2 \approx 0$ になるから

$$\psi(\mathbf{x}) \approx C' e^{-Zr/a_B} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり、非相対論の波動関数を再現する。なお、 $-1 < \lambda - 1 < 0$ であるから ψ は規格化可能であるが原点で発散する。発散の影響が顕著になる距離は

$$\left(\frac{Zr}{a_B} \right)^{\lambda-1} \gtrsim e, \quad \text{つまり} \quad \frac{Zr}{a_B} \lesssim e^{1/(\lambda-1)} \approx e^{-2/(Z\alpha)^2} = 10^{-16300/Z^2}$$

であり、原点の極々近傍である。この領域の波動関数を議論するためには、原子核を点電荷として扱うことはできない。したがって、原点での波動関数の特異性は気にする必要はない。

* Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 347, Phys. Rev. Lett. **72** (1993) 1172

8 場の量子化

8.1 場の量子化

量子化の方法として、普通、正準量子化が行われる。最小作用の原理により運動方程式を与えるラグランジアン L から (一般化) 座標 q_i に対する運動量 $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ を求め、 q_i と p_i の間に交換関係

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = i \delta_{ij}, \quad (\hbar = 1)$$

を設定する。以下では、 q として場 (時間と空間の関数) を考える。例えば、場が $\phi(t, \mathbf{x})$ で与えられる場合、空間を無限に小さい微小部分に分割し、微小部分 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i + d\mathbf{x})$ における $q_i(t) = \phi(t, \mathbf{x}_i) d^3x$ を1つの座標と見なす。したがって、無限個の自由度からなる系を考えることになる。この座標の時間変化は場が満たす運動方程式で定まり、 q_i に共役な運動量も通常の定義 $\partial L / \partial \dot{q}_i$ で決めることができる。 L が

$$L = \int d^3x \mathcal{L}$$

で表せ、ラグランジアン密度 \mathcal{L} は $\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$ 及び $\partial^\mu \phi(x)$ の関数で与えられると仮定する。変分原理から、作用積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}$$

は ϕ を微小変化

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \varepsilon(x), \quad \text{ただし } \varepsilon(t_1, \mathbf{x}) = \varepsilon(t_2, \mathbf{x}) = 0$$

させたとき

$$\delta I = 0$$

である。テイラー展開すれば

$$\mathcal{L}(\phi + \varepsilon, \partial^\mu(\phi + \varepsilon)) = \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial^\mu \varepsilon$$

であるから

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial^\mu \varepsilon \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \right) = 0$$

第2項は部分積分した。したがって、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

を得る。これが $\phi(x)$ が満たす方程式になるように \mathcal{L} を決める。この方程式がローレンツ共変であるためには \mathcal{L} はローレンツ・スカラーでなければならない。

空間を無限に小さい微小部分に分割すれば

$$L = \sum_i \mathcal{L}(\phi_i, \partial^\mu \phi_i) d^3x, \quad \phi_i = \phi(t, \mathbf{x}_i)$$

$q_i = \phi_i d^3x$ に共役な運動量 p_i は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}$$

である。系のハミルトニアン H は

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{\phi}_i d^3x - L = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = p(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}$$

量子化条件は

$$[q_i, p_j] = [\phi_i, p_j] d^3x = i \delta_{ij}$$

$d\mathbf{x} \rightarrow 0$ のとき $\delta_{ij}/d^3x \rightarrow \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ としてよいから

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] = [p(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad [\phi(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}')] = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (8.1)$$

ただし

$$p(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

である。これにより、場 $\phi(x)$ は数ではなく演算子になる。以上が場の量子化のあらましである。(8.1) はボーズ粒子に対する量子化条件であり、フェルミ粒子については交換関係ではなく反交換関係

$$\{\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')\} = \{p(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}')\} = 0, \quad \{\phi(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}')\} = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (8.2)$$

にする必要がある。ここで

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

である。

8.2 クライン・ゴールドン場の量子化

最初に、最も簡単なスピン 0、電荷 0、質量 m_0 の粒子が従う実数のスカラー場 $\phi(x)$ を考える。この場はクライン・ゴールドン (Klein-Gordon) 方程式

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2) \phi(x) = 0 \quad (8.3)$$

を満たす。ラグランジアン密度 \mathcal{L} として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - m_0^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - m_0^2 \phi^2 \right)$$

とすると

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} = \partial_\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m_0^2 \phi$$

であるから、オイラー・ラグランジュ方程式は (8.3) を再現する。共役運動量 $p(x)$ は

$$p(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

になるから、量子化条件は

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] = [\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad [\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{x}')] = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (8.4)$$

であり、ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = p \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m_0^2 \phi^2 \right)$$

で与えられる。

平面波 $e^{-ip \cdot x}$ を (8.3) に代入すると

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2) e^{-ip \cdot x} = (-p^2 + m_0^2) e^{-ip \cdot x}$$

であるから $p^0 = \pm \omega_{\mathbf{p}}$, $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$ ならば $e^{-ip \cdot x}$ は (8.3) の解になる。あるいは $p^0 = \omega_{\mathbf{p}} > 0$ として $e^{\pm ip \cdot x}$ は (8.3) の解である。これを使うと, (8.3) の一般解は

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (8.5)$$

$$\dot{\phi}(x) = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(-c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (8.6)$$

と展開できる。ただし, 実スカラー場であるから量子化した場はエルミート演算子である。

$$\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iq \cdot x} \phi(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} (c_{\mathbf{q}} + c_{-\mathbf{q}}^\dagger), \quad \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iq \cdot x} \dot{\phi}(0, \mathbf{x}) = i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2}} (-c_{\mathbf{q}} + c_{-\mathbf{q}}^\dagger)$$

より

$$c_{\mathbf{q}} = \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-iq \cdot x}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} \left(\omega_{\mathbf{q}} \phi(0, \mathbf{x}) + i \dot{\phi}(0, \mathbf{x}) \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} [c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} \int \frac{d^3 x d^3 x'}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x + iq \cdot x'} \left[\omega_{\mathbf{p}} \phi(0, \mathbf{x}) + i \dot{\phi}(0, \mathbf{x}), \omega_{\mathbf{q}} \phi(0, \mathbf{x}') - i \dot{\phi}(0, \mathbf{x}') \right] \\ &= \frac{\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} \int \frac{d^3 x d^3 x'}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x + iq \cdot x'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \frac{\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned}$$

同様にして

$$[c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}] = [c_{\mathbf{p}}^\dagger, c_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (8.7)$$

を得る。

ハミルトニアン H を c, c^\dagger で表す。

$$\begin{aligned} \int d^3 x \dot{\phi}(x)^2 &= - \int d^3 p d^3 q \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}}{2} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} \left(c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left(c_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot x} - c_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 p \omega_{\mathbf{p}} \left(c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger - c_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}} e^{-2i\omega_{\mathbf{p}} t} - c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2i\omega_{\mathbf{p}} t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d^3 x (\nabla \phi)^2 &= - \int d^3 p d^3 q \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} \left(c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left(c_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot x} - c_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 p \frac{\mathbf{p}^2}{\omega_{\mathbf{p}}} \left(c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger + c_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}} e^{-2i\omega_{\mathbf{p}} t} + c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2i\omega_{\mathbf{p}} t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d^3 x \phi^2 &= \int d^3 p d^3 q \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}}} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} \left(c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left(c_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot x} + c_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 p \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \left(c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger + c_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}} e^{-2i\omega_{\mathbf{p}} t} + c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2i\omega_{\mathbf{p}} t} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m_0^2\phi^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} \left(c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger \right) \\ &= \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} \left(c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \right) \end{aligned}$$

真空 $|0\rangle$ を

$$c_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$$

で定義すると

$$H = \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + \langle 0|H|0\rangle$$

である。 H の真空期待値は発散するが、真空からの変化が問題であるから、 $\langle 0|H|0\rangle$ をエネルギーの基準にとれば

$$H = \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}}$$

である。 H と $c_{\mathbf{p}}^\dagger, c_{\mathbf{p}}$ の交換関係は

$$[H, c_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int d^3p' \omega_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'}^\dagger [c_{\mathbf{p}'}, c_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad [H, c_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \quad (8.8)$$

であるから、場 $\phi(t, \mathbf{x})$ と H の交換関係は (8.5) から

$$[H, \phi(t, \mathbf{x})] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(-\omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) = -i \dot{\phi}(t, \mathbf{x})$$

になる。これはハイゼンベルグの運動方程式である。

状態 $|\alpha\rangle$ を \mathbf{b} 並進させた状態は

$$\exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P})|\alpha\rangle$$

である。このとき \mathbf{P} を運動量として定義する。状態 $\exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P})|\alpha\rangle$ でのスカラー場 $\phi(t, \mathbf{x})$ の期待値は、元の状態 $|\alpha\rangle$ での場 $\phi(t, \mathbf{x} - \mathbf{b})$ の期待値と同じであるから

$$\langle \alpha | \exp(i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P}) \phi(t, \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P}) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \phi(t, \mathbf{x} - \mathbf{b}) | \alpha \rangle$$

したがって

$$\exp(i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P}) \phi(t, \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P}) = \phi(t, \mathbf{x} - \mathbf{b})$$

\mathbf{b} が無限小の場合

$$i[\mathbf{b} \cdot \mathbf{P}, \phi(t, \mathbf{x})] = -\mathbf{b} \cdot \nabla \phi(t, \mathbf{x})$$

つまり

$$[\mathbf{P}, \phi(t, \mathbf{x})] = i \nabla \phi(t, \mathbf{x}), \quad \text{同様に} \quad [\mathbf{P}, p(t, \mathbf{x})] = i \nabla p(t, \mathbf{x})$$

これらは

$$\mathbf{P} = - \int d^3x p(x) \nabla \phi(x)$$

とすれば満たす。 \mathbf{P} を c, c^\dagger で表すと

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int d^3p p \mathbf{p} \left(2c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}} + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) + c_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}} e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} + c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} \right)$$

p を $-p$ に置き換えれば, 第1項以外は0になることが示せるから

$$\mathbf{P} = \int d^3p \mathbf{p} c_{\mathbf{p}}^{\dagger} c_{\mathbf{p}}$$

である。

系の状態 $|\alpha\rangle$ を H と \mathbf{P} の固有状態

$$H|\alpha\rangle = E_{\alpha}|\alpha\rangle, \quad \mathbf{P}|\alpha\rangle = \mathbf{p}_{\alpha}|\alpha\rangle$$

とする。(8.8)と同様にすると

$$[H, c_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^{\dagger}, \quad [H, c_{\mathbf{q}}] = -\omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}, \quad [\mathbf{P}, c_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \mathbf{q} c_{\mathbf{q}}^{\dagger}, \quad [\mathbf{P}, c_{\mathbf{q}}] = -\mathbf{q} c_{\mathbf{q}}$$

であるから

$$H c_{\mathbf{q}}^{\dagger} |\alpha\rangle = ([H, c_{\mathbf{q}}^{\dagger}] + c_{\mathbf{q}}^{\dagger} H) |\alpha\rangle = (E_{\alpha} + \omega_{\mathbf{q}}) c_{\mathbf{q}}^{\dagger} |\alpha\rangle, \quad \mathbf{P} c_{\mathbf{q}}^{\dagger} |\alpha\rangle = (\mathbf{p}_{\alpha} + \mathbf{q}) c_{\mathbf{q}}^{\dagger} |\alpha\rangle$$

$$H c_{\mathbf{q}} |\alpha\rangle = (E_{\alpha} - \omega_{\mathbf{q}}) c_{\mathbf{q}} |\alpha\rangle, \quad \mathbf{P} c_{\mathbf{q}} |\alpha\rangle = (\mathbf{p}_{\alpha} - \mathbf{q}) c_{\mathbf{q}} |\alpha\rangle$$

になる。 $c_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ は系にエネルギー $\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_0^2}$ と運動量 \mathbf{q} を加える。したがって, $c_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ は質量 m_0 の粒子を運動量 \mathbf{q} の状態に生成する演算子と解釈できる。逆に, $c_{\mathbf{q}}$ は運動量 \mathbf{q} の状態にある粒子を消滅させる演算子である。真空 $|0\rangle$ に対して

$$c_{\mathbf{q}}^{\dagger} |0\rangle$$

は粒子が1つある状態になる。

プロパゲータ

時間順序積 (time-ordered product) T

$$T(\phi(x)\phi(x')) \equiv \theta(t-t')\phi(x)\phi(x') + \theta(t'-t)\phi(x')\phi(x) \quad (8.9)$$

で定義する。このとき

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mathbf{F}}(x-x') &= \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle \\ &= \theta(t-t')\langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle + \theta(t'-t)\langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (8.10)$$

である $\Delta_{\mathbf{F}}(x-x')$ をファイマン・プロパゲータという。場の量子論では重要な量である。

$\Delta_{\mathbf{F}}(x-x')$ の定義式に (8.5) を代入すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \langle 0 | (c_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + c_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ip\cdot x}) (c_{\mathbf{p}'} e^{-ip'\cdot x'} + c_{\mathbf{p}'}^{\dagger} e^{ip'\cdot x'}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip\cdot x + ip'\cdot x'}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \langle 0 | c_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}'}^{\dagger} | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} \frac{e^{-p\cdot(x-x')}}{\omega_{\mathbf{p}}} \end{aligned}$$

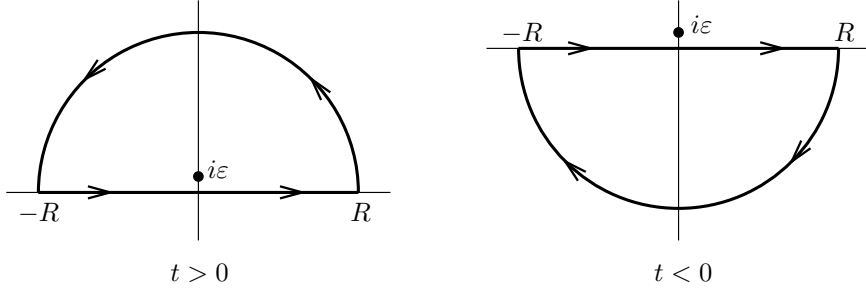
であるから

$$i\Delta_{\mathbf{F}}(x-x') = \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \left(\theta(t-t') e^{-ip\cdot(x-x')} + \theta(t'-t) e^{-ip\cdot(x'-x)} \right)$$

つまり

$$i \Delta_F(x) = \int \frac{d^3 p}{2(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \left(\theta(t) e^{-ip \cdot x} + \theta(-t) e^{ip \cdot x} \right) \quad (8.11)$$

になる。



ステップ関数の積分表現

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} \frac{e^{ikt}}{k - i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (8.12)$$

を使う。 $t > 0$ のとき、 k の複素平面上で、 $-R \leq k \leq R$ である実軸上の経路と $k = R e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) である上半面の半円からなる閉じた積分路 C_+ を考える。 $1/(k - i\varepsilon)$ はこの経路内の $k = i\varepsilon$ に極をもつ。コーシーの定理から

$$\int_{C_+} \frac{dk}{2\pi i} \frac{e^{ikt}}{k - i\varepsilon} = e^{ikt} \Big|_{k=i\varepsilon} = e^{-\varepsilon t} \rightarrow 1, \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

である。ところで $k = R e^{i\varphi}$ のとき

$$|e^{ikt}| = |e^{-tR \sin \varphi} e^{itR \cos \varphi}| = e^{-tR \sin \varphi}$$

であるから $t > 0$ のとき $\sin \varphi > 0$ ならば $e^{ikt} \rightarrow 0$, ($R \rightarrow \infty$) である。したがって、上半面の半円の寄与は $R \rightarrow \infty$ で 0 になるから $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} \frac{e^{ikt}}{k - i\varepsilon} = 1$$

である。 $t < 0$ の場合は実軸上の経路に下半面の半円を加えた経路 C_- を考える。このとき極 $k = i\varepsilon$ は C_- 内にはないから

$$\int_{C_-} \frac{dk}{2\pi i} \frac{e^{ikt}}{k - i\varepsilon} = 0$$

である。また、 $|e^{ikt}|$ は $t < 0$ のとき $\sin \varphi < 0$ ならば $R \rightarrow \infty$ で 0 になるから、 $t < 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} \frac{e^{ikt}}{k - i\varepsilon} = 0$$

である。したがって (8.12) が成り立つ。

(8.12) を使うと (8.11) は

$$\Delta_F(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p dk}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}(k - i\varepsilon)} \left(\exp(-i(\omega_{\mathbf{p}} - k)t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) + \exp(i(\omega_{\mathbf{p}} - k)t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \right)$$

第1項では $q^0 = \omega_{\mathbf{p}} - k$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}$, 第2項では $q^0 = -\omega_{\mathbf{p}} + k$, $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$ として, k, \mathbf{p} の積分を q^0, \mathbf{q} の積分に置き換えると

$$\Delta_{\text{F}}(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{q}} - q^0 - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{q}} + q^0 - i\varepsilon} \right) e^{-iq \cdot x} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot x}}{(q^0)^2 - (\omega_{\mathbf{q}} - i\varepsilon)^2}$$

分母は

$$(q^0)^2 - (\omega_{\mathbf{q}} - i\varepsilon)^2 = (q^0)^2 - \mathbf{q}^2 - m_0^2 + i2\omega_{\mathbf{q}}\varepsilon = q^2 - m_0^2 + i2\omega_{\mathbf{q}}\varepsilon, \quad q^2 = q^\mu q_\mu = (q^0)^2 - \mathbf{q}^2$$

であるが, $2\omega_{\mathbf{q}} > 0$ であるから $2\omega_{\mathbf{q}}\varepsilon$ は ε に置き換えてよい。結局

$$\Delta_{\text{F}}(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_{\text{F}}(q) e^{-iq \cdot x}, \quad \Delta_{\text{F}}(q) = \frac{1}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \quad (8.13)$$

になる。ここで q^0 は独立な変数であり $q^0 = \omega_{\mathbf{q}}$ ではない。

Δ_{F} の定義式 (8.10) 及び

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(t - t') = \delta(t - t'), \quad \frac{\partial}{\partial t} \theta(t' - t) = -\delta(t - t')$$

より

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\text{F}}(x - x') = \delta(t - t') \langle 0 | [\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] | 0 \rangle + \langle 0 | T(\dot{\phi}(x) \phi(x')) | 0 \rangle$$

(8.4) から第1項は 0 になる。更に微分すると

$$\begin{aligned} i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\text{F}}(x - x') &= \delta(t - t') \langle 0 | [\ddot{\phi}(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] | 0 \rangle + \langle 0 | T(\ddot{\phi}(x) \phi(x')) | 0 \rangle \\ &= -i\delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \langle 0 | T(\ddot{\phi}(x) \phi(x')) | 0 \rangle \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} (\square + m_0^2) \Delta_{\text{F}}(x - x') &= -\delta^4(x - x') - i \langle 0 | T((\square + m_0^2) \phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle \\ &= -\delta^4(x - x') \end{aligned} \quad (8.14)$$

になる。 $\Delta_{\text{F}}(x - x')$ はクライン・ゴールドン方程式のグリーン関数である。あるいは (8.13) を使えば

$$(\square + m_0^2) \Delta_{\text{F}}(x - x') = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{m_0^2 - q^2}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon} e^{-iq \cdot (x - x')}$$

一般に

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = \text{P} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad x \text{P} \frac{1}{x} = 1, \quad x\delta(x) = 0$$

であるから

$$(\square + m_0^2) \Delta_{\text{F}}(x - x') = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x - x')} = -\delta^4(x - x')$$

8.3 ディラック場の量子化

ラグランジアン密度 \mathcal{L} として

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\cancel{\partial} - m) \psi(x)$$

を考える。 ψ は4成分であるから独立な4つの場 $\psi_\alpha(x)$ からなる。また、 $\psi_\alpha(x)$ は複素数であるから、変分を行うとき実部と虚部をそれぞれ独立に変分が行えるが、この代わりに、 ψ^\dagger あるいは $\bar{\psi}$ と ψ を独立に変分を行う。 $\bar{\psi}$ に関する微分は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = \left((i\partial - m)\psi(x) \right)_\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi}_\alpha)} = 0$$

であるから、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi}_\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha}$$

はディラック方程式

$$(i\partial - m)\psi(x) = 0$$

になる。一方、 ψ に関する微分は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} = -m\bar{\psi}_\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi_\alpha)} = i(\bar{\psi}\gamma_\mu)_\alpha$$

であるから

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} = (i\partial^\mu \bar{\psi}\gamma_\mu + m\bar{\psi})_\alpha = 0$$

これの複素共役をとれば

$$\gamma^0(i\partial - m)\psi(x) = 0$$

になり、やはりディラック方程式を得る。 ψ_α に対する共役運動量は

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i(\bar{\psi}\gamma_0)_\alpha = i\psi_\alpha^\dagger$$

であるから、量子化条件は

$$\{\psi_\alpha^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi_\beta(t, \mathbf{x}')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta(t, \mathbf{x}')\} = 0 \quad (8.15)$$

である。本来 $\psi(x)$ は量子力学の波動関数であり数値である。これを古典力学的な場と考え、再度量子化して演算子に置き換えた。このため、場の量子化を第2量子化 (second quantization) ともいう。場を量子化することにより、ディラック海の効果や粒子の生成・消滅を含む過程を首尾一貫した方法で扱える。

クライン・ゴールドンの場合と同様に、 $\psi(x)$ をディラック方程式の解で展開する。波束のところで扱ったように

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(a(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + c(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} \right)$$

とできる。ただし $p^0 = E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ であり、係数 $a(\mathbf{p}, s)$, $c(\mathbf{p}, s)$ は演算子である。元々 $\psi(x)$ は複素数であるから量子化した $\psi(x)$ はエルミート演算子ではない。(5.28), (5.29) より

$$a(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{m}{E_p}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip \cdot x} u^\dagger(\mathbf{p}, s) \psi(x)$$

$$c(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{m}{E_p}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip \cdot x} v^\dagger(\mathbf{p}, s) \psi(x)$$

であるから, (8.15) の反交換関係を $a, a^\dagger, c, c^\dagger$ の反交換関係に書き直せる。 $t = t'$ とすると

$$\begin{aligned} \{a(\mathbf{p}, s), a^\dagger(\mathbf{p}', s')\} &= \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} \int \frac{d^3x d^3x'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'} e^{i(p_0 - p'_0)t} \\ &\quad \sum_{\alpha\beta} u_\alpha^\dagger(\mathbf{p}, s) u_\beta(\mathbf{p}', s') \left\{ \psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}') \right\} \\ &= \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}', s') e^{i(p_0 - p'_0)t} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned}$$

(5.12) より

$$\{a(\mathbf{p}, s), a^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta_{ss'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

である。同様にして

$$\{c(\mathbf{p}, s), c^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta_{ss'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

他の反交換関係は全て 0, 例えば

$$\{a^\dagger(\mathbf{p}, s), a^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = 0$$

になる。特に, $(a^\dagger(\mathbf{p}, s))^2 = 0$ であるから, 1つの状態を 2粒子が占めることはできない。反交換関係を設定するとパウリの排他律を自動的に満たす。

ハミルトニアン密度 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = p\dot{\psi} - \mathcal{L} = i\psi^\dagger \partial^0 \psi - \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial^0 + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi = \bar{\psi} (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi$$

であるからハミルトニアン H は

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(x) (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) (-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\gamma^0)\psi(x)$$

場を量子化する前のハミルトニアン $-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\gamma^0$ の期待値において, 波動関数を量子化した場で置き換えたことになる。 H を a, c で表すと

$$\begin{aligned} (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi(x) &= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left(a(\mathbf{p}, s) e^{-ip\cdot x} (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m) u(\mathbf{p}, s) \right. \\ &\quad \left. + c(\mathbf{p}, s) e^{ip\cdot x} (-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m) v(\mathbf{p}, s) \right) \end{aligned}$$

(5.9) より

$$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m) u(\mathbf{p}, s) = E_{\mathbf{p}} \gamma^0 u(\mathbf{p}, s), \quad (-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m) v(\mathbf{p}, s) = -E_{\mathbf{p}} \gamma^0 v(\mathbf{p}, s)$$

であるから

$$(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{mE_{\mathbf{p}}} \gamma^0 \left(a(\mathbf{p}, s) e^{-ip\cdot x} u(\mathbf{p}, s) - c(\mathbf{p}, s) e^{ip\cdot x} v(\mathbf{p}, s) \right)$$

したがって

$$\begin{aligned}
 H &= m \sum_{ss'} \int d^3p d^3p' \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}'}}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \left(a^\dagger(\mathbf{p}', s') u^\dagger(\mathbf{p}', s') e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} + c^\dagger(\mathbf{p}', s') v^\dagger(\mathbf{p}', s') e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \right) \\
 &\quad \left(a(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} - c(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right) \\
 &= m \sum_{ss'} \int d^3p \left(u^\dagger(\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s) a^\dagger(\mathbf{p}, s') a(\mathbf{p}, s) + v^\dagger(-\mathbf{p}, s') u(\mathbf{p}, s) c^\dagger(-\mathbf{p}, s') a(\mathbf{p}, s) e^{-2i\mathbf{p}^0 t} \right. \\
 &\quad \left. - u^\dagger(-\mathbf{p}, s') v(\mathbf{p}, s) a^\dagger(-\mathbf{p}, s') c(\mathbf{p}, s) e^{2i\mathbf{p}^0 t} - v^\dagger(\mathbf{p}, s') v(\mathbf{p}, s) c^\dagger(\mathbf{p}, s') c(\mathbf{p}, s) \right)
 \end{aligned}$$

u, v の直交性 (5.12) より

$$H = \sum_s \int d^3p E_{\mathbf{p}} \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s) a(\mathbf{p}, s) - c^\dagger(\mathbf{p}, s) c(\mathbf{p}, s) \right) \quad (8.16)$$

になる。

ここで真空 $|0\rangle$ を

$$a(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0, \quad c(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0$$

で定義すると

$$a^\dagger(\mathbf{p}', s') a(\mathbf{p}', s') a^\dagger(\mathbf{p}, s) = a^\dagger(\mathbf{p}', s') \left(\delta_{ss'} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p}, s) a(\mathbf{p}', s') \right)$$

であるから

$$H a^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle = E_{\mathbf{p}} a^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle$$

同様にして

$$H c^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle = -E_{\mathbf{p}} c^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle$$

になる。 a^\dagger, c^\dagger を粒子の生成演算子と解釈すると、 a^\dagger は正エネルギー $E_{\mathbf{p}}$ の状態の粒子を生成するが、 c^\dagger は負エネルギー $-E_{\mathbf{p}}$ の状態に粒子を生成する。これは真空 $|0\rangle$ よりもエネルギーが低い。本来、真空は最低エネルギー状態であるべきである。空孔理論では真空は負エネルギー状態が全て占有された状態である。これを生成・消滅演算子で表せば、真空ではパウリの排他律のため負エネルギー状態に粒子を生成することはできないから

$$c^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0$$

である。また、負エネルギー状態の粒子が消滅すると空孔ができ、これを反粒子と解釈した。つまり、 $c(\mathbf{p}, s)|0\rangle$ は反粒子の状態である。そこで

$$b^\dagger(\mathbf{p}, s) = c(\mathbf{p}, s)$$

とし、真空を

$$a(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0, \quad b(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0 \quad (8.17)$$

で定義する。 $a(\mathbf{p}, s)$ が粒子の消滅演算子、 $b(\mathbf{p}, s)$ が反粒子の消滅演算子である。場 $\psi(x)$ は

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left(a(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + b^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right) \quad (8.18)$$

と展開され、反交換関係は

$$\{a(\mathbf{p}, s), a^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \{b(\mathbf{p}, s), b^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta_{ss'}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad \text{他の反交換関係} = 0 \quad (8.19)$$

である。ハミルトニアンは (8.16) で $c \rightarrow b^\dagger$, $c^\dagger \rightarrow b$ の置き換えをすれば

$$\begin{aligned} H &= \sum_s \int d^3p E_{\mathbf{p}} \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s)a(\mathbf{p}, s) - b(\mathbf{p}, s)b^\dagger(\mathbf{p}, s) \right) \\ &= \sum_s \int d^3p E_{\mathbf{p}} \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s)a(\mathbf{p}, s) + b^\dagger(\mathbf{p}, s)b(\mathbf{p}, s) \right) + \langle 0 | H | 0 \rangle \end{aligned}$$

ただし

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \sum_s \int d^3p E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p})$$

は真空のエネルギーである。

$$Ha^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle = (E_{\mathbf{p}} + \langle 0 | H | 0 \rangle)a^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle, \quad Hb^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle = (E_{\mathbf{p}} + \langle 0 | H | 0 \rangle)b^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle$$

であり, a^\dagger は正エネルギーの粒子を, b^\dagger は正エネルギーの反粒子を生成する。 H の最低の固有値は $\langle 0 | H | 0 \rangle$ になり, 負エネルギー状態は出現しない。 $\langle 0 | H | 0 \rangle$ は発散するが, 物理的には真空からのずれが問題であるから, $\langle 0 | H | 0 \rangle$ をエネルギーの基準にとれば

$$H = \sum_s \int d^3p E_{\mathbf{p}} \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s)a(\mathbf{p}, s) + b^\dagger(\mathbf{p}, s)b(\mathbf{p}, s) \right)$$

である。

次に, 電荷について考えてみる。

$$\partial^\mu j_\mu = 0, \quad j_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

は確率密度保存を表したが, 場を量子化した場合, これは電荷保存を表す。したがって, 全電荷の演算子 Q は粒子の電荷を q とすると

$$Q = q \int d^3x \bar{\psi}(x)\gamma_0\psi(x)$$

である。これを a, b で表すと

$$\begin{aligned} Q &= q \sum_{ss'} \int d^3p d^3p' \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s) u^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} + b(\mathbf{p}, s) v^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} \right) \\ &\quad \left(a(\mathbf{p}', s') u(\mathbf{p}', s') e^{-ip' \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{p}', s') v(\mathbf{p}', s') e^{ip' \cdot x} \right) \\ &= q \sum_s \int d^3p \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s)a(\mathbf{p}, s) + b(\mathbf{p}, s)b^\dagger(\mathbf{p}, s) \right) \\ &= q \sum_s \int d^3p \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s)a(\mathbf{p}, s) - b^\dagger(\mathbf{p}, s)b(\mathbf{p}, s) \right) + \langle 0 | Q | 0 \rangle \end{aligned}$$

ただし

$$\langle 0 | Q | 0 \rangle = q \sum_s \int d^3p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p})$$

は真空の全電荷である。\$H\$ の場合と同様にこれを無視すると

$$Q = q \sum_s \int d^3p \left(a^\dagger(\mathbf{p}, s) a(\mathbf{p}, s) - b^\dagger(\mathbf{p}, s) b(\mathbf{p}, s) \right)$$

これから

$$Q a^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle = q a^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle, \quad Q b^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle = -q b^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle$$

反粒子の電荷は \$-q\$ である。

(8.17)~(8.19) により負のエネルギー解に伴う問題は解決し、また、空孔理論のような技巧的解釈は必要なくなる。

プロパゲータ

ディラック場 \$\psi(x)\$ の場合、時間順序積を

$$T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) \equiv \theta(t-t') \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \theta(t'-t) \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) \quad (8.20)$$

で定義する。ディラック場を入れ替えるときは符号を変える。\$4 \times 4\$ 行列 \$S_F\$ を

$$i(S_F(x-x'))_{\alpha\beta} \equiv \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle$$

で定義する。(8.17) と (8.18) より

$$\begin{aligned} i(S_F(x-x'))_{\alpha\beta} &= \sum_{ss'} \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}}} \\ &\quad \left(\theta(t-t') \langle 0 | a(\mathbf{p}, s) a^\dagger(\mathbf{p}', s') | 0 \rangle u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}', s') e^{-ip \cdot x + ip' \cdot x'} \right. \\ &\quad \left. - \theta(t'-t) \langle 0 | b(\mathbf{p}', s') b^\dagger(\mathbf{p}, s) | 0 \rangle v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}', s') e^{ip \cdot x - ip' \cdot x'} \right) \end{aligned}$$

\$t' < t\$ の場合、\$t'\$ で粒子が生成し \$t\$ で消滅する。逆に、\$t < t'\$ のときは、\$t\$ で反粒子が生成し \$t'\$ で消滅する。反交換関係を使うと

$$\langle 0 | a(\mathbf{p}, s) a^\dagger(\mathbf{p}', s') | 0 \rangle = \langle 0 | \left(\delta_{ss'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - a^\dagger(\mathbf{p}', s') a(\mathbf{p}, s) \right) | 0 \rangle = \delta_{ss'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

であるから

$$\begin{aligned} i(S_F(x-x'))_{\alpha\beta} &= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \left(\theta(t-t') u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot (x-x')} \right. \\ &\quad \left. - \theta(t'-t) v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot (x-x')} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \left(\theta(t-t') \Lambda_+(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-x')} + \theta(t'-t) \Lambda_-(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-x')} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

ここで \$\Lambda_\pm(\mathbf{p})\$ は (5.14) で定義した射影演算子である。(5.16), (5.17) を代入すると

$$S_F(x) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{\not{p} + m}{2E_{\mathbf{p}}} \theta(t) e^{-ip \cdot x} - \frac{\not{p} - m}{2E_{\mathbf{p}}} \theta(-t) e^{ip \cdot x} \right)$$

になる。ステップ関数を積分表示 (8.12) で置き換えると

$$\begin{aligned} S_F(x) &= - \int \frac{d^3p dk}{(2\pi)^4} \left(\frac{E_{\mathbf{p}} \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{\exp(-i(E_{\mathbf{p}} - k)t + ip \cdot \mathbf{x})}{k - i\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_{\mathbf{p}} \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{\exp(i(E_{\mathbf{p}} - k)t - ip \cdot \mathbf{x})}{k - i\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Δ_F の場合と同様に変数変換すると

$$\begin{aligned}
S_F(x) &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_q} \left(\frac{E_q \gamma^0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m}{E_q - q^0 - i\varepsilon} - \frac{E_q \gamma^0 + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m}{E_q + q^0 - i\varepsilon} \right) e^{-iq \cdot x} \\
&= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^0 \gamma^0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m}{(E_q - q^0 - i\varepsilon)(E_q + q^0 - i\varepsilon)} e^{-iq \cdot x} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S_F(q) e^{-iq \cdot x}, \quad S_F(q) = \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

になる。

- z を複素数とするととき $(\not{q} + z)(\not{q} - z) = q^2 - z^2$ であるから

$$\frac{\not{q} + z}{q^2 - z^2} = \frac{1}{\not{q} - z}$$

ここで右辺は 4×4 行列 $\not{q} - z$ の逆行列である。 $z = m - i\varepsilon$ とすれば

$$S_F(q) = \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{q} - m + i\varepsilon} \tag{8.22}$$

とも表せる。

- $e^{-iq \cdot x}$ を x^μ で微分すると $i \partial_\mu e^{-iq \cdot x} = q_\mu e^{-iq \cdot x}$ であるから

$$S_F(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i \not{\partial} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-iq \cdot x} = (i \not{\partial} + m) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot x}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = (i \not{\partial} + m) \Delta_F(x)$$

ところで

$$(i \not{\partial} - m)(i \not{\partial} + m) = -\not{\partial} \not{\partial} - m^2 = -\square - m^2$$

これと (8.14) より

$$(i \not{\partial} - m) S_F(x) = -(\square + m^2) \Delta_F(x) = \delta^4(x - x')$$

になる。 $S_F(x)$ はディラック方程式 $(i \not{\partial} - m) \psi = 0$ のグリーン関数である。

9 摂動論

9.1 相互作用表示と S 行列

ハミルトニアン H が自由な部分 H_0 と相互作用 V からなるとする。時刻 t での系の状態を $|t\rangle_S$ とすると

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S = H|t\rangle_S, \quad H = H_0 + V$$

である。 $|t\rangle_S$ はシュレディンガー表示での状態である。ここで

$$|t\rangle_I \equiv e^{iH_0 t}|t\rangle_S, \quad V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

とすると

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I = e^{iH_0 t} \left(-H_0 + i\frac{\partial}{\partial t} \right) |t\rangle_S = e^{iH_0 t} V |t\rangle_S = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} |t\rangle_I = V_I(t) |t\rangle_I \quad (9.1)$$

になる。 $|t\rangle_I$ を相互作用表示での状態という。シュレディンガー表示では、演算子は時間に依存せず状態が全ての時間依存性を担う。一方、相互作用表示では、演算子と状態の両方が時間に依存し、演算子は H_0 により、状態は相互作用 V_I により時間的に変化する。

V は幾つかの場合 φ_i の積を空間積分したものである。シュレディンガー表示では φ_i は時間に依存しないから $\varphi_i(\mathbf{x})$ と書けば

$$V = V[\varphi_i(\mathbf{x})]$$

であるが、このとき

$$V_I(t) = V[\varphi_i(t, \mathbf{x})], \quad \varphi_i(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0 t} \varphi_i(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} \quad (9.2)$$

になる。

$$i\frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(t, \mathbf{x}) = -H_0 e^{iH_0 t} \varphi_i(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} + e^{iH_0 t} \varphi_i(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} H_0 = [\varphi_i(t, \mathbf{x}), H_0] \quad (9.3)$$

である。これはハミルトニアンが H_0 で与えられるときのハイゼンベルグ運動方程式であるから、 $\varphi_i(t, \mathbf{x})$ は自由場の演算子である。 $V[\varphi_i]$ は相互作用のラグランジアン密度 \mathcal{L}_{int} で表すと

$$V[\varphi_i] = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}}$$

である。 \mathcal{L}_{int} としては

$$\frac{g}{4!} \phi^4(x), \quad g \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x), \quad g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x)$$

などが考えられる。ここで ϕ は中性スカラー場、 ψ はディラック場、 A_μ は電磁場である。

(9.1) の解を

$$|t\rangle_I = U(t, t_0) |t_0\rangle_I$$

とすると (9.1) は

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = -i V_I(t) U(t, t_0) \quad (9.4)$$

になる。 $|t\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)} |t_0\rangle_S$ より

$$|t\rangle_I = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} |t_0\rangle_S = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} |t_0\rangle_I$$

であるから

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \quad (9.5)$$

になる。\$U(t, t_0)\$ の別表現を求める。(9.4) を積分すると (\$U(t_0, t_0) = 1\$)

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) U(t_1, t_0) \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \left(1 + (-i) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_2) U(t_2, t_0) \right) \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) U(t_2, t_0) \end{aligned}$$

この操作を無限に繰り返すと

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 V_I(t_1) V_I(t_2) V_I(t_3) + \cdots \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \theta(t_1 - t_2) V_I(t_1) V_I(t_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) V_I(t_1) V_I(t_2) V_I(t_3) + \cdots \quad (9.6) \end{aligned}$$

時間順序積 \$T\$ を

$$\begin{aligned} T(V_I(t_1) V_I(t_2)) &= \theta(t_1 - t_2) V_I(t_1) V_I(t_2) + \theta(t_2 - t_1) V_I(t_2) V_I(t_1) \\ T(V_I(t_1) V_I(t_2) V_I(t_3)) &= \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \theta(t_i - t_j) \theta(t_j - t_k) V_I(t_i) V_I(t_j) V_I(t_k) \end{aligned}$$

で定義する (\$n\$ 個の積の場合も同様)。\$\varphi\$ がディラック場するとき、入れ替えて符号を変える必要があるが、\$V_I\$ には必ず \$\bar{\varphi}\$ と \$\varphi\$ のペアで入るから、\$V_I\$ の入れ替えでは符号は変わらない。(9.6) を時間順序積で表すと

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T(V_I(t_1) V_I(t_2)) \\ &\quad + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T(V_I(t_1) V_I(t_2) V_I(t_3)) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(V_I(t_1) \cdots V_I(t_n)) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \right) \end{aligned}$$

になる。

S 行列

素粒子の反応を考える場合、\$t \to -\infty\$ での初期状態 \$|i\rangle\$ と \$t \to \infty\$ での終状態 \$|f\rangle\$ では、素粒子はマクロな距離だけ離れているから相互作用は無視でき、自由な状態にある。そこで、相互作用が

$$V_I(t) e^{-\varepsilon|t|}, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

であるとする。\$t\$ が有限のときは \$e^{-\epsilon|t|} = 1\$ であり何の変更もないが、\$t \to \pm\infty\$ では \$e^{-\epsilon|t|} = 0\$ になり相互作用はなくなる。\$e^{-\epsilon|t|}\$ を断熱因子という。以下では、必要な場合以外は断熱因子を明示しないが、相互作用にはこの因子があるものとする。

$$H_0|i\rangle = E_i|i\rangle, \quad H_0|f\rangle = E_f|f\rangle$$

とする。反応の前後でエネルギーは保存するから \$E_i = E_f\$ である。

$$|t\rangle_S = e^{-iH_0t}|t\rangle_I = e^{-iH_0t}U(t, t_0)|t_0\rangle_I = e^{-iH_0t}U(t, t_0)e^{iH_0t_0}|t_0\rangle_S$$

より、\$t_0 \to -\infty\$ で \$|i\rangle\$ であるとき \$t_0 \to \infty\$ で \$|f\rangle\$ になる確率は

$$\langle f|e^{-iH_0t}U(\infty, -\infty)e^{iH_0t_0}|i\rangle = e^{-iE_0(t-t_0)}\langle f|U(\infty, -\infty)|i\rangle$$

であるから

$$|\langle f|S|i\rangle|^2$$

で与えられる。ただし

$$S = U(\infty, -\infty) = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t)\right)$$

である。\$S\$ を Dyson の \$S\$ 行列という。\$V_I\$ を相互作用のラグランジアン密度 \$\mathcal{L}_{\text{int}}\$ で表すと

$$S = T \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)\right) \quad (9.7)$$

になる。\$\mathcal{L}_{\text{int}}\$ は \$\varphi_i(x)\$ の関数であるが、(9.3) で示したように \$\varphi_i(x)\$ は自由場の演算子である。

グリーン関数

自由なクライン・ゴールドン場とディラック場の場合、グリーン関数 \$\Delta_F, S_F\$ を求めた。ここでは、相互作用がある場合のグリーン関数について考える。

\$H\$ の基底状態 (真空) を太文字で表して \$|\mathbf{0}\rangle\$ とする。これは \$H_0\$ の真空 \$|0\rangle\$ とは異なる。また、(9.3) を満たす自由な場 \$\varphi(x)\$ に対応して、時間発展が \$H\$ で記述される場を大文字で表して \$\Phi\$ とする。つまり

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x) = [\Phi(x), H]$$

である。このとき

$$\langle \mathbf{0} | T(\Phi(x)\Phi(x')) | \mathbf{0} \rangle$$

を求める。ハイゼンベルグ方程式の解は

$$\Phi(x) = e^{iHt}\Phi(0, \mathbf{x})e^{-iHt}$$

であるが、\$t = 0\$ でシュレディンガー表示と一致するものとする。\$\Phi(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\$ である。これと (9.2) より

$$\Phi(x) = e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi(x)e^{iH_0t}e^{-iHt}$$

になるから

$$\Phi(x)\Phi(x') = e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi(x)e^{iH_0t}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0t'}\varphi(x')e^{iH_0t'}e^{-iHt'}$$

である。(9.5) から

$$U(t, t') = e^{iH_0t}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0t'}, \quad U(0, t) = e^{iHt}e^{-iH_0t}, \quad U(t', 0) = e^{iH_0t'}e^{-iHt'}$$

したがって

$$\Phi(x)\Phi(x') = U(0,t)\varphi(x)U(t,t')\varphi(x')U(t',0)$$

である。次に、 $|\mathbf{0}\rangle$ と $|0\rangle$ の関係を求める。 H_0 の真空 $|0\rangle$ に断熱的に V_I を作用させると H の真空 $|\mathbf{0}\rangle$ になるから

$$|\mathbf{0}\rangle = e^{i\theta} U(0, -\infty) |0\rangle$$

逆に、断熱的に V_I を消去すれば

$$|0\rangle = e^{i\theta'} U(\infty, 0) |\mathbf{0}\rangle, \quad \text{つまり} \quad |\mathbf{0}\rangle = e^{-i\theta'} U^{-1}(\infty, 0) |0\rangle$$

(9.5) から分かるように $U^\dagger = U^{-1}$ であるから

$$\langle \mathbf{0} | = e^{i\theta'} \langle 0 | U(\infty, 0)$$

になる。したがって

$$1 = \langle \mathbf{0} | \mathbf{0} \rangle = e^{i(\theta+\theta')} \langle 0 | U(\infty, 0) U(0, -\infty) |0\rangle = e^{i(\theta+\theta')} \langle 0 | S |0\rangle$$

である。以上の結果から

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{0} | \Phi(x)\Phi(x') | \mathbf{0} \rangle &= e^{i(\theta+\theta')} \langle 0 | U(\infty, 0) U(0, t) \varphi(x) U(t, t') \varphi(x') U(t', 0) U(0, -\infty) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\langle 0 | S |0\rangle} \langle 0 | U(\infty, t) \varphi(x) U(t, t') \varphi(x') U(t', -\infty) |0\rangle \end{aligned}$$

になる。分子の部分で V_I の 1 次は $U(\infty, t)$, $U(t, t')$, $U(t', -\infty)$ からの寄与の和

$$(-i) \int_t^\infty dt_1 V_I(t_1) \varphi(x) \varphi(x') + (-i) \int_{t'}^t dt_1 \varphi(x) V_I(t_1) \varphi(x') + (-i) \int_{-\infty}^{t'} dt_1 \varphi(x) \varphi(x') V_I(t_1)$$

である。これは $t > t'$ のとき

$$(-i) \int_{-\infty}^\infty dt_1 T(\varphi(x) \varphi(x') V_I(t_1))$$

に等しい。2 次以上も同様になるから

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{0} | T(\Phi(x)\Phi(x')) | \mathbf{0} \rangle \\ &= \frac{1}{\langle 0 | S |0\rangle} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \cdots \int_{-\infty}^\infty dt_n \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(x') V_I(t_1) \cdots V_I(t_n)) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\langle 0 | S |0\rangle} \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(x') S) |0\rangle \end{aligned}$$

になる。一般に

$$\langle \mathbf{0} | T(\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)) | \mathbf{0} \rangle = \frac{1}{\langle 0 | S |0\rangle} \langle 0 | T(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) S) |0\rangle \quad (9.8)$$

である。

(9.7), (9.8) において \exp を展開すれば、相互作用 \mathcal{L}_{int} についての摂動展開になる。これは時間と空間が同等に扱われ共変的な形式をしている。量子力学で用いられる摂動論では時間が特別扱いされ、共変的な形式ではない。これを場の理論に適用してもよいが、非常に見通しの悪いものになる。

9.2 ウィックの定理

S 行列を求めるには

$$\langle f | T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)) | i \rangle$$

を計算する必要がある。 $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$ は自由場 $\varphi_i(x)$ の積であるから

$$\langle f | T(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)) | i \rangle$$

が求めればよい。これを求めるときウィック (Wick) の定理が見通しのよい方法を与える。

正規積 (normal product)

場の積 $\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$ で、すべての生成演算子がすべての消滅演算子の左にくるように並べ変えた積を考える。このとき、ディラック場が最初の並びの奇置換の場合は -1 を乗ずるものとする。これを正規積 (normal product) といい

$$: \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) :$$

で表す。自由場 $\varphi_i(x)$ は生成演算子の部分 $\varphi_i^{(+)}(x)$ と消滅演算子の部分 $\varphi_i^{(-)}(x)$ の和で書ける。例えば、スカラー場 $\phi(x)$ の場合

$$\begin{aligned} : \phi(x_1)\phi(x_2) : &= : (\phi^{(+)}(x_1) + \phi^{(-)}(x_1)) (\phi^{(+)}(x_2) + \phi^{(-)}(x_2)) : \\ &= \phi^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_2) + \phi^{(+)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2) \\ &\quad + \phi^{(+)}(x_2)\phi^{(-)}(x_1) + \phi^{(-)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2) \end{aligned} \quad (9.9)$$

ディラック場 $\psi(x)$ の場合は

$$\begin{aligned} : \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : &= : (\psi_\alpha^{(+)}(x_1) + \psi_\alpha^{(-)}(x_1)) (\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2) + \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_2)) : \\ &= \psi_\alpha^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2) + \psi_\alpha^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_2) \\ &\quad - \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2)\psi_\alpha^{(-)}(x_1) + \psi_\alpha^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_2) \end{aligned} \quad (9.10)$$

である。第3項は最初の並び $\psi_\alpha^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2)$ とは逆になるから (奇置換) $-$ の符号が付く。自由場の真空 $|0\rangle$ は

$$\varphi_i^{(-)}(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi_i^{(+)}(x) = 0$$

であるから、正規積の真空期待値は

$$\langle 0| : \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) : |0\rangle = 0$$

である。

交換関係 $[\phi^{(-)}(x_1), \phi^{(+)}(x_2)]$ は x_1, x_2 の関数になり演算子ではない。これを $C(x_1, x_2)$ とすると (9.9) より

$$\phi(x_1)\phi(x_2) - : \phi(x_1)\phi(x_2) : = [\phi^{(-)}(x_1), \phi^{(+)}(x_2)] = C(x_1, x_2)$$

である。両辺の真空期待値をとると、正規積の真空期待値は 0 であるから

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = C(x_1, x_2)$$

である。したがって

$$\phi(x_1)\phi(x_2) = : \phi(x_1)\phi(x_2) : + \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle$$

である。同様に

$$\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) - : \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : = \{ \psi_\alpha^{(-)}(x_1), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2) \} = \langle 0 | \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) | 0 \rangle$$

であり

$$\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) = : \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : + \langle 0 | \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) | 0 \rangle$$

になる。時間順序積は

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\phi(x_1)\phi(x_2)) &= \theta(t_1 - t_2)\phi(x_1)\phi(x_2) + \theta(t_2 - t_1)\phi(x_2)\phi(x_1) \\ &= \theta(t_1 - t_2) \left(: \phi(x_1)\phi(x_2) : + \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle \right) \\ &\quad + \theta(t_2 - t_1) \left(: \phi(x_2)\phi(x_1) : + \langle 0 | \phi(x_2)\phi(x_1) | 0 \rangle \right) \end{aligned}$$

$: \phi(x_1)\phi(x_2) : = : \phi(x_2)\phi(x_1) :$ であるから

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\phi(x_1)\phi(x_2)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2) : + \langle 0 | \mathbb{T}(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle \\ &= : \phi(x_1)\phi(x_2) : + i\Delta_F(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

になる。

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)) &= \theta(t_1 - t_2)\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) - \theta(t_2 - t_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) \\ &= \theta(t_1 - t_2) : \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : - \theta(t_2 - t_1) : \bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) : \\ &\quad + \langle 0 | \mathbb{T}(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$: \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : = - : \bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) :$ より

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)) &= : \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : + \langle 0 | \mathbb{T}(\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)) | 0 \rangle \\ &= : \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : + i(S_F(x_1 - x_2))_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

である。 $\varphi_i(x_i)$ を単に φ_i と書くことにすると、一般に

$$\varphi_1\varphi_2 = : \varphi_1\varphi_2 : + \underbrace{\varphi_1\varphi_2}, \quad \mathbb{T}(\varphi_1\varphi_2) = : \varphi_1\varphi_2 : + \overline{\varphi_1\varphi_2} \quad (9.11)$$

ここで

$$\underbrace{\varphi_1\varphi_2} \equiv \langle 0 | \varphi_1\varphi_2 | 0 \rangle, \quad \overline{\varphi_1\varphi_2} \equiv \langle 0 | \mathbb{T}(\varphi_1\varphi_2) | 0 \rangle$$

である。これらを縮約 (contraction) という。(9.11) を一般化したものがウィックの定理である。

ウィックの定理

n 個の積 $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$ は可能な全ての縮約を含む正規積

$$\begin{aligned} \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n &= : \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n}_{\square} : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_n}_{\square} : + \cdots \\ &+ : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\cdots\varphi_n}_{\square} : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\cdots\varphi_n}_{\square} : + \cdots \\ &+ : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varphi_6\cdots\varphi_n}_{\square} : + \cdots \\ \mathbb{T}(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n) &= : \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n : + : \overline{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n} : + : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_n} : + \cdots \\ &+ : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\cdots\varphi_n} : + : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\cdots\varphi_n} : + \cdots \\ &+ : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varphi_6\cdots\varphi_n} : + \cdots \end{aligned}$$

に展開できる。ただし、縮約を取り出すとき、縮約する2つの演算子の間に奇数個のディラック場がある場合には $-$ の符号を付ける。例えば、 φ がディラック場の場合

$$: \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\cdots\varphi_n}_{\square} := - \underbrace{\varphi_1\varphi_3}_{\square} : \underbrace{\varphi_2\varphi_4\cdots\varphi_n}_{\square} := - \underbrace{\varphi_1\varphi_3}_{\square} \underbrace{\varphi_2\varphi_4}_{\square} : \varphi_5\cdots\varphi_n :$$

である。ウィックの定理の証明は場の理論の教科書を見よ。

ウィックの定理を使うとき、最初から同一の正規積にある演算子の縮約は寄与しないので無視する。例えば

$$: \varphi_1\varphi_2 : : \varphi_3\varphi_4 : = \left(\varphi_1\varphi_2 - \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square} \right) \left(\varphi_3\varphi_4 - \underbrace{\varphi_3\varphi_4}_{\square} \right)$$

では

$$\begin{aligned} \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 &= : \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square} \varphi_3\varphi_4 : + : \varphi_1\varphi_2 \underbrace{\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \varphi_1 \underbrace{\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : \\ &+ : \varphi_1 \underbrace{\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \varphi_1\varphi_2 \underbrace{\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} : \varphi_1\varphi_2 : : \varphi_3\varphi_4 : &= : \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : + \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square} (: \varphi_3\varphi_4 : - \underbrace{\varphi_3\varphi_4}_{\square}) + : \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : \\ &+ : \varphi_1 \underbrace{\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \varphi_1 \underbrace{\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + \underbrace{\varphi_3\varphi_4}_{\square} (: \varphi_1\varphi_2 : - \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square}) \\ &+ \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} + 2 \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} \end{aligned}$$

になる。 $:\varphi_1\varphi_2 : - \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square} = -\underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square}$ より

$$\begin{aligned} : \varphi_1\varphi_2 : : \varphi_3\varphi_4 : &= : \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + : \varphi_1 \underbrace{\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : \\ &+ : \varphi_1 \underbrace{\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} : + \underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}_{\square} \end{aligned}$$

である。同一の正規積にある演算子の縮約は寄与しない。

10 具体例

相互作用が

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g : \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) : \quad (10.1)$$

の場合を考える。相互作用は真空期待値を差し引いて正規積にしてある。

10.1 散乱

初期状態が (\mathbf{p}_1, s_1) , (\mathbf{p}_2, s_2) である 2 つのディラック粒子が (\mathbf{p}'_1, s'_1) , (\mathbf{p}'_2, s'_2) に散乱される確率を求める。

$$|i\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) |0\rangle, \quad |f\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}'_2, s'_2) a^\dagger(\mathbf{p}'_1, s'_1) |0\rangle \quad (10.2)$$

のとき

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle + i \int d^4x \langle f | \mathcal{L}_{\text{int}}(x) | i \rangle - \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \langle f | T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\mathcal{L}_{\text{int}}(x')) | i \rangle + \dots$$

$|i\rangle, |f\rangle$ はスカラー粒子に関しては真空と同じであるから $\langle f | \phi | i \rangle = 0$ になり 1 次は 0 である。2 次の項を Wick の定理で展開する (簡単のため $\psi = \psi(x)$, $\psi' = \psi(x')$ 等とする)。 (8.18) から $\psi\psi'$ は $(a + b^\dagger)(a + b^\dagger)$ の型であるから $\psi\psi'$ と $\bar{\psi}\bar{\psi}'$ の縮約は 0 である。また

$$\langle f | : \phi \phi' : | i \rangle = 0$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \langle f | T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\mathcal{L}_{\text{int}}(x')) | i \rangle &= g^2 \langle f | T(: \bar{\psi}\psi\phi : : \bar{\psi}'\psi'\phi' :) | i \rangle \\ &= g^2 \overline{\phi\phi'} \langle f | \left(: \bar{\psi}\psi\bar{\psi}'\psi' : + : \overline{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}'\psi'} : + : \bar{\psi}\psi\bar{\psi}'\psi' : + : \overline{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}'\psi'} : \right) | i \rangle \\ &= g^2 \overline{\phi\phi'} \left(\langle f | : \bar{\psi}\psi\bar{\psi}'\psi' : | i \rangle + \overline{\psi_\alpha\psi'_\beta} \langle f | : \psi_\alpha\bar{\psi}'_\beta : | i \rangle \right. \\ &\quad \left. + \overline{\psi_\alpha\bar{\psi}'_\beta} \langle f | : \bar{\psi}_\alpha\psi'_\beta : | i \rangle + \overline{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}'\psi'} \langle f | i \rangle \right) \end{aligned}$$

になる。 $\langle f | : \bar{\psi}_\alpha\psi'_\beta : | i \rangle$ は

$$\langle 0 | a(\mathbf{p}'_1, s'_1) a(\mathbf{p}'_2, s'_2) a^\dagger(\mathbf{p}, s) a(\mathbf{p}', s') a^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) | 0 \rangle$$

になるから、例えば $(\mathbf{p}'_1, s'_1) = (\mathbf{p}_1, s_1)$ のように初期状態の 1 粒子状態と終状態の 1 粒子状態の少なくとも 1 組が同じでなければ 0 になる。以下では、初期状態の 1 粒子状態と終状態の 1 粒子状態は全て異なるとする。この場合、最初の項だけが残る

$$S_{fi} = -\frac{g^2}{2} \int d^4x d^4x' \langle f | : \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(x')\psi(x') : | i \rangle \overline{\phi(x)\phi(x')}$$

$\psi^{(-)}$ は a , $\psi^{(+)}$ は b^\dagger からなる。(10.2) の状態には反粒子は存在しないから

$$\begin{aligned} \langle f | : \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(x')\psi(x') : | i \rangle &= \langle f | : \bar{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(x')\psi^{(-)}(x') : | i \rangle \\ &= - \sum_{\alpha\beta} \langle f | \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\psi_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(x') | i \rangle \end{aligned}$$

(8.18) より

$$\begin{aligned}\psi^{(-)}(x) &= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} a(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x}, \quad p_0 = E_p \\ \bar{\psi}^{(+)}(x) &= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} a^\dagger(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}& \langle f | \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x') \psi_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(x') | i \rangle \\ &= \sum_{s_3 \dots s_6} \int \frac{d^3p_3 \dots d^3p_6}{(2\pi)^6} \exp(ip_3 \cdot x + ip_4 \cdot x' - ip_5 \cdot x - ip_6 \cdot x') \frac{m^2}{\sqrt{E_3 E_4 E_5 E_6}} \\ & \quad \bar{u}_\alpha(3) \bar{u}_\beta(4) u_\alpha(5) u_\beta(6) \langle 0 | a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger a_5 a_6 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle\end{aligned}$$

ただし

$$\bar{u}_\alpha(3) = \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}_3, s_3), \quad a_1 = a(\mathbf{p}_1, s_1)$$

と略記する。

$$a_5 a_6 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle = a_5 (\delta_{16} - a_1^\dagger a_6) a_2^\dagger | 0 \rangle = (\delta_{16} \delta_{25} - \delta_{26} \delta_{15}) | 0 \rangle, \quad \delta_{12} \equiv \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta_{s_1 s_2}$$

同様に

$$\langle 0 | a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger = \langle 0 | (\delta_{2'3} \delta_{1'4} - \delta_{1'3} \delta_{2'4})$$

であるから

$$\begin{aligned}& \sum_{\alpha\beta} \langle f | \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x') \psi_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(x') | i \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_{1'} E_{2'}}} \left[\bar{u}(1') u(1) \bar{u}(2') u(2) \left(e^{i(p'_1 - p_1) \cdot x + i(p'_2 - p_2) \cdot x'} + (x \leftrightarrow x') \right) \right. \\ & \quad \left. - \bar{u}(2') u(1) \bar{u}(1') u(2) \left(e^{i(p'_2 - p_1) \cdot x + i(p'_1 - p_2) \cdot x'} + (x \leftrightarrow x') \right) \right]\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S_{fi} &= - \frac{i g^2}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_{1'} E_{2'}}} \int d^4x d^4x' \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_F(q) e^{-iq \cdot (x-x')} \\ & \quad \left(\bar{u}(1') u(1) \bar{u}(2') u(2) e^{i(p'_1 - p_1) \cdot x + i(p'_2 - p_2) \cdot x'} - \bar{u}(2') u(1) \bar{u}(1') u(2) e^{i(p'_2 - p_1) \cdot x + i(p'_1 - p_2) \cdot x'} \right) \\ &= - \frac{i g^2}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_{1'} E_{2'}}} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) T_{fi}\end{aligned}$$

ただし

$$T_{fi} = \bar{u}(1') u(1) \bar{u}(2') u(2) \Delta_F(p_1 - p'_1) - \bar{u}(2') u(1) \bar{u}(1') u(2) \Delta_F(p_1 - p'_2) \quad (10.3)$$

である。デルタ関数 $\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)$ はエネルギー・運動量が保存することを表す。1' と 2' あるいは 1 と 2 を入れ換えると符号が変わる。フェルミ粒子の状態は粒子の交換に関して反対称でなければならないが、上の結果はこの要請を自動的に満たしている。

遷移確率を求めるには $|T_{fi}|^2$ を計算する必要があるが、このとき終状態の粒子のスピンを観測せず、また初期状態ではスピンの偏極していないならば、 s_1 と s_2 については平均し s'_1 と s'_2 については足し合わせる。したがって

$$T \equiv \frac{1}{4} \sum_{s_1 \cdots s'_2} |T_{fi}|^2$$

が求めればよい。ここで

$$f(1, 2) = \bar{u}(1)u(2)$$

とおくと $f^*(1, 2) = f(2, 1)$ であるから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \sum \left(f(1', 1)f(2', 2)\Delta_F(p_1 - p'_1) - f(2', 1)f(1', 2)\Delta_F(p_1 - p'_2) \right) \\ &\quad \left(f(1, 1')f(2, 2')\Delta_F(p_1 - p'_1) - f(1, 2')f(2, 1')\Delta_F(p_1 - p'_2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum \left(f(1', 1)f(1, 1')f(2', 2)f(2, 2')\Delta_F^2(p_1 - p'_1) \right. \\ &\quad \left. - f(1', 1)f(1, 2')f(2', 2)f(2, 1')\Delta_F(p_1 - p'_1)\Delta_F(p_1 - p'_2) + (1' \leftrightarrow 2') \right) \end{aligned}$$

なお、 $p^2 = m^2$, $p'^2 = m^2$ のとき

$$(p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p' = 2m^2 - 2E_p E_{p'} + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \leq 2(m^2 - E_p E_{p'} + |\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|)$$

ところで

$$(m^2 + |\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|)^2 - (E_p E_{p'})^2 = -m^2 (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|)^2 \leq 0$$

であるから $(p - p')^2 \leq 0$ になり、 $\Delta_F(p - p')$ の分母は $(p - p')^2 - m_0^2 < 0$ であるから $\varepsilon = 0$ としてよい。スピンについての和は、例えば

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 s'_1} f(1', 1)f(1, 1') &= \sum_{\alpha\beta} \sum_{s_1 s'_1} \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}'_1, s'_1) u_\alpha(\mathbf{p}_1, s_1) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}_1, s_1) u_\beta(\mathbf{p}'_1, s'_1) \\ &= \sum_{\alpha\beta} \sum_{s_1 s'_1} u_\alpha(\mathbf{p}_1, s_1) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}_1, s_1) u_\beta(\mathbf{p}'_1, s'_1) \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}'_1, s'_1) \end{aligned}$$

ここで (5.16) を使うと

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 s'_1} f(1', 1)f(1, 1') &= \sum_{\alpha\beta} (\Lambda_+(\mathbf{p}_1))_{\alpha\beta} (\Lambda_+(\mathbf{p}'_1))_{\beta\alpha} = \text{Tr}(\Lambda_+(\mathbf{p}_1)\Lambda_+(\mathbf{p}'_1)) \\ &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr}((\not{p}_1 + m)(\not{p}'_1 + m)) \end{aligned}$$

(3.26), (3.25) より

$$\sum_{s_1 s'_1} f(1', 1)f(1, 1') = \frac{p_1 \cdot p'_1 + m^2}{m^2}$$

になる。同様に

$$\begin{aligned} \sum f(1', 1)f(1, 2')f(2', 2)f(2, 1') &= \text{Tr}(\Lambda_+(\mathbf{p}_1)\Lambda_+(\mathbf{p}'_2)\Lambda_+(\mathbf{p}_2)\Lambda_+(\mathbf{p}'_1)) \\ &= \frac{1}{16m^4} \text{Tr}((\not{p}_1 + m)(\not{p}'_2 + m)(\not{p}_2 + m)(\not{p}'_1 + m)) \\ &= \frac{1}{4m^4} \left[p_1 \cdot p'_1 p_2 \cdot p'_2 + p_1 \cdot p'_2 p_2 \cdot p'_1 - p_1 \cdot p_2 p'_1 \cdot p'_2 \right. \\ &\quad \left. + m^2 \left((p_1 + p'_2) \cdot (p'_1 + p_2) + p_1 \cdot p'_2 + p'_1 \cdot p_2 \right) + m^4 \right] \end{aligned}$$

結果はかなり複雑なので重心系の場合

$$p_1 = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E_{\mathbf{p}}, -\mathbf{p}), \quad p'_1 = (E_{\mathbf{p}'}, \mathbf{p}'), \quad p'_2 = (E_{\mathbf{p}'}, -\mathbf{p}')$$

を考える。エネルギー・運動量保存から $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ である。

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2 = E_{\mathbf{p}}^2 + \mathbf{p}^2, \quad p_1 \cdot p'_2 = p'_1 \cdot p_2 = E_{\mathbf{p}}^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}', \quad p_1 \cdot p'_1 = p_2 \cdot p'_2 = E_{\mathbf{p}}^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'$$

であるから

$$\sum f(1', 1) f(1, 2') f(2', 2) f(2, 1') = \frac{1}{4m^4} \left((p_1 \cdot p'_1 + m^2)^2 + (p_1 \cdot p'_2 + m^2)^2 - (p_1 \cdot p_2 - m^2)^2 \right)$$

したがって

$$T = \frac{1}{16m^4} \left(\left(\frac{p_1 \cdot p'_1 + m^2}{p_1 \cdot p'_1 - m^2 + m_0^2/2} \right)^2 + \left(\frac{p_1 \cdot p'_2 + m^2}{p_1 \cdot p'_2 - m^2 + m_0^2/2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{(p_1 \cdot p'_1 + m^2)^2 + (p_1 \cdot p'_2 + m^2)^2 - (p_1 \cdot p_2 - m^2)^2}{(p_1 \cdot p'_1 - m^2 + m_0^2/2)(p_1 \cdot p'_2 - m^2 + m_0^2/2)} \right)$$

\mathbf{p} と \mathbf{p}' のなす角を θ とすると $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = p^2 \cos \theta$ であるから T を散乱角 θ で表せる。

非相対論的近似では

$$E_{\mathbf{p}} \approx m, \quad u(\mathbf{p}, s) \approx \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{\text{F}}(p - p') = \frac{1}{(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \approx -\frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m_0^2}$$

であるから (10.3) は

$$S_{fi} \approx \frac{i g^2}{(2\pi)^2} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \left(\frac{\delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2}}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_0^2} - (1' \leftrightarrow 2') \right) \quad (10.4)$$

これと同等な結果になる 2 粒子間に働く非相対論的ポテンシャル $V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ を求める。S 行列は V の 1 次では $V_1(t) = e^{iH_0 t} V e^{-H_0 t}$ であるから

$$S_{fi} = -i \int dt \langle f | V_1(t) | i \rangle = -i \int dt e^{i(E_f - E_i)t} \langle f | V | i \rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f | V | i \rangle$$

非相対論の場合、反対称化した 2 粒子状態は

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \chi_{s_1} \chi_{s_2} - (\mathbf{p}_1, s_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2, s_2) \right)$$

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(e^{i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{x}_2} \chi_{s'_1} \chi_{s'_2} - (\mathbf{p}'_1, s'_1 \leftrightarrow \mathbf{p}'_2, s'_2) \right)$$

である。2 成分スピノールは最初の部分が粒子 1, 2 番目が粒子 2 の状態を表す。

$$\langle f | V | i \rangle = \int \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{(2\pi)^6} V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \left(e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2 - i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 - i\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{x}_2} \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2} - (1' \leftrightarrow 2') \right)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ とおくと

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \int d^3 x V(\mathbf{x}) \left(e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \cdot \mathbf{x}} \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2} - (1' \leftrightarrow 2') \right)$$

であるから

$$S_{fi} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int d^3x V(\mathbf{x}) \left(e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \cdot \mathbf{x}} \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2} - (1' \leftrightarrow 2') \right) \quad (10.5)$$

になる。(10.4)と(10.5)を比較すると

$$\int d^3x V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = -\frac{g^2}{\mathbf{p}^2 + m_0^2} \quad (10.6)$$

したがって、湯川ポテンシャル

$$V(\mathbf{x}) = -g^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2 + m_0^2} = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_0 r}}{r}$$

を得る。

10.2 プロパゲータ

スカラー粒子のプロパゲータ

$$iG(x, x') = \frac{1}{\langle 0|S|0\rangle} \langle 0|T(\phi(x)\phi(x')S)|0\rangle$$

を結合定数 g の2次まで考慮して求める。

$$\begin{aligned} \langle 0|S|0\rangle &= 1 + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T(\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)\mathcal{L}_{\text{int}}(x_2))|0\rangle + \dots \\ &= 1 - \frac{g^2}{2} \sum_{12} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T(\bar{\psi}_1\psi_1\phi_1 :: \bar{\psi}_2\psi_2\phi_2 :)|0\rangle + \dots \end{aligned} \quad (10.7)$$

\mathcal{L}_{int} の真空期待値は0であるから1次は寄与しない。和はスピノールの成分について行う。簡単のため $\psi_{a_1}(x_1)$ などを ψ_1 と書く。(10.7)の時間順序積をウィックの定理で展開したとき、正規積の真空期待値は0であるから、縮約だけの項が残る。また、(8.18)から $\psi_1\psi_2$ は $(a+b^\dagger)(a+b^\dagger)$ の型であるから $\psi_1\psi_2$ と $\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2$ の縮約は0である。したがって、同一の正規積内の縮約は寄与しないから

$$\langle 0|T(\bar{\psi}_1\psi_1\phi_1 :: \bar{\psi}_2\psi_2\phi_2 :)|0\rangle = \overline{\psi_1\psi_1\psi_2\psi_2} \overline{\phi_1\phi_2} \quad (10.8)$$

である。次に

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x)\phi(x')S)|0\rangle &= \langle 0|T(\phi(x)\phi(x'))|0\rangle - i \int d^4x_1 \langle 0|T(\phi(x)\phi(x')\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1))|0\rangle \\ &\quad + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T(\phi(x)\phi(x')\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1)\mathcal{L}_{\text{int}}(x_2))|0\rangle + \dots \\ &= \overline{\phi\phi'} - \frac{g^2}{2} \sum_{12} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T(\phi\phi' : \bar{\psi}_1\psi_1\phi_1 :: \bar{\psi}_2\psi_2\phi_2 :)|0\rangle \end{aligned}$$

ただし $\phi = \phi(x)$, $\phi' = \phi(x')$ である。正直に展開すると

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi\phi' : \bar{\psi}_1\psi_1\phi_1 :: \bar{\psi}_2\psi_2\phi_2 :)|0\rangle &= \overline{\phi\phi'} \overline{\phi_1\phi_2} \overline{\psi_1\psi_1\psi_2\psi_2} + \overline{\phi\phi_1} \overline{\phi'\phi_2} \overline{\psi_1\psi_1\psi_2\psi_2} \\ &\quad + \overline{\phi\phi_2} \overline{\phi'\phi_1} \overline{\psi_1\psi_1\psi_2\psi_2} \end{aligned}$$

(10.8) 及び $\overline{\psi}_1\psi_2 = -\overline{\psi}_2\psi_1$ を考慮すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\psi_\alpha \overline{\psi}_\beta : \overline{\psi}_1 \psi_1 \phi_1 : : \overline{\psi}_2 \psi_2 \phi_2 :) | 0 \rangle &= \overline{\phi} \phi' \langle 0 | T(: \overline{\psi}_1 \psi_1 \phi_1 : : \overline{\psi}_2 \psi_2 \phi_2 :) | 0 \rangle \\ &\quad - \left(\overline{\phi} \phi_1 \overline{\phi}' \phi_2 + \overline{\phi} \phi_2 \overline{\phi}' \phi_1 \right) \overline{\psi}_1 \overline{\psi}_2 \overline{\psi}_2 \overline{\psi}_1 \end{aligned}$$

したがって

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(x')S) | 0 \rangle = \overline{\phi} \phi' \langle 0 | S | 0 \rangle + g^2 \sum_{12} \int d^4x_1 d^4x_2 \overline{\phi} \phi_1 \overline{\phi}' \phi_2 \overline{\psi}_1 \overline{\psi}_2 \overline{\psi}_2 \overline{\psi}_1$$

これから g^2 のオーダーまででは

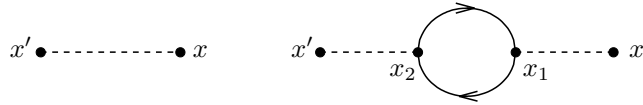
$$iG_{\alpha\beta}(x, x') = \overline{\phi} \phi' + g^2 \sum_{12} \int d^4x_1 d^4x_2 \overline{\phi} \phi_1 \overline{\phi}' \phi_2 \overline{\psi}_1 \overline{\psi}_2 \overline{\psi}_2 \overline{\psi}_1$$

になる。縮約を自由な場合のプロパゲータ S_F , Δ_F で表すと

$$G(x, x') = \Delta_F(x, x') - i g^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_F(x, x_1) \text{Tr}(S_F(x_1, x_2)S_F(x_2, x_1)) \Delta_F(x_2, x') \quad (10.9)$$

である。

(10.9) はファイマン・ダイアグラムで表すと見やすくなる。座標 x などに点 \bullet を対応させる。これを頂点 (vertex) という。 $S_F(x, x')$ には x' と x を結ぶ矢印, $\Delta_F(x, x')$ には x' と x を結ぶ破線に対応させると, (10.9) の右辺は図のようになる。量子化した場の効果で, 単独のスカラー粒子の伝播は単なる自由粒子の伝播 (右辺第 1 項) ではない。 $S_F(x, x')$ は $t > t'$ のとき粒子の生成・消滅を, $t' > t$ のとき反粒子の生成・消滅を表すから, $S_F(x_1, x_2)S_F(x_2, x_1)$ は粒子・反粒子の対生成・対消滅であり, ファイマン・ダイアグラムではループになる。一方の矢印を粒子とすると, もう 1 つの矢印は逆向きであり反粒子を表す。空孔理論的に言えば, スカラー粒子との相互作用でディラック海の負エネルギー粒子が正エネルギーに励起され, 励起した粒子が再び負エネルギー状態に戻る。これを真空偏極 (vacuum polarization) という。



(8.13) と (8.21) から

$$\begin{aligned} &\int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_F(x, x_1) S_F(x_1, x_2) S_F(x_2, x_1) \Delta_F(x_2, x') \\ &= \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4}{[(2\pi)^4]^4} \Delta_F(p_1) \text{Tr}(S_F(p_2)S_F(p_3)) \Delta_F(p_4) \\ &\quad \times \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ip_1 \cdot (x-x_1) - ip_2 \cdot (x_1-x_2) - ip_3 \cdot (x_2-x_1) - ip_4 \cdot (x_2-x')} \\ &= \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4}{[(2\pi)^4]^2} \Delta_F(p_1) \text{Tr}(S_F(p_2)S_F(p_3)) \Delta_F(p_4) e^{-ip_1 \cdot x + ip_4 \cdot x'} \\ &\quad \delta^4(p_1 - p_2 + p_3) \delta^4(p_2 - p_3 - p_4) \\ &= \int \frac{d^4p d^4q}{[(2\pi)^4]^2} \Delta_F(p) \text{Tr}(S_F(p+q)S_F(q)) \Delta_F(p) e^{-ip \cdot (x-x')} \end{aligned}$$

したがって

$$G(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} G(p)$$

とすると

$$G(p) = \Delta_F(p) + \Delta_F(p) \Sigma(p) \Delta_F(p), \quad \Sigma(p) = -ig^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(S_F(p+q) S_F(q) \right) \quad (10.10)$$

である。 $\Sigma(p)$ を自己エネルギー (self-energy) という。

相互作用 \mathcal{L}_{int} が与えられたとき、ここで行ったような計算を行わなくても、可能なファイマン・ダイアグラムを書き、矢印に S_F 、破線に Δ_F 、相互作用の頂点に g 、などを当てはめれば、前の図から (10.9) を書く下すことは機械的にできる。一般に、ファイマン・ダイアグラムに対してどのような量に対応させるかを与える規則をファイマン則 (Feynman rule) という。(10.1) の場合、ファイマン則は

- プロパゲータを表す矢印と破線にそれぞれ iS_F , $i\Delta_F$
- 相互作用の頂点に ig
- 頂点ではエネルギー・運動量は保存する。このとき独立なエネルギー・運動量 q^μ については積分 $\int d^4 q / (2\pi)^4$ を行う。
- ディラック粒子の閉じたループについては -1 を乗ずる。

になる。前の図は

$$iG(p) = i\Delta_F(p) + i\Delta_F(p) ig \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \left(iS_F(p+q) iS_F(q) \right) ig i\Delta_F(p)$$

であるから (10.10) が直ちに求まる。このようにファイマン則は非常に便利である。



上図のようなダイアグラムを無限次まで足し合わせれば

$$\begin{aligned} G(p) &= \Delta_F(p) \left(1 + \Sigma(p) \Delta_F(p) + (\Sigma(p) \Delta_F(p))^2 + \dots \right) \\ &= \frac{\Delta_F(p)}{1 - \Sigma(p) \Delta_F(p)} = \frac{1}{\Delta_F^{-1}(p) - \Sigma(p)} = \frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p) + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (10.11)$$

になる。ここで (8.13) を使った。(8.21) を (10.10) に代入すると

$$\Sigma(p) = -ig^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left((\not{p} + \not{q} + m)(\not{q} + m) \right)}{((p+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

である。(3.25) より

$$\text{Tr} \left((\not{p} + \not{q} + m)(\not{q} + m) \right) = 4(q \cdot (p+q) + m^2)$$

であるから

$$\Sigma(p) = -4ig^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q \cdot (p+q) + m^2}{((p+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

Feynman の恒等式

$$\frac{1}{XY} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{(\alpha X + (1-\alpha)Y)^2}$$

を使うと

$$\Sigma(p) = -4ig^2 \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q \cdot (p+q) + m^2}{((q+\alpha p)^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}$$

$k^\mu = q^\mu + \alpha p^\mu$ とすれば

$$\Sigma(p) = -4ig^2 \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2 + (1-2\alpha)p \cdot k}{(k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}$$

$p \cdot k$ の部分の積分は k^μ について奇関数であるから 0 である。したがって

$$\Sigma(p) = -4ig^2 \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2}{(k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \quad (10.12)$$

である。 $\Delta_F^{-1}(p^2 = m_0^2) = 0$ である m_0 が自由粒子の質量を与えるが、これは相互作用がない場合の質量であり、実際に観測される粒子の質量 m_R は相互作用の効果のため m_0 ではない。 m_R は $G^{-1}(p^2 = m_R^2) = 0$ で決まる。そこで $\Sigma(p^2)$ を $p^2 = m_R^2$ のまわりで展開して

$$\Sigma(p^2) = \delta m^2 + (p^2 - m_R^2)(1 - Z^{-1}) + (p^2 - m_R^2)^2 C(p^2)$$

とする。ただし

$$\delta m^2 = \Sigma(m_R^2), \quad 1 - Z^{-1} = \left. \frac{\partial \Sigma(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_R^2}$$

である。 δm^2 と $1 - Z^{-1}$ は発散しこのままでは物理的に無意味であるが、形式的に

$$G^{-1} = p^2 - m_0^2 - \delta m^2 - (p^2 - m_R^2)(1 - Z^{-1}) - (p^2 - m_R^2)^2 C(p^2)$$

であるから

$$m_0^2 + \delta m^2 = m_R^2$$

とすると

$$G^{-1} = Z^{-1}(p^2 - m_R^2) - (p^2 - m_R^2)^2 C(p^2)$$

になり $G^{-1}(p^2 = m_R^2) = 0$ である。更に

$$\phi = \sqrt{Z} \phi_R$$

として ϕ_R を物理的な場と見なせば

$$G = Z G_R$$

であるから

$$G_R^{-1} = p^2 - m_R^2 + \dots$$

になり Z を物理量から消去できる。無限大を有限な観測量で置き換えて無限大の困難を回避する。これを繰込み (renormalization) という。

10.3 次元正則化法

繰込みでは、無限大に発散する量がある処方で一時的に有限化する。その方法にはいろいろあるが、ここでは次元正則化法 (dimensional regularization) を採用する。この方法は4次元空間では発散する量を n 次元 (時間1次元 + 空間 $n-1$ 次元) で計算し、その後 $n \rightarrow 4$ とすることにより発散項を分離する。

まず

$$\int_0^\infty dz e^{iz(k^2 - M^2 + i\varepsilon)} = \left[\frac{e^{iz(k^2 - M^2 + i\varepsilon)}}{i(k^2 - M^2 + i\varepsilon)} \right]_0^\infty = -\frac{1}{i(k^2 - M^2 + i\varepsilon)}$$

である。 $z \rightarrow \infty$ のとき $-z\varepsilon \rightarrow -\infty$ であるから $z \rightarrow \infty$ の寄与は0である。これから

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} &= -i \int_0^\infty dz \int d^n k e^{iz(k^2 - M^2 + i\varepsilon)} \\ &= -i \int_0^\infty dz e^{iz(-M^2 + i\varepsilon)} \int_{-\infty}^\infty dk_0 e^{izk_0^2} \left(\int_{-\infty}^\infty dk_1 e^{-izk_1^2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

ここで $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - \dots - k_{n-1}^2$ である。 $k_0 = re^{i\theta}$ とすると

$$e^{izk_0^2} = e^{izr^2 \cos 2\theta} e^{-zr^2 \sin 2\theta}$$

$\sin 2\theta > 0$ ならば $r \rightarrow \pm\infty$ のとき $e^{izr^2 \cos 2\theta} \rightarrow 0$ であるから、実軸上の積分を複素平面上の積分 $k_0 = re^{i\theta}$, $-\infty < r < \infty$ に置き換えられる。特に $\theta = \pi/4$ とすれば

$$\int_{-\infty}^\infty dk_0 e^{izk_0^2} = e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^\infty dr e^{-zr^2} = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{z}}$$

同様にして

$$\int_{-\infty}^\infty dk_1 e^{-izk_1^2} = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{z}}$$

したがって

$$\int \frac{d^n k}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = e^{-i\pi n/4} \pi^{n/2} \int_0^\infty dz e^{-izM^2} z^{-n/2}$$

$t = izM^2$ とすると

$$\int \frac{d^n k}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = -i \pi^{n/2} M^{n-2} \int_0^{i\infty} dt e^{-t} t^{-n/2}$$

更に

$$\int_0^{iR} dt e^{-t} t^{-n/2} + \int_{\pi/2}^0 d\theta \frac{dt}{d\theta} e^{-t} t^{-n/2} \Big|_{t=Re^{i\theta}} + \int_R^0 dt e^{-t} t^{-n/2} = 0$$

第2項は $R \rightarrow \infty$ のとき0になるから

$$\int \frac{d^n k}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = -i \pi^{n/2} M^{n-2} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-n/2}$$

Γ 関数は

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$$

であるから

$$\int \frac{d^n k}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = -i \pi^{n/2} M^{n-2} \Gamma(1 - n/2) \quad (10.13)$$

になる。\$M^2\$ で微分すると

$$\int \frac{d^n k}{(k^2 - M^2 + i\varepsilon)^2} = i\pi^{n/2} M^{n-4} (1 - n/2) \Gamma(1 - n/2) \quad (10.14)$$

である。

以上の結果を使うと (10.12) の積分

$$I_n = \int d^n k \frac{k^2 + f(\alpha, p^2)}{(k^2 - f(\alpha, p^2) + i\varepsilon)^2}, \quad f(\alpha, p^2) = m^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2$$

は \$M^2 = f(\alpha, p^2)\$ とすれば

$$I_n = i\pi^{n/2} (1 - n) \Gamma(1 - n/2) f^{n/2-1}$$

になる。右辺では \$n\$ は整数である必要はない。そこで \$n\$ を実数として扱い \$n \to 4\$ の極限を考える。\$n = 4 + \delta\$ とすると \$a = e^{\log a}\$ であるから

$$\pi^{n/2} = \pi^2 e^{\delta/2 \log \pi} = \pi^2 \left(1 + \frac{\delta}{2} \log \pi + \dots\right), \quad f^{n/2-1} = f \left(1 + \frac{\delta}{2} \log f + \dots\right)$$

になる。\$\Gamma(z)\$ は \$z = 0, -1, -2, \dots\$ で発散するから \$\Gamma(1 - n/2) = \Gamma(-1 - \delta/2)\$ は \$\delta \to 0\$ で発散する。\$\Gamma\$ 関数の性質

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

を使うと

$$\Gamma(-1 - \delta/2) = -\frac{\Gamma(-\delta/2)}{1 + \delta/2} = \frac{\Gamma(1 - \delta/2)}{(1 + \delta/2)\delta/2}$$

以上から

$$\begin{aligned} I_n &= i\pi^2 f \left(1 + \frac{\delta}{2} \log \pi + \dots\right) \left(1 + \frac{\delta}{2} \log f + \dots\right) (-3 - \delta) \frac{\Gamma(1 - \delta/2)}{(1 + \delta/2)\delta/2} \\ &= -3i\pi^2 f \left(\Gamma(1 - n/2) + \frac{\Gamma(1 - \delta/2)}{1 + \delta/2} \left(\log(\pi f) + \frac{2}{3}\right) + O(\delta)\right) \end{aligned}$$

\$\delta \to 0\$ とすると \$\Gamma(1) = 1\$ であるから

$$I_n = -3i\pi^2 f \left(\Gamma(1 - n/2) + \log(\pi f) + \frac{2}{3}\right)$$

になる。第1項は \$n \to 4\$ のとき \$\Gamma(-1)\$ になり発散する。\$\Sigma\$ は

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -\frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha I_n \\ &= -\frac{3g^2}{4\pi^2} \left[\left(m^2 - \frac{p^2}{6}\right) \left(\Gamma(1 - n/2) + \frac{2}{3} + \log \pi\right) + \int_0^1 d\alpha f \log f \right] \quad (10.15) \end{aligned}$$

である。

10.4 繰込み

スカラー粒子の繰込みを具体的に行う。自由粒子のラグランジアンで \$m_0\$ を物理的質量 \$m_R\$ で表して \$m_0^2 = m_R^2 - \delta m^2\$ とし、場 \$\phi\$ も \$\phi = \sqrt{Z} \phi_R\$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left((\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) - m_0^2 \phi^2 \right) &= \frac{Z}{2} \left((\partial^\mu \phi_R) (\partial_\mu \phi_R) - m_R^2 \phi_R^2 \right) + \frac{Z}{2} \delta m^2 \phi_R^2 \\ &= \frac{1}{2} \left((\partial^\mu \phi_R) (\partial_\mu \phi_R) - m_R^2 \phi_R^2 \right) + \frac{Z-1}{2} (\partial^\mu \phi_R) (\partial_\mu \phi_R) + \frac{\zeta}{2} \phi_R^2 \quad (10.16) \end{aligned}$$

ただし

$$\zeta = Z\delta m^2 - (Z-1)m_R^2$$

である。(10.16)の第1項をこれまでの自由粒子のラグランジアンとし、第2項と第3項を相互作用に加えて

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g : \bar{\psi}\psi\phi_R : + \frac{Z-1}{2} : (\partial^\mu\phi_R)(\partial_\mu\phi_R) : + \frac{\zeta}{2} : \phi_R^2 :$$

とする。ここでは扱わないが、ディラック場 ψ と結合定数 g も繰込む必要がある。上式の ψ と g は繰込まれた量と考える。

新たに加えた相互作用の寄与を求める。

$$\langle 0 | \mathbb{T}(\phi_R(x)\phi_R(x')S) | 0 \rangle$$

において1次の寄与は(添字 R は省略)

$$I_1 = i \frac{Z-1}{2} \int d^4x_1 \langle 0 | \mathbb{T}(\phi(x)\phi(x') : (\partial^\mu\phi(x_1))(\partial_\mu\phi(x_1)) :) | 0 \rangle$$

$$I_2 = i \frac{\zeta}{2} \int d^4x_1 \langle 0 | \mathbb{T}(\phi(x)\phi(x') : \phi(x_1)\phi(x_1) :) | 0 \rangle$$

である。ウィックの定理から

$$\begin{aligned} I_1 &= i \frac{Z-1}{2} \int d^4x_1 \left(\overbrace{\phi(x)\phi(x')\partial^\mu\phi(x_1)\partial_\mu\phi(x_1)} + \overbrace{\phi(x)\phi(x')\partial^\mu\phi(x_1)\partial_\mu\phi(x_1)} \right) \\ &= i(Z-1) \int d^4x_1 \left(\partial^\mu i\Delta_F(x, x_1) \right) \partial_\mu i\Delta_F(x_1, x') \end{aligned}$$

微分は x_1 について行う。(8.13)より

$$I_1 = -i(Z-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p^2 \Delta_F(p) \Delta_F(p) e^{-ip \cdot (x-x')}$$

になる。同様に

$$I_2 = -i\zeta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta_F(p) \Delta_F(p) e^{-ip \cdot (x-x')}$$

したがって(10.10)は

$$G(p) = \Delta_F(p) + \Delta_F(p)\Sigma_R(p)\Delta_F(p), \quad \Sigma_R(p) = \Sigma(p) - (Z-1)p^2 - \zeta$$

になる。ここで $\Delta_F(p)$ の質量は m_R である。(10.10)から(10.11)を導いたのと同様にすると

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - m_R^2 - \Sigma_R(p) + i\varepsilon}$$

(10.15)より

$$\Sigma_R(p^2) = -(Z-1)p^2 - \zeta - \frac{3g^2}{4\pi^2} \left[\left(m^2 - \frac{p^2}{6} \right) \Gamma_\infty + \int_0^1 d\alpha f \log f \right] \quad (10.17)$$

ただし

$$\Gamma_\infty = \Gamma(1 - n/2) + \frac{2}{3} + \log \pi, \quad f(\alpha, p^2) = m^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2$$

である。ここで

$$\Sigma_{\text{R}}(m_{\text{R}}^2) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Sigma_{\text{R}}}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_{\text{R}}^2} = 0$$

を要請すると

$$\begin{aligned} & -(Z-1)m_{\text{R}}^2 - \zeta - \frac{3g^2}{4\pi^2} \left[\left(m^2 - \frac{m_{\text{R}}^2}{6} \right) \Gamma_{\infty} + \int_0^1 d\alpha f(\alpha, m_{\text{R}}^2) \log f(\alpha, m_{\text{R}}^2) \right] = 0 \\ & -(Z-1) + \frac{3g^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{6} \Gamma_{\infty} + \frac{1}{6} + \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \log f(\alpha, m_{\text{R}}^2) \right] = 0 \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} Z-1 &= \frac{g^2}{8\pi^2} \left[\Gamma_{\infty} + 1 + 6 \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \log f(\alpha, m_{\text{R}}^2) \right] \\ \zeta &= -\frac{3g^2}{4\pi^2} \left[m^2 \Gamma_{\infty} + \frac{m_{\text{R}}^2}{6} + m^2 \int_0^1 d\alpha \log f(\alpha, m_{\text{R}}^2) \right] \end{aligned}$$

これを (10.17) に代入すると

$$\Sigma_{\text{R}}(p^2) = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left(p^2 - m_{\text{R}}^2 + 6 \int_0^1 d\alpha f(\alpha, p^2) \log \frac{f(\alpha, p^2)}{f(\alpha, m_{\text{R}}^2)} \right) \quad (10.18)$$

になり発散項はすべて除去される。

$$\begin{aligned} \Sigma'_{\text{R}}(p^2) &= \frac{d\Sigma_{\text{R}}(p^2)}{dp^2} = \frac{3g^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \log \frac{f(\alpha, p^2)}{f(\alpha, m_{\text{R}}^2)} \\ \Sigma''_{\text{R}}(p^2) &= -\frac{3g^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2} \end{aligned}$$

であるから

$$C = \frac{1}{2} \Sigma''_{\text{R}}(m_{\text{R}}^2) = -\frac{3g^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)m_{\text{R}}^2}$$

とすると

$$\Sigma_{\text{R}}(p^2) = (p^2 - m_{\text{R}}^2)^2 (C + \dots)$$

したがって

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{p^2 - m_{\text{R}}^2 + i\varepsilon} \frac{1}{1 + (p^2 - m_{\text{R}}^2)C + \dots} \\ &= \frac{1}{p^2 - m_{\text{R}}^2 + i\varepsilon} \left(1 - C(p^2 - m_{\text{R}}^2) + \dots \right) = \frac{1}{p^2 - m_{\text{R}}^2 + i\varepsilon} - C + \dots \end{aligned}$$

真空偏極の効果を考慮すると (10.6) は

$$\int d^3x V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = -g^2 \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2 + m_{\text{R}}^2} + C \right)$$

になり

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_{\text{R}}r}}{r} - g^2 C \delta(\mathbf{x})$$

を得る。ここでは簡単のためスカラー粒子とディラック粒子の相互作用を扱ったが、スカラー粒子の代わりに光子 ($m_{\text{R}} = 0$) を考えても同様の項が求まり、クーロンポテンシャルは補正を受ける。このためディラック方程式の固有値 (7.15) では縮退する状態は分離する。ラム・シフトと呼ばれるエネルギー差を高精度で理論的に再現するにはこの補正が必要である。