特殊相対論入門

2020 年 6 月 16 日　© 倉澤治樹
http://kurasawa.c.oocp.jp

目 次

参考書

- 中野 董夫：物理学入門コース９ 相対性理論 (岩波書店)
- 内山 龍雄：物理テキストシリーズ８ 相対性理論 (岩波書店)
- 山内 恭彦, 内山 龍雄, 中野 董夫：一般相対性および重力の理論 (裳華房)　付録 B

1 はじめに

1.1 ニュートン力学

ニュートン力学は 3 つの法則に帰結する。

運動の第 1 法則 (first law of motion)

すべての物体は, 力の作用を受けない限り, 等速度運動 (一定の速さで一直線上を運動すること) を続ける。

物体がその速度を保持し続けようとする性質を**慣性** (inertia) といい, 第 1 法則は**慣性の法則**とも呼ばれる。なお, 等速度運動で速さが 0 という特別な場合は, 静止し続けることである。

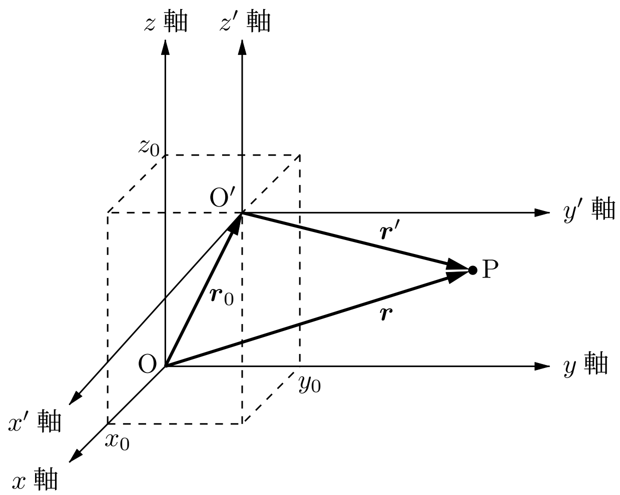
ここで注意すべきことは, 速度は観測者 (座標系) により異なるということである。図の様な 2 つの座標系 S (O-xyz) と S′ (O′-$x'y'z'$) を考えよう。質点の位置ベクトルを S 系で $\boldsymbol{r}$, S′ 系で $\boldsymbol{r}'$ とし, S 系での O′ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0$ とする。図から

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' \tag{1.1}$$

である。これを時間で微分すると, S′ 系における質点の速度 $\boldsymbol{v}' = d\boldsymbol{r}'/dt$ は, S 系における速度 $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ と

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 \,, \quad \boldsymbol{v}_0 = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} \tag{1.2}$$

の関係にある。ただし, $\boldsymbol{v}_0$ は S 系に対する S′ 系の速度である。S 系で第 1 法則が成り立ち $\boldsymbol{v}$ が一定でも, $\boldsymbol{v}_0$ が一定でないなら, $\boldsymbol{v}'$ も一定ではなくなり, S′ 系では第 1 法則が成り立たない。この様に, 第 1 法則はある特別な座標系で成り立つ。この座標系を**慣性系** (inertial system) という。ところで, 慣性系を設定できるという保証は何もない。そこで, 先ず第一に, 慣性系の存在を公理として認めよう, というのが運動の第 1 法則の持つ意味である。(1.2) から, S′ が慣性系 S に対して等速度運動しているならば, S′ も慣性系である。したがって, 慣性系は無数にある。



運動の第 2 法則 (second law of motion)

慣性系から見た場合, 質点は力を受けるとその方向に加速度を生じ, 加速度の大きさは力の大きさに比例し, 質点の質量に逆比例する。

質量 m の質点に力 $\boldsymbol{F}$ が作用したとき, 生じる加速度を $\boldsymbol{a}$ とすると, 第 2 法則は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{1.3}$$

というベクトルの式で表せる。これを**ニュートンの運動方程式** (Newton's equation of motion) という。$\boldsymbol{F}$ が一定のとき, 質量 m が大きいほど加速度, つまり速度の変化は小さい。言い換えれば, 質量が大きいほど慣性は大きくなる。このため, この質量を**慣性質量** (inertial mass) とも呼ぶ。

運動の第 3 法則 (third law of motion)

物体 1 が物体 2 に力 $\boldsymbol{F}_{12}$ を及ぼすとき, 物体 2 は必ず物体 1 に対して, 大きさが同じで逆向きの力 $\boldsymbol{F}_{21}$ を及ぼす。すなわち $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$ である。

一方の力を作用, 他方の力を反作用ということがある。このため, この法則は**作用反作用の法則** (law of action and reaction) とも呼ばれる。

1.2　ガリレイ変換

ある慣性系 S に対して一定速度 $\boldsymbol{V}$ で等速運動している別の慣性系 S′ を考える。ニュートン力学では時間の進み方はすべての慣性系で共通であるから, S と S′ の時刻をそれぞれ t, t' とすると $t' = t$ とできる。時刻 $t = 0$ で 2 つの座標系は一致していたとする。物体の位置ベクトルを S の座標系で $\boldsymbol{r}$, S′ の座標系で $\boldsymbol{r}'$ とする。 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の関係は (1.1) において $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{V}t$ とすればよいから

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t\ , \quad t' = t$$

である。これを**ガリレイ変換**という。

S, S′ での物体の速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ とすると

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\ , \quad \boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$$

が速度の定義である。これから

$$\boldsymbol{v}' = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t\right) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ は

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}\right) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a} \tag{1.4}$$

である。したがって, 加速度はガリレイ変換に対して不変である。

ニュートン力学では, 質量と力はガリレイ変換に対して不変であると仮定する。つまり, S′ での質量 m' と力 $\boldsymbol{F}'$ に対して

$$m' = m\ , \quad \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \tag{1.5}$$

が成り立つとする。力については, 例えば, 万有引力やクーロン力の場合, 2 つの物体の位置を $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ とすれば, 物体 1 に働く力 $\boldsymbol{F}_1$ は

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{C}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\ , \quad \boldsymbol{F}_1' = \frac{C}{|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|^2}\frac{\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'}{|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|}$$

という形である。ガリレイ変換に対して位置ベクトルの差は

$$\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2' = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{V}t) - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{V}t) = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

であるから不変である。したがって, 力も $\boldsymbol{F}'_1 = \boldsymbol{F}_1$ である。これを一般化して, ニュートン力学では $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$ を仮定する。

慣性系 S で運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

が成り立っているとき, (1.4), (1.5) を代入すると

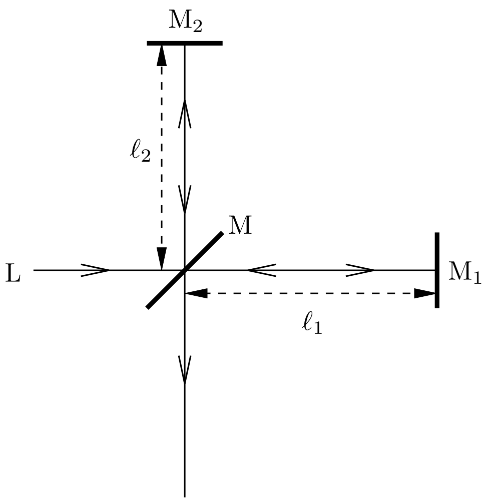
$$m'\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}'$$

であり, 運動方程式はすべての慣性系で同じ形になる。これを**ガリレイの相対性原理**という。力学の法則を記述する限り, どの慣性系も全く同等であって, 特別な基準系を選ぶことはできない。

力学以外の現象, 例えば, 電磁気的現象を問題にすると, 話は異なってくる。電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式によれば, 真空中の光の速さは $c = 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}$ になる。ガリレイ変換によれば, ある慣性系 S で光速が c ならば, S に対して動いている別の慣性系では光速は c ではない。したがって, この系ではマクスウェル方程式はそのままでは成り立たない。無数にある慣性系のなかでマクスウェル方程式が成立するのはただ一つに限られる。この系を絶対系と呼ぶことにすると, 絶対系はどこにあるかという疑問が当然生じる。地球は絶対系に対して運動しているはずだから, 地球に固定した慣性系で光速を精密に測れば c と違った値になり, 絶対系に対する地球の速度を決定できるだろう。このような考えに基づいて行われた実験で最も有名な実験がマイケルソン・モーレーの実験である。

1.3　マイケルソン・モーレーの実験

マイケルソン・モーレーの実験装置の概略を右図に示す。光源 L から出た波長 λ の単色光は, 半透明鏡 M で 2 方向に別れる。1 つは A を通過後 ℓ_1 離れた鏡 M_1 で反射して M に戻る。もう 1 つの光は M から ℓ_2 離れた鏡 M_2 で反射してやはり M に戻る。両者は M で再び一緒になり観測装置 T に入る。2 つの光は進む距離が異なるため T では干渉縞が生じる。



絶対静止系を S, 装置の静止系を S$'$ とする。2 つの慣性系の座標軸を平行にとり, MM_1 の方向を x 軸, MM_2 の方向を y 軸とする。絶対静止系 S に対して装置が MM_1 の方向に速さ V で移動している場合, S, S$'$ での光の速度 $\boldsymbol{c} = (\,c_x,\, c_y\,)$, $\boldsymbol{c}' = (\,c'_x,\, c'_y\,)$ の間には

$$c'_x = c_x - V\ ,\quad c'_y = c_y\ ,\quad \text{ただし}\ \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = c$$

が成り立つ (ここでは, x, y 方向の 2 次元を考えれば十分である)。光が $\mathrm{M}\to\mathrm{M}_1$ の方向に進む場合, $c'_x = c - V$, $c'_y = 0$ であるから, M から出た光が鏡 M_1 に到達するのに要する時間 T_1 は

$$T_1 = \frac{\ell_1}{c - V} = \frac{1}{1-\beta}\frac{\ell_1}{c}\ ,\quad \beta = \frac{V}{c}$$

である。逆に, 光が M_1 で反射されて M に戻るときは $c'_x = -c - V$ であるから, $\mathrm{M}_1 \rightarrow \mathrm{M}$ にかかる時間 T_2 は

$$T_2 = \frac{\ell_1}{c+V} = \frac{1}{1+\beta}\frac{\ell_1}{c}$$

したがって, MM_1 を往復するのに要する時間 T_x は

$$T_x = T_1 + T_2 = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{2\ell_1}{c}$$

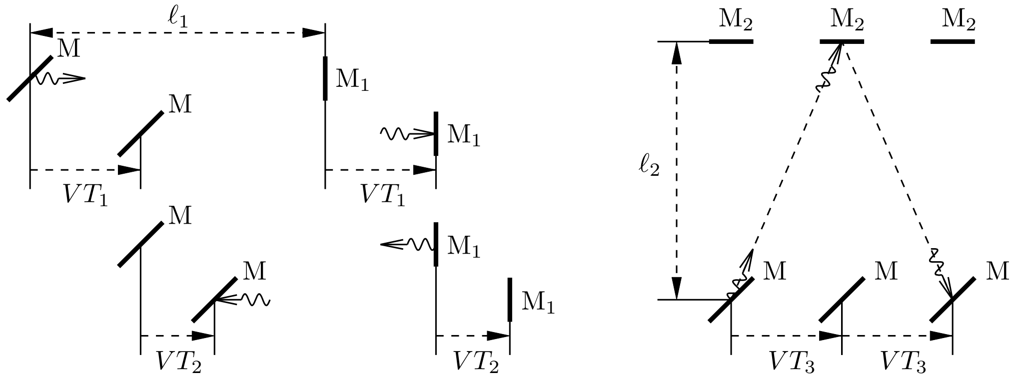
となる。次に, 装置の進行方向に垂直な MM_2 間を考える。S' では光は y 軸方向に進むから $c'_x = c_x - V = 0$ である。これから

$$c'_y = c_y = \sqrt{c^2 - c_x^2} = \sqrt{c^2 - V^2}$$

したがって, MM_2 を往復するのに要する時間 T_y は

$$T_y = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{2\ell_2}{c}$$

である。



以上は装置の静止系で考えたが, 絶対静止系から見てみよう。M から出た光が鏡 M_1 に到達するのに要する時間を T_1 とすると, 光が M_1 に到達するまでに M_1 は VT_1 だけ移動する。絶対静止系での光速は c であるから

$$\ell_1 + VT_1 = cT_1$$

となる。次に, 光が M_1 で反射されて M に戻ってくる時間を T_2 とすると, M は VT_2 だけ光に近づくから

$$\ell_1 - VT_2 = cT_2$$

である。したがって, MM_1 を往復するのに要する時間 T_x は

$$T_x = T_1 + T_2 = \frac{\ell_1}{c-V} + \frac{\ell_1}{c+V} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{2\ell_1}{c}$$

となる。装置の進行方向に垂直な $\mathrm{M} \rightarrow \mathrm{M}_2$ 間を光が伝わる時間を T_3 とすると, 光が進む距離は $\sqrt{(VT_3)^2 + \ell_2^2}$ であるから

$$\sqrt{(VT_3)^2 + \ell_2^2} = cT_3$$

光が M_2 から M に戻るにも同じ時間かかるから, MM_2 を往復するのに要する時間 T_y は

$$T_y = 2T_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{2\ell_2}{c}$$

である。

M で別れた光が再び M に戻ってくるまでに通過した距離の差 (光路差) $\mathit{\Delta} L$ は

$$\mathit{\Delta} L = c\,(T_x - T_y) = \frac{2\ell_1}{1-\beta^2} - \frac{2\ell_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となる。n を整数として $\mathit{\Delta} L = n\lambda$ ならば T では明るく, $\mathit{\Delta} L = (n+1/2)\lambda$ ならば暗くなり, 一般に T には干渉縞が生じる。

装置を 90° 回転させて実験した場合, 光路差 $\mathit{\Delta} L'$ は

$$\mathit{\Delta} L' = \frac{2\ell_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2\ell_2}{1-\beta^2}$$

である。

$$\delta = \frac{\mathit{\Delta} L - \mathit{\Delta} L'}{\lambda} = \frac{2(\ell_1+\ell_2)}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

とする。例えば, $\delta = 0.5$ ならば回転前に明るかった部分は暗くなるというように, δ に応じた干渉縞の変化が観測される。この変化から $\beta = V/c$ を実験的に求められる。

δ の値を評価してみよう。マイケルソン・モーレーの実験では $\ell_1 \approx \ell_2 \approx 11\,\mathrm{m}$ である。また, 光源にはナトリウムの D 線が用いられた。この光の波長は $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ である。V として地球の公転速度 $\approx 3 \times 10^4\,\mathrm{m/s}$ を使ってみる (自転による速度は赤道上でも $5 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$ であり無視できる)。

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 1 \times 10^{-4}$$

$x \ll 1$ のとき $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ で近似できるから

$$\delta \approx \frac{2(\ell_1+\ell_2)}{\lambda}\left(1 + \beta^2 - 1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{\ell_1+\ell_2}{\lambda}\,\beta^2$$

上に与えた値を代入すると $\delta = 22/59 = 0.37$ となる。しかし, 実験では $\delta < 0.02$ であった。この結果は季節によっても変わらない。マイケルソン・モーレーの実験によると, 地球は絶対静止系に対して静止している。これでは天動説の再来であり, そのまま認めることはできない。マイケルソン・モーレーの実験結果と当時の物理学の常識 (エーテルの存在とガリレイ変換) を如何に融合するか, 歴史的には紆余曲折があった。しかし, アインシュタインは融合する代わりに, 実験結果が教えるところを指導原理として素直に認め, 物理学を再構築したわけである。

2　特殊相対性原理とローレンツ変換

2.1　特殊相対性原理

マイケルソン・モーレーの実験結果は, 光速が任意の慣性系で c になる, 言い換えれば, 任意の慣性系でマクスウェル方程式が成立することを示している。そこで, 力学に関する慣性系の同等性を拡張して

すべての物理法則は任意の慣性系において同じ形式で記述できる。

ことを要請しよう。これを**アインシュタインの特殊相対性原理**という。特殊とは慣性系間についてだけ考えおり, 加速度系を含めていないからである。また, 任意の慣性系でマクスウェル方程式が成立することを要請する代わりに, つぎのことを原理として認める。こちらの方が具体的で理解しやすい。

真空中の光速は, 光源の運動状態に無関係である。

これを**光速不変の原理**という。

光速不変の原理とガリレイ変換は矛盾する。ガリレイ変換では, 時間はすべての慣性系において共通である。光速不変の原理を認めることは, この時間の絶対性を放棄することになり, 時間の進み方は慣性系により異なってくる。

ここで, 光速不変の原理に基づいて同時性について考えてみる。常識的には, ある慣性系で同時な現象は, 他の慣性系で観測しても同時である。

同時とは何か

ある慣性系から見て固定された 2 つの離れた場所 A, B に, 時間の進み方が同じで時刻が合っている時計が置いてある。このとき, A と B で起こった事象が同時とは, A, B に置かれた時計が同じ時刻を示すことである。

では, 離れた場所にある時計の時刻を合わせるにはどうしたらよいだろうか。例えば, A で 2 つの時計を合わせて 1 つを B に持って行く。時計の進み方が移動により変化しなければよいが, 今はその保証はない。光を用いて離れた 2 つの場所にある時計の時刻を合わせよう。A, B 間の距離が物差しで測定して ℓ であったとする。まず, 光速を決める必要がある。B に鏡を置き, A から発射した光が B で反射して A に戻ってくるまでの時間を測定する。この場合, A にある 1 つの時計だけで測れる。この時間が t_A だとすると, 光速は $c = 2\ell/t_A$ と決定できる。次に, 光を A の時計が時刻 t_0 のとき A から発射する。光が AB 間を伝わるには ℓ/c の時間を要するから, 光が B に到達したとき B の時計を $t_0 + \ell/c$ に合わせる。光速 c は既に分かっているから, 1 つの慣性系内に固定した任意の場所に置いた時計を合わせることができる。以上のようにして合わせた時計が同時刻を示すとき, 同時であると定義する。

さらに, 光速不変の原理から, 任意の慣性系で光速は同じ速さ c である。したがって, それぞれの慣性系において全く同じ方法で時計を合わせることができる。

同時は絶対的でない

次の図のような AB の中点に光源が固定されている装置を考える。この装置の静止系 S′ で観測すると光源から出た光は同時に A と B に到達する。慣性系 S から見ると, この装置は A→B の方

向に速さ V で移動している。S で観測したとき, 光が A, B に到達するのに要する時間がそれぞれ t_A, t_B であったとする。S から見た AB の長さを 2ℓ とすると, A は時間 t_A の間に Vt_A 移動するから, 光の通過距離は $\ell - Vt_A$ である。光速不変の原理により, 移動している光源から出た光の速さは S でも c であるから

$$\ell - Vt_A = ct_A \quad \text{つまり} \quad t_A = \frac{\ell}{c+V}$$

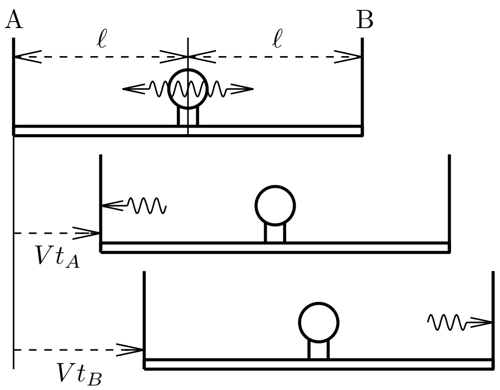
である。同様にして, 光が B に到達するまでに通過した距離は $\ell + Vt_B$ であるから

$$t_B = \frac{\ell}{c-V}$$

となる。時間差は

$$t_B - t_A = \frac{2\ell}{c}\frac{\beta}{1-\beta^2}\ , \qquad \beta = \frac{V}{c}$$

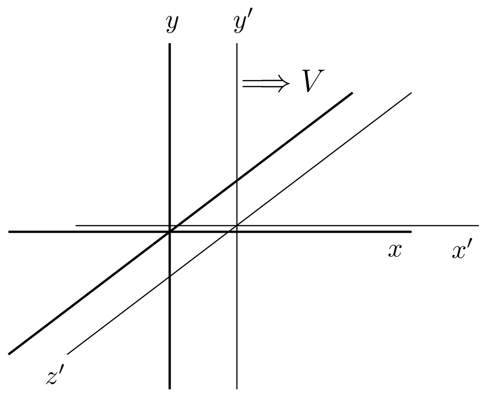
である。$t_B - t_A > 0$ であるから, 光が A に到達したとき B にはまだ到達していない。S′ で同時であった事象は S では同時ではない。このように, 光速不変の原理を認めると, 同時は絶対的なものではなくなり慣性系に依存する。なお, 日常経験する速度では $\beta \ll 1$ であるから, この時間差はほとんど無視できる。



問 2.1　光速がガリレイ変換に従うとすると, S から観測しても光は A, B に同時に到達することを示せ。

2.2　ローレンツ変換の導出

簡単のため 2 つの慣性系 S と S′ の座標軸は平行で, 時刻 $t = t' = 0$ のとき両方の座標原点は一致しており, S′ は S の x 軸の正方向へ速さ V で移動しているとする。S 系で時刻 t, 座標 (x, y, z) で起こったある現象が, S′ 系では時刻 t', 座標 (x', y', z') で起こったとする。ガリレイ変換では (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の関係は



$$x' = x - Vt\ , \quad y' = y\ , \quad z' = z\ , \quad t' = t$$

$$x = x' + Vt'\ , \quad y = y'\ , \quad z = z'\ , \quad t = t'$$

である。これは光速不変の原理を満たさないのでガリレイ変換を拡張して

$$x' = \alpha(V)\,(x - Vt)\ , \quad y' = y\ , \quad z' = z \tag{2.1}$$

$$x = \alpha(V)\,(x' + Vt')\ , \quad y = y'\ , \quad z = z' \tag{2.2}$$

とし, 光速不変の原理が成り立つように係数 $\alpha(V)$ を決定してみよう。

$t = t' = 0$ で原点から x 軸正方向に発射された光を考える。この光の速さを S 系で c, S$'$ 系では c' としておく。時刻 t では光は $x = ct$ に到達する。S$'$ 系から見ると時刻は t' で光は $x' = c't'$ に到達している。$x = ct,\ x' = c't'$ を (2.1) と (2.2) に代入すると

$$c't' = \alpha(ct - Vt) = \alpha(c - V)t\ , \quad ct = \alpha(c't' + Vt') = \alpha(c + V)t'$$

2 つの式の両辺を掛け合わせると

$$cc'tt' = \alpha^2(c - V)(c' + V)tt'$$

$V = 0$ のとき $\alpha = 1 > 0$ になる解は

$$\alpha = \sqrt{\frac{cc'}{(c - V)(c' + V)}}$$

である。ガリレイ変換に従うとすると $c' = c - V$ であるから $\alpha = 1$ という当然の結果になる。一方, 光速不変の原理から $c' = c$ とすると

$$\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{(c - V)(c + V)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{2.3}$$

を得る。次に時間に対する変換を求める。(2.1) の x' を (2.2) に代入すると

$$x = \alpha\left(\alpha(x - Vt) + Vt'\right) = \alpha^2 x - \alpha^2 Vt + \alpha Vt' \quad \text{つまり} \quad t' = \alpha\left(t + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 V}x\right)$$

ガリレイ変換である $\alpha = 1$ を代入すると $t' = t$ となり, 時間は慣性系に依らない。光速不変の原理を満たす (2.3) の場合には

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{2.4}$$

となる。以上まとめると, ある現象の S と S$'$ における時空座標 (x, y, z, t) の変換公式として

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ , \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ , \quad y' = y\ , \quad z' = z \tag{2.5}$$

を得る。これが**ローレンツ変換**である。

ローレンツ変換は t の代わりに長さの次元を持つ量 $x_0 = ct$ で表すと, x と x_0 について対称的で簡潔な表現になる。$\beta = V/c$ とすると (2.5) は

$$x_0' = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\ , \quad x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2.6}$$

である。$V/c \to 0$ の場合, ローレンツ変換はガリレイ変換になる。ガリレイ変換は速さ V が光速 c に比べて非常に小さい時のローレンツ変換の近似式である。

問 2.2　結果を予想してから (2.5) を x, t について解け。

問 2.3　2 つの時空座標 (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) の差の関数

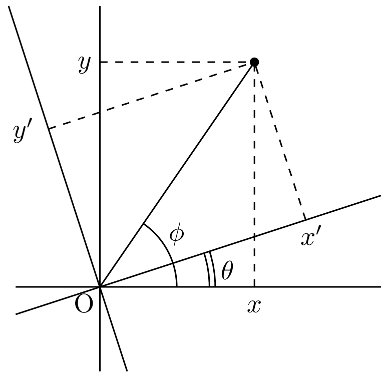
$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

はローレンツ変換に対して不変, つまり

$$\begin{aligned} &c^2(t_1' - t_2')^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2 \\ &= c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

であることを示せ。

2.3　ローレンツ変換の幾何学的表現



座標回転　2 次元の座標系の回転を考える。2 つの座標系 O-x, y と O-x', y' が角度 θ で交わっているとする。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を O-x, y 系で表した成分を x, y, O-x', y' 系で表した成分を x', y' とする。$\boldsymbol{r}$ の大きさを r, x 軸とのなす角を ϕ とすると

$$x = r\cos\phi\ , \quad y = r\sin\phi \tag{2.8}$$

である。$\boldsymbol{r}$ と x' 軸のなす角は $\phi - \theta$ であるから

$$x' = r\cos(\phi - \theta) = r\cos\phi\,\cos\theta + r\sin\phi\,\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\phi - \theta) = r\sin\phi\,\cos\theta - r\cos\phi\,\sin\theta$$

(2.8) を代入すると

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta\ , \quad y' = y\cos\theta - x\sin\theta \tag{2.9}$$

になる。原点からの距離は座標系の回転に対して不変である:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \tag{2.10}$$

ローレンツ変換 (2.6) は $x_4 = ix_0$ を x_0 の代わりに使うと

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,x + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,x_4\ , \quad x_4' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,x_4 - \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,x$$

となる。ところで

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1$$

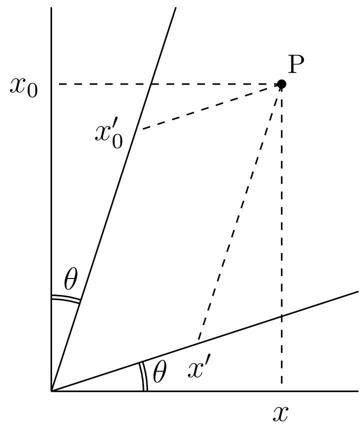
であるから

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cos\theta\ , \quad \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sin\theta$$

を満たす θ が存在する。ただし θ は実数ではない。これから

$$x' = x\cos\theta + x_4\sin\theta\ , \quad x_4' = x_4\cos\theta - x\sin\theta$$

となる。これは 2 次元での座標回転 (2.9) と同じ形である。したがって, ローレンツ変換は, 形式上, 空間座標と時間座標の座標回転と考えることができる。このとき (2.10) に対応して, 原点からの距離の 2 乗 $x^2+x_4^2=x^2-x_0^2$ は回転, つまりローレンツ変換に対して不変である。原点からの距離の 2 乗 s^2 が $s^2=x^2-x_0^2$ (一般に $s^2=x^2+y^2+z^2-x_0^2$) で定義される空間を**ミンコフスキー空間**という。この空間では距離の 2 乗は負にもなりえる。このため距離の 2 乗を $x_0^2-(x^2+y^2+z^2)$ で定義してもよい。以下では, **相対論的量子力学**でよく用いられる定義 $x_0^2-(x^2+y^2+z^2)$ を距離の 2 乗とする。

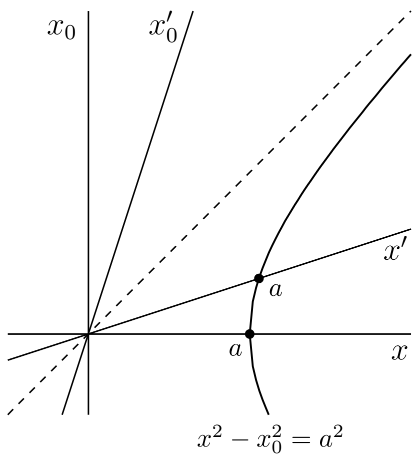


ミンコフスキー図式　y, z を省略して, x を横軸とし x_0 を縦軸とする直交座標系を考える。ある時刻, ある場所で起きた事象は, この平面の 1 点 (**時空点**) で表される。慣性系 S′ における座標を知るためには, x' 軸と x'_0 軸をこの平面上に書く必要がある。

x 軸が $x_0=0$ で表される直線であるのと同様に, x' 軸は直線 $x'_0=0$ である。この条件を x, x_0 で示すと, (2.6) より $x_0=\beta x$, つまり原点を通る傾き β の直線になる。同様にして, x'_0 軸は $x'=0$, すなわち $x=\beta x_0$ である。したがって, S の座標軸と S′ の座標軸とのなす 2 つの角は等しく, その角を θ とすると $\tan\theta=\beta$ である。時空点 P の慣性系 S′ における時間と位置は, P から x' 軸と x'_0 軸に平行線を引き, 軸との交点の値を読めばよい。時空をこの様な図で表したものを**ミンコフスキー図式**と呼ぶことにする。

a を定数とすると, x' 軸に平行な直線は $x_0=\beta x+a$ と表わせる。これを (2.6) に代入すると $x'_0=a/\sqrt{1-\beta^2}=$ 一定 である。したがって, この直線上の点は S′ から見とすべて同一時刻である。一方, この直線の x_0 は x により異なるから, S から見ると同時刻ではない。同時刻は絶対的なものではない。

x'_0 軸に平行な直線は $x=\beta x_0+a$ である。この場合 $x'=a/\sqrt{1-\beta^2}=$ 一定 であり, S′ では同一の場所を表わす。言い換えると, 時間 x'_0 に依らず x' が一定ということは, S′ から見ると静止していることになる。勿論, S から見れば $x=\beta x_0+a=Vt+a$ であるから, x 軸正方向に速さ V で動いている。

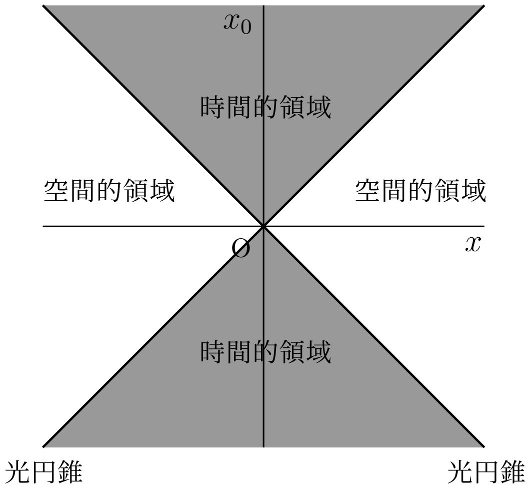


$x^2-x_0^2=a^2$ $(a>0)$ は図で表すと $x=a$, $x_0=0$ を通る双曲線である。$x^2-x_0^2$ はローレンツ変換に対して不変であるから, この双曲線は $x'^2-x_0'^2=a^2$ でもある。したがって, x' 軸と双曲線の交点が x' 軸の a である。原点とこの交点の距離は

$$a\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\neq a$$

であり a ではないが, この点が x' 軸の a を表わす。ミンコフスキー図式上では, 長さの単位は S と S′ では異なる。なお, S は S′ から見れば x' 軸の負の方向に速さ V で動いているから, x' 軸と x'_0 軸を直交座標にとり x 軸と x_0 軸を角度 θ だけ広げた斜交座標にとってもよい。

一般に時空座標における運動の軌跡を**世界線**という。S から見て x 軸方向の一定速度 v の運動は $x = vt + a = (v/c)x_0 + a$ であるから x–x_0 平面では直線になる。特に, $t = 0$ で $x = 0$ から出た光は $x = \pm x_0 = \pm ct$ であり, x 軸と x_0 軸から等角度の直線になるが, これは x'–x'_0 系から見ても等角度にあり $x' = \pm x'_0 = \pm ct'$ である (光速不変の原理)。



$x_0 > |x|$ の領域を考える。$0 \le \beta < 1$ より $x_0 - \beta x > 0$ である。(2.6) から任意のローレンツ変換に対して $x'_0 > 0$, つまりこの領域の時空点は原点 O より未来にある。また, O から発射された作用は光速度以上で伝わることはないから, 到達できる領域は $x_0 > |x|$ である。したがって, 今考えている領域は O と因果的 (原因より先に結果はない) に結ばれた未来である。同様にして, $x_0 < -|x|$ は O と因果的に結ばれた過去である。一方, 残りの領域 $-|x| < x_0 < |x|$ では O より未来のあるとか過去にあるとかはローレンツ変換により変化するので絶対的な意味を持たないし, O とは因果的に無関係な領域である。

O と因果的に結ばれる領域を**時間的領域**, 結ばれない領域を**空間的領域**という。この 2 つの領域の境 $x = \pm x_0$ は光が到達する点であるから**光円錐**と呼ばれる。この分類を不変距離 $s^2 = x_0^2 - x^2$ で表すと, 時間的領域は $s^2 > 0$, 空間的領域は $s^2 < 0$, 光円錐は $s^2 = 0$ である。

問 2.4　ローレンツ変換を一般に $x_0^2 - x^2$ を不変にする変換であると定義する。2×2 の行列 A によりローレンツ変換を

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

とすると, A は

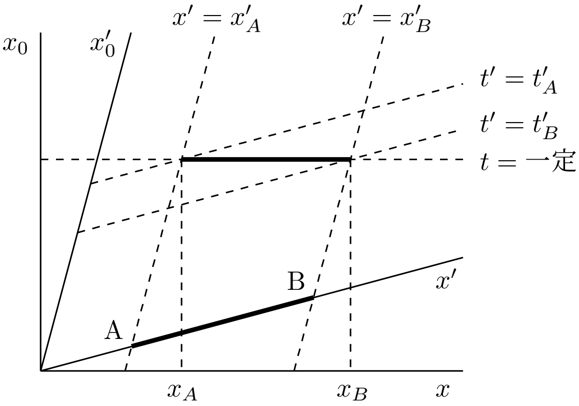
$${}^t\!AGA = G\,, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

を満たせばよいことを示せ。ただし, ${}^t\!A$ は A の転置行列である。ローレンツ変換 (2.6) を (2.11) の形式に書き直し, このときの A が (2.12) を満たすことを確かめよ。

問 2.5　ガリレイ変換をミンコフスキー図式と同様な図式で表せ。

3　ローレンツ変換から導かれる性質

3.1　ローレンツ収縮



棒の両端を A, B として, この棒が S$'$ の x' 軸上に固定されているとする。この系から見た棒の長さを l_0 とする。S から見ると棒は x 軸正方向に速さ V で移動している。時刻 t に A, B が x 軸上を通過する点を x_A, x_B とすると, S から見たときの棒の長さ l は $l = x_B - x_A$ である。S では A が x_A を通過する時刻と B が x_B を通過する時刻は同時であるが, S$'$ から見るとこれは同時ではない。つまり A が x_A を通過したとき B は x_B にはない。これから l と l_0 は等しくないはずである。

(x_A, t), (x_B, t) の S$'$ における時空座標を (x'_A, t'_A), (x'_B, t'_B) とするとローレンツ変換より

$$x'_A = \frac{x_A - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad t'_A = \frac{t - Vx_A/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x'_B = \frac{x_B - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad t'_B = \frac{t - Vx_B/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.1}$$

$t'_A \neq t'_B$ であるが, 棒は S$'$ に静止しているから x'_A, x'_B は t' に依らない定数であり, S$'$ における長さ l_0 は

$$l_0 = x'_B - x'_A$$

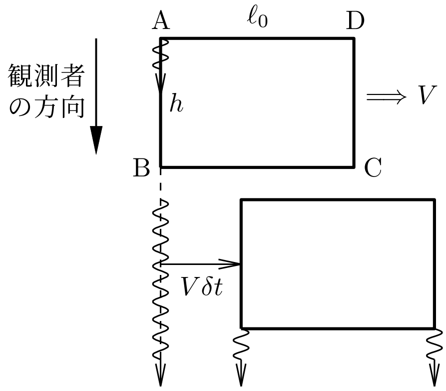
である。(3.1) より

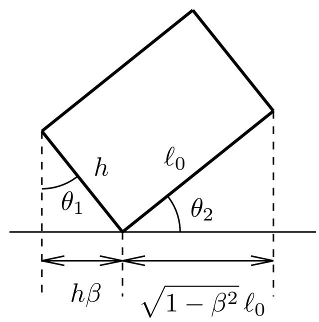
$$x_A = Vt + x'_A \sqrt{1-\beta^2} \ , \quad x_B = Vt + x'_B \sqrt{1-\beta^2}$$

であるから, 棒の両端の S における x 座標は速さ V で移動している。S で測定した棒の長さ l は

$$l = x_B - x_A = \sqrt{1-\beta^2}\,(x'_B - x'_A) = \sqrt{1-\beta^2}\, l_0 = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, l_0$$

速さ V で動いている棒の長さは進行方向に $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ の割合で縮む。これを**ローレンツ収縮**という。進行方向に対して垂直に置かれた棒, すなわち S$'$ の $y'z'$ 平面内の固定された棒は, $y = y'$, $z = z'$ であるから収縮しない。したがって, 3 次元的物体は進行方向のみローレンツ収縮がおこる。





運動している物体を視覚的に観測する場合, 物体の各点と観測者までの距離は各点により異なるから, 各点で発した光が観測者に到達するのに要する時間も異なる。したがって, ある時刻に観測者が見る光は, 物体の場所で異なった時刻に出発していることになる。右側に速度 V で移動している物体 ABCD が目の前を通り過ぎる場合を考える。物体は観測者から十分遠くにあるため, 平行光線で扱えるとする。A, D は B, C よりも遠くにあるから, A, D から出た光が B, C から出た光と同時に観測者に届くには, 光が AB 間の距離 h 進むのに要する時間 $\delta t = h/c$ だけ早く出発しなければならない。この時間の間に物体は右に $V\delta t = h\,(V/c) = h\beta$ だけ進む。一方, 進行方向には $\sqrt{1-\beta^2}$ だけ収縮する。図のように角度 θ_1, θ_2 をとると

$$\sin\theta_1 = \beta\ , \quad \cos\theta_2 = \sqrt{1-\beta^2}$$

であるから $\theta_1 = \theta_2$ である。したがって, 運動している物体は角度 $\sin^{-1}\beta$ だけ回転したように見える。

3.2 運動している時計の遅れ

慣性系 S に固定されてる時計と S に対して速さ V で動いている慣性系 S$'$ に固定されてる時計との時間の進み方を比較する。S の x 軸上の点 x_1 と x_2 にそれぞれ時刻が合っている時計 C_1 と C_2 をおき, 慣性系 S$'$ の x' 軸上の点 x'_1 に時計 C$'$ をおく。S$'$ の点 x'_1 が S 上の点 x_1 を通過する時刻が, C_1 と C$'$ でそれぞれ t_1, t'_1 とする。ローレンツ変換より

$$t'_1 = \frac{t_1 - Vx_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2}$$

である。次に, x'_1 が x_2 を通過するときの C_2 と C$'$ の時刻をそれぞれ t_2, t'_2 とすると

$$t'_2 = \frac{t_2 - Vx_2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad x'_1 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.3}$$

になる。慣性系 S$'$ の一点 x'_1 が S の 2 点 x_1, x_2 を通過するのに要する時間を S で測定すると $T = t_2 - t_1$ であり, S$'$ では $T' = t'_2 - t'_1$ である。(3.2), (3.3) から

$$T' = \frac{t_2 - Vx_2/c^2 - (t_1 - Vx_1/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T - V(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.4}$$

(3.2), (3.3) の x'_1 から $x_2 - Vt_2 = x_1 - Vt_1$, つまり $x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1) = VT$ である。$x_2 - x_1$ は速さ V の時計 C$'$ が時間 T の間に進む距離であるから当然の結果である。これを (3.4) に代入すると

$$T' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(T - \beta^2\,T\right) = T\,\sqrt{1-\beta^2} \le T \tag{3.5}$$

S に対して速さ V で動いている時計の経過時間 T' は S の時計の経過時間 T に比べてゆっくり進む。

ミンコフスキー図式では, $\delta t'$ は x'_0 軸に平行な C$'$ の世界線と x 軸に平行な 2 直線 $x_0 = ct_1$ 及び $x_0 = ct_2$ との交点の t' の差である。S$'$ から見ると C_1 は x' 軸の負の方向に V で進む。$\delta t'$ が (3.5) で与えられるとき, x' 軸上の間隔 $V\delta t'$ を C_1 が通過する場合を考える。これに要する時間は S$'$ で測定する $\delta t'$ である。S で測定したとき δT とすると, (3.5) の場合とは S と S$'$ の役割が逆になり

$$\delta T = \delta t'\,\sqrt{1 - V^2/c^2} = \delta t\left(1 - V^2/c^2\right) \neq \delta t$$

である。この時の δT は x_0 軸に平行な C_1 の世界線と x' 軸に平行な 2 直線 $x'_0 = ct'_1$ 及び $x'_0 = ct'_2$ との交点の t の差である。

δt は異なる場所に置かれた 2 つの時計で測定した時間であるが, $\delta t'$ は同一の時計 C' で測定した時間である。これはその時計に固有な時間であるので, **固有時間**という。$\delta t'$ を

$$\delta t = t_2 - t_1\ ,\quad V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

で書き換えると

$$\delta t' = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2} \tag{3.6}$$

となるから, $\delta t'$ はローレンツ変換に対して不変である。一方, δt は座標系によって異なるので, **座標時間**という。固有時間とは時計が静止している系での座標時間といえる。

固有時間を一般化しておく。慣性系 S における物体の速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とする。$\boldsymbol{v}(t)$ は一定である必要はない。(3.5) を拡張して

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2} \quad \text{or} \quad \tau = \int\!\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}\,dt\ ,\quad \boldsymbol{v}^2 \equiv \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{3.7}$$

とするとき, τ をその物体の固有時間と定義する。ある時刻 $t = t_1$ を考えると, $\boldsymbol{v}$ が x 軸正方向を向くように S の空間座標をとることは常にできるので, $\boldsymbol{v}(t_1) = (V,\ 0,\ 0)$ とする。$t = t_1$ での物体の位置を x_1, 微小時間経過後の時刻 $t = t_2$ での物体の位置を x_2 とすると, $d\tau$ は (3.6) と同様に

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2}$$

となるから, ローレンツ変換に対して不変である。S に対して x 軸正方向に V で動いている慣性系 S' にローレンツ変換で $(x_1,\ t_1)$ と $(x_2,\ t_2)$ を変換したものを $(x'_1,\ t'_1)$, $(x'_2,\ t'_2)$ とする。S' では物体は瞬間 t'_1 では静止しているから $x'_1 = x'_2$ である。したがって

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2} = t'_2 - t'_1$$

τ は物体と一緒に運動している時計の示す時間である。ガリレイ変換では座標時間 t はすべての慣性系に共通であるが, ローレンツ変換では固有時間がこれに対応する。ニュートンの運動方程式を相対論的に修正するとき, 座標時間の代わりに固有時間を使う。

光時計　光源 L と反射鏡 M からなる装置を考える。L から発射した光が M で反射し L に戻ったとき, 再び L から光を発射する。この装置は, 光が LM を往復する時間を単位とする時計と見なせる。LM 間の距離を l とすると, 装置が静止している慣性系での往復時間 $\delta t'$ は $\delta t' = 2l/c$ になる。この装置を LM に垂直な方向に速さ V で動かす。このとき光が LM を往復するのに要する時間を δt とする。光が L→M 進む間に装置は $V\delta t/2$ 移動するから, 光が進む距離は

$$\sqrt{l^2 + (V\delta t/2)^2}$$

である。光の速さは光源の運動に無関係に c であるから, この距離は $c\delta t/2$ でもある。したがって

$$\sqrt{l^2 + (V\delta t/2)^2} = c\,\delta t/2\ ,\quad \text{つまり}\quad \delta t = \frac{2l/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

これは (3.5) と同じである。

ミューオンの寿命　素粒子の 1 つであるミューオンは電子と似た性質をもつが, 質量が電子の約 200 倍で電子とニュートリノに崩壊する。粒子が生成されてから崩壊するまでの時間を寿命というが, 静止したミューオンの平均寿命は $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ である。ミューオンは光速で走っても $c\tau_0 = 660\,\mathrm{m}$ しか走れないように思えるが, 上空 10 ∼ 20km で宇宙線 (宇宙空間から地球に入射する高エネルギーの素粒子や原子核) と空気との相互作用により発生したミューオンを地上で観測できる。この事実は “運動している時計の遅れ” により理解できる。地上で観測したミューオンの速さを v, 平均寿命を τ とすると, τ と τ_0 がそれぞれ (3.5) の δt と $\delta t'$ になるから

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

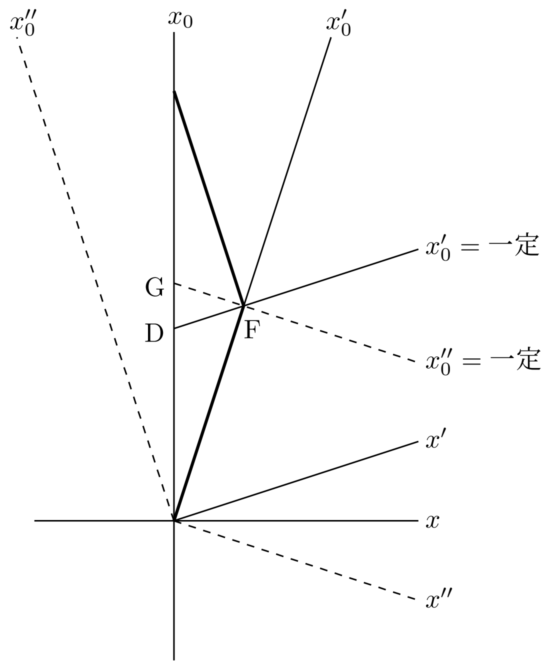
である。平均飛行距離 l は $l = v\tau = v\tau_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ になる。これを具体的に計算すると表のようになる (K は相対論的運動エネルギー)。上空 10 ∼ 20km で発生したミューオンが $v/c \approx 0.999$ 以上なら地上で観測できる。

$\beta = v/c$	$1/\sqrt{1-\beta^2}$	l (km)	K (GeV)
0.8	1.67	0.88	0.071
0.9	2.29	1.36	0.136
0.99	7.09	4.63	0.643
0.999	22.37	14.75	2.256

双子のパラドクス

“慣性系によって時間の進み方が違う” ということは, 一見矛盾した結果を導く。その 1 つが双子のパラドクスである。

いま慣性系 S の原点 O に双子 A と B がいる。A は原点 O にそのままいる。一方 B はロケットに乗り無限大の力で瞬時に速さ V になり, 一定速度 V で折り返し点 R まで行く。今度は無限大の力で減速し, さらに逆向きの速度 $-V$ に加速される。この間の経過時間は 0 である。B は R から一定速度 $-V$ で O に向かい, やはり無限大の力で減速され O に到着する。B が O から R に到着するのに要する時間を A の時計で T_A とし, B の時計で T_B とする。A から見れば B は速さ V で動いているから, B の時計は A よりゆっくり進む。R から O に戻るにも同じ時間かかるから, B が OR を往復するのに要する時間は (3.5) より



$$2T_B = 2T_A\sqrt{1 - V^2/c^2} < 2T_A \tag{3.8}$$

である。したがって, B は A よりも年をとらないことになる。例えば, 双子が誕生したとき, B を

$V/c = \sqrt{0.99} = 0.9949\cdots$ のロケットに乗せて往復させる。A が 20 歳のとき B が到着したとすると, B はまだ 2 歳である。

ところで, 運動は相対的である。B から見れば B は静止していて A が速さ V で往復したことになる。A の時計で t_A とし, B の時計で T_B とすると, (3.8) とは逆に

$$2t_A = 2T_B\sqrt{1 - V^2/c^2} < 2T_B \tag{3.9}$$

となり, (3.8) と矛盾する。これが双子のパラドクスである。

このパラドクスを解く鍵は, B が R で方向を変えるところにある。往復の間 A の静止系は 1 つの慣性系 S であるが, B の静止系は行きは S に対して V で動いている慣性系 S$'$, 帰りは $-V$ で動いている別の慣性系 S$''$ になる。ミンコフスキー図式で B が R に到着したときの時空点を F とする。B の静止系が S$'$ のとき, t_A は A の世界線 ($x = 0$) と F を通る x' 軸に平行な $x'_0 =$ 一定 の直線との交点 D の t である。一方, B の静止系が S$''$ になると, B から見た A の世界線の同時刻の点は D ではなく, F を通る x'' 軸に平行な $x''_0 =$ 一定 の直線と $x = 0$ との交点 G になる。B から見た A の同時刻の点が D から G へ飛ぶため, (3.9) には DG の時間が入っていない。これを加えると (3.8) になる。

3.3　速度の変換

慣性系 S, S$'$ で観測した物体の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ とし, 物体の速度を $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ とすると

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\ , \quad \boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

である。ガリレイ変換では $dt/dt' = 1$ で時間の進み方は慣性系に依らない。ローレンツ変換は

$$x'(t) = \frac{x(t) - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ , \quad y'(t) = y(t)\ , \quad z'(t) = z(t)\ , \quad t'(t) = \frac{t - (V/c^2)\,x(t)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{3.10}$$

であるから

$$\frac{dt}{dt'} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = \left(\frac{1 - \dfrac{V}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \tag{3.11}$$

となる。したがって

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \tag{3.12}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} = v_y\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \tag{3.13}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} = v_z\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2} \tag{3.14}$$

これがローレンツ変換による速度の変換である。

$V \ll c$, $|\boldsymbol{v}| \ll c$ の場合, V/c と v_x/c は無視できるから, 上の変換はガリレイ変換

$$v'_x = v_x - V\ , \quad v'_y = v_y\ , \quad v'_z = v_z$$

に一致する。

速度の合成　$\boldsymbol{v}$ が x 軸方向を向いている場合を考える。$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ の大きさをそれぞれ v と v' とすると (3.12) より

$$v' = \frac{v - V}{1 - Vv/c^2}$$

これを v について解く (あるいは V の符号を変える) と

$$v = \frac{v' + V}{1 + Vv'/c^2} \tag{3.15}$$

を得る。これは次のように解釈できる。慣性系 S に対して速さ V で動いている物体 S$'$ から, 速さ v' で物体 A を発射したとき, S から見たときの A の速さが (3.15) で与えられる。ガリレイ変換では速度の合成は単なる足し算 $v' + V$ であるが, ローレンツ変換ではそうはならない。

$|k| < 1,\ |k'| < 1$ のとき

$$(1-k)(1-k') = 1 - (k+k') + kk' > 0\ , \quad (1+k)(1+k') = 1 + (k+k') + kk' > 0$$

つまり

$$-(1 + kk') < k + k' < 1 + kk'$$

$1 + kk' > 0$ であるから

$$-1 < \frac{k + k'}{1 + kk'} < 1$$

$k = V/c,\ k' = v'/c$ とすると

$$v/c = \frac{v'/c + V/c}{1 + Vv'/c^2} = \frac{k + k'}{1 + kk'}$$

したがって $|V/c| < 1,\ |v'/c| < 1$ ならば $|v/c| < 1$ である。光速より小さい 2 つの速度を合成しても光速を越すことはできない。c は物体の持ちうる速さの上限である。例えば, $v' = 0.9c,\ V = 0.9c$ のとき, ガリレイ変換ならば合成した速度は $0.9c + 0.9c = 1.8c$ であるが, (3.15) を使うと $1.8c/(1 + 0.81) = 0.9945c$ である。また, $v' = c$ とすると $v = (c + V)/(1 + V/c) = c$ となるが, これは光速不変の原理から当然の結果である。

(3.11) から (3.14) を用いて固有時間 $d\tau = dt\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}$ がローレンツ変換に対して不変であること, すなわち

$$dt'\sqrt{1 - \boldsymbol{v}'^2/c^2} = dt\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}$$

を示そう。$\beta = V/c$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{v}'^2}{c^2} = \frac{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}{c^2} &= \frac{(v_x - c\beta)^2 + (1-\beta^2)(v_y^2 + v_z^2)}{c^2(1 - \beta v_x/c)^2} \\ &= \frac{(v_x - c\beta)^2 - (1-\beta^2)v_x^2 + (1-\beta^2)\boldsymbol{v}^2}{(c - \beta v_x)^2} \end{aligned}$$

ところで

$$(v_x - c\beta)^2 - (1-\beta^2)v_x^2 = \beta^2 v_x^2 - 2c\beta v_x + c^2\beta^2 = (c - \beta v_x)^2 - (1-\beta^2)c^2$$

であるから

$$\frac{\boldsymbol{v}'^2}{c^2} = \frac{(c - \beta v_x)^2 - (1-\beta^2)c^2 + (1-\beta^2)\boldsymbol{v}^2}{(c - \beta v_x)^2} = 1 - \frac{(1-\beta^2)(1 - \boldsymbol{v}^2/c^2)}{(1 - \beta v_x/c)^2}$$

したがって

$$dt'\sqrt{1-\boldsymbol{v}'^2/c^2} = dt'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta v_x/c}\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = dt'\frac{dt}{dt'}\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = dt\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}$$

となる。ただし (3.11) を使った。

3.4　ドップラー効果

波長 λ の正弦波は x が λ 変化すると元に戻るものであるから

$$A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

である。関数 $f(x)$ を x 方向に a 移動したものは $f(x-a)$ である。したがって $f(x-vt)$ は $f(x)$ の形が t の変化とともに速さ v で動く波を表す。これから

$$F(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right) = A\sin(kx-\omega t) \tag{3.16}$$

は波長が λ で速さ v の波を表す。ただし

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ , \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = kv \tag{3.17}$$

であり k を**波数**といい ω を**角振動数**という。$F(x,t)$ を t の関数としてみれば, t が $T=2\pi/\omega$ 変化すると F は同じ値をとるから T は**周期**である。単位時間には $1/T$ 回振動を繰り返すから $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ を**振動数**という。(3.16) は x 方向に進む波であるが, 単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向に進む波を表すには kx を $k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}$ で置き換えればよい。したがって

$$F(\boldsymbol{r},t) = A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\ , \quad \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n} \tag{3.18}$$

が一般的な表現になる。$\boldsymbol{k}$ を**波数ベクトル**という。波数ベクトルの方向が波の進行方向であり, その大きさは波数を表す。

さて, 2 つの慣性系 S と S$'$ を考える。波が腹となるか節となるかは S, S$'$ から見ても変わらないはずだから

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-\omega' t'$$

が成り立つ。ここで $\boldsymbol{k}'$, ω' は S$'$ で観測した波の波数ベクトルと角振動数である。この式の左辺にローレンツ変換

$$t = \frac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad y = y'\ , \quad z = z'\ , \quad \beta = V/c$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t &= k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \\
&= k_x\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} + k_y y' + k_z z' - \omega\frac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
&= \frac{k_x - V\omega/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}x' + k_y y' + k_z z' - \frac{\omega - Vk_x}{\sqrt{1-\beta^2}}t' \\
&= k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t'
\end{aligned}$$

これから変換公式

$$\omega' = \frac{\omega - Vk_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad k'_x = \frac{k_x - V\omega/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad k'_y = k_y\ , \quad k'_z = k_z \tag{3.19}$$

を得る。

この変換式を光に適用する。$\boldsymbol{k}$ と x 軸とのなす角を θ, $\boldsymbol{k}'$ と x' 軸とのなす角を θ' とすると (3.17) より $v = c$ として

$$k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta\ , \quad k'_x = k'\cos\theta' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

である。これを (3.19) に代入すると

$$\omega' = \omega\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.20}$$

$$\omega'\cos\theta' = \omega\frac{\cos\theta-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad \text{つまり} \quad \cos\theta' = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta} \tag{3.21}$$

を得る。

光源が S$'$ に固定されていて振動数 ν_0 の光を出している場合を考える。この光を S で観測したときの振動数 ν は, (3.20) で $\omega' = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi\nu$ とおくと

$$\nu_0 = \nu\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad \text{したがって} \quad \nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \tag{3.22}$$

となる。この振動数の変化を光のドップラー効果という。

光源が x 軸上にあり S の観測者から遠ざかっていく場合, S で観測する光の波数ベクトルは x 軸の負の方向を向くから $\theta = \pi$ である。したがって (3.22) は

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

となる。振動数は光源の静止系での振動数, つまり固有振動数より小さくなる。可視光の場合にはその色が振動数の小さい赤色の方にずれるので**赤方偏移**という。銀河系外の星からくる光を観測すると赤方偏移している。これは星が遠ざかっていること, つまり宇宙は膨張していることを示す。

光源が x 軸上にあり S の観測者に近づく場合, $\theta = 0$ であるから

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

となり, 振動数は固有振動数より大きくなる。可視光でいえば振動数の大きい青色の方にずれるので**青方偏移**という。

光源が観測者と結ぶ直線に垂直な方向に V で移動しているとき, $\theta = \pm\pi/2$ であるから $\cos\theta = 0$ となり

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{3.23}$$

である。観測する光の進行方向と光源の進行方向は垂直であるから, 観測する光の進行方向に光源は運動していない。したがって非相対論的には振動数の変化はない。光源と観測者の相対距離が変化しないのにドップラー効果が起こるのは相対論に特有なことであり, この現象を使って相対論の正否を実験的に確かめられる。(3.23) は固有時間と座標時間の関係から導ける。S での時間 δt は光源の静止系では $\delta t\sqrt{1-\beta^2}$ であるから, 光源は $\nu_0 \times \delta t\sqrt{1-\beta^2}$ の波を放出する。これは S で δt の間に受けとる波の数であるから, 振動数は (3.23) になる。

4　相対論的力学

4.1　相対論的運動方程式

ニュートンの運動方程式 $md^2\boldsymbol{r}/dt^2 = \boldsymbol{f}$ はガリレイ変換に対してその形を変えない。しかし, ローレンツ変換に対しては, 速度を時間微分した加速度 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ は速度の変換以上に複雑になるから, ニュートンの運動方程式はそのままでは, ローレンツ変換に対してその形を不変にすることはできない。そこで, ニュートンの運動方程式を修正して, ローレンツ変換に対してその形が不変になるようにしよう。

物体の速度が光速に比べて十分小さければ, ニュートンの運動方程式はよい近似で成り立つと考えられるから, 次の要請をする: 運動している物体がある瞬間に静止している慣性系を S' とするとき, S' ではこの瞬間だけニュートンの運動方程式が

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2} = \boldsymbol{f}' \tag{4.1}$$

が成り立つ。ただし $\boldsymbol{f}'$ は S' から見た物体に働く力である。

(4.1) の左辺は座標時間 t' を含むから, ローレンツ変換に対して複雑な変換をする。しかし S' はこの瞬間だけ物体の静止系であるから, t' は物体の固有時間 τ に一致している。したがって (4.1) は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{d\tau^2} = \boldsymbol{f}'$$

と書ける。この様にすると τ がローレンツ変換に対して不変であるから, 左辺はローレンツ変換に対して空間成分 $\boldsymbol{r}'$ と同じ変換をする。ローレンツ変換を行うには時間成分も必要である。$\boldsymbol{r}'$ を時間 $x_0' = ct'$ で置き換えたものを考えると, $t' = \tau$ であるから

$$m\frac{d^2x_0'}{d\tau^2} = mc\frac{d^2\tau}{d\tau^2} = 0$$

となる。そこで S' における力の時間成分 f_0' を $f_0' = 0$ で定義すると, 形式的に

$$m\frac{d^2x_0'}{d\tau^2} = f_0'$$

となる。以上をまとめると, S' における物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{d\tau^2} = \boldsymbol{f}' \ , \quad m\frac{d^2x_0'}{d\tau^2} = f_0' \ , \quad f_0' = 0 \tag{4.2}$$

である。力学の法則がローレンツ変換に対して不変であるためには, 力 $(f_0', \boldsymbol{f}')$ は時空 $(x_0', \boldsymbol{r}')$ と同じローレンツ変換に従って変換されなければならない。これは, 相対論的な力が持つべき性質である。(4.2) は S' に物体が静止するある瞬間に成立する方程式として導入したが, ローレンツ変換に対して不変な形式をしているから, 任意の時間で成立すると考えられる。

(4.2) に S' から慣性系 S へのローレンツ変換を適用すれば, 任意の慣性系 S における運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = \boldsymbol{f} \ , \quad m\frac{d^2x_0}{d\tau^2} = f_0 \tag{4.3}$$

を得る。$(f_0', \boldsymbol{f}')$ と $(f_0, \boldsymbol{f})$ の関係は, 例えば $v_x = v,\ v_y = v_z = 0$ ならば

$$f_x = \frac{f_x' + (v/c)f_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ , \quad f_y = f_y' \ , \quad f_z = f_z' \ , \quad f_0 = \frac{f_0' + (v/c)f_x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.4}$$

である。$\boldsymbol{f}$ と f_0 を **4 元力**という。

4 元ベクトル　ローレンツ変換に対して $(x_0, \boldsymbol{r})$ と同じ変換をするものを 4 次元ミンコフスキー空間におけるベクトルという意味で **4 元ベクトル**という。4 元ベクトル $(A_0, \boldsymbol{A})$ の大きさの 2 乗 $A_0^2 - \boldsymbol{A}^2$ はローレンツ変換に対して不変である。以降, A_0 の代わりに A^0, また

$$A^1 = A_x\,,\quad A^2 = A_y\,,\quad A^3 = A_z$$

と上付きの添字で表すことにして 4 元ベクトルを単に A^μ と記す。添字のギリシャ文字 μ は $\mu = 0, 1, 2, 3$ の値をとる。物体の空間座標については $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$ という記号を使う。

上で述べた 4 元力 f^μ は 4 元ベクトルである。また, (4.3) は

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu$$

とまとめて書ける。この形式だと運動方程式がローレンツ変換に対して形を変えないことは一目瞭然である。

4 元速度　$u^\mu = dx^\mu/d\tau$ すなわち

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau}\,,\qquad \boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}$$

を **4 元速度**という。固有時間 τ はローレンツ変換に対して不変であるから, 4 元速度は 4 元ベクトルである。$d\tau = dt\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}$ を用いて 4 元速度を速度 $\boldsymbol{v}$ で表すと

$$u^0 = \frac{dct}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}\,,\qquad \boldsymbol{u} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \tag{4.5}$$

ミンコフスキー空間での 4 元速度の大きさの 2 乗は

$$(u^0)^2 - \boldsymbol{u}^2 = \frac{c^2 - \boldsymbol{v}^2}{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = c^2$$

となり定数であるから, ローレンツ変換に対して不変である。τ で微分すると

$$u^0\frac{du^0}{d\tau} - \boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = 0$$

ただし $\cdot$ は 3 次元ベクトルの内積を表す。これに (4.5) を代入すると

$$c\frac{du^0}{d\tau} - \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = 0$$

を得る。運動方程式を 4 元速度で書くと

$$m\frac{du^0}{d\tau} = f^0\,,\qquad m\frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = \boldsymbol{f} \tag{4.6}$$

であるから

$$cf^0 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} = 0\,,\quad \text{つまり}\quad f^0 = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} \tag{4.7}$$

となる。これが (4.2) の $f^{0\prime} = 0$ という条件に対応する。

ニュートンの運動方程式に代わる相対論的運動方程式は, (4.3) あるいはこれを 4 元速度で表した (4.6) と f^0 に対する条件 (4.7) である。

問 4.1　(4.4) を使って (4.7) が成り立つことを示せ。

4.2 運動量とエネルギー

ニュートン力学では運動量は質量 m と速度 $\boldsymbol{v}$ との積 $m\boldsymbol{v}$ である。これに対応して質量 m と 4 元速度との積

$$p^\mu = m u^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

で **4 元運動量**を定義する。固有時間 τ は

$$d\tau = dt\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} \tag{4.8}$$

であるから

$$\boldsymbol{p} = m\frac{dt}{d\tau}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}\,, \quad p^0 = m\frac{dt}{d\tau}\frac{dct}{dt} = \frac{mc}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \tag{4.9}$$

大きさの 2 乗は

$$(p_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = \frac{m^2c^2 - m^2\boldsymbol{v}^2}{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = m^2c^2 \tag{4.10}$$

である。4 元運動量を使うと運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{f}\,, \qquad \frac{dp^0}{d\tau} = f^0 = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}$$

t の微分で表すと

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \boldsymbol{f}\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = \boldsymbol{F} \tag{4.11}$$

$$\frac{d(cp^0)}{dt} = \frac{d(cp^0)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{4.12}$$

を得る。ただし

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} \tag{4.13}$$

である。ニュートン力学では運動量の時間変化が力であるから, $\boldsymbol{F}$ を相対論的力学における**ニュートン力**という。(4.11) に (4.9) を代入すると

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} = \boldsymbol{F} \tag{4.14}$$

となる。これがニュートンの運動方程式にかわる相対論的運動方程式である。$\boldsymbol{v}^2 \ll c^2$ のとき $\boldsymbol{v}^2/c^2$ を無視すればニュートンの運動方程式になる。

(4.12) の物理的意味を考えてみる。物体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用して物体の位置が $d\boldsymbol{r}$ 変化したとき, $\boldsymbol{F}$ が物体になす仕事は $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ である。時間 dt の間に $d\boldsymbol{r}$ 変位した場合, 単位時間になす仕事は $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を dt で割ったもの $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$, つまり (4.12) の右辺である。物体に単位時間になされた仕事は物体のエネルギー E の変化率 dE/dt を表すから, (4.12) の左辺の量 cp^0 は, E_0 を任意定数として $E = cp^0 + E_0$ と解釈できる。E_0 は任意であるが $E_0 = 0$ とする。この様にとるとエネルギーと運動量 $(E/c\,, \boldsymbol{p})$ は 1 つの 4 元ベクトルにまとめられる。$E_0 = 0$ でよいかどうかは実験的に検証されるべきものである。(4.9) を使うと

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \tag{4.15}$$

を得る。(4.10) より $(p^0)^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2c^2$ であるから, E を運動量で表すと

$$E^2 = c^2(p^0)^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4 \tag{4.16}$$

となる。これを**エネルギー運動量関係式**という。

(4.15) で $\boldsymbol{v}=0$ とすると

$$E = mc^2$$

となる。これは質量とエネルギーが同等であることを示す有名な関係式である。mc^2 は静止している物体のエネルギーであるから**静止エネルギー**という。エネルギーには運動エネルギーや位置エネルギーなどいろいろな形態があり, 個々のエネルギーは時間的に変化してもすべてのエネルギーの総和は一定である。上の式の重要な点は, 質量も静止エネルギーとして総和の中に含まれ, 別の形態のエネルギーに変化しうるということである。

質量に c^2 を掛けたものがエネルギーであるとすると, 運動している物体の質量は E/c^2 と考えることもできる。この質量を m^* とすると (4.15) より

$$m^* = E/c^2 = \frac{m}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}$$

である。(4.9) の運動量 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}=m^*\boldsymbol{v}$ となり, ニュートン力学と形式的に同じになる。質量をこの様に考えたとき m を**静止質量**という。

一般に関数 $f(x)$ の $x=0$ 近傍における値は, $x=0$ での $f(x)$ の接線で近似できるから $f(x)\approx f(0)+f'(0)\,x$ となる。$f=1/\sqrt{1-x}$ としてこれを使うと, $\boldsymbol{v}^2 \ll c^2$ のとき (4.15) は

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$$

となる。ニュートン力学の運動エネルギーは, $\boldsymbol{v}^2 \ll c^2$ における相対論的エネルギーと静止エネルギーの差の近似式である。$K = E - mc^2$ を相対論的運動エネルギーと呼ぶこともある。

(4.9), (4.15) より $m \neq 0$ である物体の運動量とエネルギーは $|\boldsymbol{v}|=c$ のとき無限大になる。したがって $m\neq 0$ の物体の速さを光速にすることはできない。逆にいえば, 光速で運動する物体の質量は $m=0$ である。(4.9), (4.15) で $m=0,\ |\boldsymbol{v}|=c$ とすると $0/0$ の不定型になるが, 比をとると

$$\frac{\boldsymbol{p}}{E} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}{mc^2} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \tag{4.17}$$

であるから, $|\boldsymbol{v}|=c$ とおくと

$$|\boldsymbol{p}| = E/c \tag{4.18}$$

を得る。エネルギー E の光はその進む方向に運動量 E/c を持っている。量子力学によれば, 振動数 ν の 1 個の光子のエネルギーは, h をプランク定数とすると

$$E = h\nu\ , \quad h = 6.62559\times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} \tag{4.19}$$

である。光子の運動量 p は (4.18) より

$$p = h\nu/c \tag{4.20}$$

となる。

コンプトン散乱　静止している電子に光子が衝突して散乱される場合を考える。入射光子の振動数を ν, 散乱光子の振動数を ν' とする。また, 入射光子と散乱光子の進む方向の単位ベクトルをそ

れぞれ $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}'$ で表す。電子の質量を m_e, 散乱電子の運動量を $\boldsymbol{p}$ とすると, エネルギー運動量関係式 (4.16) から電子のエネルギーは $\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2+m_e^2c^4}$ である。したがってエネルギー保存則は

$$h\nu+m_ec^2=h\nu'+\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2+m_e^2c^4} \tag{4.21}$$

となる。(4.20) を使うと運動量保存則は

$$\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{e}=\frac{h\nu'}{c}\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{p} \tag{4.22}$$

である。入射光子の方向と散乱光子の方向のなす角を θ とすると, ベクトル $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}'$ の大きさは 1 であるから, $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}'=\cos\theta$ である。したがって

$$c^2\boldsymbol{p}^2=h^2\left(\nu\boldsymbol{e}-\nu'\boldsymbol{e}'\right)\cdot\left(\nu\boldsymbol{e}-\nu'\boldsymbol{e}'\right)=h^2\left(\nu^2+\nu'^2-2\nu\nu'\cos\theta\right)$$

これを (4.21) に代入すると

$$h^2\left(\nu^2+\nu'^2-2\nu\nu'\cos\theta\right)+m_e^2c^4=\left(h\nu-h\nu'+m_ec^2\right)^2$$

右辺を展開して整理すると

$$\nu-\nu'=\frac{h\nu\nu'}{m_ec^2}\left(1-\cos\theta\right)$$

を得る。波長 $\lambda=c/\nu,\ \lambda'=c/\nu'$ で書き換えると

$$\lambda'=\lambda+2\lambda_0\sin^2\frac{\theta}{2}\ ,\quad \lambda_0=\frac{h}{m_ec}=2.43\times10^{-12}\,\mathrm{m}$$

λ_0 を電子の**コンプトン波長**という。λ が可視光 ($\lambda\approx10^{-7}\,\mathrm{m}$) では散乱による波長の変化は無視できるが, λ_0 程度の X 線あるいは γ 線では, 波長が長くなることを実験的に観測できる。これは電磁波の電子による散乱としては説明できない。

エネルギーの単位は我々の日常世界では J(ジュール) であるが, 物質の微視的世界では eV(電子ボルト, エレクトロンボルト) が使われる。1eV とは電気素量 $e=1.6022\times10^{-19}$C の電荷をもつ粒子が 1V の電位差で加速されるとき得るエネルギー = 電荷 × 電位差 = 1.6022×10^{-19} J である。また, $1\,\mathrm{MeV}$(メガ電子ボルト, メブ)$=10^6\,\mathrm{eV}$ や $1\,\mathrm{GeV}$(ギガ電子ボルト, ジェブ)$=10^9\,\mathrm{eV}$ もよく使う。電子の静止エネルギー m_ec^2 は $m_ec^2=0.511\,\mathrm{MeV}$ である。

素粒子, 原子核の世界ではエネルギーから質量へ, 質量からエネルギーへの変換はごくありふれたことである。具体例として, 電子と陽電子 (正電荷の電子, 電子の反粒子) を高エネルギーで衝突させると J/ψ と呼ばれる素粒子が発生する現象を扱ってみる。J/ψ の静止エネルギーは $m_Jc^2=3097\,\mathrm{MeV}$ である。電子と陽電子を同じ速さ v で正面衝突させて J/ψ を生成する場合, 生成後の J/ψ は静止しているから,

$$\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=m_Jc^2$$

電子と陽電子を J/ψ の静止エネルギーの半分 $1548.5\,\mathrm{MeV}$ に加速して衝突させればよい。この時の電子と陽電子の速さは

$$v/c=\sqrt{1-\left(\frac{2m_e}{m_J}\right)^2}=\sqrt{1-1.089\times10^{-7}}=1-\frac{1.089\times10^{-7}}{2}=0.999999946$$

である。今度は, 静止した電子に陽電子を衝突させて J/ψ を生成することを考える。陽電子の 4 元運動量を $(E_e/c\,, \boldsymbol{p}_e)$, J/ψ の 4 元運動量を $(E_J/c\,, \boldsymbol{p}_J)$ とする。運動量保存則は $\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{p}_J$ であるが, これを 2 乗してエネルギー運動量関係式 (4.16) を使うと

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = E_J^2 - m_J^2 c^4$$

を得る。これにエネルギー保存を表す関係式 $E_J = E_e + m_e c^2$ を代入すると入射陽電子のエネルギーは

$$E_e = \frac{m_J^2 - 2m_e^2}{2m_e} c^2 = \frac{m_J}{2m_e} m_J c^2 - m_e c^2$$

これは正面衝突で必要なエネルギー $m_J c^2$ に比べて $m_J/(2m_e) = 3030$ 倍も大きいエネルギー 9385 GeV であり, 現在最大の電子加速器のエネルギー (55 GeV) をはるかに上まわる。このエネルギーのほとんどすべては J/ψ の運動エネルギー $E_J - m_J c^2$ になる。

ローレンツ力　電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を電荷 q の粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するとき, 粒子の受ける力は, ニュートン力学では**ローレンツ力**

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

である。電磁場中の電荷粒子の運動を相対論的に扱うと, (4.13) で定義されたニュートン力はローレンツ力に一致することを示せる。つまりローレンツ力は修正することなく相対論的力学でも使える。

負のエネルギー　エネルギー運動量の関係式

$$E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4$$

からエネルギーを求めると

$$E = \pm\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4}$$

となり, 正のエネルギーと負のエネルギーが得られる。ディラックは量子力学を特殊相対性原理に従うように拡張し, 1 個の電子を記述する方程式にも負のエネルギーの解があることを見出した (1928 年)。ここで問題になるのは, 電子が負のエネルギー状態に落ち込み, 正エネルギーである通常の電子が不安定になることである。これを回避するため, ディラックは負のエネルギー状態がすべて満たされているのが真空であると考えた。すると, 原子中の電子がよりエネルギーの低い状態に落ち込まないのと同様に (**パウリの排他律**), 電子は負のエネルギー状態が満たされてる限りこの状態に移れなくなり, 正エネルギー電子の安定性が保証される。

負のエネルギー状態がすべて満たされている真空に孔が空いた場合を考える。電子の電荷を $-e$ とし, 孔のエネルギーを $-\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4}$ とすると, この状態のエネルギーと電荷は真空に比べて

$$-\left(-\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4}\right) = +\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4}, \quad -(-e) = +e$$

となるから, 孔は正電荷粒子の正エネルギー状態として観測されるはずである。質量が電子と同じで電荷が電子と逆符号であるから, この粒子を**陽電子**という。陽電子は 1932 年にアンダーソンによって発見された。

$E \geq mc^2$ または $E \leq -mc^2$ であるから, 正エネルギー状態と負エネルギー状態の間には $2mc^2$ のエネルギーギャップがある。したがって $2mc^2$ 以上のエネルギーの光子を適当な系に照射する

と, 負エネルギー状態の電子を正エネルギー状態にたたき上げることができる。これは電子と陽電子の対が新たに生成することであるから**対生成**と呼ばれる。逆に, 電子と陽電子が消滅して光子になる反応もある。これを**対消滅**という。

4.3　運動の決定

相対論的運動方程式 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}=\boldsymbol{F}$ を解き運動を決定する。

一定のニュートン力　$\boldsymbol{F}$ が定数ベクトルの場合を考える。$\boldsymbol{F}$ の大きさを mg とし, $\boldsymbol{F}$ の方向を x 軸にとる。運動は x 軸の正方向を向く。$v=v_x$ とすると運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=mg\ , \quad v=\frac{dx}{dt}$$

である。式を簡単にするため $u=v/c\ ,\ f=g/c$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=f$$

となる。$t=0$ のとき $v=0$ として時間で積分すると

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=ft \quad \text{つまり} \quad u=\frac{ft}{\sqrt{1+f^2t^2}} \tag{4.23}$$

を得る。したがって

$$x=\int v\,dt=c\int u\,dt=c\int\frac{ft}{\sqrt{1+f^2t^2}}\,dt=\frac{c}{f}\sqrt{1+f^2t^2}+x_0$$

ここで x_0 は積分定数である。初期条件として $t=0$ で $x=0$ とすると $x_0=-c/f$ になるから

$$x=\frac{c}{f}\left(\sqrt{1+f^2t^2}-1\right) \tag{4.24}$$

を得る。これは

$$\frac{(x+c/f)^2}{(c/f)^2}-\frac{t^2}{(1/f)^2}=1$$

となるから, tx 平面で双曲線を表す。

$|ft|\ll 1$ の場合

$$\sqrt{1+f^2t^2}\approx 1+\frac{1}{2}f^2t^2\ , \quad \frac{1}{\sqrt{1+f^2t^2}}\approx 1-\frac{1}{2}f^2t^2$$

であるから

$$v=cu\approx cft\left(1-\frac{1}{2}f^2t^2\right)\approx cft=gt\ , \quad x\approx\frac{c}{f}\left(1+\frac{1}{2}f^2t^2-1\right)=\frac{cf}{2}t^2=\frac{1}{2}gt^2$$

となりニュートン力学の結果に一致する。$|ft|\ll 1$ という条件は $|v|\ll c$ ということであるから, 相対論的力学の結果はニュートン力学に一致しなければならない。

(4.23) より $-1<u<1$, すなわち $-c<v<c$ である。物体にどんなに大きな力が絶えず働いても, 光速を超えることはできない。$t\to\infty$ で物体の速さは光速に近づく。一定電場内を運動する荷電粒子の運動はここで考えた運動と同じ型に属する。

一定磁場内の荷電粒子　電荷 q の粒子が磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を運動するとき運動方程式は

$$\frac{d}{dt}m^*\boldsymbol{v}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\ , \quad m^*=\frac{m}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}$$

である。$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{v}$ に垂直であるから

$$m^*\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}m^*\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m^*\boldsymbol{v}\right)^2 = qm^*\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = 0$$

したがって

$$(m^*\boldsymbol{v})^2 = \frac{m^2\boldsymbol{v}^2}{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} = \text{一定} \quad \text{つまり} \quad \boldsymbol{v}^2 = \text{一定}\ , \quad m^* = \text{一定}$$

である。これから運動方程式は

$$m^*\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

これはニュートンの運動方程式で m を m^* に置き換えたものである。

一定磁場の場合, 磁場 $\boldsymbol{B}$ の方向を z 軸にとり $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ とすると,

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = (v_yB,\ -v_xB,\ 0)$$

であるから

$$m^*\frac{dv_x}{dt} = qBv_y\ , \quad m^*\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x\ , \quad m^*\frac{dv_z}{dt} = 0$$

したがって $v_z=$ 一定 である。磁場方向の運動は等速直線運動になる。

$$\omega = \frac{qB}{m^*} = \frac{qB}{m}\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} \tag{4.25}$$

とすると $x,\ y$ 方向の運動は

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y\ , \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$$

もう一度 t で微分すると

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \omega\frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 v_x$$

この解は

$$v_x = v_0\cos(\omega t+\theta) \tag{4.26}$$

である。ここで $v_0,\ \theta$ は任意定数である。v_y は

$$v_y = \frac{1}{\omega}\frac{dv_x}{dt} = -v_0\sin(\omega t+\theta) \tag{4.27}$$

となる。$v_x^2+v_y^2=v_0^2$ であるから $v_0^2=\boldsymbol{v}^2-v_z^2$ である。(4.26) と (4.27) を積分すると

$$x = \int v_x\,dt = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\theta)+x_0\ , \quad y = \int v_y\,dt = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t+\theta)+y_0$$

ただし $x_0,\ y_0$ は任意定数である。$\boldsymbol{B}$ に垂直な方向の運動は (4.25) の角速度 ω の等速円運動になる。ニュートン力学では $\omega=qB/m$ で速さに依存しないが, 相対論的力学では ω は速さにより変化する。ただし, 時間的には一定である。

5　共変形式

5.1　ローレンツ変換

2 つの慣性系 S, S′ を考える。S に対して S′ は一定の速度で移動する。ただし, $t = t' = 0$ のとき両者の原点は一致しているとする。ある事象が起きた時刻と位置を S と S′ から見たとき, それぞれ (t, x, y, z) , (t', x', y', z') とする。特別な場合として, 時刻 0 のとき両者の座標軸が一致し, S′ が S に対して x 軸方向に速さ v で移動する場合

$$ct' = \frac{ct - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z \tag{5.1}$$

である。この変換の特徴は

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{5.2}$$

が成り立つことである。上付きの添字を使って

$$x^0 = ct\,, \quad x^1 = x\,, \quad x^2 = y\,, \quad x^3 = z$$

と書くことにする。これをまとめて x^μ で表す。μ は $0, 1, 2, 3$ の値をとる。

規約 1　ギリシャ文字の添字は $0, 1, 2, 3$ の値を, ローマ字の添字は空間成分を表し $1, 2, 3$ の値をとるとする。例えば

$$x^\mu = (x^0,\, x^k) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

である。

規約 2　同一の式中で 2 度現れる添字については, ギリシャ文字の添字ならば 0 ～ 3, ローマ字なら 1 ～3 まで和をとるとし, 和の記号 $\sum$ は省略する。

ここで

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} \ \ 1\,, & \mu = \nu = 0 \\ -1\,, & \mu = \nu = 1,\, 2,\, 3 \\ \ \ 0\,, & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{5.3}$$

を定義すると, (5.2) は

$$g_{\mu\nu}\, x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu \tag{5.4}$$

になる。ただし, **規約 2** を適用して μ, ν の和の記号は省略した。和の記号を書けば

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, x'^\mu x'^\nu = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu$$

である。

さて, (5.1) を一般化して

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{5.5}$$

を考える。16 個の $a^\mu{}_\nu$ は定数である。この変換が (5.4) を満たすとき, これを**ローレンツ変換**という。2 度現れる添字は和をとるから他の文字に変えてもよい。したがって (5.4) は

$$g_{\sigma\rho} x'^\sigma x'^\rho = g_{\sigma\rho}\, a^\sigma{}_\mu x^\mu\, a^\rho{}_\nu x^\nu = g_{\sigma\rho}\, a^\sigma{}_\mu\, a^\rho{}_\nu\, x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu$$

になり

$$g_{\sigma\rho}\, a^{\sigma}{}_{\mu}\, a^{\rho}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{5.6}$$

でなければならない。この条件は μ, ν について対称であるから, $\mu = \nu$ の 4 個と $\mu \neq \nu$ の場合の $(16-4)/2 = 6$ 個の計 10 個の条件式になる。したがって, 16 個の $a^{\mu}{}_{\nu}$ のうち独立なものは 6 個である。なお, (5.4) では $a_{\mu\nu}$ あるいは $a^{\mu\nu}$ と書かずに $a^{\mu}{}_{\nu}$ としたのは, 以下で述べるように添字の上付き, 下付きには約束ごとがあり, これとの整合性のためである。

$a^{\mu}{}_{\nu}$ を行列要素とする 4×4 行列 $\boldsymbol{a}$, つまり $(\boldsymbol{a})_{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\nu}$ を考える。$\boldsymbol{a}$ の転置行列を $\tilde{\boldsymbol{a}}$ とする。

$$(\tilde{\boldsymbol{a}})_{\mu\nu} = (\boldsymbol{a})_{\nu\mu} = a^{\nu}{}_{\mu} \tag{5.7}$$

である。(5.6) は

$$(\tilde{\boldsymbol{a}})_{\mu\sigma} g_{\sigma\rho} (\boldsymbol{a})_{\rho\nu} = (\tilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{g}\, \boldsymbol{a})_{\mu\nu} = (\boldsymbol{g})_{\mu\nu}$$

ここで, 4×4 行列 $\boldsymbol{g}$ は行列要素 $(\boldsymbol{g})_{\mu\nu}$ が $(\boldsymbol{g})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ である。行列式は $\det(\tilde{\boldsymbol{a}}) = \det(\boldsymbol{a})$ であるから

$$\det(\tilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{g}\, \boldsymbol{a}) = \det(\boldsymbol{g})\, (\det(\boldsymbol{a}))^2 = \det(\boldsymbol{g})$$

したがって

$$\det(\boldsymbol{a}) = \det(a^{\mu}{}_{\nu}) = \pm 1$$

である。(5.6) で $\mu = \nu = 0$ とすると

$$(a^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (a^k{}_0)^2 = 1\,, \qquad a^0{}_0 = \pm\left(1 + \sum_{k=1}^{3} (a^k{}_0)^2\right)^{1/2}$$

である。ローレンツ変換は $\det(a^{\mu}{}_{\nu})$ と $a^0{}_0$ の符号で分類される。$\det(a^{\mu}{}_{\nu}) = 1$, $a^0{}_0 \geq 1$ の場合を**本義ローレンツ変換** (proper Lorentz transformation) という。(5.1) の変換では

$$a^0{}_0 = a^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,, \quad a^0{}_1 = a^1{}_0 = -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,, \quad a^2{}_2 = a^3{}_3 = 1\,, \quad \text{その他} = 0 \tag{5.8}$$

であるから本義ローレンツ変換である。本義ローレンツ変換には, (5.1) のようなブースト (一定の速度で動く慣性系に移すローレンツ変換) と 3 次元空間の座標回転がある。ブーストも “回転” と見なせる。$x^4 = ix^0$ とすると (5.1) は

$$x'^1 = x^1 \cos\theta + x^4 \sin\theta\,, \qquad x'^4 = x^4 \cos\theta - x^1 \sin\theta$$

ただし

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,, \qquad \sin\theta = \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

である。これは時間軸と x 軸を複素数 θ だけ “回転” させる変換である。本義ローレンツ変換ではない変換は空間反転 ($\det(a^{\mu}{}_{\nu}) = -1$, $a^0{}_0 \geq 1$) と時間反転 ($\det(a^{\mu}{}_{\nu}) = -1$, $a^0{}_0 \leq -1$) である。

5.2 テンソル

相対論では, 物理量がローレンツ変換に対してどのように変換されるかが重要である。この変換性により物理量を分類する。

スカラー（0 階のテンソル）
慣性系 S で定義された物理量で時間と位置の関数 $F(x^0, x^1, x^2, x^3)$ を単に $F(x)$ と書くことにする。S′ 系で見たとき, 同じ時空点 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ でその物理量 $F'(x')$ が

$$F'(x') = F(x)$$

であるとき, $F(x)$ をスカラーという。$F(x) = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ はスカラーである。

ベクトル（1 階のテンソル）
4 個の物理量の組 $V^\mu(x)$ が, x^μ と同じ変換

$$V'^\mu(x') = a^\mu{}_\nu V^\nu(x) \tag{5.9}$$

を満たすとき $V^\mu(x)$ を**反変ベクトル**（contravariant vector）という。反変ベクトルの場合, 成分を表す添字は上につける。これに対して反変ベクトルから

$$V_\mu \equiv g_{\mu\nu}V^\nu\,, \qquad \text{つまり} \quad V_0 = V^0\,,\ \ V_k = -V^k$$

で定義される V_μ を**共変ベクトル**（covariant vector）という。共変ベクトルの添字は下につける。逆に, V^μ を V_μ で表すと

$$V^\mu = g^{\mu\nu}V_\nu\,, \qquad \text{ただし} \quad g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$$

である。V^μ と V_μ は空間成分の符号が逆になるだけで同じものであり, どちらか一方だけを扱ってもよいが, 両者を定義すると相対論の定式化がすっきりしたものになる。

規約 3 ベクトルに限らず, 一般に添字を下げる操作は $g_{\mu\nu}$ で行う。逆に, 添字を上げる操作は $g^{\mu\nu}$ で行う。

V_μ のローレンツ変換は

$$V'_\mu = g_{\mu\sigma}V'^\sigma = g_{\mu\sigma}\,a^\sigma{}_\rho V^\rho = g_{\mu\sigma}\,a^\sigma{}_\rho\, g^{\rho\nu}V_\nu = a_\mu{}^\nu\, V_\nu\,, \qquad a_\mu{}^\nu = g_{\mu\sigma}\,a^\sigma{}_\rho\, g^{\rho\nu} \tag{5.10}$$

ここで添字の上げ下げは規約 3 による。つまり, $a_\mu{}^\nu$ の下付き添字 μ は $a^\sigma{}_\rho$ の上付き添字 σ を $g_{\mu\sigma}$ で引き下げたものである。下付き添字 $\rho \to$ 上付き添字 ν も同様である。(5.6) は

$$g_{\sigma\rho}\,a^\sigma{}_\mu\,a^\rho{}_\lambda g^{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu}$$

であるから

$$a^\sigma{}_\mu\,a_\sigma{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu\,, \qquad \delta_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda}\,g^{\lambda\nu} = \begin{cases} 1\,, & \mu = \nu \\ 0\,, & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{5.11}$$

になる。$\delta_\mu{}^\nu$ はクロネッカーのデルタ記号である。
(5.9), (5.10) の逆変換を求める。(5.11) を使うと

$$V'^\mu\,a_\mu{}^\sigma = a^\mu{}_\nu a_\mu{}^\sigma V^\nu = \delta_\nu{}^\sigma\,V^\nu = V^\sigma\,, \qquad V'_\mu\,a^\mu{}_\sigma = a^\mu{}_\sigma a_\mu{}^\nu\,V_\nu = \delta_\sigma{}^\nu\,V_\nu = V_\sigma$$

つまり

$$V^\mu = V'^\nu\,a_\nu{}^\mu\,, \qquad V_\mu = V'_\nu\,a^\nu{}_\mu \tag{5.12}$$

である。

2 つのベクトル A^μ, B^μ の内積 $A{\cdot}B$ を

$$A{\cdot}B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0B^0 - A^kB^k = A^0B^0 - \boldsymbol{A}{\cdot}\boldsymbol{B}$$

で定義する。

$$A'^\mu B'_\mu = a^\mu{}_\sigma\, a_\mu{}^\rho A^\sigma B_\rho = \delta_\sigma{}^\rho A^\sigma B_\rho = A^\sigma B_\sigma$$

であるから, 内積はローレンツ変換に対して不変, つまり, スカラーである。A^μ のノルム $A{\cdot}A$ を単に A^2 とも書く:

$$A^2 = (A^0)^2 - \boldsymbol{A}^2$$

である。A^2 と書くが正の値とは限らない。$A^2 > 0$ のとき, 時間成分の方が空間成分より大きいので**時間的ベクトル** (time–like vector), $A^2 < 0$ のとき**空間的ベクトル** (space–like vector), $A^2 = 0$ のとき**ゼロベクトル** (null vector) という。A^2 はスカラーでありその値は慣性系によらないから, ベクトルが 3 種類のどれに属するかは絶対的性質である。

共変ベクトルの例は反変ベクトル x^μ の微分 $\partial/\partial x^\mu$ である。これを ∂_μ で表す。

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,,\,\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{5.13}$$

である。

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

(5.12) より $x^\nu = x'^\mu\, a_\mu{}^\nu$ であるから $\partial x^\nu/\partial x'^\mu = a_\mu{}^\nu$ である。したがって $\partial'_\mu = a_\mu{}^\nu\partial_\nu$ になり, ∂_μ は共変ベクトルである。反変ベクトル ∂^μ は

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,,\,-\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{5.14}$$

である。ダランベルシャン $\Box$ は

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 = \partial^\mu\partial_\mu$$

と書ける。これから $\Box$ がローレンツ変換に対して不変 ($\partial'^\mu\partial'_\mu = \partial^\mu\partial_\mu$) であることは一目瞭然である。(5.13), (5.14) で空間成分の符号が $A_\mu = (A^0,\,-\boldsymbol{A})$, $A^\mu = (A^0,\,\boldsymbol{A})$ とは逆になることに注意すること。

2 階のテンソル

2 つの反変ベクトルの積

$$T^{\mu\nu}(x) = V^\mu(x)U^\nu(x)$$

を考える。ローレンツ変換に対して

$$T'^{\mu\nu}(x') = V'^\mu(x')U'^\nu(x') = a^\mu{}_\sigma\, a^\nu{}_\rho V^\sigma(x)U^\rho(x) = a^\mu{}_\sigma\, a^\nu{}_\rho\, T^{\sigma\rho}(x)$$

である。そこで, 一般に

$$T'^{\mu\nu}(x') = a^\mu{}_\sigma\, a^\nu{}_\rho\, T^{\sigma\rho}(x) \tag{5.15}$$

を満たす量を **2 階の反変テンソル**という。同様にして, **2 階の共変テンソル** $T_{\mu\nu}(x)$, **2 階の混合テンソル** $T_\mu{}^\nu(x)$ も定義できる。

一般のテンソル

一般のテンソル $T^{\mu\nu\cdots}{}_{\lambda\sigma\cdots}$ も同様に定義できる。

縮約 (contraction)

混合テンソルにおいて上下 1 対の添字を同じくして、その添字について和をとり, 2 階低いテンソルを作ることを縮約 (contraction) という。例えば, 2 階のテンソル $T^{\mu}_{\nu} = A^{\mu}B_{\nu}$ から 0 階のテンソル (スカラー) である内積 $T^{\mu}_{\mu} = A^{\mu}B_{\mu}$ を求めることである。

5.3 真空中のマックスウェル方程式

テンソル形式に慣れるため, 真空中のマックスウェル方程式をテンソル形式に書き直そう。マックスウェル方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{5.16}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}\,, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{5.17}$$

である。(5.16) より

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}\,, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{5.18}$$

とおける。これを (5.17) に代入すると

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{5.19}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} + \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) = \mu_0\,\boldsymbol{j} \tag{5.20}$$

になる。ここで

$$A^0 = \frac{1}{c}\,\phi\,, \quad A^1 = A_x\,, \quad A^2 = A_y\,, \quad A^3 = A_z$$
$$j^0 = c\rho\,, \quad j^1 = j_x\,, \quad j^2 = j_y\,, \quad j^3 = j_z$$

とする。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \partial_\nu A^\nu$$

であるから (5.19) は

$$\Box A^0 - \frac{\partial}{\partial x^0}\partial_\nu A^\nu = \Box A^0 - \partial^0\partial_\nu A^\nu = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\rho = \mu_0\,c\rho = \mu_0\,j^0 \tag{5.21}$$

また

$$\partial^k = \frac{\partial}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}$$

であるから (5.20) は

$$\Box A^k + \frac{\partial}{\partial x^k}\partial_\nu A^\nu = \Box A^k - \partial^k\partial_\nu A^\nu = \mu_0\,j^k \tag{5.22}$$

になる。(5.21), (5.22) は 1 つの式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu\,\partial_\nu A^\nu = \mu_0\,j^\mu \tag{5.23}$$

にまとまる。これがマックスウェル方程式のテンソル表現であり, (5.17) に比べて非常に簡潔な構造をしている。

(5.23) の両辺に ∂_μ を作用すると

$$\mu_0\,\partial_\mu\,j^\mu = \Box\partial_\mu A^\mu - \Box\partial_\nu A^\nu = 0\,,\quad \text{つまり}\quad \partial_\mu\,j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

これは電荷保存則である。$j^\mu(x)$ が反変ベクトルならば, $\partial_\mu j^\mu$ はスカラーである。したがって, ある慣性系で $\partial_\mu j^\mu = 0$ ならば任意の慣性系で $\partial_\mu j^\mu = 0$ になる。実際, $\partial'_\mu = a_\mu{}^\nu\partial_\nu$ であるから

$$\partial'_\mu\,j'^\mu(x') = a_\mu{}^\nu\partial_\nu\,j'^\mu(x')$$

反変ベクトルの変換 $j'^\mu(x') = a^\mu{}_\lambda j^\lambda(x)$ を代入すると

$$\partial'_\mu\,j'^\mu(x') = a_\mu{}^\nu\,a^\mu{}_\lambda\partial_\nu j^\lambda(x) = \delta_\lambda{}^\nu\partial_\nu j^\lambda(x) = \partial_\mu\,j^\mu(x) = 0$$

である。もし $j^\mu(x)$ が反変ベクトルでないならば, $\partial_\mu\,j^\mu(x) = 0$ であっても $\partial'_\mu\,j'^\mu(x') = 0$ になるとは限らない。任意の慣性系で電荷保存は成り立つべきであるから, $j^\mu(x)$ は反変ベクトルでなければならない。電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ は独立な物理量ではない。$(c\rho\,,\boldsymbol{j})$ で 1 つのローレンツ・ベクトルをなし, ローレンツ変換でこれらは混ざり合う。ϕ と $\boldsymbol{A}$ も同様である。

A^μ, j^μ が反変ベクトルならば, 反変ベクトルの変換と $\Box' = \Box$, $\partial'_\nu A'^\nu = \partial_\nu A^\nu$ を使うと

$$\Box' A'^\mu - \partial'^\mu\,\partial'_\nu A'^\nu - \mu_0\,j'^\mu = a^\mu{}_\lambda\Big(\Box A^\lambda - \partial^\lambda\,\partial_\nu A^\nu - \mu_0\,j^\lambda\Big)$$

であるから, 慣性系 S で (5.23) が成り立つとき別の慣性系 S′ でも方程式は同じ形で成り立つ。一般に, テンソル形式で書かれた方程式はローレンツ変換に対してその形を変えず, 特殊相対性原理を満たすことが明白になる。このような形式を**共変形式**という。

(5.23) の左辺は

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial_\nu\partial^\mu A^\nu = \partial_\nu\left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right)$$

であるから (5.23) は

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0\,j^\mu\,,\qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -\,F^{\nu\mu}$$

と表せる。2 階のテンソル $F^{\mu\nu}$ は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ で書ける。$\partial^k = \partial/\partial x_k = -\,\partial/\partial x^k$ に注意すると

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\,\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 = F^{32}\,,\quad B_y = F^{13}\,,\quad B_z = F^{21}$$

$$E_x = -\,\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x} = c\left(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1\right) = cF^{10}\,,\quad E_y = cF^{20}\,,\quad E_z = cF^{30}$$

であるから

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

になる。$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ はローレンツ変換に対してベクトルではなく, 一体となって 2 階のテンソル $F^{\mu\nu}$ として変換される。$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は独立な物理量ではない。

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$, つまり $F^{\mu\nu}$ が観測により決まったとしても A^μ は一意には決まらない。$\chi(x)$ を任意のスカラー関数として

$$\bar{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi\,, \quad \text{つまり} \quad \bar{\phi} = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\,, \quad \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \tag{5.25}$$

とする。これを**ゲージ変換**という。$\bar{A}^\mu$ に対応する $\bar{F}^{\mu\nu}$ は

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{A}^\nu - \partial^\nu \bar{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu\partial^\nu\chi + \partial^\nu\partial^\mu\chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

であるから $\bar{A}^\mu$ は A^μ と同じ電磁場を与える。また

$$\Box \bar{A}^\mu - \partial^\mu\, \partial_\nu \bar{A}^\nu = \Box A^\mu - \partial^\mu\, \partial_\nu A^\nu - \Box\partial^\mu\chi + \partial^\mu\, \partial_\nu\partial^\nu\chi = \Box A^\mu - \partial^\mu\, \partial_\nu A^\nu$$

であるから, $\bar{A}^\mu$ は A^μ と同じマックスウェル方程式を満たす。A^μ にはゲージの任意性があり, 逆に, この任意性を利用してマックスウェル方程式をより簡単な方程式にすることができる。よく使われるゲージとしてはローレンツ・ゲージとクーロン・ゲージ (輻射ゲージ) がある。ローレンツ・ゲージは

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

という条件を課す。これは常に可能である。$\partial_\mu A^\mu \neq 0$ の場合

$$\partial_\mu \bar{A}^\mu = \partial_\mu A^\mu - \Box\chi$$

であるから $\Box\chi = \partial_\mu A^\mu$ を満たすように $\chi(x)$ をとればよい。ローレンツ・ゲージでは (5.23) は

$$\Box A^\mu = \mu_0\, j^\mu$$

という簡単な方程式になる。ローレンツ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ はスカラーであるから理論の共変性を損なわない。

5.4 運動している点電荷による電磁場

$F^{\mu\nu}$ が 2 階の反変テンソルとして変換されることを利用して, 運動している点電荷が作る電磁場を求めてみる。2 階の反変テンソルの変換 (5.15) は (5.7) で定義した行列 $\boldsymbol{a}$ を使うと

$$F' = \boldsymbol{a} F \tilde{\boldsymbol{a}}$$

である。$\boldsymbol{a}$ としてローレンツ変換 (5.8) に対応する

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

の場合 ($\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{1}$ はそれぞれ 2×2 のゼロ行列, 単位行列), F を 4 つの 2×2 行列に分けて計算すれば

$$E'_x = E_x\,, \qquad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.26}$$

$$B'_x = B_x\,, \qquad B'_y = \frac{B_y + vE_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad B'_z = \frac{B_z - vE_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.27}$$

を得る。

S 系から見て, 一様磁場 $\boldsymbol{B}$ に電荷 e の粒子が静止しているとする。このとき粒子には力は働かず静止したままである。一方, S$'$ から見ると, 粒子は磁場 $\boldsymbol{B}$ 中を x' 軸方向に $-v$ の速度で移動するから, ローレンツ力が働き円運動するように思えるが, そんなことはないはずである。上式で $\boldsymbol{E}=0$ とすると

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad \boldsymbol{B}' = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{v}}{v^2}\,, \qquad \boldsymbol{v} = (\,v,\,0,\,0\,)$$

S$'$ 系での粒子の速度を $\boldsymbol{V}'$ とすると, 粒子の働く力 $\boldsymbol{F}'$ は

$$\boldsymbol{F}' = e\boldsymbol{E}' + e\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{B}' = e\,\frac{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{V}')\times\boldsymbol{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\,(\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{v})}{v^2}$$

したがって $\boldsymbol{V}'=-\boldsymbol{v}$ とすると $\boldsymbol{F}'=0$ である。S$'$ から見ると, 粒子には $e\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{B}'$ 以外に電気的力 $e\boldsymbol{E}'$ も作用し, 両者は打ち消しあう。S$'$ から見ても粒子には力は働かない。

電荷 e の粒子が一定の速さ v で x 軸上を運動している場合, S$'$ 系として粒子に固定した座標系をとれば

$$E'_x = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3}\,, \quad E'_y = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}\,, \quad E'_z = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}\,, \quad \boldsymbol{B}'=0\,, \quad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

である。S 系は S$'$ から見れば x 軸負の方向に速さ v で移動しているから (5.26), (5.27) で $v\to -v$ の置き換えをすれば, 逆に $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$ を表せる。これに上式を代入すると

$$E_x = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3}\,, \quad E_y = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad E_z = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B_x = 0\,, \quad B_y = -\frac{v}{c^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad B_z = \frac{v}{c^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

更に $x'=(x-vt)/\sqrt{1-\beta^2}$, $y'=y$, $z'=z$ を代入すると

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t}{r'^3}\,, \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\,, \quad r' = \sqrt{\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2}$$

になる。ただし $\boldsymbol{v}=(v,0,0)$ である。ポテンシャル A^μ は

$$A^0 = \frac{\phi}{c} = \frac{A'^0+\beta A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad A_x = \frac{A'_x+\beta A'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad A_y = A'_y\,, \quad A_z = A'_z$$

及び

$$\phi' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\, r'}\,, \quad \boldsymbol{A}'=0$$

から

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\, r'}\,, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}}{r'}$$

になる。$\phi(x)=$ 一定 である等電位面は

$$r'^2 = \frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2 = \text{一定}$$

であるから, $(vt,0,0)$ を中心とし x 軸方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍に圧縮された回転楕円体になる。等電位面はローレンツ収縮する。

非相対論的極限 ($\beta \to 0$) では

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t}{r'^3}\,, \qquad \boldsymbol{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t)}{r'^3}\,, \qquad r' = \left((x-vt)^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$$

となる。$\boldsymbol{E}$ は $(vt,0,0)$ に電荷 e があるときの静電場, $\boldsymbol{B}$ は電流密度が $e\,\boldsymbol{v}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t)$ である場合のビオ・サバールの法則と一致する。

$(0,y,0)$ での $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を考える。

$$E_x = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{vt}{\left(y^2+(vt)^2/(1-\beta^2)\right)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{y}{\left(y^2+(vt)^2/(1-\beta^2)\right)^{3/2}}\,, \qquad B_z = \frac{v}{c^2}E_y$$

上記以外の成分は 0 である。時間の関数として見ると, E_x, E_y は次の極値をとる:

$$t = \pm\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2}v}y \quad \text{のとき} \quad E_x = \mp\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{y^2}\,, \quad t=0 \quad \text{のとき} \quad E_y = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

になる。これらの時間に関するピーク幅 Δt は $vt/\sqrt{1-\beta^2} \sim y$ になる時間間隔であるから

$$\Delta t \sim \frac{y}{v}\sqrt{1-\beta^2}$$

である。$\beta \to 1$ ($v \to c$) の場合 E_y と B_z は非常に大きくなりピーク幅は非常に狭くなる。粒子が $v \sim c$ で運動すると, 粒子が最接近したときだけ非常に鋭い電磁場が発生する。

5.5 無限小ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換を考え, 有限のローレンツ変換を無限小ローレンツ変換を逐次適用して表す。これが可能な変換は, 行列 $a^\mu{}_\nu$ が単位行列から連続的に変化して得られる場合である。一般に $a^\mu{}_\nu$ は

$$\det(a^\mu{}_\nu) = \pm 1\,, \qquad a^0{}_0 \geq 1 \quad \text{または} \quad a^0{}_0 \leq -1$$

である。単位行列の場合は $\det(a^\mu{}_\nu) = 1$, $a^0{}_0 = 1$ であるから, これに連続的につながる変換は

$$\det(a^\mu{}_\nu) = 1\,, \qquad a^0{}_0 \geq 1$$

つまり, 固有ローレンツ変換である。

無限小ローレンツ変換の場合 $\Delta\omega^\mu{}_\nu$ を微小量として

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu\, x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu)\, x^\nu\,, \quad \text{つまり} \quad a^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \tag{5.28}$$

とおける。$a^\lambda{}_\mu a_\lambda{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ であるから $\Delta\omega$ の 1 次まで考えると

$$\left(\delta^\lambda{}_\mu + \Delta\omega^\lambda{}_\mu\right)\left(\delta_\lambda{}^\nu + \Delta\omega_\lambda{}^\nu\right) = \delta_\mu{}^\nu + \Delta\omega^\nu{}_\mu + \Delta\omega_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$$

したがって

$$\Delta\omega^\nu{}_\mu + \Delta\omega_\mu{}^\nu = 0\,, \quad \text{あるいは} \quad \Delta\omega^{\mu\nu} + \Delta\omega^{\nu\mu} = 0 \tag{5.29}$$

である。これから 16 個の $\varDelta\omega^{\mu\nu}$ のうち独立なものは 6 個である。固有ローレンツ変換にはブーストと座標系の回転があるが, ここでは, 一般的な無限小ローレンツ変換は扱わず, x 軸方向のブースト (S′ が x 軸方向に移動する場合) と z 軸まわりの回転を考える。

x 軸方向のブースト

この場合, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$ であり, x^0 と x^1 だけがローレンツ変換で変わるから x^0 と x^1 の 2 次元を考え

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix}$$

とする。(5.28) より

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varDelta\omega^0{}_0 & \varDelta\omega^0{}_1 \\ \varDelta\omega^1{}_0 & \varDelta\omega^1{}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varDelta\omega^{00} & -\varDelta\omega^{01} \\ \varDelta\omega^{10} & -\varDelta\omega^{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

(5.29) より $\varDelta\omega^{00} = \varDelta\omega^{11} = 0$, $\varDelta\omega^{01} = -\varDelta\omega^{10}$ であるから

$$\varDelta\omega^{01} = \varDelta\theta \tag{5.30}$$

とすると

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 - \varDelta\theta\, x^1 \\ x'^1 &= x^1 - \varDelta\theta\, x^0 \end{aligned}\ , \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{x}' = \Big(1 - \varDelta\theta\,\sigma_x\Big)\boldsymbol{x}\,, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

と書ける。有限の θ に対しては $\varDelta\theta = \theta/N$ とすると

$$\boldsymbol{x}' = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \varDelta\theta\,\sigma_x\right)^N \boldsymbol{x} = \exp\left(-\theta\sigma_x\right)\boldsymbol{x}$$

になる。$\sigma_x^2 = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \exp\left(-\theta\sigma_x\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \sigma_x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cosh\theta - \sigma_x\sinh\theta = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.32}$$

したがって

$$x'^0 = x^0\cosh\theta - x^1\sinh\theta\,, \qquad x'^1 = x^1\cosh\theta - x^0\sinh\theta$$

である。S′ 系の原点 $x'^1 = 0$ を S 系で見ると $x^1 = x^0\tanh\theta$ になるから

$$\tanh\theta = v\,, \qquad \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{5.33}$$

であり (5.1) が求まる。(5.32) より

$$(a^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\det(a^\mu{}_\nu) = \cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1\,, \qquad a^0{}_0 = \cosh\theta \geq 1$$

z 軸まわりの回転の場合

x^1 と x^2 が変わるから x^1 と x^2 の 2 次元を考え

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\omega^1{}_1 & \Delta\omega^1{}_2 \\ \Delta\omega^2{}_1 & \Delta\omega^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \Delta\omega^{12} \\ \Delta\omega^{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$\Delta\omega^{21} = -\Delta\omega^{12}$ であるから $\Delta\omega^{21} = \Delta\theta$ とすると

$$\boldsymbol{x}' = \Big(1 + i\,\Delta\theta\,\sigma_y\Big)\boldsymbol{x}, \quad ただし \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

になる。前の例と同様にすると, 有限の θ に対しては $\boldsymbol{x}' = \exp\left(i\,\theta\,\sigma_y\right)\boldsymbol{x}$ である。$\sigma_y^2 = 1$ より

$$\exp\left(i\,\theta\sigma_y\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + i\,\sigma_y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\,\sigma_y\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

したがって

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta\,, \qquad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

これは角度 θ の座標軸の回転である。

$$(a^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\det(a^\mu{}_\nu) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\,, \qquad a^0{}_0 = 1$$

問 5.1　単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表される方向のブーストを考える。

1. この場合, (5.31) において x^1 を $\boldsymbol{n}$ 方向成分 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}$ で置き換えればよい。また, $\boldsymbol{n}$ と直交する $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}$ は不変である。これから

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \Big(1 - \Delta\theta M\Big)\begin{pmatrix} x^0 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & n^1 & n^2 & n^3 \\ n^1 & 0 & 0 & 0 \\ n^2 & 0 & 0 & 0 \\ n^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になることを示せ。なお, 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{n}\times\big(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}\big)$ と表せる。

2. $\boldsymbol{n}^2 = 1$ より $M^3 = M$ を示せ。また

$$\exp\big(-\theta M\big) = 1 - M\sinh\theta + M^2\big(\cosh\theta - 1\big)$$

を示せ。$\det M = 0$ であるから逆行列 M^{-1} は存在しない。

3. 有限のローレンツ変換の場合, $1 - \Delta\theta M$ を $\exp\big(-\theta M\big)$ で置き換えればよい。

$$x'^0 = x^0\cosh\theta - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\,\sinh\theta\,, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}\,\Big(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\Big(\cosh\theta - 1\Big) - x^0\sinh\theta\Big)$$

を求めよ。

4. 慣性系 S′ は S に対して速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\tanh\theta$ で移動すること示せ。

5.6　変分原理と運動方程式

オイラー方程式

非相対論では，粒子の一般化座標 $q^k(t)$ とその速度 $\dot q^k = dq^k/dt$ の関数であるラグランジアン L

$$L = L(q^1, q^2, \cdots, \dot q^1, \dot q^2, \cdots, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

を考える。q^k, $\dot q^k$ は t の関数であるから, L は t だけの関数である。$q^k(t_1)$, $q^k(t_2)$ を与えたとき, 作用積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

が極値になる $q^k(t)$ が実現する運動を表すとする。$q^k = q^k(t)$ が S の極値を与える関数ならば, $q^k(t)$ が微小変化

$$q^k(t) \to q^k(t) + \delta q^k(t)\,, \qquad \dot q^k(t) \to \dot q^k(t) + \delta \dot q^k(t)\,, \quad \delta \dot q^k(t) \equiv \frac{d}{dt}\delta q^k(t)$$

しても S は変わらない (ただし $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$ とする)。つまり

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}}, t) - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0$$

である。$L(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}}, t)$ をテイラー展開すると

$$L(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial q^k}\,\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta \dot q^k + \cdots$$

になるから

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\,\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta \dot q^k + \cdots \right)$$

右辺の第 2 項を部分積分し, 境界条件 $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$ を用いると

$$\text{第 2 項} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\frac{d}{dt}\delta q^k = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta q^k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta q^k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k} = -\int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta q^k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}$$

したがって

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta q^k \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k} \right) + \cdots = 0$$

これが任意の微小変位 δq^k に対して成り立つためには

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \tag{5.34}$$

である。これを**オイラー方程式**という。

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - V(\boldsymbol{x})$$

の場合, $\partial L/\partial \dot x^k = m\dot x^k$, $\partial L/\partial x^k = -\,dV/dx^k$ であるから, オイラー方程式はニュートンの運動方程式

$$m\,\ddot{\boldsymbol{x}} = -\,\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x})$$

になる。

自由粒子

オイラー方程式は相対論的力学に対しても適用できる。自由粒子の場合, 運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} = 0$$

である。これを (5.34) から導出するには, L は $\dot{\boldsymbol{x}}$ だけの関数で

$$\frac{dL}{d\dot{x}^k} = \frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}$$

であればよい。$\dot{x}^k$ について積分すれば, 定数の不定性はあるが

$$L = -\,mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2} \tag{5.35}$$

になる。作用積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = -\,mc^2\int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}$$

は時間を特別扱いしており, 共変性は自明ではない。$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ の微小距離

$$dx^\mu dx_\mu = (c\,dt)^2 - (d\boldsymbol{x})^2 = (c\,dt)^2\left(1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2\right)$$

はローレンツ・スカラーであり, これを使うと

$$S = -\,mc\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{dx^\mu dx_\mu}$$

と表せるから, S はローレンツ・スカラーである。ただし L はスカラーではない。t の適当な単調増加関数を $q = q(t)$ とすると

$$\sqrt{c^2-\dot{\boldsymbol{x}}^2} = \sqrt{\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}} = \sqrt{\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx_\mu}{dq}} = \frac{dq}{dt}\sqrt{\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx_\mu}{dq}}$$

したがって

$$S = \int_{q_1}^{q_2} dq\, L_q\,, \qquad L_q = -\,mc\sqrt{\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx_\mu}{dq}} \tag{5.36}$$

になる。q として固有時間 τ

$$d\tau = dt\,\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2} = \frac{dt}{c}\sqrt{\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}} = \frac{1}{c}\sqrt{dx^\mu dx_\mu}$$

を用いると

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} dq\, L_\tau\,, \qquad L_\tau = -\,mc\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}}$$

$dx^\mu/d\tau$ は 4 元ベクトルであるから L_τ はスカラーである。任意の関数 $x^\mu(\tau)$ に対して

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx_\mu}{dt} = \frac{1}{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}\left(c^2-\dot{\boldsymbol{x}}^2\right) = c^2 \tag{5.37}$$

より

$$L_\tau = -\,mc^2\,, \qquad S = -\,mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

になる。L_τ にオイラー方程式を適用する場合, 束縛条件 (5.37) は変分を行ったあとで用いる。

一般的な (5.36) にオイラー方程式を用いる。

$$L_q = -\,mc\sqrt{(x'_0)^2-(x'_k)^2}\,,\quad ただし\quad x'_\mu = \frac{dx_\mu}{dq}$$

より

$$\frac{\partial L_q}{\partial x'_0} = -\,\frac{mc\,x'_0}{\sqrt{(x'_0)^2-(x'_k)^2}}\,,\qquad \frac{\partial L_q}{\partial x'_i} = \frac{mc\,x'_i}{\sqrt{(x'_0)^2-(x'_k)^2}} = -\,\frac{mc\,x'^i}{\sqrt{(x'_0)^2-(x'_k)^2}}$$

まとめて

$$p^\mu \equiv -\,\frac{\partial L_q}{\partial x'_\mu} = \frac{mc}{\sqrt{x'^\nu x'_\nu}}\frac{dx^\mu}{dq} \tag{5.38}$$

である。任意の関数 x^μ に対して

$$\sqrt{x'^\mu x'_\mu} = \frac{d\tau}{dq}\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}} = c\frac{d\tau}{dq}\,,\quad \therefore\quad p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

と表せる。(5.38) で定義した p^μ は (4.9) に一致する。オイラー方程式

$$\frac{d}{dq}\frac{\partial L_q}{\partial x'_\mu} = \frac{d\tau}{dq}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_q}{\partial x'_\mu} = -\,m\frac{d\tau}{dq}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial L_q}{\partial x_\mu}$$

より自由粒子の運動方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

になる。

(5.35) は $\dot{\boldsymbol{x}}$ だけの関数である。(5.38) の空間成分

$$p^k = -\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}$$

は非相対論での正準運動量の定義に一致する。一方, (5.38) の時間成分は存在しないが, 非相対論と同様に, エネルギーあるいはハミルトニアン H を

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} = \sqrt{(mc^2)^2+(c\boldsymbol{p})^2}\,,\quad ただし\quad \boldsymbol{p} = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}$$

で定義すると, 結局

$$H/c = m\frac{dx_0}{d\tau} = p^0$$

になる。

$f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2} + ax + by$ のとき

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

したがって

$$\frac{\partial L_q}{\partial x'_\mu}x'_\mu = -\,p^\mu x'_\mu = L_q\,,\quad \therefore\quad p_0 x'_0 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}' - L_q \tag{5.39}$$

このため, $q=t$ の場合, $cp^0 = H$ になる。

電磁場中の荷電粒子

t と $\boldsymbol{x}$ の関数である 4 元ベクトルポテンシャル $A^\mu(x)$ 中での粒子のラグランジアン L_τ を考える。L_τ はスカラーであるが, A^μ を含むスカラーとしては

$$x_\mu A^\mu\,,\quad \frac{dx_\mu}{d\tau}A^\mu\,,\qquad A_\mu A^\mu$$

などが考えられる。また, 非相対論の静的極限では, 静電ポテンシャルは $V=ecA^0$ であるから T を運動エネルギーとすると $L_\tau = T - ecA^0$ になる。したがって

$$L_\tau = -\,mc\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}} - e\,\frac{dx_\mu}{d\tau}A^\mu(x)$$

とする (SI 単位系)。作用積分は

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, L_\tau = \int_{q_1}^{q_2} dq\, L_q\,, \qquad L_q = \frac{d\tau}{dq}L_\tau = -\,mc\,\sqrt{x'^\mu x'_\mu} - e\,x'_\mu A^\mu(x)\,, \quad x'_\mu = \frac{dx_\mu}{dq}$$

になる。

$$\frac{\partial L_q}{\partial x_\mu} = -\,e\,x'_\nu\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\,, \qquad \frac{\partial L_q}{\partial x'_\mu} = -\,\frac{mc\,x'^\mu}{\sqrt{x'^\nu x'_\nu}} - e\,A^\mu = -\,p^\mu - e\,A^\mu$$

であるから, L_q に対するオイラー方程式

$$\frac{d}{dq}\frac{\partial L_q}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial L_q}{\partial x_\mu}$$

は

$$\frac{dp^\mu}{dq} = e\left(\frac{dx_\nu}{dq}\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{dA^\mu}{dq}\right)$$

になる。ところで

$$\frac{d}{dq}A^\mu = \frac{d}{dq}A^\mu(x_0(q), x_1(q), x_2(q), x_3(q)) = \frac{dx_\nu}{dq}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \tag{5.40}$$

であるから

$$\frac{dp^\mu}{dq} = eF^{\mu\nu}\,\frac{dx_\nu}{dq}\,, \qquad F^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \tag{5.41}$$

あるいは

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = eF^{\mu\nu}\,\frac{dx_\nu}{d\tau} \tag{5.42}$$

になる。これが電磁場中での運動方程式の共変形式である。

$p^\mu = mdx^\mu/d\tau$ は (5.37) より $p_\mu p^\mu = (mc)^2$ であるが, $p_\mu p^\mu$ が定数になることは (5.41) からも示せる。

$$p_\mu\frac{dp^\mu}{dq} = \frac{mce}{\sqrt{x'^\rho x'_\rho}}\frac{dx_\mu}{dq}F^{\mu\nu}\,\frac{dx_\nu}{dq}$$

$F^{\mu\nu} = -\,F^{\nu\mu}$ より

$$p_\mu\frac{dp^\mu}{dq} = 0\,, \quad \therefore \quad p_\mu p^\mu = \text{一定}$$

である。(5.41), (5.42) は $\mu = 0,\,1,\,2,\,3$ の 4 つの方程式の組であるが, 独立な方程式は 3 つである。$\boldsymbol{p}$ の運動方程式を用いると

$$\begin{aligned} p_0\frac{dp_0}{dq} = p^k\frac{dp^k}{dq} = \frac{mce}{v}\frac{dx^k}{dq}F^{k\mu}\frac{dx_\mu}{dq} &= \frac{mce}{v}\left(\frac{dx^k}{dq}F^{k\ell}\frac{dx_\ell}{dq} + \frac{dx^k}{dq}F^{k0}\frac{dx_0}{dq}\right)\,, \qquad v = \sqrt{x'^\mu x'_\mu} \\ &= \frac{mce}{v}\left(-\,\frac{dx_k}{dq}F^{k\ell}\frac{dx_\ell}{dq} + \frac{dx_0}{dq}F^{0k}\frac{dx_k}{dq}\right) \end{aligned}$$

ただし, $x^k = -\,x_k$, $F^{0k} = -\,F^{k0}$ を用いた。$F^{\mu\nu} = -\,F^{\nu\mu}$ より第 1 項は 0 になるから ($F^{00}=0$)

$$p_0\frac{dp_0}{dq} = p_0\,eF^{0k}\frac{dx_k}{dq}\,, \quad \therefore \quad \frac{dp_0}{dq} = eF^{0\mu}\frac{dx_\mu}{dq} \tag{5.43}$$

空間成分の方程式から $\mu = 0$ の方程式が導けた。

時間を特別扱いする形式

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L\,,\qquad L=\frac{d\tau}{dt}L_\tau=-\,mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}-e\frac{dx_\mu}{dt}A^\mu$$
$$=-\,mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}-ecA^0+e\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A} \tag{5.44}$$

の場合

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^k}=\frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}+eA^k\,,\qquad \frac{\partial L}{\partial x^k}=-\,ec\frac{\partial A^0}{\partial x^k}+e\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^k}$$

これから, オイラー方程式は

$$\frac{dp^k}{dt}=-\,ec\,\frac{\partial A^0}{\partial x^k}+e\left(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^k}-\frac{dA^k}{dt}\right)\,,\qquad p^k=\frac{m\dot{x}^k}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}$$

になる。この場合, 時間成分の方程式はない。(5.40) と同様に

$$\frac{dA^k}{dt}=\frac{\partial A^k}{\partial t}+\frac{dx^\ell}{dt}\frac{\partial A^k}{\partial x^\ell}=\frac{\partial A^k}{\partial t}+\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{\nabla}A^k \tag{5.45}$$

になるから

$$\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^k}-\frac{dA^k}{dt}=\frac{dx^\ell}{dt}\frac{\partial A^\ell}{\partial x^k}-\frac{dx^\ell}{dt}\frac{\partial A^k}{\partial x^\ell}-\frac{\partial A^k}{\partial t}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{dp^k}{dt}&=-\,ec\,\frac{\partial A^0}{\partial x^k}-e\frac{\partial A^k}{\partial t}+e\left(\frac{\partial A^\ell}{\partial x^k}-\frac{\partial A^k}{\partial x^\ell}\right)\frac{dx^\ell}{dt}\\&=ec\left(\frac{\partial A^0}{\partial x_k}-\frac{\partial A^k}{\partial x_0}\right)+e\left(\frac{\partial A^\ell}{\partial x_k}-\frac{\partial A^k}{\partial x_\ell}\right)\frac{dx_\ell}{dt}\\&=ecF^{k0}+eF^{k\ell}\frac{dx_\ell}{dt}=eF^{k\nu}\frac{dx_\nu}{dt}\end{aligned}$$

にまとまる。これは (5.41) の空間成分で $q=t$ とすればよい。(5.43) と同様に, 空間成分の方程式から時間成分の関係式が求まり

$$\frac{dp^\mu}{dt}=eF^{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{dt} \tag{5.46}$$

が成り立つ。

ハミルトニアン H を

$$H=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^k}\dot{x}^k-L$$

で定義すると (5.44) より

$$H=\frac{m\dot{\boldsymbol{x}}^2}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}+e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}+ecA_0$$

正準運動量 P^μ

$$P^\mu=-\,\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\mu}=\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}}+eA^\mu=m\frac{dx^\mu}{d\tau}+eA^\mu$$

を用いると

$$(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2=\frac{m^2\dot{\boldsymbol{x}}^2}{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}=-(mc)^2+\frac{(mc)^2}{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}$$

より

$$P^0 = \sqrt{(mc)^2 + (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A})^2} + eA^0$$

と表せる。$P^0 = H/c$ になるが, これは (5.39) と同様して示せる。

(5.46) を 3 次元のベクトル形式に書き直す。2 階のテンソル $F^{\mu\nu}$ を電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ で表すと (5.24) より

$$F^{\mu\nu}\dot{x}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -\dot{x} \\ -\dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{E}/c \\ E_x + (\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_x \\ E_y + (\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_y \\ E_z + (\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_z \end{pmatrix}$$

になるから (5.46) は

$$c\,\frac{dp^0}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} = e\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{E}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} = e\boldsymbol{E} + e\,\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B} \tag{5.47}$$

ローレンツ力の場合, (4.11) に現れたニュートン力 $\boldsymbol{F}$ は非相対論と一致する。運動エネルギーの時間的変化は, 電場が単位時間になす仕事に等しい。磁場による力は速度 $\dot{\boldsymbol{x}}$ に直交するから, 磁場は仕事をしない。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - c\boldsymbol{\nabla}A^0$$

であるから

$$\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{E} = -\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - c\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}A^0 = -\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + c\frac{\partial A^0}{\partial t} - c\frac{dA^0}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - c\frac{dA^0}{dt}$$

ただし, A^0 に対して (5.45) を用いた。これから

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{x}}^2/c^2}} = e\frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - ec\frac{dA^0}{dt}\,, \quad \therefore \quad \frac{dH}{dt} = e\frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial A_\mu}{\partial t}$$

$A^\mu(x) = A^\mu(\boldsymbol{x})$ で A^μ が直接時間に依存しないとき, $\partial A_\mu/\partial t = 0$ より $dH/dt = 0$ になり H は保存する。

5.7　一様な電場と磁場中での運動

$p^0 = mcK$, $\boldsymbol{p} = mc\boldsymbol{q}$, つまり

$$K(t) = \sqrt{1+\boldsymbol{q}^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}}\,, \qquad \boldsymbol{q}(t) = \frac{\boldsymbol{u}(t)}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(t)}}\,, \qquad \boldsymbol{u}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c} = \frac{\boldsymbol{q}(t)}{K(t)}$$

とすると, 運動方程式 (5.47) は

$$\dot{K} = \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}}{K}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}}{K}\,, \qquad \text{ただし} \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{e}{mc}\boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{B} \tag{5.48}$$

になる。以下では $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ とし

$$b = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} = \frac{E}{cB}\,, \qquad B \neq 0 \tag{5.49}$$

とおく。

電場と磁場が直交する場合

$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \big(0,\, \mathcal{E},\, 0\big)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \big(0,\, 0,\, \mathcal{B}\big)$ とすると (5.48) は

$$\dot{K} = \frac{b\mathcal{B}}{K(t)} q_y\,, \qquad \dot{q}_x = \frac{\mathcal{B}}{K(t)} q_y\,, \qquad \dot{q}_y = \mathcal{B}\left(b - \frac{q_x(t)}{K(t)}\right), \qquad \dot{q}_z = 0 \tag{5.50}$$

になる。$q_z(t)$ は定数である。$b = \mathcal{E}/\mathcal{B} \geq 1$ の場合 $\dot{q}_y > 0$ であるから, 非相対論と異なり $y(t)$ は振動しない。第 1 式と第 2 式より

$$K(t) - bq_x(t) = \text{定数} = \alpha \tag{5.51}$$

である。

$$d\theta = \mathcal{B}\frac{dt}{K(t)}\,, \quad \text{つまり} \quad \theta(t) = \mathcal{B}\int_0^t \frac{dt}{K(t)} \tag{5.52}$$

とする。$\theta/\mathcal{B}$ は固有時間 (4.8) である。(5.50) の $\dot{\boldsymbol{q}}$ の方程式は

$$\frac{dq_x}{d\theta} = q_y\,, \qquad \frac{dq_y}{d\theta} = bK - q_x = b\alpha + \big(b^2 - 1\big)q_x \tag{5.53}$$

と簡単になる。$b \neq 1$ のとき

$$\frac{d^2 q_y}{d\theta^2} = \big(b^2 - 1\big)q_y\,, \qquad q_x = \frac{1}{b^2 - 1}\left(\frac{dq_y}{d\theta} - b\alpha\right) \tag{5.54}$$

と同値である。

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{q}}{K}\,, \qquad \boldsymbol{u} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c} = \frac{\mathcal{B}}{K}\frac{d}{d\theta}\frac{\boldsymbol{x}}{c}\,, \qquad \therefore \qquad \frac{\boldsymbol{x}}{c} = \frac{1}{\mathcal{B}}\int_0^\theta d\theta\, \boldsymbol{q} \tag{5.55}$$

$$dt = \frac{K}{\mathcal{B}}d\theta = \frac{\alpha + bq_x}{\mathcal{B}}d\theta\,, \qquad \therefore \qquad t = \frac{\alpha}{\mathcal{B}}\theta + b\frac{x}{c} \tag{5.56}$$

である。$\dot{\theta} > 0$ であるから t を与えると θ は一意に決まる。

- $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ の場合

$b = 1$ のとき (5.53) より $q_y = q_y(0) + \alpha\theta$, $q_x = q_x(0) + q_y(0)\theta + \theta^2/2$ になる。(5.55), (5.56) より

$$\frac{x}{c} = \frac{\theta}{\mathcal{B}}\left(q_x(0) + \frac{q_y(0)}{2}\theta + \frac{\alpha}{6}\theta^2\right), \qquad \frac{y}{c} = \frac{\theta}{\mathcal{B}}\left(q_y(0) + \frac{\alpha}{2}\theta\right), \qquad \frac{z}{c} = \frac{q_z}{\mathcal{B}}\theta \tag{5.57}$$

$$t = \frac{\theta}{\mathcal{B}}\left(\alpha + q_x(0) + \frac{q_y(0)}{2}\theta + \frac{\alpha}{6}\theta^2\right), \qquad \alpha = K(0) - q_x(0) \tag{5.58}$$

である。

$q_y(0) = 0$ の場合, $\theta = q_y/\alpha$ であり $k_z = 1 + q_z^2 = $ 定数 とすると

$$K^2(0) = k_z + q_x^2(0) = \big(\alpha + q_x(0)\big)^2\,, \qquad \therefore \qquad q_x(0) = \frac{k_z}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}$$

になる (ランダウ・リフシッツ 場の古典論 66 ページ参照)。

- $\mathcal{E} < \mathcal{B}$ の場合

$$\phi = \sqrt{1 - b^2}\,\theta = \sqrt{1 - b^2}\,\mathcal{B}\int_0^t \frac{dt}{K(t)}$$

とすると (5.54) は $d^2 q_y/d\phi^2 = -\,q_y$ になるから D を定数として

$$q_y = q_y(0)\cos\phi + D\sin\phi$$

$$q_x = \frac{b\alpha}{1 - b^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}\frac{dq_y}{d\phi} = \frac{b\alpha}{1 - b^2} + \frac{q_y(0)\sin\phi - D\cos\phi}{\sqrt{1 - b^2}}$$

$t=0$ のとき $\phi=0$ であるから

$$q_x(0)=\frac{b\alpha}{1-b^2}-\frac{D}{\sqrt{1-b^2}}\,,\qquad \therefore\qquad D=\frac{\alpha_b}{\sqrt{1-b^2}}\,,\quad \alpha_b=bK(0)-q_x(0) \tag{5.59}$$

ここで (5.51) を用いた。(5.55), (5.56) より

$$\frac{x}{c}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}\,\mathcal{B}}\int_0^\phi d\phi\,q_x=\frac{b\alpha}{(1-b^2)^{3/2}\mathcal{B}}\phi+\frac{q_y(0)\big(1-\cos\phi\big)-D\sin\phi}{(1-b^2)\mathcal{B}} \tag{5.60}$$

$$\frac{y}{c}=\frac{q_y(0)\sin\phi+D\big(1-\cos\phi\big)}{\sqrt{1-b^2}\,\mathcal{B}}\,,\qquad \frac{z}{c}=\frac{q_z}{\sqrt{1-b^2}\,\mathcal{B}}\,\phi \tag{5.61}$$

$$t=\frac{\alpha\phi}{\sqrt{1-b^2}\,\mathcal{B}}+b\frac{x}{c}=\frac{\alpha\phi}{(1-b^2)^{3/2}\mathcal{B}}+\frac{b}{(1-b^2)\mathcal{B}}\Big(q_y(0)(1-\cos\phi)-D\sin\phi\Big) \tag{5.62}$$

である。(5.60) は

$$\frac{x}{c}=bt+\frac{1}{\mathcal{B}}\Big(q_y(0)\big(1-\cos\phi\big)-D\sin\phi\Big)$$

とも表せるから, xy 平面上の軌道は

$$\frac{1}{1-b^2}\left(\frac{x}{c}-bt-\frac{q_y(0)}{\mathcal{B}}\right)^2+\left(\frac{y}{c}-\frac{D}{\sqrt{1-b^2}\,\mathcal{B}}\right)^2=\frac{D^2+q_y^2(0)}{(1-b^2)\mathcal{B}^2}$$

になる。y 軸方向に電場を作用させると, x 軸方向に速さ $bc=E/B$ で進む楕円上を周期運動する。x 軸方向の短軸は長軸に比べて $\sqrt{1-b^2}$ 倍のローレンツ収縮する。(5.62) より周期 T は

$$T=\frac{2\pi}{\mathcal{B}}\frac{\alpha}{(1-b^2)^{3/2}}=\frac{2\pi}{\mathcal{B}}\frac{1-bu_x(0)}{(1-b^2)^{3/2}\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2(0)}}$$

$b=\mathcal{E}/\mathcal{B}\to 1$ のとき $T\to\infty$ である。b, $u(0)\ll 1$ のとき非相対論の周期 $2\pi/\mathcal{B}$ になる。

$t=0$ で原点に静止している $\boldsymbol{q}(0)=0$ の場合, $D=b/\sqrt{1-b^2}$ より

$$\frac{x}{c}=\frac{b}{B(1-b^2)^{3/2}}\Big(\phi-\sin\phi\Big)\qquad \frac{y}{c}=\frac{b}{\mathcal{B}(1-b^2)}\Big(1-\cos\phi\Big)\,,\qquad t=\frac{\phi-b^2\sin\phi}{\mathcal{B}(1-b^2)^{3/2}}$$

と簡単になる。

$b=\mathcal{E}/\mathcal{B}\to 1$ の場合 $\phi=\sqrt{1-b^2}\,\theta\to 0$ より $\sin\phi$, $\cos\phi$ をマクローリン展開する。(5.59) の D は発散するが, (5.60)～(5.62) は

$$\frac{x}{c}=\frac{\theta}{\mathcal{B}}\left(\frac{b\alpha-\alpha_b}{1-b^2}+\frac{q_y(0)}{2}\theta+\frac{\alpha_b}{6}\theta^2+O\big(1-b^2\big)\right),\qquad \frac{b\alpha-\alpha_b}{1-b^2}=q_x(0)$$

$$\frac{y}{c}=\frac{\theta}{\mathcal{B}}\left(q_y(0)+\frac{\alpha_b}{2}\theta+O\big(1-b^2\big)\right),\qquad \frac{z}{c}=\frac{q_z}{\mathcal{B}}\theta\,,\qquad t=\frac{\alpha\theta}{\mathcal{B}}+b\frac{x}{c}$$

になる。$b\to 1$ とすれば (5.57), (5.58) が求まる。

次に, b と $u=|\boldsymbol{u}|$ の 2 次以上を無視する非相対論的近似では

$$\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}}\approx\boldsymbol{u}\,,\qquad D=\frac{bK(0)-q_x(0)}{\sqrt{1-b^2}}=\frac{b-u_x(0)}{\sqrt{(1-b^2)(1-\boldsymbol{u}^2(0))}}\approx b-u_x(0)$$

である。(5.62) は $t\approx\theta/\mathcal{B}$ になる。(5.60), (5.61) より $z/c\approx u_z t$ 及び

$$\frac{x}{c}\approx u_x(0)\frac{\sin\mathcal{B}t}{\mathcal{B}}+u_y(0)\frac{1-\cos\mathcal{B}t}{\mathcal{B}}+\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\frac{\mathcal{B}t-\sin\mathcal{B}t}{\mathcal{B}} \tag{5.63}$$

$$\frac{y}{c}\approx u_y(0)\frac{\sin\mathcal{B}t}{\mathcal{B}}-u_x(0)\frac{1-\cos\mathcal{B}t}{\mathcal{B}}+\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}\frac{1-\cos\mathcal{B}t}{\mathcal{B}} \tag{5.64}$$

になり非相対論の結果を再現する。非相対論が成り立つためには $b = E/(cB) \ll 1$ でなければならない 。

- $\mathcal{E} > \mathcal{B}$ の場合

$$\phi = \sqrt{b^2-1}\,\theta = \sqrt{b^2-1}\,\mathcal{B}\int_0^t \frac{dt}{K(t)}$$

として $\mathcal{E} < \mathcal{B}$ の場合と同様に行なえばよい。(5.54) は $d^2q_y/d\phi^2 = q_y$ であるから

$$q_y = q_y(0)\cosh\phi + D\sinh\phi\,, \qquad D = \frac{bK(0)-q_x(0)}{\sqrt{b^2-1}}$$

$$q_x = -\frac{b\alpha}{b^2-1} + \frac{q_y(0)\sinh\phi + D\cosh\phi}{\sqrt{b^2-1}}$$

になる。(5.55), (5.56) より

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}\,\mathcal{B}}\int_0^\phi d\phi\, q_x = -\frac{b\alpha}{(b^2-1)^{3/2}\mathcal{B}}\phi + \frac{q_y(0)\big(\cosh\phi-1\big)+D\sinh\phi}{(b^2-1)\mathcal{B}} \tag{5.65}$$

$$\frac{y}{c} = \frac{q_y(0)\sinh\phi + D\big(\cosh\phi-1\big)}{\sqrt{b^2-1}\,\mathcal{B}}\,, \qquad \frac{z}{c} = \frac{q_z}{\sqrt{b^2-1}\,\mathcal{B}}\,\phi \tag{5.66}$$

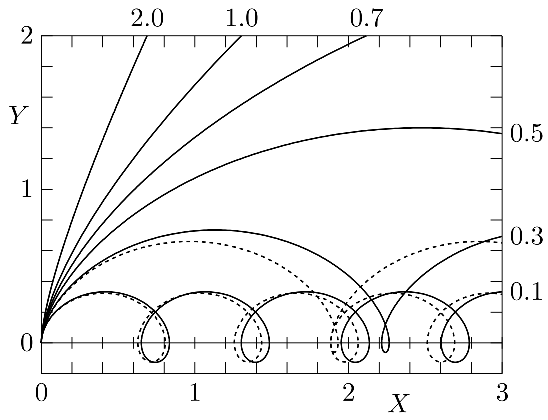
$$t = \frac{\alpha\phi}{\sqrt{b^2-1}\,\mathcal{B}} + b\frac{x}{c} = -\frac{\alpha\phi}{(b^2-1)^{3/2}\mathcal{B}} + \frac{b}{(b^2-1)\mathcal{B}}\Big(q_y(0)(1-\cosh\phi)+D\sinh\phi\Big) \tag{5.67}$$

である。$\boldsymbol{q}(0)=0$ の場合

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{(b^2-1)^{3/2}\mathcal{B}}\Big(\sinh\phi-\phi\Big)\,, \qquad \frac{y}{c} = \frac{b}{(b^2-1)\mathcal{B}}\Big(\cosh\phi-1\Big)\,, \qquad t = \frac{b^2\sinh\phi-\phi}{(b^2-1)^{3/2}\mathcal{B}}$$

になる。

$\boldsymbol{u}(0) = (0\,,\,0.2\,,\,0)$ のとき (5.60), (5.61), (5.65), (5.66) で決まる軌道を右図に示す。$X = \mathcal{B}x/c$, $Y = \mathcal{B}y/c$ は無次元量であり, 軌道 $Y = Y(X)$ は比 $\mathcal{E}/\mathcal{B}$ に依存する。曲線に付けた値は $\mathcal{E}/\mathcal{B}$ であり, 破線は非相対論の軌道 (5.63), (5.64) である。



電場と磁場が平行な場合

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \big(0,\,0,\,\mathcal{E}\big)\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \big(0,\,0,\,\mathcal{B}\big)$$

のとき (5.48) は

$$\dot q_x = \frac{\mathcal{B}}{K}q_y\,, \qquad \dot q_y = -\frac{\mathcal{B}}{K}q_x\,, \qquad \dot q_z = \mathcal{E} \tag{5.68}$$

になる。

$$q_z(t) = q_0 + \mathcal{E}t\,, \qquad K_0 = \sqrt{1+q_x^2+q_y^2} = 定数\,, \qquad K = \sqrt{K_0^2+q_z^2}$$

である。$q_z(t) = \sqrt{K_0^2+q_z^2}\,u_z = \sqrt{K_0^2+q_z^2}\,\dot z/c$ より

$$\frac{z}{c} = \frac{1}{\mathcal{E}}\int_{q_0}^{q_z} dq_z\,\frac{q_z}{\sqrt{K_0^2+q_z^2}} = \frac{1}{\mathcal{E}}\left(\sqrt{K_0^2+q_z^2} - \sqrt{K_0^2+q_0^2}\right)$$

になる。$Q = q_x + iq_y$ とすると (5.68) より

$$\frac{dQ}{dt} = \mathcal{E}\frac{dQ}{dq_z} = -i\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{K_0^2+q_z^2}}Q \tag{5.69}$$

になるから

$$Q(t) = Q(0)e^{-i\theta(t)}\,, \qquad \theta = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}}\int_{q_0}^{q_z}\frac{dq_z}{\sqrt{K_0^2+q_z^2}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}}\left(\sinh^{-1}\frac{q_z}{K_0} - \sinh^{-1}\frac{q_0}{K_0}\right)$$

である。$\mathcal{E}=0$ の場合 $\mathcal{E}\to 0$ とするか, あるいは, (5.69) より $\theta = \mathcal{B}t/K(0)$ である。

$$\dot\theta = \dot q_z\frac{d\theta}{dq_z} = \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{K_0^2+q_z^2}} = \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{K_0^2+\big(q_0+\mathcal{E}t\big)^2}}$$

より

$$Q = q_x + iq_y = \frac{\sqrt{K_0^2+q_z^2}}{c}\frac{d}{dt}\big(x+iy\big) = \frac{\mathcal{B}}{c}\frac{d}{d\theta}\big(x+iy\big)$$

であるから

$$\frac{x+iy}{c} = \frac{iQ(0)}{\mathcal{B}}\big(e^{-i\theta}-1\big)$$

になる。xy 平面上の運動は, $\mathcal{E}\neq 0$ のとき時間に依存する角速度 $\dot\theta$ の円運動である。

索 引