

力学入門

倉澤治樹

<http://kurasawa.c.ooco.jp>

1994年4月 1997年4月 1999年4月
2002年4月 2008年4月

目次

1	位置・速度・加速度	1
1.1	座標系	1
1.2	位置ベクトル	1
1.3	速度と加速度	3
1.4	極座標表示	5
1.5	接線成分と法線成分	7
2	運動の法則	9
2.1	運動の第1法則	9
2.2	運動の第2法則	9
2.3	運動方程式の解法	10
2.4	運動方程式の数値解法	11
2.5	運動の第3法則	14
3	一様重力での運動	16
3.1	速度に比例する抵抗力がある場合	16
3.2	速度の2乗に比例する抵抗力がある場合	18
4	振動	21
4.1	単振動	21
4.2	減衰振動	22
4.3	強制振動	24
4.4	強制振動の例	27
4.5	連成振動	28
5	仕事とエネルギー	31
5.1	仕事	31
5.2	偏微分と全微分	33
5.3	力学的エネルギー	35
5.4	エネルギー保存則と運動の決定	37
6	角運動量と力のモーメント	44
6.1	ベクトル積	44
6.2	角運動量と力のモーメント	48

7	中心力	51
7.1	2次元の極座標	51
7.2	中心力	52
7.3	惑星の軌道	53
7.4	位置の時間的变化	56
7.5	2体問題	58
7.6	2粒子の弾性衝突	60
7.7	ラザフォード散乱	62
8	質点系	65
8.1	質点系の運動量	65
8.2	質点系の角運動量	66
8.3	剛体の運動	68
8.4	固定軸のある剛体の運動	69
8.5	慣性モーメント	70
8.6	簡単な剛体の運動	72
9	回転座標系	78
9.1	座標変換	78
9.2	回転座標系	78
9.3	地球表面上に固定した座標系	81
9.4	固定点をもつ剛体	84
9.5	オイラーの運動方程式	86
9.6	オイラー角	88
9.7	重力が作用するときのこまの運動	90
10	数学的補足	98
10.1	テイラー級数	98
10.2	複素数	99
	索引	102

参考書

- 戸田 盛和：物理学入門コース1 力学（岩波書店）
- 川村 清：裳華房テキストシリーズ-物理学 力学（裳華房）
- V.D. バージェャー, M.G. オルソン：力学 新しい視点に立って（培風館）
- 小出 昭一郎：物理テキストシリーズ1 力学（岩波書店）
- 原島 鮮：力学（裳華房）
- 山内 恭彦：一般力学（岩波書店）
- ランダウ, リフシッツ：力学（東京図書）
- 植松恒夫：力学（学術図書）

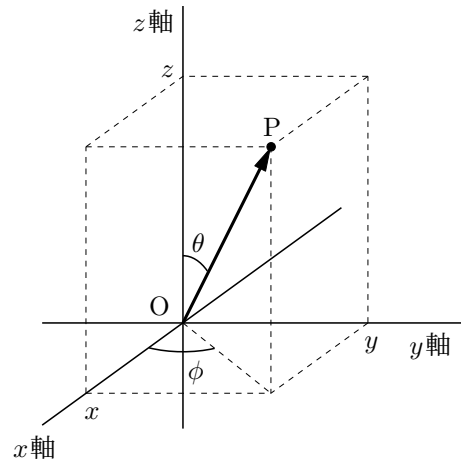
1 位置・速度・加速度

物体に働く力 (force) とその運動 (motion) との関係を探るのが力学 (mechanics) である。すべての物体は広がり (大きさ) があるから、物体のあらゆる部分の運動を求める必要がある。そのためには、物体を多数の微小部分に分割したと考え、その微小部分ごとに運動を求めればよい。このとき、微小部分は大きさのない点と見なせる。また、物体の変形や回転を考えないで、全体としての並進運動だけに注目する場合、物体を一つの点 (例えば重心) で代表させて、その運動を考えればよい。地球のような大きな物体も、太陽のまわりの公転運動だけを扱う場合には、一つの点とみなせる。このように、幾何学的な点の運動を調べることが、最も基本的なことである。この点のことを質点 (material point) という。

1.1 座標系

質点の運動は、その位置が時間とともにどう変化するかにより記述される。このため、点の位置を数学的に表す方法が必要で、座標系 (system of coordinates) を設定しなければならない。普通は、図で示したように、一つの点 O (原点) を通る互いに直交する x, y, z 軸を考え、任意の点 P の位置座標を3つの変数 x, y, z で指定する。質点が運動すると、質点の座標は時刻 t の関数として変化する。このことを $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ で表す。これらの関数が求まれば、運動は完全に分かったことになる。

x, y, z の代わりに r, θ, ϕ の3変数を用いてもよい。これを極座標または球座標という。ここで、 r は OP の長さ、 θ は OP と z 軸の間の角、 ϕ は OP を $x-y$ 平面の射影した線分と x 軸の間の角である。空間内に任意の点を表すには



$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

の範囲の値をとればよい。直交座標との関係は

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.1)$$

である。このほかに円筒座標があるが、どの場合にも質点の位置を表すには3つの変数が必要である。このことを質点の自由度 (degree of freedom) は3であるという。運動が平面内に限られるとき、質点の位置は2つの変数 (例えば x, y) で表せるから、自由度は2である。

問 1.1 (1.1) を示せ。また、 r, θ, ϕ を x, y, z で表せ。

1.2 位置ベクトル

質点の位置 P を指定するのに3つの変数を用いる代わりに、原点 O から点 P に引いた矢印により表すことができる。この矢印を点 P の位置ベクトルといい、この講義ノートでは太文字の \mathbf{r} で表す。太文字を使うかわりに、 \vec{r} とか \overrightarrow{OP} などと記すこともある。

一般に、大きさ向きをもつ量をベクトル (vector) という。ベクトルは矢印で示すことができる。例えば、速度は矢印の大きさが速さを表し、向きが運動の方向を表すベクトルである。一方、質量や時間のように、向きに関係しない大きさだけの量をスカラー (scalar) という。以下、太文字の記号はベクトルを表す。

大きさが1であるベクトルを単位ベクトル (unit vector) という。\$x, y, z\$ 軸の正方向を向く単位ベクトルを \$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\$ とすると、座標が \$x, y, z\$ である点 P の位置ベクトル \$\mathbf{r}\$ は、平行四辺形の法則から

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (1.2)$$

と表せる。このとき、\$x, y, z\$ をベクトル \$\mathbf{r}\$ の成分 (component) という。単位ベクトル \$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\$ は時間 \$t\$ に依らないが、成分は質点の運動に伴い変化する時間の関数である。このことを明記するならば

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z \quad (1.3)$$

である。

位置ベクトルは原点という特別な点から引いた矢印であるから、原点をどこに取るかで変わる。このようなベクトルを束縛ベクトルという。一方、原点の取り方に依存しないベクトルを自由ベクトルという。

質点が点 A から B に移動したとき、ベクトル \$\overrightarrow{AB}\$ を変位ベクトルという。このベクトルを \$\Delta \mathbf{r}\$ で表すことにする。また、A と B の位置ベクトルを \$\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B\$ とし、別の原点 \$O'\$ から引いた A と B の位置ベクトルを \$\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B\$ とする。位置ベクトルは原点の取り方により変わる。しかし

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A$$

であるから、変位ベクトルは原点の取り方に依存しない自由ベクトルである。

内積 任意のベクトル \$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z\$ を \$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)\$ と書く。また、\$\mathbf{A}\$ の大きさを \$|\mathbf{A}|\$ で表す。つまり

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

である。\$\mathbf{A}\$ と \$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z\$ の内積 \$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\$ を

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

で定義する。内積は2つのベクトルから作られるスカラー量である。\$\mathbf{A}\$ と \$\mathbf{B}\$ のなす角を \$\theta\$ とすると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

である。\$\mathbf{A}\$ と \$\mathbf{B}\$ が直交するなら \$\theta = \pi/2\$ であるから \$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0\$ になる。なお、\$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}\$ を単に \$A^2\$ と書く。

単位ベクトル \$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\$ は大きさ1で互いに直交するから

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

である。これをまとめて書くと (\$i, j\$ は \$x, y, z\$ のどれかを指す)

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (1.4)$$

である。\$\delta_{ij}\$ をクロネッカーのデルタ記号といい、非常に便利な記号である。

1.3 速度と加速度

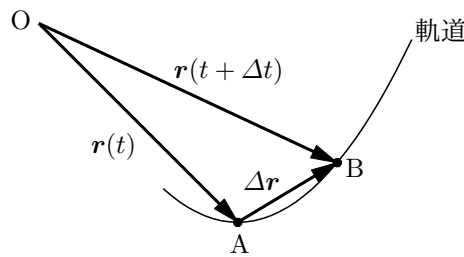
質点がある直線上を運動する場合を考える。この直線を x 軸にとり、時刻 t における質点の位置を $x(t)$ とする。時刻 t から $t + \Delta t$ の間に、質点は $x(t + \Delta t) - x(t)$ だけ変位するから、この間の平均速度は

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

である。 Δt を無限小にしたときの平均速度を時刻 t における速度 (velocity) と定義する。速度を $v(t)$ で表すと

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (1.5)$$

である。ここで $\dot{}$ は時間微分を表すニュートンの記号である。



次に、3次元の場合を考える。時刻 t における質点の位置 $\mathbf{r}(t)$ を A、微小時間 Δt 経過した $t + \Delta t$ における位置 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ を B とし、 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ とする。1次元の場合と同様にして

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.6)$$

で速度 \mathbf{v} を定義する。 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、B は A に限りなく近づき、 $\Delta \mathbf{r}$ の向きは A における軌道 (orbit) の接線方向になるから、 \mathbf{v} の向きは常に軌道の接線方向である。また、 $\Delta \mathbf{r}$ は自由ベクトルであるから \mathbf{v} も自由ベクトルである。

(1.6) のベクトルの微分を成分で書けば

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_x + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_y + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.7)$$

になる。 \mathbf{v} の x, y, z 成分を v_x, v_y, v_z とすると

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \quad (1.8)$$

である。速さ v は軌道に沿った A から B までの距離 Δs を Δt で割ったものである。 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、 Δs は直線 $\Delta \mathbf{r}$ の長さ $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ に一致するから

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = |\mathbf{v}| \quad (1.9)$$

となり、速さは速度ベクトル \mathbf{v} の大きさである。

位置の時間変化が速度であるが、これと同様にして、速度の時間変化として加速度 (acceleration) を定義する。加速度を \mathbf{a} とすると

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1.10)$$

である。

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (v_x(t) \mathbf{e}_x + v_y(t) \mathbf{e}_y + v_z(t) \mathbf{e}_z) = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{e}_z$$

より, \mathbf{a} の x, y, z 成分 a_x, a_y, a_z は

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad (1.11)$$

になる。" は時間についての 2 階微分を表す。

円運動 半径 R の円運動を考える。次の図のように角度 $\theta(t)$ をとると, 質点の位置は

$$x(t) = R \cos \theta(t), \quad y(t) = R \sin \theta(t)$$

である。円運動であるから R は時間 t に依らず一定であるが, θ は時間的に変化するから t の関数である。合成関数の微分公式を使うと

$$\frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\dot{\theta} \sin \theta, \quad \frac{d \sin \theta}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta$$

であるから, 速度は

$$v_x = \dot{x} = R \frac{d \cos \theta}{dt} = -R \dot{\theta} \sin \theta, \quad v_y = \dot{y} = R \frac{d \sin \theta}{dt} = R \dot{\theta} \cos \theta \quad (1.12)$$

加速度は

$$a_x = \dot{v}_x = -R (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta), \quad a_y = \dot{v}_y = R (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (1.13)$$

になる。 \mathbf{r} 方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_r , これに直交する円の接線方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_θ

$$\mathbf{e}_r(t) = \cos \theta(t) \mathbf{e}_x + \sin \theta(t) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \mathbf{e}_x + \cos \theta(t) \mathbf{e}_y \quad (1.14)$$

とする。 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ の方向は質点の運動とともに変化するから, これらの単位ベクトルは時間に依存する。(1.12), (1.13) から

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y = R \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y) = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (1.15)$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y = R \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r \quad (1.16)$$

になる。速度の向きは, 当然, 接線方向である。加速度は 2 つの分割できる。 $R \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ は速度の方向 (円の接線方向) を向き, 大きさは速さ $v = R \dot{\theta}$ の時間的変化である。一方, $-R \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r$ は常に円の中心方向を向き, その大きさは

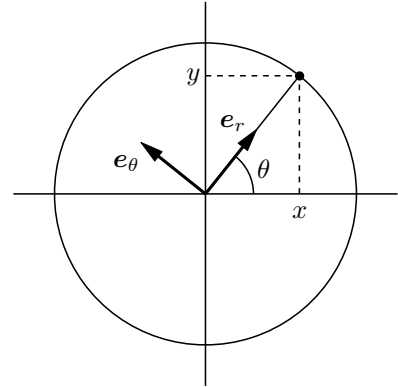
$$R \dot{\theta}^2 = \frac{(R \dot{\theta})^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

とも書ける。これは等速円運動と同じ表現であるが, v は時間に依存してよい。

等速円運動では速さ $R \dot{\theta} = \text{一定}$, つまり角速度 (angular velocity) $\dot{\theta}$ は一定である。この定数を ω とする。 $\ddot{\theta} = 0$ であるから

$$\mathbf{v} = R \omega \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a} = -R \omega^2 \mathbf{e}_r$$

になる。加速度は常に円の中心を向く。等速円運動をさせる力 $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ も円の中心を向き, その大きさは $m R \omega^2$ である。この力を向心力 (centripetal force) という。



問 1.2 単位ベクトル (1.14) の時間微分が

$$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta, \quad \dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r$$

になることを示せ。

問 1.3 変数 t に依存する単位ベクトルを $e(t)$ とする。このベクトルの方向は t の関数として変化するが、大きさは常に 1, つまり $e \cdot e = 1$ である。この式を t で微分することにより、 e と de/dt が直交することを示せ。また、図を用いてこの 2 つのベクトルの直交性を示せ。

単振り子 質量が無視できる長さ ℓ の棒の先に質量 m の質点を付け、鉛直平面内で振動させる。質点には棒からの張力 S と鉛直下向きの重力 mg が働く。 e_θ 方向の加速度は $\ell\ddot{\theta}$ であり、この方向の力の成分は $-mg \sin \theta$ であるから

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta, \quad \therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (1.17)$$

になる。この方程式から $\theta = \theta(t)$ が求まり運動が決まる (39 ページ参照)。一方、 e_r 方向の運動方程式は

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - S$$

になる。これから未知の張力 S が

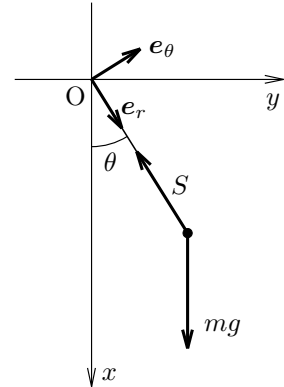
$$S = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2 \quad (1.18)$$

として求まる。微小振動の場合 $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \dots \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$ であるから $S \approx mg$ になるが、一般には $S \neq mg$ である。

運動方程式を直交座標 x, y で表すと

$$m\ddot{x} = mg - S \cos \theta = mg - S \frac{x}{\ell}, \quad m\ddot{y} = -S \sin \theta = -S \frac{y}{\ell}$$

になる。ただし $x^2 + y^2 = \ell^2 = \text{一定}$ である。未知の力 S を含むから、このままでは解けない。



1.4 極座標表示

右図に示した単位ベクトル e_r, e_θ, e_ϕ をそれぞれ r, θ, ϕ 方向の単位ベクトルと呼ぶ。 e_ϕ は xy 平面上にある。 x' 方向の単位ベクトルを $e_{x'}$ とすると

$$e_r = e_{x'} \sin \theta + e_z \cos \theta$$

$$e_\theta = e_{x'} \cos \theta - e_z \sin \theta$$

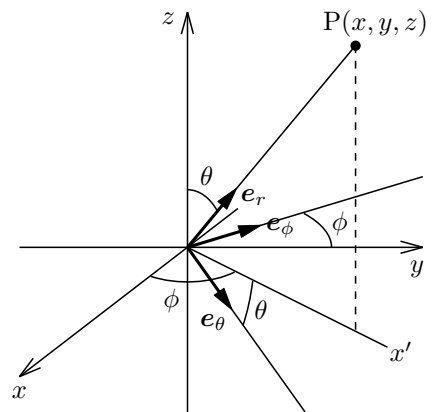
$$e_\phi = e_y \sin \phi - e_x \cos \phi$$

である。これに $e_{x'} = e_x \cos \phi + e_y \sin \phi$ を代入すると

$$e_r = e_x \sin \theta \cos \phi + e_y \sin \theta \sin \phi + e_z \cos \theta$$

$$e_\theta = e_x \cos \theta \cos \phi + e_y \cos \theta \sin \phi - e_z \sin \theta \quad (1.19)$$

$$e_\phi = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi$$



逆に e_x, e_y, e_z について解くと

$$\begin{aligned} e_x &= e_r \sin \theta \cos \phi + e_\theta \cos \theta \cos \phi - e_\phi \sin \phi \\ e_y &= e_r \sin \theta \sin \phi + e_\theta \cos \theta \sin \phi + e_\phi \cos \phi \\ e_z &= e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (1.20)$$

になる。当然のことであるが

$$\mathbf{r} = e_x r \sin \theta \cos \phi + e_y r \sin \theta \sin \phi + e_z r \cos \theta = r e_r$$

である。

質点の運動とともに r, θ, ϕ は時間的に変化する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin \theta \cos \phi &= \frac{d \sin \theta}{dt} \cos \phi + \sin \theta \frac{d \cos \phi}{dt} \\ &= \frac{d \theta}{dt} \frac{d \sin \theta}{d \theta} \cos \phi + \sin \theta \frac{d \phi}{dt} \frac{d \cos \phi}{d \phi} = \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \frac{d}{dt} \sin \theta \sin \phi &= \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{d}{dt} \cos \theta = -\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{d e_r}{dt} &= \left(\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \right) e_x + \left(\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \right) e_y - \dot{\theta} \sin \theta e_z \\ &= \dot{\theta} e_\theta + \dot{\phi} \sin \theta e_\phi \end{aligned} \quad (1.21)$$

同様にすると

$$\begin{aligned} \frac{d e_\theta}{dt} &= \left(-\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \right) e_x + \left(-\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \right) e_y - \dot{\theta} \cos \theta e_z \\ &= -\dot{\theta} e_r + \dot{\phi} \cos \theta e_\phi \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\frac{d e_\phi}{dt} = \dot{\phi} (-\cos \phi e_x - \sin \phi e_y) = -\dot{\phi} (\sin \theta e_r + \cos \theta e_\theta) \quad (1.23)$$

になる。質点の位置 \mathbf{r} は $\mathbf{r} = r e_r$ であるから

$$\frac{d \mathbf{r}}{dt} = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta e_\phi$$

したがって、速度の r, θ, ϕ 方向成分をそれぞれ v_r, v_θ, v_ϕ とすると

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\phi = r \dot{\phi} \sin \theta \quad (1.24)$$

である。もう一回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \ddot{r} e_r + \dot{r} \dot{e}_r + \frac{d r \dot{\theta}}{dt} e_\theta + r \dot{\theta} \dot{e}_\theta + \frac{d r \dot{\phi} \sin \theta}{dt} e_\phi + r \dot{\phi} \sin \theta \dot{e}_\phi \\ &= \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) e_r + \left(\dot{r} \dot{\theta} + \frac{d r \dot{\theta}}{dt} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) e_\theta \\ &\quad + \left(\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + \frac{d r \dot{\phi} \sin \theta}{dt} \right) e_\phi \\ &= \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) e_r + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) e_\theta \\ &\quad + \left(r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \right) e_\phi \end{aligned}$$

これから加速度の r, θ, ϕ 方向成分をそれぞれ a_r, a_θ, a_ϕ とすると

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.25)$$

になる。

ある方向の単位ベクトルを e とし、この方向の速度、加速度の成分を v_e, a_e とすると

$$v_e = e \cdot v, \quad a_e = e \cdot a = e \cdot \frac{dv}{dt}$$

である。

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{d}{dt} e \cdot v = \frac{de}{dt} \cdot v + e \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} \cdot v + a_e$$

であるから、 e が時間に依存しない場合には $a_e = dv_e/dt$ である。したがって、空間に固定された直交座標 x, y, z 軸については、例えば、速度の x 成分を時間微分すれば加速度の x 成分になる。しかし、極座標のように方向が質点の運動とともに変化する場合には $a_e \neq dv_e/dt$ である。微分してから成分をとること ($e \cdot dv/dt$) と成分をとってから微分すること (dv_e/dt) は一致しない。

運動が xy 平面に限られる場合 $\theta = \text{一定} = \pi/2$ である。したがって $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ より

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}, \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \quad a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) \quad (1.26)$$

ただし $v_\theta = a_\theta = 0$ である。 $r = \text{一定} = R$ とすれば (1.15), (1.16) になる。

1.5 接線成分と法線成分

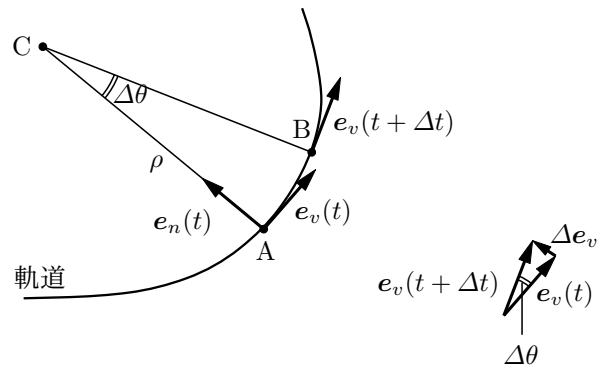
速度 v の大きさ (速さ) を $v(t)$ とし、 v の方向を向く単位ベクトルを $e_v(t)$ とすると、 $v = v e_v$ であるから

$$a = \frac{d(v e_v)}{dt} = \frac{dv}{dt} e_v + v \frac{de_v}{dt}$$

と表せる。 e_x, e_y, e_z と違い、 e_v は質点の運動とともに方向が変わるから時間の関数である。このため、 de_v/dt は 0 にはならない。

de_v/dt について考える。時刻 t と微小時間経過後の $t + \Delta t$ における質点の位置を A, B とし、 $\Delta e_v = e_v(t + \Delta t) - e_v(t)$ とする。また、 $e_v(t + \Delta t)$ と $e_v(t)$ の間の角を $\Delta\theta$ とする。 Δe_v の大きさは半径 1, 角度 $\Delta\theta$ の円弧の長さで近似できるから $|\Delta e_v| = \Delta\theta$ である。A と B における軌道の垂線の交点を C とする。 \overline{AC} と \overline{BC} はほぼ等しいから、AB 間の軌道は中心を C, 半径 $\rho(t) = \overline{AC}$ の円と見なせる。 $\angle ACB = \Delta\theta$ より AB 間の軌道の長さ Δs は $\Delta s = \rho \Delta\theta$ になるから

$$|\Delta e_v| = \Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho}$$



である。 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\Delta s/\Delta t \rightarrow v$ であるから

$$\left| \frac{d\mathbf{e}_v}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{e}_v}{\Delta t} \right| = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{\rho}$$

$\Delta \mathbf{e}_v$ の方向は、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、 $\mathbf{e}_v(t)$ に垂直な \overrightarrow{AC} の向きになる。この向きの単位ベクトルを $\mathbf{e}_n(t)$ とすると

$$\frac{d\mathbf{e}_v}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n, \quad \therefore \mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_v + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (1.27)$$

になる。速さの変化 dv/dt は軌道の接線方向（速度の方向）の加速度を生じ、一方、速度の方向の変化は、接線に垂直な方向（法線方向）の加速度をもたらす。法線方向の加速度は円運動の加速度と同じ表現である。ただし、速さ v と半径 ρ は一般には時間に依存する。

以下のようにしてもよい。テイラー級数 (10.2) を用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t + \Delta t) &= \mathbf{r}(t) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{e}_v \Delta t + \frac{1}{2} \frac{dv\mathbf{e}_v}{dt} (\Delta t)^2 + \dots \\ &= \mathbf{r}(t) + v\mathbf{e}_v \Delta t + \frac{1}{2} \left(\dot{v}\mathbf{e}_v + v \frac{d\mathbf{e}_v}{dt} \right) (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{d\mathbf{e}_v}{dt} = \tau \mathbf{e}_n$$

とおく。 \mathbf{e}_v は単位ベクトルであるから大きさは $\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_v = 1$ である。これを微分すると

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_v) = 2\mathbf{e}_v \cdot \frac{d\mathbf{e}_v}{dt} = 2\tau \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_n = 0$$

になるから \mathbf{e}_n は接線方向の単位ベクトル \mathbf{e}_v と直交する法線ベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t + \Delta t) &= \mathbf{r}(t) + v\mathbf{e}_v \Delta t + \frac{1}{2} (\dot{v}\mathbf{e}_v + v\tau \mathbf{e}_n) (\Delta t)^2 + \dots \\ &= \mathbf{r}(t) + \left(v\Delta t + \frac{\dot{v}}{2} (\Delta t)^2 \right) \mathbf{e}_v + \frac{v\tau}{2} (\Delta t)^2 \mathbf{e}_n + \dots \end{aligned}$$

になる。 Δt が小さいとき、軌道は $\mathbf{r}(t)$ を通り 2つの直交する単位ベクトル \mathbf{e}_v と \mathbf{e}_n で張られる平面上にある。 $\mathbf{r}(t)$ を原点とし \mathbf{e}_v の方向を X 軸、 \mathbf{e}_n の方向を Y 軸すると

$$X = v\Delta t + \frac{\dot{v}}{2} (\Delta t)^2, \quad Y = \frac{v\tau}{2} (\Delta t)^2$$

である。 t を固定して考えれば、 X 方向（軌道の接線方向）には初速度 $v(t)$ 、一定加速度 \dot{v} の運動、 Y 方向（軌道の法線方向）には初速度 0、一定加速度 $v\tau$ の運動をすることを表している。 Δt が小さいとき、第 1 式から $\Delta t \approx X/v$ である。これを Y に代入すると $Y = \frac{\tau}{2v} X^2$ になる。ところで、半径 ρ で中心が $X = 0, Y = \rho$ の円は、原点近傍では

$$Y = \rho - \sqrt{\rho^2 - X^2} = \rho - \rho \left(1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{\rho^2} + \dots \right) = \frac{X^2}{2\rho} + \dots$$

になるから、軌道は半径 $\rho = v/\tau$ の円である。 τ を ρ で表せば

$$\frac{d\mathbf{e}_v}{dt} = \tau \mathbf{e}_n = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n$$

になり (1.27) を得る。

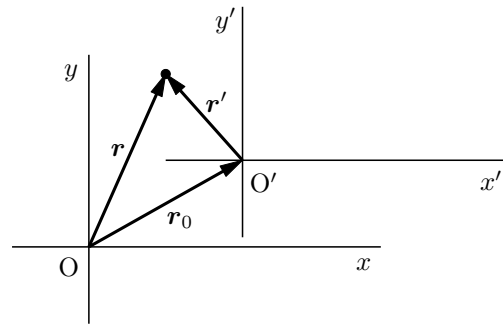
2 運動の法則

2.1 運動の第1法則

すべての物体は、力の作用を受けない限り、等速度運動（一定の速さで一直線上を運動すること）を続ける。

物体がその速度を保持し続けようとする性質を慣性 (inertia) といい、第1法則は慣性の法則とも呼ばれる。なお、等速度運動で速さが0という特別な場合は、静止し続けることである。

ここで注意すべきことは、速度は観測者（座標系）により異なるということである。図の様な2つの座標系 S (O - xyz) と S' (O' - $x'y'z'$) を考えよう。質点の位置ベクトルを S 系で \mathbf{r} 、 S' 系で \mathbf{r}' とし、 S 系での O' の位置ベクトルを \mathbf{r}_0 とする。図から $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ である。これを時間で微分すると、 S' 系における質点の速度 $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ は、 S 系における速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ と



$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \quad (2.1)$$

の関係にある。ただし、 \mathbf{v}_0 は S 系に対する S' 系の速度である。 S 系で第1法則が成り立ち \mathbf{v} が一定でも、 \mathbf{v}_0 が一定でないなら \mathbf{v}' は一定でなくなり、 S' 系では第1法則が成り立たない。この様に、第1法則はある特別な座標系で成り立つ。この座標系を慣性系 (inertial system) という。ところで、慣性系を設定できるという保証は何もない。そこで、先ず第一に、慣性系の存在を公理として認めよう、というのが運動の第1法則の持つ意味である。

(2.1) から、 S' が慣性系 S に対して等速度運動しているならば、 S' も慣性系である。したがって、慣性系は無数にある。

問 2.1 (2.1) より、 S' における加速度 \mathbf{a}' と S における加速度 \mathbf{a} の関係を求めよ。特に、 \mathbf{v}_0 が一定の場合、加速度は一致するを示せ。したがって、加速度は慣性系によらない。

2.2 運動の第2法則

慣性系から見た場合、質点は力を受けるとその方向に加速度を生じ、加速度の大きさは力の大きさに比例し、質点の質量に逆比例する。

質量 m の質点に力 \mathbf{F} が作用したとき、生じる加速度を \mathbf{a} とすると、第2法則は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2.2)$$

というベクトルの式で表せる。これをニュートンの運動方程式 (Newton's equation of motion) という。同じ力に対して、質量 m が大きいほど加速度、つまり速度の変化は小さい。言い換えれば、質量が大きいほど慣性は大きいから、質量 m を慣性質量 (inertial mass) とも呼ぶ。

一般に、 \mathbf{F} は質点の位置 \mathbf{r} 、速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 及び時間 t の関数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ である。加速度は質点の位置ベクトルで表すと $\ddot{\mathbf{r}}$ であるから、運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (2.3)$$

と書ける。 F が分かっている場合、この方程式を満たす $\mathbf{r}(t)$ が求めれば、質点の運動は決まる。このように、求めたい量 (ここでは $\mathbf{r}(t)$) を導関数の形で含む方程式を微分方程式 (differential equation) という。

我々の日常的スケールのすべての自然現象は、原理的には簡単な数学的構造の運動方程式 (2.3) で説明できる。これは驚異的なことであり、ここに物理学の素晴らしさの一端が現れている。ここで、“日常的スケール”、“原理的には” という限定がつくが。この講義で行うことは、どのようにして (2.3) を解き $\mathbf{r}(t)$ を求めるか、ということに尽きる。極論すれば、暗記しておくべきことは (2.3) だけであり、後は数学を使って様々な現象を解析する。

次元 力学に現れる物理量は長さ (L)、質量 (M)、時間 (T) を組み合わせた単位で表せるが、この組み合わせを物理学的次元、あるいは単に次元 (dimension) という。速度の単位は長さを時間で割ったものであるから、速度の次元を $[\text{速度}] = [\text{LT}^{-1}]$ と表す。加速度と力の次元は

$$[\text{加速度}] = \frac{[\text{速度}]}{[\text{時間}]} = [\text{LT}^{-2}] \quad [\text{力}] = [\text{質量}][\text{加速度}] = [\text{MLT}^{-2}]$$

である。長さをメートル (m)、質量をキログラム (kg)、時間を秒 (s) で測る MKS 単位系では、加速度の単位は m/s^2 、力の単位は $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ になる。 $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ を N (ニュートン) で表す。

物理の数式や方程式の両辺は同じ次元でなければならない。また、異なる次元の物理量の和はありえない。この性質を利用して、物理量の間関係を推定したり、解の妥当性を検討できる。これを次元解析 (dimensional analysis) という。例えば、長さ l のひもに質量 m のおもりを付けた単振り子の周期 T を求めてみよう。 g を重力加速度とすると、考えている系の物理定数は l, m, g だけであるから、 C を無次元の定数とすると周期は $T = C l^a m^b g^c$ と書ける。周期の次元は時間であるから

$$[\text{T}] = [\text{L}^a \text{M}^b (\text{LT}^{-2})^c] = [\text{L}^{a+c} \text{M}^b \text{T}^{-2c}]$$

これから $a + c = 0, b = 0, -2c = 1$ である。したがって、 $a = 1/2, b = 0, c = -1/2$ 、つまり、周期は $C\sqrt{l/g}$ となり、よく知られた結果が得られる。ただし、定数 C は決まらない。

なお、 $\sin x, e^x$ などの関数の引数 x は無次元である。これも計算のチェックに役立つ。次元を調べる習慣を身につけよ。

問 2.2 等速円運動をしている質点の質量、速さ及び円の半径を m, v, r とする。向心力の大きさを $m^a v^b r^c$ とするとき、次元解析により a, b, c を求めよ。

2.3 運動方程式の解法

質点が一定の力 F を受けて直線運動をしている場合を例にして、運動方程式の解法を具体的に考える。 x 軸上を運動しているとすると、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \quad (2.4)$$

である。なお、時間に依存する量 $A(t)$ も単に A と書き、時間依存性をわざわざ明記しない。扱う問題に応じて、何か t の関数で何が定数か、きちんと把握すること。

微分方程式を解く

$F = mf$ とし、運動方程式を $v = \dot{x}$ で表せば

$$\frac{dv}{dt} = f \quad (2.5)$$

である。この場合 f は定数であるから、 t で積分すると

$$\frac{dx}{dt} = v = \int f dt = ft + C_1 \quad (2.6)$$

になる。ここで C_1 は任意の積分定数である。もう一度 t で積分すると、 C_2 を新たな任意定数として

$$x = \frac{1}{2}ft^2 + C_1t + C_2 \quad (2.7)$$

を得る。

(2.4) は t の 2 階微分を含むので 2 階の微分方程式という。一方、(2.5) は 1 階の微分方程式である。一般に、微分方程式に含まれる最高次の微分が n 階であるとき、 n 階の微分方程式という。例えば

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

は 2 階の微分方程式である。

2 階の微分方程式 (2.4) の解 (2.7) は、任意の積分定数を 2 つ含む。この微分方程式は素直に時間 t で積分すれば解が求まったが、いつでもこの様に簡単に求まるわけではない。しかし、2 階の微分方程式を解くと、解は必ず積分定数を 2 つ含む。積分定数を含む解を微分方程式の一般解という。一般に、 n 階の微分方程式の一般解は n 個の積分定数を含む。

初期条件

運動を決定するには、一般解に含まれる積分定数を決める必要がある。そのため、ある時刻での質点の位置と速度を指定する条件がよく使われる。これを初期条件 (initial condition) という。初期条件を与えると積分定数は一義的に決まり、運動も確定する。ある時刻での位置と速度を与えると、任意の時刻での運動が決定することを因果律 (causality) という。

初期条件として、 $t = 0$ のとき質点が原点に静止していたとする。つまり

$$x(t = 0) = 0, \quad v(t = 0) = 0 \quad (2.8)$$

である。(2.6), (2.7) に $t = 0$ を代入すると $C_1 = 0, C_2 = 0$ と決まる。したがって、(2.8) の初期条件のもとで (2.4) の解は

$$x = \frac{1}{2}ft^2$$

になる。この解のように任意定数を含まない微分方程式の解を特解 (特殊解) という。

2.4 運動方程式の数値解法

運動方程式を現実の問題に適用すると、多くの場合、解析的解を求めることは困難である。このようなとき、計算機を用いた数値解法により運動方程式を解くことになる。ここでは、1 次元の運動で質点に働く力が位置 x に依存する場合を扱う。力を $mf(x)$ とすると運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x(t)) \quad (2.9)$$

である。

オイラー法

(2.9) を

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad \frac{dv}{dt} = f(x(t)) \quad (2.10)$$

という2つの変数 x, v についての1階の連立微分方程式に書き直す。微分を h が小さいとして

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \quad \frac{dv}{dt} \approx \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

で近似すると, (2.10) は

$$x(t+h) \approx x(t) + hv(t), \quad v(t+h) \approx v(t) + hf(x(t)) \quad (2.11)$$

になる。時刻 t での $x(t), v(t)$ が分かっているならば, 次の時刻 $t+h$ における $x(t+h), v(t+h)$ を数値的に求めることができる。この方法をオイラー法という。初期条件として $t=t_0$ における位置と速度が与えられれば, $t=t_0+nh$ での位置と速度を計算できる。具体例として

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x, \quad \text{初期条件 } x(0) = 1, \quad v(0) = 0 \quad (2.12)$$

を考える。この微分方程式と初期条件を満たす解析解は $x(t) = \cos t$ である。これは代入してみれば確かめられる。(2.11) を用いて数値解を求めよう。 $h = 0.1$ とすると

$$x(h) = x(0) + hv(0) = 1$$

$$v(h) = v(0) - hx(0) = -h = -0.1$$

$$x(2h) = x(h) + hv(h) = 1 - 0.1 \times 0.1 = 0.99$$

$$v(2h) = v(h) - hx(h) = -0.1 - 0.1 = -0.2$$

$$x(3h) = x(2h) + hv(2h) = 0.99 - 0.1 \times 0.2 = 0.97$$

$$v(3h) = v(2h) - hx(2h) = -0.2 - 0.1 \times 0.99 = -0.299$$

以下同様のことを繰り返し行えば, $x(nh), v(nh), (n = 1, 2, 3, \dots)$ が次々に求まる。このような単純作業を繰り返し手計算で行うのは大変であるが, 計算機を用いれば簡単である。 $h = 0.1$ でも極端に変な結果にはならないが精度はよくない(次の図の点線)。精度のよい結果を得るには, h を例えば 0.01 といった非常に小さな値にすればよいが(図の破線), $h = 0.1$ に比べて10倍の計算量が必要になる。 h を小さくせずに計算精度を上げる方法を考えよう。

問 2.3 微分方程式 (2.12) をオイラー法で解く場合, $x_n = x(nh)$ は漸化式

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + (1+h^2)x_n = 0$$

を満たすことを示せ。この漸化式を解き, 与えられた初期条件を満たす x_n が

$$x_n = \frac{(1+ih)^n + (1-ih)^n}{2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

になることを示せ。なお, $nh = \text{一定} = t$ として $n \rightarrow \infty$ のとき $x_n \rightarrow \cos t$ になる。

改良オイラー法

オイラー法では, 時刻 t と $t+h$ の間の平均速度 $(x(t+h) - x(t))/h$ を最初の時刻 t における速度 $v(t)$ で近似する。 t と $t+h$ では速度は異なるから, t の速度ではなく中間時間 $t+h/2$ での速度を用いた方がより正確であろう。そこで

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx v(t+h/2) \quad \text{つまり} \quad x(t+h) \approx x(t) + hv(t+h/2)$$

同様に

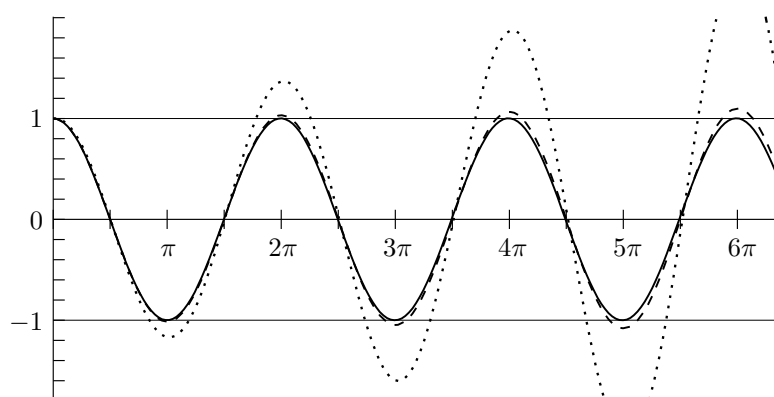
$$v(t+h) \approx v(t) + hf(x(t+h/2))$$

で近似する。 $x(t+h/2)$ と $v(t+h/2)$ は $x(t), v(t)$ からオイラー法で求める。まとめると、 $x(t), v(t)$ が既知であるとき

$$x(t+h/2) \approx x(t) + \frac{h}{2}v(t), \quad v(t+h/2) \approx v(t) + \frac{h}{2}f(x(t)) \quad (2.13)$$

$$x(t+h) \approx x(t) + hv(t+h/2), \quad v(t+h) \approx v(t) + hf(x(t+h/2)) \quad (2.14)$$

により $x(t+h), v(t+h)$ を求める。これを改良オイラー法という。 $h=0.1$ として改良オイラー法で (2.12) を解いた結果を下図に実線で示す。改良オイラー法はオイラー法に比べて 2 倍の計算量であるが、精度は格段に向上する。図で見る限り、改良オイラー法の結果は真の解 $\cos t$ に一致している。この範囲の計算で改良オイラー法の最大誤差は約 0.03 である。一方、 $h=0.01$ としたオイラー法の場合は約 0.1 である。



一般に n 個の変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ に対する 1 階の n 元連立微分方程式

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (2.15)$$

の解法を考える。これまで扱った微分方程式は $n=2$ で

$$F_1(X_1, X_2, t) = X_2, \quad F_2(X_1, X_2, t) = f(X_1)$$

という特別な場合である。(2.15) に対する改良オイラー法は

$$\mathbf{X}(t+h/2) = \mathbf{X}(t) + \frac{h}{2}\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t), \quad \mathbf{X}(t+h) = \mathbf{X}(t) + h\mathbf{F}(\mathbf{X}(t+h/2), t+h/2)$$

になる。オイラー法と改良オイラー法はルンゲ・クッタ型公式の一種である。実際の数値計算では、改良オイラー法より精度のよい古典的ルンゲ・クッタ法がよく使われる。

次章から解析的に解ける代表的な運動について考察するが、同じ問題を数値的に解いてみて、解析解と比較するのも興味深いことである。最近、パソコン用のフリーで優秀な C あるいは FORTRAN のコンパイラが存在するし、安価なパソコンでも数値計算能力は飛躍的に向上している。パソコンさえあれば、本格的な数値計算が行える環境を容易に作れる。

<http://physics.s.chiba-u.ac.jp/~kurasawa/index.html>

にコンパイラの入手法などについて簡単な解説がある。

2.5 運動の第3法則

物体1が物体2に力 \mathbf{F}_{12} を及ぼすとき、物体2は必ず物体1に対して、大きさが同じで逆向き
の力 \mathbf{F}_{21} を及ぼす。すなわち $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ である。

一方の力を作用、他方の力を反作用ということがある。このため、この法則は作用反作用の法則 (law of action and reaction) と呼ばれる。

運動量保存則

質点1と2の質量を m_1, m_2 、速度を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とし、これらが互いに力を及ぼし合うとともに、他からの力(外力)が働いているとする。質点が互いに及ぼし合う力を内力という。それぞれの質点に作用する外力を $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ とすると、質点の運動方程式は

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1, \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2 \quad (2.16)$$

である。この2つの方程式を足し合わせると、 $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ であるから

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (2.17)$$

になる。ここで、 $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ と $\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$ を質点1と2の運動量 (momentum) という。外力が働かなければ、各々の運動量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ が時間的に変化する場合でも、運動量の和 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ は時間的に一定になる。これを運動量保存則 (momentum conservation law) という。一般に、物理学では“保存 = 時間的に一定”を意味する。

質点1, 質点2の位置をそれぞれ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする。このとき

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

を重心 (center of mass) という。 $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1, \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$ であるから、(2.17) は

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

になる。これは質量 $m_1 + m_2$ の1つの質点の運動と同じである。重心運動には外力だけ影響する。外力がない場合、重心は等速度運動を行う。運動量保存則 = 重心は等速度運動である。

ロケットの加速

直進するロケットの加速について考える。ロケットの質量は本体の質量と燃料ガスの質量からなる。ロケットはガスを噴射して、その質量は時間とともに減少する。ある時刻 t におけるロケットの速度を $v(t)$ 、質量を $m(t)$ とする。ロケットの速度は慣性系から見たときの速度である。微小時間 dt の間にロケットの質量は $m + dm$ になり、速度は増加して $v + dv$ になったとする。ここで $dm < 0$ であり、 $-dm$ が噴射ガスの質量である。噴射ガスはロケットから見て一定の速さ u で v とは逆向きに噴射されるとする。

慣性系から見たときの噴射ガスの速度は $v - u$ であるから、時刻 $t + dt$ での運動量はロケットの運動量 $(m + dm)(v + dv)$ と噴射ガスの運動量 $-dm(v - u)$ からなる。時間間隔 dt における運動量変化 dp は

$$dp = \left[(m + dm)(v + dv) - dm(v - u) \right] - mv = m dv + u dm \quad (2.18)$$

である。ただし、微小量の2乗 $dm dv$ を無視した。ロケットに外力が作用していない場合、運動量保存則から $dp = 0$ である。したがって

$$dv = -u \frac{dm}{m}, \quad \text{つまり} \quad \int dv = -u \int \frac{dm}{m}$$

この積分を実行すると、 C を積分定数として

$$v = -u \log m + C$$

になる。 $v = 0$ のときの質量を m_0 とすると、 $C = u \log m_0$ であるから

$$v = u \log \frac{m_0}{m}$$

を得る。最終的に m が m_0 に比べ十分小さくなれば、ロケットはガスの噴射速度 u と同程度の速度を得る。例えば、 $m = e^{-1}m_0 = 0.37m_0$ のとき $v = u$ である。

地上から発射されるロケットでは、外力である重力が作用するから、この効果を考慮する必要がある。ロケットの直進方向に外力 F_{ext} が作用する場合、運動方程式 $dp/dt = F_{\text{ext}}$ に (2.18) を代入すると

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} = F_{\text{ext}} \quad (2.19)$$

になる。 $m(t)$, F_{ext} が与えられれば、この方程式から $v = v(t)$ が求まる。

問 2.4 (2.19) を解き、時刻 $t = 0$ で地上から鉛直上向きに打ち上げられたロケットの速度を求めよ。ただし、一定量のガスを噴射するとして $m(t) = m_0(1 - \alpha t)$ とする。 α は正の定数である。また、外力を $F_{\text{ext}} = -m(t)g$ とする。

3 一様重力での運動

地上の物体は鉛直下向きに大きさ mg の重力を受ける。 m は質量, g は重力加速度である。この力だけが作用する場合, 物体の軌道が放物線になることは, よく知られたことである。

空気中を物体が運動するとき, 実際には, 空気からこの物体の運動を妨げる抵抗力が作用する。この空気の抵抗は, 物体の形状や運動などに複雑に依存する。しかし, 近似的には, 抵抗力は速度と反対方向に働き, その大きさは, 速さ v が小さいとき v に比例し, v が大きいとき v^2 に比例するとしてよい。式で書くと, 抵抗力 \mathbf{R} は

$$\mathbf{R} = \begin{cases} -\alpha \mathbf{v} & v \text{ が小さいとき} \\ -\beta v \mathbf{v} & v \text{ が大きいとき} \end{cases} \quad (3.1)$$

である。ただし, α と β は正の比例係数である。

3.1 速度に比例する抵抗力がある場合

運動方程式を速度 \mathbf{v} で表すと

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - \alpha \mathbf{v} \quad (3.2)$$

である。ここで, \mathbf{g} は大きさ g で鉛直下向きのベクトルである。 x 軸を水平方向, y 軸を鉛直上向きにとる。(3.2) を m で割ったものは

$$\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\alpha \left(v_y + \frac{g}{\alpha} \right), \quad \alpha = \frac{\alpha}{m} \quad (3.3)$$

になる。この場合, x 成分と y 成分を別々に解くことができる。また, x 成分の方程式は y 成分で $g=0$ とすれば得られるから, y 成分の方程式を考えよう。この方程式は

$$\frac{dv_y}{v_y + g/\alpha} = -\alpha dt \quad \text{つまり} \quad \int \frac{dv_y}{v_y + g/\alpha} = -\alpha \int dt$$

になるから, 積分を実行すると C を任意定数として

$$\log \left| v_y + \frac{g}{\alpha} \right| = -\alpha t + C, \quad \therefore v_y = -\frac{g}{\alpha} \pm e^{C-\alpha t} = -\frac{g}{\alpha} + C_1 e^{-\alpha t} \quad (3.4)$$

ただし, $C_1 = \pm e^C$ は任意定数である。もう一度積分すると

$$y = \int v_y dt = -\frac{g}{\alpha} t - \frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha t} + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}) \quad (3.5)$$

になる。 v_x, x は $g=0$ とすればよいから

$$v_x = D_1 e^{-\alpha t}, \quad x = -\frac{D_1}{\alpha} e^{-\alpha t} + D_2 \quad (D_1, D_2 \text{ は積分定数}) \quad (3.6)$$

これで (3.2) の一般解が求まった。

初期条件として $t=0$ において

$$x = x_0, \quad v_x = v_{0x}, \quad y = y_0, \quad v_y = v_{0y}$$

とする。(3.4), (3.5), (3.6) で $t=0$ とすると

$$-\frac{g}{\alpha} + C_1 = v_{0y}, \quad C_2 - \frac{C_1}{\alpha} = y_0, \quad D_1 = v_{0x}, \quad D_2 - \frac{D_1}{\alpha} = x_0$$

したがって

$$v_y = -\frac{g}{a} + \left(v_{0y} + \frac{g}{a}\right)e^{-at}, \quad y = y_0 - \frac{g}{a}t + \frac{1}{a}\left(v_{0y} + \frac{g}{a}\right)(1 - e^{-at}) \quad (3.7)$$

$$v_x = v_{0x}e^{-at}, \quad x = x_0 + \frac{v_{0x}}{a}(1 - e^{-at}) \quad (3.8)$$

である。

$t \rightarrow \infty$ の場合を考える。 $a > 0$ より $e^{-at} \rightarrow 0$ であるから、(3.7) と (3.8) は

$$v_x \rightarrow 0, \quad v_y \rightarrow -v_\infty = -\frac{g}{a} = -\frac{mg}{\alpha}$$

になる。初期条件に依らず、質点は最終的には一定の速さ v_∞ で鉛直に落下する。この速さを終端速度という。 v_∞ は重力 mg と抵抗力 αv_y が釣りあう速さである。 y 方向の合力が 0 になるため、質点は鉛直方向に等速運動をする。

抵抗力が 0 の極限 ($a \rightarrow 0$) では、(3.7) と (3.8) は高校で学んだ放物運動の結果に一致すべきであるが、 $1/a$ で発散する様に見える。(3.7) を $1/a$ でまとめると

$$y = y_0 + v_{0y}\frac{1 - e^{-at}}{a} + g\frac{1 - at - e^{-at}}{a^2}$$

ここで、指数関数 e^x のマクローリン展開 (10.3) を使うと

$$1 - e^{-at} = at \left(1 - \frac{at}{2} + \dots\right), \quad 1 - at - e^{-at} = -\frac{(at)^2}{2} \left(1 - \frac{at}{3} + \dots\right)$$

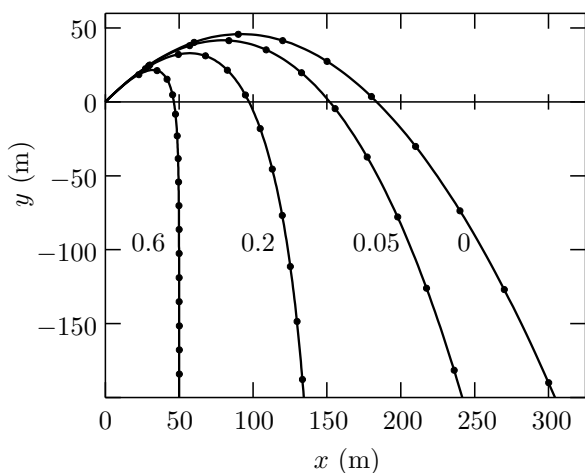
であるから、 $a \rightarrow 0$ のとき

$$y = y_0 + v_{0y}t \left(1 - \frac{at}{2}\right) - \frac{1}{2}gt^2 \left(1 - \frac{at}{3}\right) \rightarrow y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.9)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \left(1 - \frac{at}{2}\right) \rightarrow x_0 + v_{0x}t \quad (3.10)$$

になる。これは抵抗力がない場合の放物運動の公式にほかならない。

次の図に (3.7) と (3.8) で決まる軌道の数値計算例を示す。初期条件を $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_{0y} = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$ とした。各曲線の脇に示した数値は抵抗力の比例係数 a の値である。また、● は 1 秒ごとの質点の位置を表す。 $a = 0$ は抵抗力がない場合であるから、軌道は放物線になる。抵抗力が大きくなると、軌道は放物線からずれてくる。(3.9), (3.10) は、その導き方から分かるように、 $a \rightarrow 0$ でなくても $|at| \ll 1$ ならばよい近似として成り立つ。したがって、 $|t| \ll 1/a$ ならば、軌道は $a = 0$ の軌道とほぼ一致する。



問 3.1 (3.7) の y について、右辺の各項の次元を調べ、次元的に正しいことを確かめよ。

問 3.2 (3.8) から $t \rightarrow \infty$ での x を求めよ。上の図に与えた a の場合、この極限値を計算し図と比較せよ。

問 3.3 $v_{0y} > 0$ のとき、質点が最高点に到達するまでの時間を求めよ。

問 3.4 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $f(c) = g(c) = 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ である (ロピタルの定理)。これを用いて $a \rightarrow 0$ における (3.7), (3.8) の極限を求めよ。

3.2 速度の 2 乗に比例する抵抗力がある場合

x 軸を水平方向, y 軸を鉛直上向きにとる。速度の 2 乗に比例する抵抗 $-\beta v v$ がある場合, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ であるから, 運動方程式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\beta v v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \beta v v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.11)$$

になる。 x 成分の方程式には v_y が, y 成分の方程式には v_x が含まれているから, x 成分と y 成分を別々に扱うことはできない。このため, 一般には解析的に解けない。そこで質点が鉛直線上で落下している場合だけを考えることにする ($v_x = 0, v_y < 0$)。

$v_y < 0$ より $\sqrt{v_y^2} = -v_y$ であるから, y 成分の運動方程式は, $\beta = mb$ とおくと

$$\frac{dv_y}{dt} = -g + b v_y^2 = b(v_y^2 - v_\infty^2), \quad v_\infty = \sqrt{\frac{g}{b}} \quad (3.12)$$

したがって

$$\frac{dv_y}{v_y^2 - v_\infty^2} = b dt = \frac{g}{v_\infty^2} dt$$

これを積分すると

$$\frac{1}{2v_\infty} \log \left| \frac{v_y - v_\infty}{v_y + v_\infty} \right| = \frac{gt}{v_\infty^2} + C, \quad C \text{ は積分定数}$$

v_y について解くと ($C_1 = \pm e^{2v_\infty C}$)

$$v_y = \frac{e^{-2gt/v_\infty} + C_1}{e^{-2gt/v_\infty} - C_1} v_\infty = -v_\infty - \frac{v_\infty^2}{g} \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad f(t) = e^{-2gt/v_\infty} - C_1 \quad (3.13)$$

ここで f' は f の導関数である。したがって, 一般解として

$$\begin{aligned} y &= \int v_y dt = -v_\infty t - \frac{v_\infty^2}{g} \log |f(t)| + C_2 \\ &= -\frac{v_\infty^2}{g} \log \left| e^{-gt/v_\infty} - C_1 e^{gt/v_\infty} \right| + C_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

を得る。

初期条件を $t = 0$ で $v_y = 0, y = h$ とする。(3.13) と (3.14) で $t = 0$ とすると

$$v_y = \frac{1 + C_1}{1 - C_1} v_\infty, \quad y = -\frac{v_\infty^2}{g} \log |1 - C_1| + C_2$$

である。 $v_y = 0$ と $y = h$ を代入すると $C_1 = -1, C_2 = h + v_\infty^2 \log 2/g$ になるから

$$v_y = -\frac{1 - e^{-2gt/v_\infty}}{1 + e^{-2gt/v_\infty}} v_\infty, \quad y = h - \frac{v_\infty^2}{g} \log \frac{e^{gt/v_\infty} + e^{-gt/v_\infty}}{2} \quad (3.15)$$

を得る。

$t \rightarrow \infty$ の場合 $e^{-2gt/v_\infty} \rightarrow 0$ であるから $v_y \rightarrow -v_\infty$ となり、一定速度で落下する。速度に比例する抵抗力の場合と同様に、この速度は重力 mg と抵抗 mbv_y^2 がつりあう速度である。(3.13) から分かるように、任意の初期条件に対して $t \rightarrow \infty$ のとき $v_y \rightarrow -v_\infty$ である。

地上 ($y = 0$) に到達するまでの経過時間を求めよう。 $X = e^{gt/v_\infty}$ とすると、(3.15) より

$$0 = h - \frac{v_\infty^2}{g} \log \frac{X + X^{-1}}{2}, \quad \text{つまり} \quad X^2 - 2e^{gh/v_\infty^2} X + 1 = 0$$

したがって

$$X = e^{gh/v_\infty^2} \pm \sqrt{e^{2gh/v_\infty^2} - 1} = e^{gh/v_\infty^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - e^{-2gh/v_\infty^2}} \right)$$

$t > 0$ ならば $X = e^{gt/v_\infty} > 1$ であるから、+の方をとり

$$t = \frac{v_\infty}{g} \log X = \frac{h}{v_\infty} + \frac{v_\infty}{g} \log \left(1 + \sqrt{1 - e^{-2gh/v_\infty^2}} \right) \quad (3.16)$$

を得る。 h/v_∞ は一定速度 v_∞ で距離 h 進むのに要する時間である。

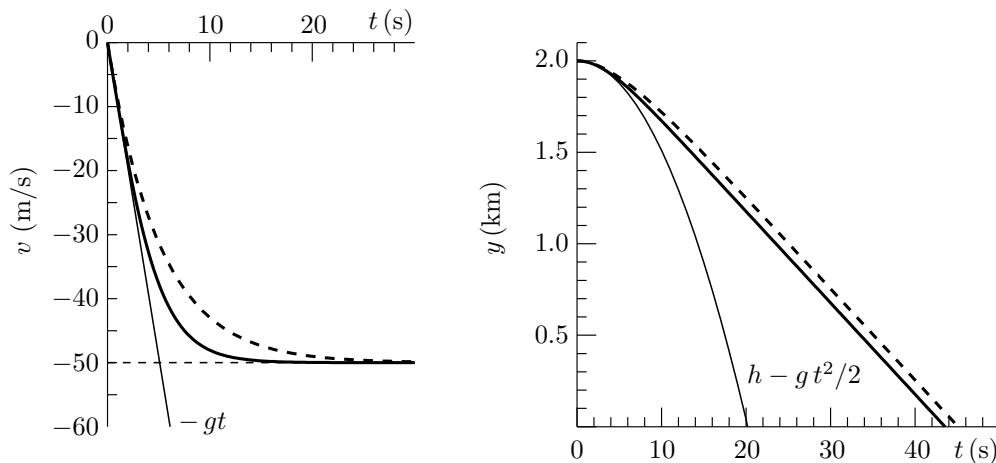
スカイダイビングでは $v_\infty \approx 50 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}$ のようである。 $h = 2000 \text{ m}$ から落下したとすると、 $e^{-2gh/v_\infty^2} = e^{-15.68} = 1.5 \times 10^{-7}$ は無視できるから、地上に到達する時間は

$$t = \frac{h}{v_\infty} + \frac{v_\infty \log 2}{g} = 40 + \frac{50 \log 2}{9.8} = 43.5 \text{ s}$$

になる。(3.15) から、 $t = 2v_\infty/g = 10.2 \text{ s}$ のとき

$$v = -\frac{1 - e^{-4}}{1 + e^{-4}} v_\infty = -0.96 v_\infty$$

したがって、落下して約 10 秒後にはほぼ終端速度に達し、その後約 30 秒間は等速で落下し地上に到達する。次の図に (3.15) の $v(t)$, $y(t)$ の数値結果を太い線で示す。破線は、同じ終端速度になる速度に比例する抵抗力の結果である。抵抗がない場合、地上に到達する時間は $t = \sqrt{2h/g} = 20.2 \text{ s}$ である。このとき、速さは $gt = 198 \text{ m/s} = 713 \text{ km/h}$ になる。



問 3.5 (3.15) の y が、 $\sqrt{bt} \rightarrow 0$ では $y \rightarrow h - \frac{1}{2}gt^2$ になることを示せ。

問 3.6 $t = 2v_\infty/g$ である時間 t までに、落下する距離を求めよ。 $v_\infty = 50 \text{ m/s}$ の場合、この距離は何メートルか。

変数分離型 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

を変数分離型という。右辺は x の関数 $F(x)$ と y の関数 $G(y)$ の積の形である。この形式の方程式は

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x) dx \quad \text{つまり} \quad \int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x) dx$$

になるから、両辺の積分が実行できれば y を x の関数として求めることができる。これまで扱ってきた (3.3), (3.12) はこのタイプである。

4 振動

4.1 単振動

ある定点からの距離に比例する引力を受け、その点を通る直線上で動く運動を考える。定点を原点とし直線を x 軸にとる。 k を正の定数とすれば引力は $-kx$ と表せるから、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

になる。両辺を m で割れば

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad (4.1)$$

である。この形の運動方程式に従う運動を単振動 (simple oscillation) または調和振動 (harmonic oscillation) といい、この振動をする質点を調和振動子 (harmonic oscillator) という。

$\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ は

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t = -\omega^2 \cos \omega t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = -\omega^2 \sin \omega t$$

であるから、(4.1) の解である。この2つを重ね合わせたもの、すなわち A と B を任意定数とするとき

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.2)$$

も (4.1) の解である。これは任意定数を2つ含むから (4.1) の一般解である。(4.2) は

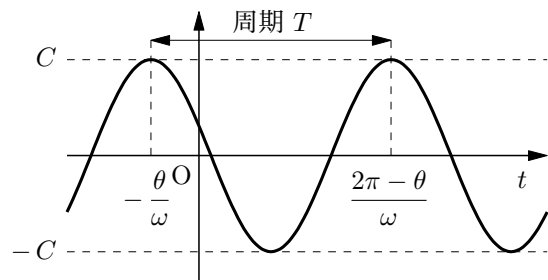
$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \theta = -B/A$$

とすると $A = C \cos \theta$, $B = -C \sin \theta$ であるから

$$x = C \cos \omega t \cos \theta - C \sin \omega t \sin \theta = C \cos(\omega t + \theta) \quad (4.3)$$

とも書ける。この場合 C と θ の2つが任意定数である。

単振動 (4.3) において、 C を振幅 (amplitude), $\omega t + \theta$ を位相 (phase), θ を $t = 0$ での位相であるから初期位相という。位相が 2π だけ進めば x はもとに戻るの、これに要する時間を周期 (period) という。周期を T とすると $\omega T = 2\pi$, つまり $T = 2\pi/\omega$ である。単位時間には $1/T$ 回同じ振動が繰り返されるので $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ を振動数 (frequency), 2π を掛けて角度で表した角速度 $\omega = 2\pi\nu$ を角振動数 (angular frequency) ともいう。



(4.1) を $v = \dot{x}$ で表すと

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

である。右辺は v の関数ではないから変数分離型の方法は使えない。また、積分して

$$v = -\omega^2 \int x dt$$

としても、 x は未知の t の関数であるから積分できない。 x が時間の関数であることを忘れて積分を行い、 $v = -\omega^2 x t$ などとしないように。

問 4.1 初期条件として $t = 0$ のとき $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ とする。(4.2) の定数 A , B を x_0 , v_0 で表せ。

4.2 減衰振動

実際の振動には何らかの抵抗が働き、振動はやがて止まってしまう。そこで、単振動に速度に比例する抵抗力 $-b\dot{x}$ (b は正の定数) が加わった場合を考える。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

すなわち

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad (4.4)$$

である。この微分方程式を定数係数の 2 階の同次線形微分方程式という。ここで、線形 (linear) とは x について 1 次のみを含むということである。この微分方程式は物理や工学でしばしば現れる重要な微分方程式である。線形方程式の重要な性質は、重ね合わせ (superposition) が成り立つことである。つまり、 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が (4.4) の解であるとき、この 2 つを定数倍して足し合わせたもの $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ も (4.4) の解になる。なぜなら

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} (C_1 x_1 + C_2 x_2) + 2\gamma \frac{d}{dt} (C_1 x_1 + C_2 x_2) + \omega^2 (C_1 x_1 + C_2 x_2) \\ &= C_1 \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_1}{dt} + \omega^2 x_1 \right) + C_2 \left(\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_2}{dt} + \omega^2 x_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

(4.4) に x の 2 次以上の項があれば、重ね合わせは成り立たない。

(4.4) の一般解は次のようにして求める。(4.4) に対応して 2 次方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad (4.5)$$

を考える。この 2 次方程式の根を α, β とする、つまり

$$\alpha = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \beta = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

である。ここで、天下りの的ではあるが $x = e^{\alpha t}$ としてみる。 $\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}$, $\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}$ である。これらを (4.4) に代入すれば $x = e^{\alpha t}$ が微分方程式 (4.4) を満たすことは容易に分かる。同様に、 $x = e^{\beta t}$ も解になる。したがって、重ね合わせより A, B を任意定数とすると $\alpha \neq \beta$ ならば

$$x = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} \quad (4.6)$$

が一般解である。 $\alpha = \beta$ のとき $x = (A + B)e^{\alpha t}$ になり任意定数 $A + B$ を 1 つだけ含むから一般解ではない。この場合、別途考察する必要がある。

$e^{\alpha t}, e^{\beta t}$ という解を仮定せずに (4.6) を導こう。根と係数の関係 $\alpha + \beta = -2\gamma$, $\alpha\beta = \omega^2$ を使うと微分方程式 (4.4) は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - \alpha x \right) - \beta \left(\frac{dx}{dt} - \alpha x \right) = 0$$

になる。ここで $y = \dot{x} - \alpha x$ とおくと (4.4) は

$$\frac{dy}{dt} - \beta y = 0$$

になる。この方程式の解は C を任意定数として $y = C e^{\beta t}$ であるから

$$\frac{dx}{dt} - \alpha x = C e^{\beta t}$$

右辺 = 0 ならば解は直ぐに求められる。そこで $x = z + C'e^{\beta t}$ とすると

$$\frac{dx}{dt} - \alpha x - C'e^{\beta t} = \frac{dz}{dt} - \alpha z + (C'\beta - C'\alpha - C)e^{\beta t} = 0$$

になるから、 $\alpha \neq \beta$ のとき $C' = C/(\beta - \alpha)$ とすると

$$\frac{dz}{dt} - \alpha z = 0$$

である。この方程式の解は D を任意定数として $z = D e^{\alpha t}$ である。したがって

$$x = \frac{C}{\beta - \alpha} e^{\beta t} + D e^{\alpha t}$$

を得る。 $C/(\beta - \alpha)$ は任意定数であるから、これを C と置きなおせば (4.6) と同じ形式になる。

(4.5) の根 α, β は実数とは限らないから、解 (4.6) の性質を調べるためには、判別式による場合分けが必要である。

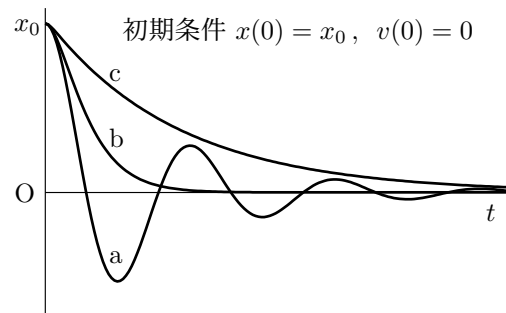
$\gamma < \omega$ の場合 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ とおくと、2 根は複素数 $-\gamma \pm i\omega'$ になるから、一般解 (4.6) は

$$x = A e^{-\gamma t + i\omega' t} + B e^{-\gamma t - i\omega' t} = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega' t} + B e^{-i\omega' t})$$

になる。 x は変位であるから実数でなければならない。 x が実数である条件は、 $x = x^*$ より $B = A^*$ である。(10.12) より C, θ を任意実数として、 $A = C e^{i\theta} / 2$ とおけるから

$$x = 2 e^{-\gamma t} \operatorname{Re}(A e^{i\omega' t}) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \theta) \quad (4.7)$$

を得る。ただし、オイラーの公式 (10.9) を用いた。抵抗力がない場合 ($\gamma = 0$) は (4.3) を再現する。一方、 $\gamma \neq 0$ のときも (4.7) は振動する解であるが、 $e^{-\gamma t}$ のため振幅が時間とともに指数関数的に減少する。また、角振動数が $\omega = \sqrt{k/m}$ ではなく $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ に減っている。この様な振動を減衰振動 (damped oscillation) という (右図 a)。減衰振動では、抵抗力が大きいほど早く減衰する。



$\gamma > \omega$ の場合 2 根はどちらも負の実数であるから、 A, B を実数にとれば (4.6) の x は実数になる。根は負であるから、(4.6) は時間とともに単調に減少するだけで振動しない。この様な運動を過減衰 (overdamping) という (図 c)。抵抗力が大きい場合 ($\gamma \gg \omega$)

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \gamma \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \approx \gamma \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)$$

より $\alpha \approx -\omega^2/(2\gamma)$, $\beta \approx -2\gamma$ である。したがって、(4.6) 右辺の第 2 項 $e^{\beta t}$ は急速に減衰するが、第 1 項は α が小さくなるためゆっくり減衰する。 $\gamma < \omega$ の場合とは逆に、抵抗が大きいほど減衰は遅くなる。

$\gamma = \omega$ の場合 $\lambda_{\pm} = -\gamma$ は重根であるから、上で求めた解は $e^{-\gamma t}$ の 1 つだけになり、これだけでは任意定数を 2 つ含む一般解を作れない。しかし、 $\gamma = \omega$ の場合、 $t e^{-\gamma t}$ も (4.4) を満たすことは代入してみればすぐわかる。したがって、一般解は A, B を任意定数として

$$x = (A + B t) e^{-\gamma t} \quad (4.8)$$

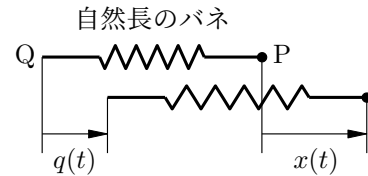
これは減衰振動と過減衰の境界であるから、臨界減衰 (critical damping) という (図 b)。

問 4.2 初期条件が $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ であるとき, 上で求めた一般解に含まれる任意定数を決定せよ。

問 4.3 (4.4) を満たす x を $x = e^{-\gamma t} y(t)$ とすると $\ddot{y} = -(\omega^2 - \gamma^2) y$ を満たすことを示せ。これから (4.4) の一般解を求めよ。

4.3 強制振動

質量が無視できるバネに質量 m の質点 P を取り付け, バネの他端 Q を $q(t) = q_0 \cos \omega_f t$ で振動させたとしよう。ここで, q_0, ω_f は与えられた正の定数である。P の平衡点からの変位を x とすると, バネの伸びは $x - q$ であるから, 質点に作用する力は $-k(x - q)$ である。したがって, 質点の運動方程式は



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - q) - \alpha \frac{dx}{dt} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + kq$$

になる。右辺の $kq = kq_0 \cos \omega_f t$ は, 質点に働く周期的な外力と見なせる。このような振動系に外力が作用する問題は, いろいろところで現れる。

そこで, 一般に外力 $F \cos \omega_f t$ (F は定数) が作用する場合を考える。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F \cos \omega_f t \quad (4.9)$$

である。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2m}, \quad f = \frac{F}{m}$$

とすると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos \omega_f t \quad (4.10)$$

になる。右辺は与えられた t の関数であり, 左辺は x について 1 次である。このような方程式を 2 階の非同次線形微分方程式という。

(4.10) の一般解を求めるために, まず, (4.10) の特解を求める。この場合, 直接 x を求めるよりも, 右辺の $\cos \omega_f t$ を複素数 $e^{i\omega_f t}$ で置き換えた方程式

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = f e^{i\omega_f t} \quad (4.11)$$

の複素解 z を求める方が簡単である。 z を実部と虚部に分けて, $z = z_R + iz_I$ とすると

$$\frac{d^2 z_R}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz_R}{dt} + \omega^2 z_R + i \left(\frac{d^2 z_I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz_I}{dt} + \omega^2 z_I \right) = f \cos \omega_f t + if \sin \omega_f t$$

であるから, 求める x は z の実部 z_R である。 $z = C e^{i\omega_f t}$ として (4.11) に代入すると

$$(-\omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f + \omega^2) C e^{i\omega_f t} = f e^{i\omega_f t}, \quad \text{つまり } C = \frac{f}{\omega^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f}$$

であれば, $z = C e^{i\omega_f t}$ は (4.11) の 1 つの解である。 z の実部を求めるために, 実部が $\omega^2 - \omega_f^2$, 虚部が $2\gamma\omega_f$ である分母の複素数を極形式 (10.12) で表すと

$$\omega^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f = \sqrt{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} e^{i\phi}, \quad \tan \phi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} \quad (4.12)$$

である。この極形式を使うと

$$z = \frac{f}{\omega^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f} e^{i\omega_f t} = A e^{i(\omega_f t - \phi)}, \quad A = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} \quad (4.13)$$

になる。(4.10)の解として

$$x_1 = \operatorname{Re} z = A \cos(\omega_f t - \phi)$$

を得る。 A, ϕ は任意定数ではなく、(4.12), (4.13) で与えられる定数である。

非斉次方程式 (4.10) の特解 x_1 が求まれば、(4.10) の一般解は次のようになる。(4.10) の右辺を 0 とした斉次方程式の一般解を x_0 とする。このとき

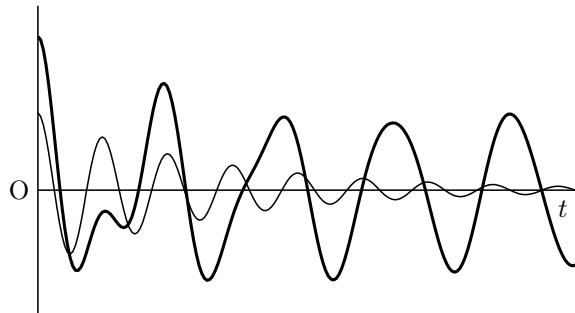
$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}(x_0 + x_1) + 2\gamma \frac{d}{dt}(x_0 + x_1) + \omega^2(x_0 + x_1) \\ &= \underbrace{\frac{d^2 x_0}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_0}{dt} + \omega^2 x_0}_0 + \underbrace{\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_1}{dt} + \omega^2 x_1}_{f \cos \omega_f t} = f \cos \omega_f t \end{aligned}$$

であるから、 $x_0 + x_1$ は (4.10) を満たす。さらに、 x_0 は任意定数を 2 つ含むから $x_0 + x_1$ も任意定数を 2 つ含む。したがって、 $x = x_0 + x_1$, つまり

$$x = x_0 + A \cos(\omega_f t - \phi) \quad (4.14)$$

は (4.10) の一般解である。

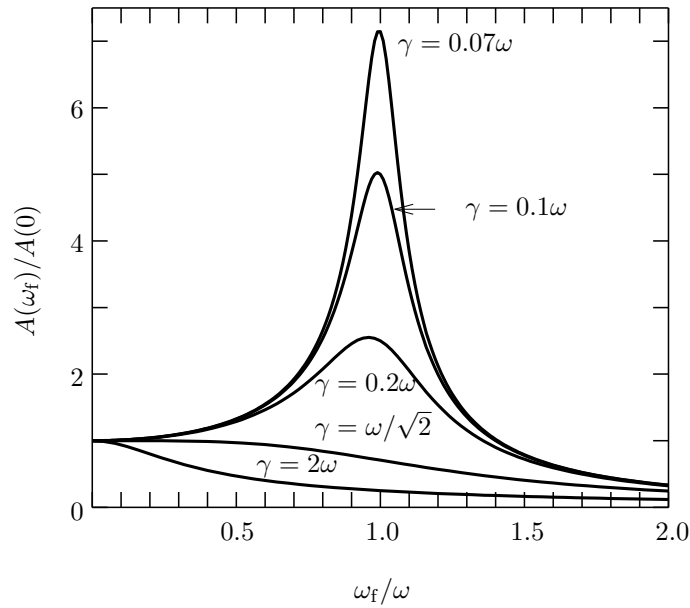
(4.14) の一例を右図に示す。最初は x_0 と x_1 が重なり $x = x_0 + x_1$ は非周期的な変化をする。しかし、時間が十分たてば、細い実線で示した x_0 は減衰してほとんど 0 になるため、いつまでも単振動をする x_1 だけが残る。 x_1 の振幅 A が外力の振幅 $F = mf$ に比例することから分かるように、 x_1 は外力により強制的に引き起こされる振動である。このため x_1 の運動を強制振動 (forced oscillation) という。一方、 x_0 を過渡的な項という。 x_1 は任意定数を含まないから、強制振動は初期条件に依らない。



周期的外力の角振動数 ω_f を変化させたとき、どのような強制振動が起こるかを調べる。まず、強制振動の著しい特徴は、抵抗が小さいとき $\omega_f \approx \omega$ で振幅が非常に大きくなることである。(4.13) より

$$\frac{dA}{d\omega_f} = -2f\omega_f \frac{\omega_f^2 - (\omega^2 - 2\gamma^2)}{[(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2]^{3/2}}$$

であるから、 $\omega^2 - 2\gamma^2 > 0$ の場合、 $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ で A は最大値 $\frac{f}{2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$ になる。したがって、 γ が小さければ、 A は $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \approx \omega$ で非常に大きくなる。外力の角振動数 ω_f が系の固有の角振動数 ω に近くなったとき、強制振動が大きな振幅で生ずる現象を共鳴 (resonance) または共振という。共鳴は、力学系に限らず、電気回路など様々なところで現れる重要な物理現象である。 $A(\omega_f)/A(\omega_f = 0)$ と ω_f の関係を下図に示す。この図の曲線は共鳴曲線と呼ばれる。



$\omega_f \approx \omega$ での A^2 の近似的式を求めよう。 $\omega_f = \omega + \delta$ とし、 $\gamma, \delta \ll \omega$ のとき、 γ と δ の 2 次までで近似すると

$$(\omega^2 - \omega_f^2)^2 = (\omega + \omega_f)^2(\omega - \omega_f)^2 \approx 4\omega^2\delta^2, \quad 4\gamma^2\omega_f^2 \approx 4\gamma^2\omega^2$$

であるから

$$A^2 \approx \frac{f^2}{4\omega^2(\delta^2 + \gamma^2)} = \frac{f^2}{4\omega^2((\omega_f - \omega)^2 + \gamma^2)}$$

を得る。 A^2 が最大値の半分になる ω の間隔を共鳴の半値幅というが、今の場合 2γ になる。したがって γ が小さいとき、共鳴は $\omega - \gamma < \omega_f < \omega + \gamma$ のせまい領域で起こる。

$\omega_f \approx 0$ で外力が時間的に非常にゆっくり振動するとき、(4.12) と (4.13) から

$$\phi \approx 0, \quad A \approx \frac{f}{\omega^2} = \frac{F}{k}, \quad \text{したがって } x \approx \frac{F}{k} \cos \omega_f t$$

になる。最初に述べたバネの例では、 $F = kq_0$ であるから $x \approx q_0 \cos \omega_f t$ となり、質点 P は Q と全く同じ振動をする。ゆっくり運動する場合、運動方程式 (4.9) で加速度と速度に比例する抵抗は引力 $-kx$ に比べれば無視でき、運動は方程式 $kx = F \cos \omega_f t$ で決まるとしてよい。

逆に $\omega_f \rightarrow \infty$ で外力が非常に早く振動する場合

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} \rightarrow \pi, \quad A = \frac{f}{\omega_f^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_f^2)^2 + (2\gamma/\omega_f)^2}} \rightarrow \frac{f}{\omega_f^2}$$

であるから

$$x = -\frac{f}{\omega_f^2} \cos \omega_f t$$

これは微分方程式 $\ddot{x} = f \cos \omega_f t$ の解である。運動が非常に早く変動する場合、(4.10) で加速度の項 \ddot{x} に比べて $\omega^2 x, \gamma \dot{x}$ は無視できる。

問 4.4 $x_1 = A \cos \omega_f t + B \sin \omega_f t$ として、これを (4.10) に代入して A と B を求めよ。

問 4.5 $\gamma = 0$ の場合を考える。特解 x_1 を $x_1 = A \cos \omega_f t$ とし、これを (4.10) に代入して A を求めよ。また、一般解 $x = x_0 + x_1$ が $t = 0$ で $x = 0$, $dx/dt = 0$ を満たすように、 x_0 に含まれる任意定数を決めよ。このとき、 $\omega_f \rightarrow \omega$ とすると

$$x \rightarrow \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t$$

になることを示し、 $x(t)$ の概略を図示せよ。

4.4 強制振動の例

振動電流 抵抗 R と自己インダクタンス L のコイルと容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路を、交流電圧 $V \cos \omega_f t$ につなぐ。回路に流れる電流を $I(t)$ 、コンデンサーに蓄えられる電荷を $Q(t)$ とする。抵抗にかかる電位差は RI 、コイルにかかる電位差は自己誘導起電力 LdI/dt 、コンデンサーの電位差は Q/C である。これらの和は外部電圧に等しいから

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = V \cos \omega_f t$$

になる。時間 dt に流れる電流は、コンデンサーの電荷を $I dt$ だけ変化させるから、 $I = dQ/dt$ である。したがって

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V \cos \omega_f t \quad (4.15)$$

これと (4.9) を比較すると

変位 x	\longleftrightarrow	電荷 Q	\longleftrightarrow	速度 v	\longleftrightarrow	電流 I
質量 m	\longleftrightarrow	インダクタンス L	\longleftrightarrow	抵抗 α	\longleftrightarrow	抵抗 R
バネ定数 k	\longleftrightarrow	容量 $1/C$	\longleftrightarrow	力 F	\longleftrightarrow	電圧 V

の対応関係がある。時間が十分たつ強制振動だけになった場合を考える。(4.15) の強制振動の解は、上の対応関係と (4.13) より

$$Q = \operatorname{Re} \left(\frac{V e^{i\omega_f t} / L}{\omega^2 - \omega_f^2 + i\omega_f R / L} \right), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.16)$$

になる。 $1/\sqrt{LC}$ がこの回路の固有角振動数である。

分子の模型 2つの原子 A と B が結合した分子 A-B を考える。分子の最も簡単な模型は、原子 A と B が仮想的な強さ k のバネで結ばれているとするものである。通常、分子中の原子は幾分帯電している。そこで、A の電荷を q 、B の電荷を $-q$ とする。さて、電磁波が入射して、2つの原子を結ぶ直線方向に電場 $E_0 \cos \omega_f t$ が生じた。B は A に比べて非常に重く動かないとして、A の運動を考える。仮想的バネの変位を x とし、A の質量を m とすると、A の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + qE_0 \cos \omega_f t$$

である。これは抵抗がない場合の強制振動であるから、 $\omega_f = \sqrt{k/m}$ の電磁波が入射すると、A は共鳴して激しく振動する。例えば、塩素分子 HCl の場合、 $\omega_f \approx 2 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ である。

問 4.6 (4.16) より

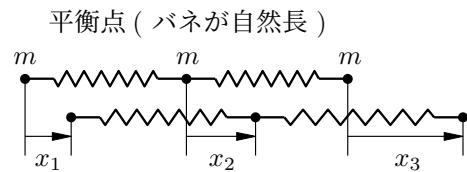
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V \cos(\omega_f t - \phi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2}}, \quad \tan \phi = \frac{1}{R} \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)$$

になることを示せ。

問 4.7 塩素分子のバネ定数 k の値は $k \approx 70 \text{ kg/s}^2$ になることを示せ。この場合、原子 A は水素原子である。

4.5 連成振動

2 個以上の振動子が互いに力を及ぼしあいながら行う振動を連成振動という。具体例として、右図のように x 軸上にある質量 m の 3 個の質点がバネ定数 k のバネで結ばれている系を考える。3 個の質点の平衡点からの変位を x_1, x_2, x_3 とする。力がどの向きに働くかは $x_1 < x_2 < x_3$ の場合を考えれば十分である。このとき、質点 1 には x 軸正方向に $k(x_2 - x_1)$ の力が作用する。質点 2 に作用する力は



$$k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) = k(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

である。また、質点 3 には x 軸負方向に $k(x_3 - x_2)$ の力が作用する。したがって、運動方程式は

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2 + x_3), \quad m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3) \quad (4.17)$$

になる。各質点の運動方程式は他の質点の変位を含むから、これらの運動方程式は独立には解けない。そこで、これらの線形結合 $q = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3$ を考え、 q の運動方程式が q だけで表せるように定数 α, β を決めよう。(4.17) より

$$\ddot{q} = \ddot{x}_1 + \alpha \ddot{x}_2 + \beta \ddot{x}_3 = -\omega^2 \left((1 - \alpha)x_1 + (2\alpha - \beta - 1)x_2 + (\beta - \alpha)x_3 \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。したがって、 λ を定数として

$$1 - \alpha = \lambda, \quad 2\alpha - \beta - 1 = \lambda\alpha, \quad \beta - \alpha = \lambda\beta \quad (4.18)$$

ならば

$$\ddot{q} = -\omega^2 \lambda (x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3) = -\omega^2 \lambda q$$

になり q だけの方程式が求まる。 $\lambda = 1 - \alpha$ を (4.18) の第 2 式、第 3 式に代入すると

$$\alpha^2 + \alpha - \beta - 1 = 0, \quad \alpha(\beta - 1) = 0$$

したがって

$$(\alpha, \beta, \lambda) = (0, -1, 1), (1, 1, 0), (-2, 1, 3)$$

$(\alpha, \beta, \lambda) = (0, -1, 1)$ の場合 $q = q_1 = x_1 - x_3$

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 q_1, \quad \text{一般解 } q_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \quad (4.19)$$

$(\alpha, \beta, \lambda) = (1, 1, 0)$ の場合 $q = q_2 = x_1 + x_2 + x_3$

$$\ddot{q}_2 = 0, \quad \text{一般解 } q_2 = A_2 + B_2 t \quad (4.20)$$

$(\alpha, \beta, \lambda) = (-2, 1, 3)$ の場合 $q = q_3 = x_1 - 2x_2 + x_3$

$$\ddot{q}_3 = -3\omega^2 q_3, \quad \text{一般解 } q_3 = A_3 \cos \sqrt{3}\omega t + B_3 \sin \sqrt{3}\omega t \quad (4.21)$$

q_2 は重心 $(x_1 + x_2 + x_3)/3$ に比例するから, (4.20) は重心が等速度運動をすることを表す。一般に, 外力が作用しないとき質点系の重心は等速度運動をする。

$$q_1 = x_1 - x_3, \quad q_2 = x_1 + x_2 + x_3, \quad q_3 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

を x_1, x_2, x_3 について解けば

$$x_1 = \frac{3q_1 + 2q_2 + q_3}{6}, \quad x_2 = \frac{q_2 - q_3}{3}, \quad x_3 = \frac{-3q_1 + 2q_2 + q_3}{6}$$

になる。互いに独立に運動する座標 q_1, q_2, q_3 を基準座標という。

初期条件として $t = 0$ のとき

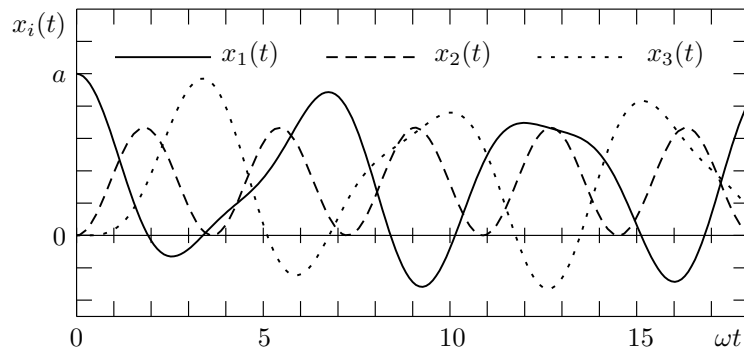
$$x_1 = a, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$$

とする。 q で表すと $q_i = a, \dot{q}_i = 0$ になるから $A_i = a, B_i = 0$ である。したがって

$$x_1 = \frac{a}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}\omega t \right), \quad x_2 = \frac{a}{3} \left(1 - \cos \sqrt{3}\omega t \right)$$

$$x_3 = \frac{a}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}\omega t \right)$$

になる。これを図示すると下図になる。



(4.17) は行列を用いて

$$\ddot{X} = -\omega^2 U X, \quad \text{ただし } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せる。適当な 3×3 行列 A をかけると

$$\ddot{Q} = -\omega^2 A U A^{-1} Q, \quad Q = A X$$

になる。行列 AUA^{-1} が対角行列

$$AUA^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

になるように A を決めると

$$\ddot{q}_i = -\omega^2 \sum_{j=1}^3 (AUA^{-1})_{ij} q_j = -\omega^2 \lambda_i q_i$$

になるから q_i は基準座標である。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(3-\lambda) = 0$$

より $\lambda = 0, 1, 3$ になる。

5 仕事とエネルギー

5.1 仕事

質点が一定の力 \mathbf{F} を受けて s だけ変位したとき、力のなす仕事 W を

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \theta \quad (5.1)$$

で定義する。ここで θ は \mathbf{F} と \mathbf{s} のなす角である。仕事とは 距離 \times 変位方向の力、あるいは 力 \times 力の方向に移動した距離 である。

一般に、質点がある経路 C に沿って点 A から B まで変位し、また、質点に作用する力 \mathbf{F} は質点の位置 x, y, z の関数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 、つまり

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + F_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + F_z(x, y, z) \mathbf{e}_z$$

とする。なお、 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を簡単のため位置ベクトル \mathbf{r} を用いて $f(\mathbf{r})$ とも書く。

経路を n 個に分割し、 k 番目の位置を \mathbf{r}_k とする。ただし、 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_B$ である。また、 k 番目と $k+1$ 番目の位置を結ぶベクトルを

$$\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k$$

とおく。 n が十分大きければ、経路 C は線分 $\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{r}_1, \dots, \Delta \mathbf{r}_k, \dots, \Delta \mathbf{r}_{n-1}$ の和で近似できる。 k 番目と $k+1$ 番目の微小区間では、力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}_k)$ としてよいから、 k 番目から $k+1$ 番目までに力がなす仕事 ΔW_k は仕事の定義 (5.1) より

$$\Delta W_k = \mathbf{F}(\mathbf{r}_k) \cdot \Delta \mathbf{r}_k$$

で与えられる。質点が経路 C に沿って A から B まで変位するとき、力のなす仕事 $W(C)$ は、 ΔW_k をすべて足しあわせて、 $n \rightarrow \infty$ とした極限である。これを積分記号を使い

$$W(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_k) \cdot \Delta \mathbf{r}_k = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.2)$$

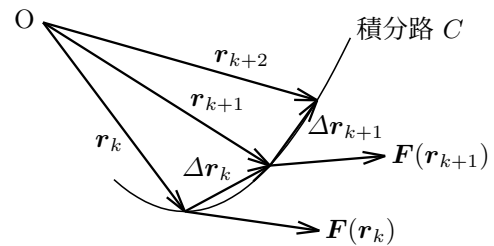
と表す。この積分を線積分という。積分記号の下の添字 C は経路 C に沿っての積分であることを明記するためである。成分で書けば

$$\begin{aligned} W(C) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(F_x(\mathbf{r}_k) \Delta x_k + F_y(\mathbf{r}_k) \Delta y_k + F_z(\mathbf{r}_k) \Delta z_k \right) \\ &= \int_C \left(F_x(\mathbf{r}) dx + F_y(\mathbf{r}) dy + F_z(\mathbf{r}) dz \right) \end{aligned}$$

である。線積分の定義から分かるように、 \mathbf{r} は任意の点ではなく、経路 C 上の点を表し、 $d\mathbf{r}$ はこの経路に沿った微小変位である。例えば

$$\int_C F_x(\mathbf{r}) dx$$

を求めるとき、一般に y, z を定数と見なしてはいけない。 x が変化すれば、点が常に C 上にあるように y, z も変化する。ただし、 C が x 軸に平行な直線の場合 y, z は定数である。



与えられた曲線 C 上の点 \mathbf{r} が適当な 1 変数 q の関数 $\mathbf{r}(q)$ で表せるとする。ただし, $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}(a)$, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}(b)$ であり, 経路 C は $a \leq q \leq b$ の範囲で指定できるとする。

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dq} dq$$

であるから

$$W(C) = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dq} dq = \int_a^b G(q) dq, \quad G(q) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(q)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dq}$$

内積である q の関数 $G(q)$ を積分すればよい。成分で表せば

$$G(q) = F_x(\mathbf{r}(q)) \frac{dx}{dq} + F_y(\mathbf{r}(q)) \frac{dy}{dq} + F_z(\mathbf{r}(q)) \frac{dz}{dq}$$

である。 C が xy 平面上の曲線ならば $dz = 0$ であるから

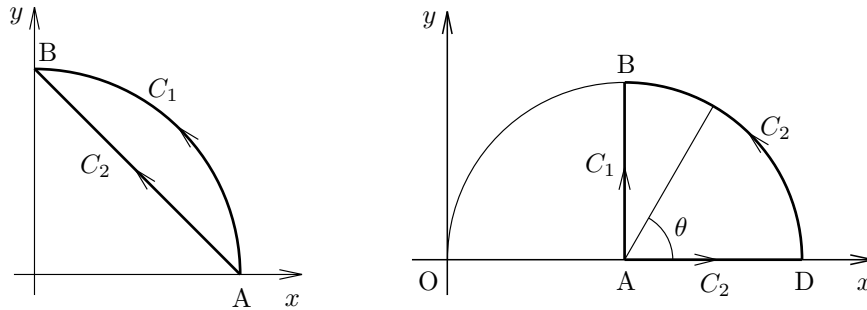
$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(F_x(\mathbf{r}(q)) \frac{dx}{dq} + F_y(\mathbf{r}(q)) \frac{dy}{dq} \right) dq$$

xy 平面上の曲線 C が $y = y(x)$, ($a \leq x \leq b$) と表せる場合 $q = x$ とすれば

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \frac{dy}{dx} \right) dx$$

である。

線積分の例



左図のように, A を始点, B を終点とする 2 つの経路を考える。 C_1 は半径 R の円周に沿った経路, C_2 は A, B を直線で結ぶ経路である。このとき

$$\int_C (-y dx + x dy)$$

を求める。 C_1 上の点は

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

であるから

$$\int_{C_1} (-y dx + x dy) = \int_0^{\pi/2} \left(-y \frac{dx}{d\theta} + x \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta = R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi R^2}{2}$$

C_2 では $y = -x + R$ で x は R から 0 に減少するから

$$\int_{C_2} (-y dx + x dy) = \int_R^0 \left(-y + x \frac{dy}{dx} \right) dx = R \int_0^R dx = R^2$$

この例では積分は経路に依存する。

次に、右図に示した2つの経路 C_1, C_2 に沿って

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ただし } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$$

を求める。 C_1 では $x = \text{一定} = R$ であるから $dx = 0$ である。したがって

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^R F_y(R, y) dy = \int_0^R \frac{y}{(y^2 + R^2)^{3/2}} dy = \left[\frac{-1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right]_0^R = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{R}$$

C_2 は $y = 0, R \leq x \leq 2R$ の部分と円周部分 $x = R + R \cos \theta, y = R \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ からなるから

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_R^{2R} F_x(x, 0) dx + \int_0^{\pi/2} \left(F_x \frac{dx}{d\theta} + F_y \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta \\ &= \int_R^{2R} \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{R} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\left((1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \right)^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{1}{2R} - \frac{1}{2\sqrt{2}R} \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^{3/2}} dt \quad (t = \cos \theta \text{ とした}) \\ &= \frac{1}{2R} + \frac{1}{\sqrt{2}R} \left[\frac{1}{\sqrt{t+1}} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{R} \end{aligned}$$

この場合、線積分は始点と終点だけで決まり途中の経路に依らない。

5.2 偏微分と全微分

x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を考える。これを $f(\mathbf{r})$ と書く。ただし $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ である。2点 (x, y, z) と $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ における関数 $f(x, y, z)$ の差 Δf

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

はテイラー展開を使うと

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left(f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \right) \\ &\quad + \left(f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) \right) + \left(f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \right) \\ &= f_x(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \Delta x + f_y(x, y, z + \Delta z) \Delta y + f_z(x, y, z) \Delta z + \dots \end{aligned}$$

である。ただし

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{など}$$

ところで

$$\begin{aligned} f_y(x, y, z + \Delta z) &= f_y(x, y, z) + f_{zy}(x, y, z) \Delta z + \dots \\ f_x(x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= f_x(x, y, z + \Delta z) + f_{xy}(x, y, z + \Delta z) \Delta y + \dots \\ &= f_x(x, y, z) + f_x(x, y, z) \Delta z + f_{xy}(x, y, z + \Delta z) \Delta y + \dots \end{aligned}$$

である。したがって

$$\Delta f = f_x(x, y, z) \Delta x + f_y(x, y, z) \Delta y + f_z(x, y, z) \Delta z + (\Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ について 2 次以上})$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ の場合, Δ を d で書いて

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (5.3)$$

になる。これを全微分という。1 変数 x の関数 $F(x)$ の場合

$$dF = \frac{dF}{dx} dx$$

になるが, (5.3) はこれを 3 変数に拡張したものである。

ナブラ, ラプラシアン 微分演算子を成分とするベクトル

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$$

を考える。これをナブラという。ナブラは関数 $f(x, y, z)$ に作用してはじめて実的な意味を持つ。定義より

$$\nabla f = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

である。つまり, 関数 $f(x, y, z)$ から x, y, z 成分がそれぞれ $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$ であるベクトルを生成する。ナブラのスカラー積

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

をラプラシアンという。これは Δ と書く。

ナブラを使うと, 全微分はスカラー積

$$df = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = d\mathbf{r} \cdot \nabla f, \quad d\mathbf{r} = dx e_x + dy e_y + dz e_z \quad (5.4)$$

で表せる。ここで $d\mathbf{r}$ は位置ベクトル $\mathbf{r} = x e_x + y e_y + z e_z$ の微小変位である。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ のとき

$$\frac{df(\mathbf{r})}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t + \Delta t)) - f(\mathbf{r}(t))}{\Delta t}$$

を求めておく。

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$$

とおくと, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$ であるから (5.4) より

$$f(\mathbf{r}(t + \Delta t)) = f(\mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}(t)) + \Delta \mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r}(t))$$

したがって

$$\frac{df(\mathbf{r})}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \cdot \nabla f(\mathbf{r}(t))$$

になる。上の $\Delta \mathbf{r}$ の定義から

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

これから

$$\frac{df(\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.5)$$

である。結局のところ, (5.3) あるいは (5.4) の両辺を dt で割ればよい。

5.3 力学的エネルギー

運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

と速度 \mathbf{v} の内積をとると

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

ところで

$$\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2 \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

であるから

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$t = t_A$ での速度を \mathbf{v}_A , $t = t_B$ での速度を \mathbf{v}_B とする。上の両辺を $t = t_A$ から $t = t_B$ まで積分すると

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^2 = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

質点の位置ベクトルを \mathbf{r} とすると $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ であるから

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

とも書ける。ただし、 C は $t = t_A$ から $t = t_B$ まで質点が運動する軌道に沿った経路である。運動エネルギーの変化は力がなした仕事に等しい。

質点に働く力が1つの関数 $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ を用いて

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \text{つまり} \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (5.6)$$

で与えられる場合を考える。(5.5) から

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (5.7)$$

したがって

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_A}^{t_B} \frac{dU(\mathbf{r})}{dt} dt = - \left[U(\mathbf{r}(t)) \right]_{t=t_A}^{t=t_B} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) \quad (5.8)$$

これから

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^2 = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$$

つまり

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^2 + U(\mathbf{r}_A) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 + U(\mathbf{r}_B)$$

t_A, t_B は任意であるから、運動中はいつでも

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) = \text{一定} = E$$

になる。これを力学的エネルギー保存則という。 $m\mathbf{v}^2/2$ を運動エネルギー、 $U(\mathbf{r})$ を位置エネルギーあるいはポテンシャル・エネルギー、運動エネルギーと位置エネルギーの和である E を力学的エネルギーという。また、力 $\mathbf{F} = -\nabla U$ を保存力という。(5.8) から保存力のなす仕事は始点と終点だけで決まり途中の経路に依らない。

E を t で微分することにより E が一定になることを示そう。ここでは、一般に質点に保存力 $-\nabla U$ と非保存力 \mathbf{F}' が働く場合を考える。運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla U + \mathbf{F}'$$

である。力学的エネルギー E の時間変化は

$$\frac{dE}{dt} = m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}) = m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla U = \mathbf{v} \cdot \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla U \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}'$$

になる。あるいは、これを $t = t_A$ から $t = t_B$ まで積分すると

$$E(t_B) - E(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F}' \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

である。保存力だけの場合 ($\mathbf{F}' = 0$) 力学的エネルギーは確かに保存する。

力学的エネルギーの変化は保存力以外の力 \mathbf{F}' がなす仕事に等しい。質点が束縛運動をするときに働く束縛力 (床から受ける垂直抗力, 振り子が棒から受ける力など) は常に \mathbf{v} に垂直な方向に働くから $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}' = 0$ となり, 力学的エネルギー保存則は破らない (束縛力は仕事をしない)。一方, 摩擦力や抵抗力は運動を妨げる方向に働くから \mathbf{F}' と \mathbf{v} は逆向きになる。このため $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} < 0$ になるから力学的エネルギーを減少させる。

- U に定数を加えても (5.6) から求まる \mathbf{F} は変わらない。したがって, U には定数だけの不定性がある。通常は適当な基準点で $U = 0$ になるように定数を決める。
- $U(\mathbf{r}) = \text{一定}$ を満たす \mathbf{r} の集合はある曲面になる。この曲面を等ポテンシャル面という。この曲面上の接近した2点 $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ に対しては

$$U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = d\mathbf{r} \cdot \nabla U = 0$$

である。今の場合 $d\mathbf{r}$ は等ポテンシャル面の接平面上にあるから, 力 $\mathbf{F} = -\nabla U$ は等ポテンシャル面と直交する方向に働く。

ポテンシャルの例

- 1次元の運動で $F = -kx$ の場合, $dU/dx = -F = kx$ であるから

$$U = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 + C$$

$x = 0$ で $U = 0$ になるように基準をとれば $C = 0$ である。

- 水平面を xy 平面, 鉛直上向きに z 軸をとる。質量 m の質点に働く重力 \mathbf{F} は

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg$$

である。これをポテンシャル U で表すと

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

U は x, y には依存せず z だけの関数である。最後の式を z で積分すると

$$U = mgz + C, \quad C = \text{積分定数}$$

$z = 0$ で $U = 0$ になるように基準をとれば $U = mgz$ になる。

- 一般に $f(x, y, z)$ が $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だけの関数であるとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{df}{dr} = \frac{x}{r} \frac{df}{dr}$$

であるから, y, z についても同様にすると

$$\nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr} \quad (5.9)$$

になる。さて, 原点に質量 M の質点があるとき, 位置 \mathbf{r} にある質量 m の質点を受ける万有引力 \mathbf{F} は

$$\text{大きさ} = \frac{GMm}{r^2}, \quad \text{向き} = \text{常に原点を向く}$$

であるから, これを1つの式で表すと

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

になる。(5.9)で $f(r) = 1/r$ とすると

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

であるから

$$\mathbf{F} = GMm \nabla \frac{1}{r}$$

したがって $\mathbf{F} = -\nabla U$ になる U は

$$U = -\frac{GMm}{r} + C$$

$r \rightarrow \infty$ のとき, つまり, 2つの質点が無限に離れたとき $U = 0$ になるように基準をとれば $C = 0$ であるから

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

である。

5.4 エネルギー保存則と運動の決定

エネルギー保存則を用いると, 1次元の質点の運動を求めることができる。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

を v について解くと

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \quad \text{つまり} \quad \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = dt$$

になるから, これを積分すると

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \int dt = t + \text{定数}, \quad \begin{cases} + & v > 0 \text{ のとき} \\ - & v < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.10)$$

を得る。したがって, 左辺の積分が実行できれば, $x = x(t)$ を求められる。

例えば、単振動の場合

$$U(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。\$A\$ を正の定数として \$E = m\omega^2 A^2/2\$ とすると (5.10) は

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \omega dt$$

\$x = A \cos \theta\$ とおくと \$dx = -A \sin \theta d\theta\$ であるから

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \mp \int \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} d\theta = \pm \int d\theta$$

したがって

$$\pm \theta = \omega t + \alpha, \quad \alpha = \text{任意定数}$$

これから

$$A \cos(\pm \theta) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

つまり

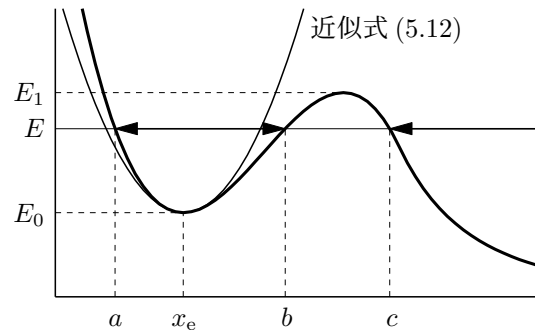
$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

になる。これは以前に運動方程式を解いて得られた結果に他ならない。

(5.10) の積分が解析的にできない場合でも、運動の様子をある程度知ることができる。

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \geq 0 \tag{5.11}$$

であるから、この不等式を満たす \$x\$ が、\$E\$ を与えたときの運動可能な領域である。右図に示した \$U(x)\$ と \$E\$ では、\$a \leq x \leq b\$ の有限区間と \$x \geq c\$ である無限区間が (5.11) を満たす。\$a \leq x \leq b\$ の場合、例えば、\$a\$ から \$b\$ に進んでいた質点が \$b\$ に到達すると、ここで質点は一時止まる (\$v = 0\$)。ところで、質点に働く力 \$-dU/dx\$ は、\$x = b\$ では負であるから、質点は \$x\$ 軸の負の方向に引っ張られる。したがって、一時停止後、向きを変えて、\$b\$ から \$a\$ に運動を開始する。\$x = a\$ でも同様であるから、質点は \$a \leq x \leq b\$ の間で周期的運動をする。\$x \geq c\$ の場合、初速度が \$v > 0\$ ならば、質点は \$x\$ 軸正方向に運動し続ける。逆に、初速度が \$v < 0\$ ならば、質点は \$x = c\$ に到着すると跳ね返り、\$x\$ 軸正方向に走り去る。運動可能領域は \$E\$ により異なる。上に述べた周期的運動は、\$E > E_1\$、\$E < E_0\$ では存在しない。



上の図で \$E \approx E_0\$ の場合のように、質点の運動がポテンシャル \$U(x)\$ の極小点 \$x = x_e\$ 近傍に限られるとき、運動は簡単になる。\$U(x)\$ を \$x = x_e\$ のまわりでテイラー展開すると、\$U'(x_e) = 0\$ であるから、\$|x - x_e|\$ が小さいとき

$$U(x) \approx U(x_e) + \frac{U''(x_e)}{2} (x - x_e)^2 \tag{5.12}$$

で近似できる。したがって、質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx} \approx -k(x - x_e), \quad k = U''(x_e) > 0 \tag{5.13}$$

になる。これは極小点 x_e を中心とする単振動の運動方程式である。

単振り子 (1.17) の方程式

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (5.14)$$

を解く。微小振動 $|\theta| \ll 1$ の場合 $\sin \theta \approx \theta$ で近似すると $\ddot{\theta} \approx -\omega^2 \theta$ になり単振動する。ここでは微小振動の近似を行わない。

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta}^2 = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \cos \theta = -\dot{\theta} \sin \theta$$

より (5.14) に $\dot{\theta}$ をかけると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta \right) = 0, \quad \therefore \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta = \text{一定}$$

になる。これは力学的エネルギー保存に他ならない。(1.15) より運動エネルギーは $m\ell^2 \dot{\theta}^2 / 2$ である。 $\theta = 0$ を位置エネルギー $U(\theta)$ の基準にとると

$$U(\theta) = mg\ell(1 - \cos \theta)$$

になるから

$$E = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) = m\ell^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 (1 - \cos \theta) \right) = \text{一定} \geq 0 \quad (5.15)$$

である。 $\cos \theta$ のマクローリン級数 $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24 + \dots$ を使うと

$$U(\theta) = \frac{mg\ell}{2} \theta^2 - \frac{mg\ell}{24} \theta^4 + \dots$$

になるが、単振動 $\ddot{\theta} \approx -\omega^2 \theta$ は $U(\theta) \approx mg\ell \theta^2 / 2$ で近似することに対応する。(5.15) より

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{m\ell^2} - 2\omega^2 (1 - \cos \theta) = 4\omega^2 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \text{ただし } k = \sqrt{\frac{E}{2mg\ell}}$$

したがって

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2\omega \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \text{つまり } \omega dt = \pm \frac{d\theta}{2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (5.16)$$

E が小さくて $|k| < 1$ の場合

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = k$$

とすると θ は $|\theta| \leq \theta_0$ の間を振動し、質点は円周の最高点に到達しない。 $|\theta| = \theta_0$ のとき

$$\dot{\theta} = 0, \quad U(\theta_0) = 2mg\ell \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = 2mg\ell k^2 = E$$

である。一方、 $|k| > 1$ の場合、任意の時刻で $\dot{\theta} > 0$ になるか、または $\dot{\theta} < 0$ になるから、質点は一定方向に回転する。

(5.16) において + の符号をとることにし、 $t = 0$ のとき $\theta = 0$ として積分すると

$$\omega \int_0^t dt' = \omega t = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta'}{2}}}$$

になる。 $|k| < 1$ のとき振動の周期 T を求める。 T は θ が 0 から θ_0 まで変化するのに要する時間の 4 倍であるから

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

ここで

$$\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{k} = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$$

とする。両辺を θ で微分すると

$$\frac{d\phi}{d\theta} \cos \phi = \frac{\cos(\theta/2)}{2k} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}{2k}, \quad \therefore d\theta = \frac{2k \cos \phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

θ が 0 から θ_0 まで変化するとき $\sin \phi$ は 0 から 1 まで変化するから、 ϕ は 0 から $\pi/2$ まで変化する。したがって

$$T = \frac{4}{\omega} K(k), \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$K(k)$ を第 1 種の完全楕円積分という。微小振動 $|\theta_0| \ll 1$ の場合 $k = \sin(\theta_0/2)$ も微小であるからマクローリン展開を行うと

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi + \frac{3k^4}{8} \sin^4 \phi + \dots$$

これから

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right)$$

したがって

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right) \quad (5.17)$$

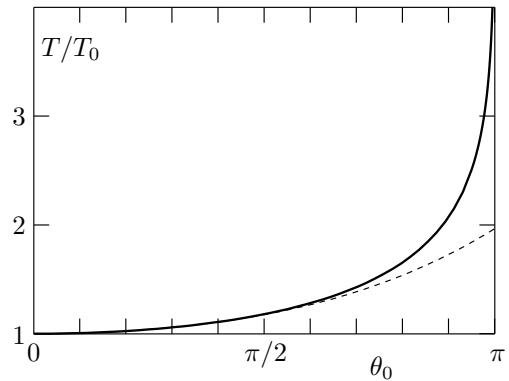
ただし $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ は単振動 $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ の周期である。単振り子の周期は角度の振幅 θ_0 に依存し、 θ_0 が大きくなると周期は長くなる。 $k = 1$, ($E = 2mgR$) の場合 $\theta_0 = \pi$ であり

$$K(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos \phi} = \left[\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right]_0^{\pi/2} = \infty$$

より周期は無限大になる。 $E = 2mgl$ であるからエネルギー的には質点は円周の最高点に到達して静止するが、最高点に達するまでに無限の時間を要し最高点に達することはできない。言い方を変えれば、最高点で静止している質点は静止したままである。右図に

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} K(k), \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

を数値積分した結果を示す。波線は近似式 (5.17) である。



(1.18), (5.15) より束縛力 S は

$$S = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{\ell} + mg(3 \cos \theta - 2)$$

になる。 $S > 0$ のとき棒は質点を引っ張り、 $S < 0$ ならば棒は質点を押し出す。棒の場合 S は正でも負でもよいが、糸の先端に質点を付けた場合は $S < 0$ になることはできない。 $S < 0$ のとき質点は糸を縮めようとするから、 $S = 0$ のところで糸はたるみ、以降、質点には鉛直下向きの重力だけが作用する。

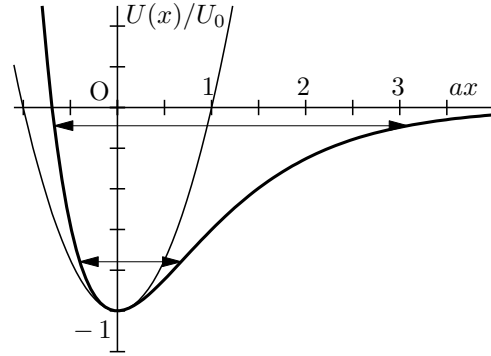
モース・ポテンシャル U_0, a を正の定数として

$$U(x) = U_0 (e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \quad (5.18)$$

を考える。これはモース・ポテンシャルと呼ばれ、2原子分子における2つの原子間に働く力を近似的に表す。 x は原子核間の距離であるが、平衡点が原点になるようにずらしてある。

$$U'(x) = 2aU_0e^{-ax} (1 - e^{-ax})$$

$$U''(x) = 2a^2U_0e^{-ax} (2e^{-ax} - 1)$$



であるから、 $U(x)$ は $x = 0$ で極小になる。 $U(x)/U_0$ の概略を右図に示す。細い実線は (5.12)

$$U_0 (-1 + (ax)^2)$$

である。

モースポテンシャルの場合、(5.10) より $x = x(t)$ を解析的に求められる。

$$I = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad U(x) = U_0 (e^{-2ax} - 2e^{-ax})$$

は $y = e^{ax} > 0$ とすると

$$dy = ae^{ax} dx = ay dx, \quad U = U_0 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int dy \frac{1}{\sqrt{Ey^2 + 2U_0y - U_0}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2a^2|E|}} \times \begin{cases} \log \left| Ey + U_0 + \sqrt{E(Ey^2 + 2U_0y - U_0)} \right|, & E > 0 \\ -\sin^{-1} \frac{Ey + U_0}{\sqrt{U_0(E + U_0)}}, & E < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

になる (数学公式 I 106 ページ)。

$E < -U_0$ のとき $U_0(E + U_0) < 0$ になるから運動は存在しない。 $-U_0 < E < 0$ のとき

$$-\sin^{-1} \frac{Ey + U_0}{\sqrt{U_0(E + U_0)}} = \pm(\omega t + C), \quad \omega = \sqrt{\frac{2a^2|E|}{m}}$$

より

$$e^{ax} = -\frac{U_0}{E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{U_0}} \sin(\omega t + C) \right)$$

初期条件を

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = 0 \quad (5.19)$$

とすると

$$E = U(x_0) = U_0 e^{-ax_0} (e^{-ax_0} - 2) \quad (5.20)$$

である。ただし $-U_0 < E < 0$ から $e^{-ax_0} < 2$ でなければならない。この E を代入すると

$$e^{a(x-x_0)} = \frac{1}{2 - e^{-ax_0}} \left(1 \pm |1 - e^{-ax_0}| \sin(\omega t + C) \right)$$

$t = 0$ とすると

$$1 = \frac{1 \pm |1 - e^{-ax_0}| \sin C}{2 - e^{-ax_0}}, \quad \therefore \sin C = \pm \frac{1 - e^{-ax_0}}{|1 - e^{-ax_0}|}$$

$\cos C = 0$ であるから

$$e^{a(x-x_0)} = \frac{1}{2 - e^{-ax_0}} \left(1 \pm |1 - e^{-ax_0}| \sin C \cos \omega t \right) = \frac{1 + (1 - e^{-ax_0}) \cos \omega t}{2 - e^{-ax_0}} \quad (5.21)$$

ただし

$$\omega = \omega_0 \sqrt{e^{-ax_0} |2 - e^{-ax_0}|}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2a^2 U_0}{m}}$$

になる。運動は x_0 と $\cos \omega t = -1$ での $x = x_1 = -\log(2 - e^{-ax_0})/a$ の間を振動する。振動する条件は $e^{-ax_0} < 2$ つまり

$$x_0 > -\frac{\log 2}{a}$$

である。当然のことであるが $U(x_1) = U(x_0) = E$ になる。

$x_0 \approx 0$ のとき x_0^2 以上を無視すると $e^{-ax_0} = 1 - ax_0 + \dots$ より

$$e^{a(x-x_0)} = \frac{1 + ax_0 \cos \omega t + \dots}{1 + ax_0 + \dots} = 1 + ax_0 (\cos \omega t - 1) + \dots$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{(1 - ax_0 + \dots)(1 + ax_0 + \dots)} = \omega_0 + \dots$$

になるから

$$a(x - x_0) = \log \left(1 + ax_0 (\cos \omega_0 t - 1) + \dots \right) = ax_0 (\cos \omega_0 t - 1) + \dots$$

つまり

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \dots \quad (5.22)$$

になり単振動で近似できる。これは初期条件 (5.19) を満たす近似的方程式 (5.13) の解である。

一方, $e^{-ax_0} \rightarrow 0$ あるいは $e^{-ax_0} \rightarrow 2$ のとき $\omega \rightarrow 0$ になり周期は無限大になる。 $e^{-ax_0} = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき $\omega^2 = \omega_0^2 (2 - \varepsilon) \varepsilon = 2\omega_0^2 \varepsilon + \dots$ より

$$e^{a(x-x_0)} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + (-1 + \varepsilon) \cos \left(\omega_0 \sqrt{2\varepsilon} t \right) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + (-1 + \varepsilon) (1 - \omega_0^2 \varepsilon t^2 + \dots) \right)$$

$$= 1 + \omega_0^2 t^2 + \dots$$

したがって

$$x = x_0 + \frac{1}{a} \log \left(1 + \omega_0^2 t^2 + \dots \right)$$

になる。

$E > 0$ の場合

$$\log \left| Ey + U_0 + \sqrt{E(Ey^2 + 2U_0y - U_0)} \right| = \pm \omega t + \text{定数}$$

より

$$\sqrt{E(Ey^2 + 2U_0y - U_0)} = U_0 C e^{\pm \omega t} - (Ey + U_0)$$

両辺を2乗して整理すれば

$$Ey + U_0 = \frac{U_0 C}{2} e^{\pm \omega t} + \frac{E + U_0}{2C} e^{\mp \omega t}$$

(5.20) を代入すると

$$e^{a(x-x_0)} = \frac{1}{e^{-ax_0} - 2} \left(\frac{C}{2} e^{\pm \omega t} + \frac{1}{2C} (e^{-ax_0} - 1)^2 e^{\mp \omega t} - 1 \right)$$

$t = 0$ とすると

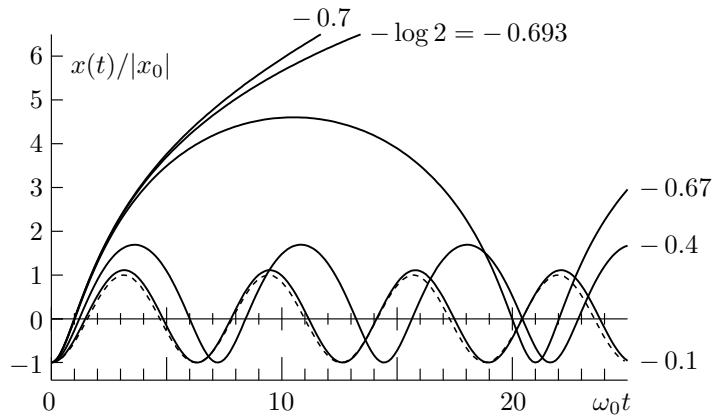
$$1 = \frac{1}{e^{-ax_0} - 2} \left(\frac{C}{2} + \frac{1}{2C} (e^{-ax_0} - 1)^2 - 1 \right), \quad \therefore C = e^{-ax_0} - 1$$

したがって

$$e^{a(x-x_0)} = \frac{1 + (1 - e^{-ax_0}) \cosh \omega t}{2 - e^{-ax_0}} \quad (5.23)$$

になる。これは $E < 0$ の解 (5.21) において ω を $i\omega$ で置き換えたものである。運動は振動せず $t \rightarrow \infty$ で $x \rightarrow \infty$ になる。

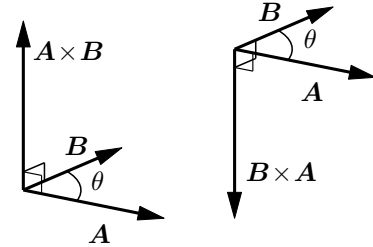
下図に (5.21), (5.23) から求めた $x = x(t)$ を示す。曲線に付けた数値は ax_0 の値を表す。破線は近似解 (5.22) である。 $ax_0 = -0.1$ の場合、運動は極小点 $x = 0$ 近傍に限られるため、破線と $ax_0 = -0.1$ の実線はよく一致する。しかし、これ以外の運動では調和振動子の近似は成り立たない。 $U(x)$ の図で、矢印で示した領域は $x_0 = -0.4, -0.67$ での運動可能領域 $E - U(x) \geq 0$ である。この範囲の $U(x)$ を (5.12) で近似することはできない。



6 角運動量と力のモーメント

6.1 ベクトル積

定義 2つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} の間のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき, 大きさが $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ で, 方向が \mathbf{A} と \mathbf{B} に垂直で \mathbf{A} から \mathbf{B} へ θ の角で回すとき右ネジが進む方向のベクトルを考える。このベクトルを \mathbf{A} と \mathbf{B} のベクトル積 (vector product) あるいは外積 (outer product) といい $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ と書く。



基本的性質

1. 定義から $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ は \mathbf{A} と \mathbf{B} を2辺とする平行四辺形の面積である。
2. $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ の方向は, \mathbf{B} から \mathbf{A} へ回すとき右ネジが進む向きである。これは $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の方向とは逆であるから $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ になる。掛ける順序には注意を要する。
3. \mathbf{A} と \mathbf{B} が平行な場合, \mathbf{A} と \mathbf{B} が同じ向きなら $\theta = 0$, 逆向きなら $\theta = \pi$ であり, どちらにしても $\sin\theta = 0$ である。したがって $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ になる。特に $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ である。
4. ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ に対して分配則 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ が成り立つ。
5. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は \mathbf{A} と \mathbf{B} に垂直であるから, 内積は $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ になる。

ベクトル積の成分

k 軸の単位ベクトルを \mathbf{e}_k ($k = x, y, z$) とする。ベクトル積の定義から $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ の方向は \mathbf{e}_z の方向であり, 大きさは $|\mathbf{e}_x||\mathbf{e}_y|\sin(\pi/2) = 1$ であるから, $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ になる。同様にして

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (6.1)$$

これと $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0}, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ などを使うと

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_x \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x + A_x B_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + A_x B_z \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x + A_y B_y \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y + A_y B_z \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + A_z B_y \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y + A_z B_z \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (6.2)$$

になる。したがって, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の成分は

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned} \quad (6.3)$$

である。添字 x, y, z は $x \rightarrow y \rightarrow z$ の循環で現れる。ベクトル積は形式的には 3×3 の行列式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

で表せる。

分配則を使わずに (6.3) を求めよう。 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とおくと

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z = 0 \quad (6.4)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z = 0 \quad (6.5)$$

である。(6.4) $\times B_x - (6.5) \times A_x = 0$ から

$$(A_z B_x - A_x B_z) C_z = (A_x B_y - A_y B_x) C_y$$

(6.4) $\times B_y - (6.5) \times A_y = 0$ から

$$(A_x B_y - A_y B_x) C_x = (A_y B_z - A_z B_y) C_z$$

したがって

$$\frac{C_x}{A_y B_z - A_z B_y} = \frac{C_y}{A_z B_x - A_x B_z} = \frac{C_z}{A_x B_y - A_y B_x}$$

この各式を λ とおくと

$$C_x = \lambda(A_y B_z - A_z B_y), \quad C_y = \lambda(A_z B_x - A_x B_z), \quad C_z = \lambda(A_x B_y - A_y B_x) \quad (6.6)$$

になる。これから

$$\begin{aligned} C^2 &= \lambda^2 \left((A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2 \right) \\ &= \lambda^2 \left(A_x^2 (B_y^2 + B_z^2) + A_y^2 (B_x^2 + B_z^2) + A_z^2 (B_x^2 + B_y^2) \right. \\ &\quad \left. - 2A_y B_y A_z B_z - 2A_z B_z A_x B_x - 2A_x B_x A_y B_y \right) \\ &= \lambda^2 \left(\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - A_x^2 B_x^2 - A_y^2 B_y^2 - A_z^2 B_z^2 - 2A_y B_y A_z B_z - 2A_z B_z A_x B_x - 2A_x B_x A_y B_y \right) \\ &= \lambda^2 \left(\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2 \right) \\ &= \lambda^2 \left(\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \right) \end{aligned}$$

一方、ベクトル積の定義から

$$C^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 \sin^2 \theta = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 (1 - \cos^2 \theta) = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

したがって $\lambda^2 = 1$, つまり $\lambda = \pm 1$ である。 A, B を正の定数として、 \mathbf{A} を x 軸の正方向を向くベクトル $(A, 0, 0)$, \mathbf{B} を y 軸の正方向を向くベクトル $(0, B, 0)$ とすると、 \mathbf{C} は z 軸の正方向を向く。

(6.6) から

$$C_x = 0, \quad C_y = 0, \quad C_z = \lambda AB$$

$C_z > 0$ であるためには $\lambda > 0$ である。したがって $\lambda = 1$ になる。以上から $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を成分で表すと

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

である。

ベクトル積の例

- 電荷 q の粒子が磁場 \mathbf{B} 中を速度 \mathbf{v} で運動する場合を考える。 \mathbf{v} と \mathbf{B} のなす角を θ とすると、粒子が磁場から受けるローレンツ力 (Lorentz's force) \mathbf{F} の大きさは $q|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin\theta$ である。その方向はフレミングの左手の法則 (左手の中指, 人差指をそれぞれ \mathbf{v} , \mathbf{B} の方向とすると親指が力の方向) で決まる。以上をベクトル積で表せば $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と簡単に表せる。

- (6.16) で求めた面積速度 $V_S = rv \sin \phi / 2$ は, ϕ が \mathbf{r} と \mathbf{v} のなす角であることに注意すると

$$V_S = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

と書ける。 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を角運動量 (angular momentum) という。中心力における面積速度一定とは角運動量が一定であることを意味する。

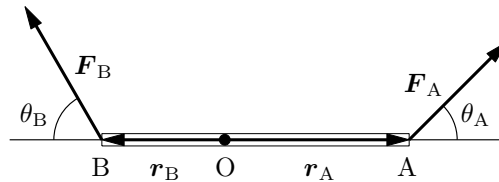
- 図のように, 固定された支点 O のまわりで自由に回転できる棒の両端 A, B に力 $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B$ が働くとき, 釣り合いの条件は

$$|\mathbf{r}_A| |\mathbf{F}_A| \sin \theta_A = |\mathbf{r}_B| |\mathbf{F}_B| \sin \theta_B \quad \text{つまり} \quad |\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A| = |\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B|$$

である。さらに, 力は互いに反対方向に棒を回転させなければならない。これは $\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A$ と $\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B$ が反対方向であればよい。図の場合, $\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A$ は紙面に垂直上向き, $\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B$ は下向きである。力の大きさと方向の両方の条件が, ベクトル積を用いて

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B = \mathbf{0}$$

と表せる。 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を力のモーメント (moment of force) という。



レビ・チビタ (Levi-Civita) の記号 i, j, k を $1, 2, 3$ のどれかとする。 i, j, k がすべて異なる場合, 3つの並び ijk を考える。このうち2つを置換 (交換) することを互換という。互換を繰り返すと, ある並び ijk から別の並び $i'j'k'$ が得られる。このとき, 繰り返す互換の組み合わせは, 一意には決まらない。例えば 123 から 213 を得るには $\underline{1}23 \rightarrow 213$, $\underline{1}23 \rightarrow 321 \rightarrow 231 \rightarrow 213$ など, いろいろある。しかし, 現れる互換の回数が偶数回か奇数回かは定まる。偶数回必要な置換 $ijk \rightarrow i'j'k'$ を偶置換, 奇数回必要な置換を奇置換という。 ε_{ijk} を

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{2つの添字が等しいとき} \\ +1 & \text{ijk が 123 の偶置換であるとき} \\ -1 & \text{ijk が 123 の奇置換であるとき} \end{cases} \quad (6.7)$$

で定義する。これをレビ・チビタの記号という。具体的には

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \quad \text{その他の } \varepsilon_{ijk} = 0$$

である。なお, ベクトル $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$ を

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i$$

で表す。

ikj は ijk から互換を1回行えば得られる。したがって, ijk が偶置換 (奇置換) なら ikj は奇置換 (偶置換) であるから $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ である。また $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ である。 ijk の順番を入れ替えるときには符号に注意する。

(6.1) は一つの式

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (6.8)$$

で表せる。これは具体的に i, j を指定してみれば容易に確かめられる。また $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ であるから (6.8) には性質 $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i$ も含まれる。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{ij} A_i B_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{ijk} A_i B_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \sum_k \left(\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} A_i B_j \right) \mathbf{e}_k$$

であるから、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の k 成分は

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{kij} A_i B_j \quad (6.9)$$

になる。これは (6.3) を一つの式で表したものである。例えば $k = 3$ のとき

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 = \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{321} A_2 B_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

便利な関係式

$$\sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (6.10)$$

が成り立つ。例えば、 $i = 1, j = 2$ のとき $\varepsilon_{kij} \neq 0$ である k は $k = 3$ のみであるから

$$\sum_k \varepsilon_{k12} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{312} \varepsilon_{3mn}$$

$\varepsilon_{3mn} \neq 0$ であるためには $m = 1, n = 2$ あるいは $m = 2, n = 1$ しかない。したがって

$$\sum_k \varepsilon_{k12} \varepsilon_{kmn} = \begin{cases} (\varepsilon_{312})^2 = 1, & m = 1, n = 2 \\ \varepsilon_{312} \varepsilon_{321} = -1, & m = 2, n = 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

である。これをまとめて表せば

$$\sum_k \varepsilon_{k12} \varepsilon_{kmn} = \delta_{m1} \delta_{n2} - \delta_{n1} \delta_{m2}$$

になり、(6.10) が成り立つ。 $i = 1, j = 2$ 以外の場合も同様である。

問 6.1 (6.3) を用いて $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ を示せ。

問 6.2 次の公式を証明せよ。(6.9), (6.10) を使うと簡単である。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.11)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.13)$$

6.2 角運動量と力のモーメント

$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ で定義される量を原点 O まわりの角運動量という。ここで、 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ は運動量である。 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ であるから

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6.14)$$

になる。角運動量の時間変化は原点 O まわりの力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ に等しい。運動量

$$\mathbf{p} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

は位置ベクトルの差から求まるから \mathbf{r} の始点をどこに取るかに依存しない。力も \mathbf{r} の始点に依存しない。一方、角運動量と力のモーメントは \mathbf{r} の始点をどこに取るかで変わるので、どの点まわりかを明記する必要がある。ただし、特に断らない限り、原点まわりである。

$\mathbf{N} = \mathbf{0}$ のとき、角運動量は時間によらない定数ベクトルになる。これを角運動量保存則という。角運動量保存則が重要になるのは、 $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ でも $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ になる場合である。 \mathbf{F} の方向が常にある定点を通るとき、この力を中心力という。この定点を原点 O にとる。中心力の方向は \mathbf{r} の方向であるから

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

と書ける。したがって

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

になる。中心力の場合、力の中心まわりの角運動量は保存する。

角運動量が保存するとき、 ℓ の大きさ及び方向は時間的に一定である。 ℓ は \mathbf{r} と $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ に垂直であるから、 \mathbf{r} と \mathbf{v} を含む平面も時間に依らず一定になり、運動は ℓ に垂直な 1 つの平面内で行われる。例えば、 ℓ の方向を z 軸にとると $\mathbf{r} \cdot \ell = z(t)\ell = 0$ であるから $\ell \neq 0$ より $z(t) = 0$ になり、質点は常に xy 平面上にある。中心力の場合、運動は力の中心を含む平面内で行われる。

質点の運動がある平面内に限られるとき、この平面を xy 平面とする。 r, φ を質点の xy 平面の極座標とし、 r, φ, z 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ で表す。質点の位置ベクトル $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ と速度の極座標表現 $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ 、(ただし $v_r = \dot{r}$ 、 $v_\varphi = r\dot{\varphi}$) を使うと

$$\ell = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\mathbf{e}_r \times (v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi) = mr v_\varphi \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z \quad (6.15)$$

になる。力も r, φ 方向成分で表して $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ とすると $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = rF_\varphi\mathbf{e}_z$ であるから (6.14) は

$$m \frac{d}{dt} r^2\dot{\varphi} = rF_\varphi$$

になる。これは運動方程式の φ 方向成分

$$mA_\varphi = F_\varphi, \quad A_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} r^2\dot{\varphi}$$

と同等である。中心力では $F_\varphi = 0$ であるから

$$\frac{d}{dt} r^2\dot{\varphi} = 0$$

となり、角運動量が保存するわけである。

上で現れた $r^2\dot{\varphi}$ は面積速度で表せる。面積速度とは質点の位置ベクトルが単位時間に掃過する面積である。時刻 t と $t + \Delta t$ の間に掃過する面積を ΔS とする。 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、この面積は三角形 OPP' の面積で近似できる。 P から OP' に下ろした垂線の長さは、半径 r 、角度 $\Delta\varphi$ の弧の長さ $r\Delta\varphi$ で近似できる。したがって

$$\Delta S = \frac{1}{2}(r + \Delta r)r\Delta\varphi$$

これから面積速度 V_S は

$$V_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \quad (6.16)$$

になる。角運動量が保存する場合、面積速度は一定になる。

角運動量の物理的意味について考えみる。(6.15) から l に寄与する速度は r に垂直な φ 成分、つまり、原点まわりの回転に伴う速度であるから、 l は回転運動に関連する量である。 l の方向は回転軸 (z 軸) 方向であり、時計の針と反対方向の回転 ($\dot{\varphi} > 0$) では回転軸の正の方向に向き、逆の場合は負の方向に向く。運動量の大きさ $p = mv$ は並進運動の強さを表す。これと同様に、 l の大きさは回転運動の強さを表す。並進運動の場合、 p は速さだけでなく慣性質量 m にも比例する。(6.15) から、回転運動の場合も、 l は回転の速さ $\dot{\varphi}$ だけでなく mr^2 に比例する。これは言わば回転運動の“慣性質量”であり、慣性モーメント (moment of inertia) と呼ばれる。質量 m が同じでも質点が回転軸から遠くにあるほど慣性モーメントは大きく回転しにくい。これは日常経験することである。

半径 r の円周上の運動を考える。 l と r, v の関係を次の図に示す。 v の向きが逆の場合は、 l の向きも逆転し図では下を向く。いずれにしても、 l の向きが回転軸である。慣性モーメントを $I = mr^2$ とおく。今の場合 r は一定であるから I は定数になる。(6.14)、角運動量の大きさ l 、運動エネルギー K は

$$I\dot{\varphi} = N, \quad l = I\dot{\varphi}, \quad K = \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

である。これを1次元運動の運動方程式 $m\ddot{x} = F$ 、運動量 $m\dot{x}$ 、運動エネルギー $m\dot{x}^2/2$ と比較すると

$$N \longleftrightarrow F \quad I \longleftrightarrow m \quad \dot{\varphi} \longleftrightarrow \dot{x}$$

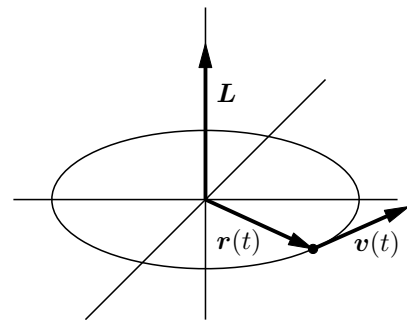
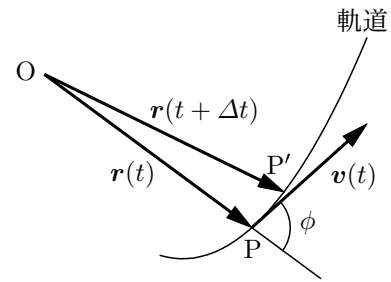
の対応関係がある。

角運動量保存則の適用例 なめらかな水平面上に小さい穴をあけておく。質量 m の質点に軽い糸を結び付け、糸の他端を穴に通して下に引っ張り、質点に半径 r_0 、角速度 ω_0 の等速円運動をさせる。次に、糸を静かに下に引いて、等速円運動の半径を $r_1 (< r_0)$ に変える。このときの角速度 ω_1 を求める。平面上に開けた穴を原点 O とすると、質点に働く糸の力は O を力の中心とする中心力であるから、 O まわりの質点の角運動量は保存する。(6.15) より、最初の質点の角運動量は $mr_0^2\omega_0$ であり、最後の角運動量は $mr_1^2\omega_1$ であるから

$$mr_0^2\omega_0 = mr_1^2\omega_1, \quad \text{したがって} \quad \omega_1 = \frac{r_0^2}{r_1^2}\omega_0 > \omega_0$$

となり、質点は早く回転するようになる。円運動の運動エネルギーは $m(rv)^2/2$ であるから、最後と最初の運動エネルギーの差は

$$\frac{1}{2}mr_1^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 \right)$$



となり増加する。この増加は質点を引く糸の力が仕事をするためである。

半径 r , 角速度 ω の等速円運動をしているとき, 張力の大きさ T は $T = mr\omega^2$ である。角運動量保存則から $mr^2\omega = mr_0^2\omega_0$ になるから

$$T = mr_0\omega_0^2 \frac{r_0^3}{r^3}$$

である。糸を dr 引いたとき, 張力 T がなす仕事は Tdr である。したがって, 半径が r_0 から r_1 までに張力がなす仕事は

$$mr_0\omega_0^2 \int_{r_1}^{r_0} \frac{r_0^3}{r^3} dr = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 \right)$$

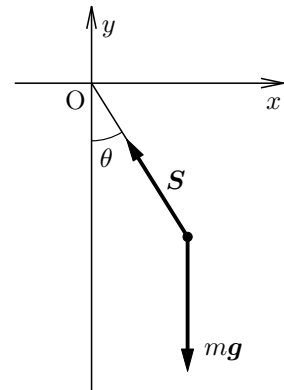
である。これは運動エネルギーの増加に等しい。

問 6.3 中心力と速度に比例する摩擦力 $-\alpha\mathbf{v}$ が作用しているとき, 力の中心まわりの角運動量 $\ell(t)$ を求めよ。

問 6.4 質量が無視できる長さ ℓ の棒の先に質量 m の質点を付け, 鉛直平面内で振動させる。質点には棒の張力 \mathbf{S} と重力 $m\mathbf{g}$ が働く。ただし, \mathbf{g} は大きさ g で鉛直下向きのベクトルである。原点 O まわりの角運動量 ℓ と力のモーメント \mathbf{N} の x, y, z 成分を求め, (6.14) から θ が

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

を満たすことを示せ。

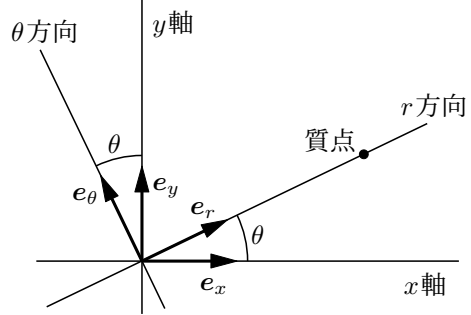


7 中心力

7.1 2次元の極座標

2次元における質点の運動を考える。中心力による運動を考察する場合、直交座標系の代わりに極座標を使うほうが、問題が簡単になる。ここでは速度と加速度を極座標で表す。以下は3次元極座標の特別な場合として(1.26)で導出してあるが、2次元に特化して求めておく。

質点の位置ベクトルを \mathbf{r} とし、 \mathbf{r} と x 軸のなす角を θ 、 $r = |\mathbf{r}|$ とする。 \mathbf{r} の方向を動径方向あるいは r 方向、これに垂直で θ が増す方向を θ 方向と呼ぶことにする。 x 方向、 y 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y とし、 r 方向、 θ 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_θ とすると、図から



$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$

である。 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_θ は、質点の運動とともに向きが変わり時間に依存する。これらの時間微分を求めると

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d \cos \theta}{d\theta} \mathbf{e}_x + \frac{d\theta}{dt} \frac{d \sin \theta}{d\theta} \mathbf{e}_y = \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y) = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (7.1)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \frac{d \sin \theta}{d\theta} \mathbf{e}_x + \frac{d\theta}{dt} \frac{d \cos \theta}{d\theta} \mathbf{e}_y = \dot{\theta} (-\cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_y) = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \quad (7.2)$$

である。 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ と表せるから、これを時間で微分すると

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (7.3)$$

したがって、速度 \mathbf{v} の r 成分、 θ 成分を v_r 、 v_θ とすると

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (7.4)$$

を得る。さらに微分すると

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} \mathbf{e}_r + \dot{r} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (7.5)$$

であるから、加速度 \mathbf{a} の r 成分 a_r 、 θ 成分 a_θ は

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \quad (7.6)$$

になる。ベクトルとしては $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ であるが、成分では $a_r \neq dv_r/dt$ 、 $a_\theta \neq dv_\theta/dt$ である。これは r 方向と θ 方向が質点の運動とともに変化するからである。

(7.1)の結果は次の様に考えてもよい。時間 Δt の間に θ が $\Delta\theta$ 変化したとする。 $\Delta\theta \rightarrow 0$ では $\Delta\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_r(\theta)$ の大きさは半径1、角度 $\Delta\theta$ の弧の長さで近似できる。また、その方向は \mathbf{e}_r に垂直であり、 \mathbf{e}_θ の方向を向く。したがって $\Delta\mathbf{e}_r = \Delta\theta \mathbf{e}_\theta$ になるから

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \mathbf{e}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

(7.2) についても同様である。また、時間 Δt の間に r が Δr 変化したとする。 r 方向には Δr だけ変位し、 θ 方向には半径 r 、角度 $\Delta\theta$ の弧の長さ $r\Delta\theta$ だけ変位するから

$$v_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r}, \quad v_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\dot{\theta}$$

になり (7.4) が導ける。

質点に働く力を $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta$ と表せば、運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = F_\theta \quad (7.7)$$

になる。以下で示すように、これは中心力の場合に便利な形式である。

問 7.1 任意のベクトル $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta$ に対して

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。これを使って (7.4) と (7.6) を求めよ。

7.2 中心力

質点に働く力 \mathbf{F} がある定点と質点間の距離だけの関数で、向きが定点と質点を結ぶ直線上にあるとき、この力を中心力 (central force) といい、定点を力の中心という。力の中心を原点 O にとり質点の極座標を r, θ とする。中心力の θ 方向の成分はないから $F_r = f(r), F_\theta = 0$ である。 $f(r) < 0$ のとき引力、 $f(r) > 0$ のとき斥力 (反発力) である。したがって、(7.7) は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r), \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (7.8)$$

θ 方向の運動方程式は直ちに解けて

$$r^2\dot{\theta} = h \text{ (一定)} \quad (7.9)$$

を得る。これから面積速度 $|r^2\dot{\theta}/2|$ は一定である。これはケプラーが惑星運動の観測値をもとにして見出したケプラーの第 2 法則であるが、中心力であれば一般に成り立つ。

$\dot{\theta} = h/r^2$ を r 方向の運動方程式 (7.8) に代入すると

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3} \quad (7.10)$$

となり、 r だけの微分方程式になる。実際の中心力 $f(r)$ のほかに mh^2/r^3 も力と見なせば、 r 方向の運動方程式は 1 次元の運動方程式と形式的に同じになる。この“みかけの力” $mh^2/r^3 = mr\dot{\theta}^2$ は、この形から分かるように遠心力の効果である。ここで考えている極座標系が質点の運動とともに回転する加速度系であるため、この様な“みかけの力”が現れる。 $h \neq 0$ のとき mh^2/r^3 は正であるから斥力の働きをし、 r が小さいほど大きくなるから、質点を原点から遠ざける作用をする。

運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = f(r) \mathbf{e}_r$ を直交座標で表すと

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y = \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y$$

であるから

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(r) \frac{x}{r}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = f(r) \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

になる。 r は x と y の両方に依存するから x 成分と y 成分の方程式を別々に解くことはできず、解析的に運動を決定することは難しい。

力学的エネルギー保存則 $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$ を使い、運動エネルギー K を極座標で表すと

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

中心力の場合 $\dot{\theta} = h/r^2$ であるから

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right)$$

1次元のときと同様にして位置エネルギーを

$$U(r) = -\int f(r) dr \quad (7.11)$$

で定義し、 $E = K + U$ を考える。

$$\frac{d\dot{r}^2}{dt} = \frac{d\dot{r}^2}{d\dot{r}} \frac{d\dot{r}}{dt} = 2\dot{r}\ddot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{r^2} = \frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} = -\frac{2\dot{r}}{r^3}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dU}{dr} = -f(r)\dot{r}$$

であるから、(7.10) より

$$\frac{dE}{dt} = \dot{r} \left(m\ddot{r} - \frac{mh^2}{r^3} - f(r) \right) = 0$$

となり、 E は時間的に一定である。これが中心力についての力学的エネルギー保存則である。

全力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + W(r), \quad W(r) = U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

と書ける。運動エネルギーに含まれる $mh^2/2r^2$ を位置エネルギーに加えれば、 $m\dot{r}^2/2$ を運動エネルギー、 $W(r)$ を位置エネルギーとする1次元の全力学エネルギーと同等になる。このため、1次元でのエネルギー保存則に基づく方法により r 方向の運動を解くことができる。運動可能な r の領域は

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - W(r) \geq 0$$

を満たす領域である。 W を r で微分すると

$$-\frac{dW}{dr} = -\frac{dU}{dr} + \frac{mh^2}{r^3} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3}$$

となり、(7.10) の右辺が得られる。したがって、 W に加えた $mh^2/2r^2$ は、遠心力のポテンシャルエネルギーと解釈できる。

問 7.2 α を正の定数とし $U(r) = -\alpha/r$ のとき $W(r)$ の概略を図示せよ。また、 E を与えたとき、運動可能な r の範囲を考察せよ。

7.3 惑星の軌道

すべての物体の間には質量による引力が働く。これを万有引力 (universal gravitation) という。その向きは質点を結ぶ方向であり、 $f(r)$ は質点間の距離を r とすると

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^2}, \quad G = 6.6732 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (7.12)$$

である。 G は万有引力定数 (gravitational constant) と呼ばれる。

惑星は中心力である太陽からの万有引力を受けて、その周りを運動する。このとき、太陽も惑星からの引力を受けるが、惑星に比べて非常に重いので、原点に静止しているとする (一番重い土星に比べて 1000 倍重い)。惑星の位置 \mathbf{r} を極座標 r, θ で表す。太陽の質量を M 、惑星の質量を m とすると、惑星の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm}{r^2} + \frac{mh^2}{r^3}, \quad r^2\dot{\theta} = h \text{ (一定)} \quad (7.13)$$

である。これを解けば $r = r(t), \theta = \theta(t)$ が求められるが、ここでは r を直接 t の関数と考える代わりに、 $r = r(\theta(t))$ と見なし、 r を θ の関数として求める。 $\dot{\theta} = h/r^2$ を使うと

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \quad (7.14)$$

であるから $u = 1/r$ とおくと

$$\frac{dr}{dt} = -h \frac{du}{d\theta}$$

更に微分すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -h \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

これを r 方向の運動方程式に代入すると

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\theta^2} = -\tilde{u}, \quad \tilde{u} = u - \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r} - \frac{GM}{h^2} \quad (7.15)$$

\tilde{u} は単振動と同じ微分方程式を満たすから、 C, α を任意定数として $\tilde{u} = C \cos(\theta + \alpha)$ である。したがって

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos(\theta + \alpha)}, \quad \ell = \frac{h^2}{GM}, \quad \varepsilon = \frac{h^2 C}{GM} \quad (7.16)$$

になる。

話を簡単にするため $\alpha = 0$ になるように座標系をとる。このとき、直交座標

$$x = r(\theta) \cos \theta = \frac{\ell \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad y = r(\theta) \sin \theta = \frac{\ell \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

を用いて軌道 (7.16) を表そう。上の式を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ について解けば

$$\cos \theta = \frac{x}{\ell - \varepsilon x}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\ell - \varepsilon x}$$

になる。これらを $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入して整理すれば

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + 2\ell\varepsilon x + y^2 = \ell^2$$

を得る。これを見やすい形に変形すると

$$\varepsilon = 0 \text{ のとき } x^2 + y^2 = \ell^2, \quad \text{円} \quad (7.17)$$

$$0 < \varepsilon < 1 \text{ のとき } \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{楕円} \quad (7.18)$$

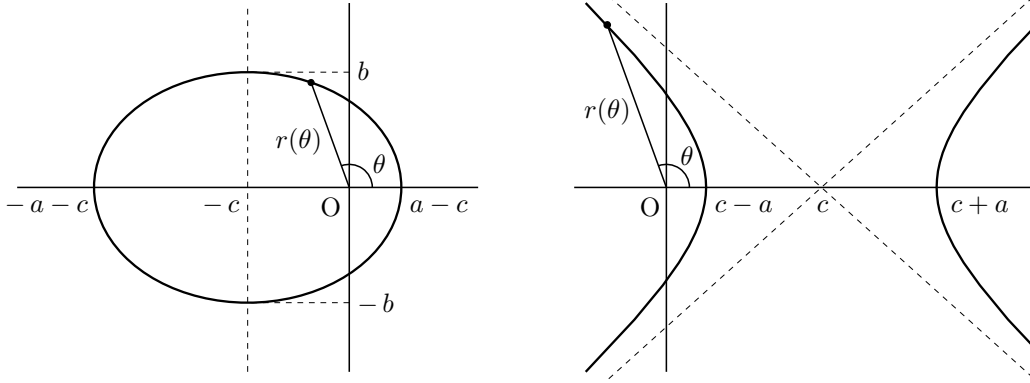
$$\varepsilon = 1 \text{ のとき } x = -\frac{y^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2}, \quad \text{放物線} \quad (7.19)$$

$$\varepsilon > 1 \text{ のとき } \frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{双曲線} \quad (7.20)$$

ただし

$$a = \frac{\ell}{|1 - \varepsilon^2|}, \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}}, \quad c = \frac{\ell\varepsilon}{|1 - \varepsilon^2|} = \varepsilon a \quad (7.21)$$

したがって、軌道 (7.16) は原点を焦点とする円錐曲線を表す。 $\varepsilon = c/a$ を離心率という。楕円 (7.18) と双曲線 (7.20) の曲線を下図に示す。



$0 < \varepsilon < 1$ であれば、惑星の運動は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く。これはケプラーの第 1 法則である。惑星が楕円運動をしているとき、楕円の面積を面積速度 $h/2$ で割れば公転周期 T が求まる。楕円の長軸半径を a 、短軸半径を b とする。 $b = \sqrt{al}$ と $h = \sqrt{lGM}$ を使うと

$$T^2 = \left(\frac{\pi ab}{h/2} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (7.22)$$

$4\pi^2/GM$ は惑星に共通の定数であるから、惑星の公転周期の 2 乗は楕円軌道の長軸半径の 3 乗に比例するというケプラーの第 3 法則が証明できた。ケプラーは惑星運動の観測値から 3 つの法則を帰納的に求めたが、ここではニュートンの運動方程式と万有引力に関する逆 2 乗則から導いた。次の表に観測値を示す。 a と T は地球の値に対する比である。ケプラーの第 3 法則は非常によい精度で成り立っている。

惑星	T	a	T^2/a^3	惑星	T	a	T^2/a^3
水星	0.2409	0.3871	1.0005	土星	29.458	9.5549	0.9948
金星	0.6152	0.7233	1.0002	天王星	84.022	19.2184	0.9946
火星	1.8809	1.5237	1.0001	海王星	164.774	30.1104	0.9946
木星	11.862	5.2026	0.9992	冥王星	248.534	39.5399	0.9992

力学的エネルギーと軌道 万有引力の場合の位置エネルギーは

$$U(r) = - \int f(r) dr = GMm \int \frac{1}{r^2} dr = - \frac{GMm}{r}$$

ただし、 $r \rightarrow \infty$ で $U \rightarrow 0$ になるように積分定数をとった。全力学的エネルギー E は

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + W(r), \quad W(r) = \frac{mh^2}{2r^2} + U(r) = \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} \quad (7.23)$$

である。 E は一定であるから、具体的に定数で表そう。 E は質点の位置に依らないから、計算しやすい点で求めればよい。(7.14), (7.16) より

$$\dot{r} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{\ell\varepsilon \sin(\theta + \alpha)}{(1 + \varepsilon \cos(\theta + \alpha))^2}$$

$\theta = -\alpha$ では $\dot{r} = 0$, $r = \ell/(1 + \varepsilon)$ である。これらを E に代入し, $\ell = h^2/GM$ を使うと

$$E = \frac{mG^2M^2}{2h^2}(\varepsilon^2 - 1), \quad \text{したがって } \varepsilon^2 = 1 + \frac{2h^2E}{mG^2M^2} \quad (7.24)$$

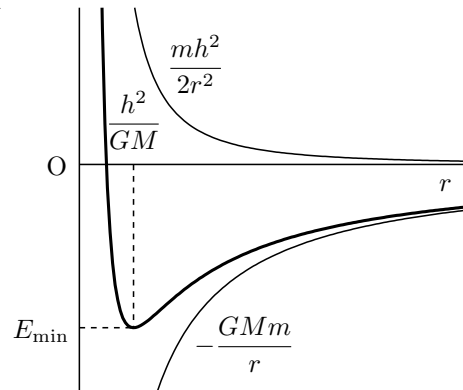
となり, 離心率 ε は エネルギー E と面積速度 $h/2$ で決まる。惑星の軌道は E の値で分類できる。 $E < 0$ のとき $\varepsilon < 1$, $E > 0$ のとき $\varepsilon > 1$ になるから

$$E = E_{\min} : \text{円} \quad E_{\min} < E < 0 : \text{楕円}$$

$$E = 0 : \text{放物線} \quad E > 0 : \text{双曲線}$$

である。ただし, E_{\min} は $W(r)$ の最小値

$$E_{\min} = W(h^2/GM) = -\frac{mG^2M^2}{2h^2}$$



である。 $E < E_{\min}$ では運動は存在しない。 $W(r)$ は右図のようになる。 $E - W(r) \geq 0$ を満たす r が運動可能な範囲である。上で述べた E による軌道の分類は, この図からも理解できる。

問 7.3 (7.23) の $W(r)$ が $r = h^2/(GM)$ で最小値 E_{\min} になることを確かめよ。

問 7.4 (7.24) の E は (7.21) の a を用いて

$$E = \pm \frac{GMm}{2a}, \quad \begin{cases} - & \text{円または楕円} \\ + & \text{双曲線} \end{cases}$$

と表せることを示せ。

7.4 位置の時間的变化

$r = r(t)$ を求める。全力学的エネルギー (7.23) を \dot{r} について解くと

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))}, \quad \text{つまり } dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2} \frac{1}{E - W(r)}} dr \quad (7.25)$$

を得る。ただし, 複号は $\dot{r} > 0$ のとき +, $\dot{r} < 0$ のとき - である。 $E < 0$ (楕円軌道) の場合を考える。このとき (7.16) における r の最小値と最大値を r_1, r_2 とすると

$$r_1 = \frac{\ell}{1 + \varepsilon}, \quad r_2 = \frac{\ell}{1 - \varepsilon} \quad (7.26)$$

であるから, (7.16) の ℓ と (7.24) より

$$r_1 + r_2 = \frac{2\ell}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{GMm}{E}, \quad r_1 r_2 = \frac{\ell^2}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{mh^2}{2E}$$

になる。したがって

$$(r - r_1)(r - r_2) = r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{mh^2}{2E} = \frac{r^2}{E}(E - W(r))$$

これから (7.25) は

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2E} \frac{1}{(r-r_1)(r-r_2)}} r dr \quad (7.27)$$

$r_1 \leq r \leq r_2$ であるから

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2 - (r_2 - r_1) \cos \phi) = a(1 - \varepsilon \cos \phi) \quad (7.28)$$

とおける。ただし, $(r_1 + r_2)/2$ は楕円の長軸半径 a であり, (7.26) より $(r_2 - r_1)/(r_1 + r_2) = \varepsilon$ である。

$$dr = \frac{dr}{d\phi} d\phi = a\varepsilon \sin \phi d\phi$$

$$r - r_1 = \frac{1}{2} (r_2 - r_1) (1 - \cos \phi) = a\varepsilon (1 - \cos \phi)$$

$$r - r_2 = \frac{1}{2} (r_1 - r_2) (1 + \cos \phi) = -a\varepsilon (1 + \cos \phi)$$

を (7.27) に代入すると

$$dt = \pm \tau \sqrt{\frac{m}{-2E}} a(1 - \varepsilon \cos \phi) d\phi, \quad \tau = \frac{\sin \phi}{|\sin \phi|}$$

$t = 0$ のとき $r = r_1$, つまり (7.28) から $\phi = 0$ とする。 r が r_1 から r_2 に増加するとき $\dot{r} > 0$ であるから複号は $+$ をとる。このとき ϕ は 0 から π になるから $\tau = +1$ である。続いて r が r_2 から r_1 に減少するとき $\dot{r} < 0$ であるから複号は $-$ をとり, ϕ は π から 2π になるから $\tau = -1$ である。結局 $\pm\tau = +1$ である。したがって

$$t = \sqrt{\frac{m}{-2E}} a \int_0^\phi (1 - \varepsilon \cos \phi') d\phi' = \sqrt{\frac{m}{-2E}} a(\phi - \varepsilon \sin \phi) \quad (7.29)$$

を得る。これをケプラーの方程式という。この方程式から $\phi = \phi(t)$ を求め, これを (7.28) に代入すると r が t の関数として得られる。ただし, $\varepsilon \neq 0$ のとき, $\phi = \phi(t)$ は簡単な関数では表せず, (7.29) を数値的に解く必要がある。

問 7.5 楕円運動の周期 T は, (7.29) の ϕ が 0 から 2π になるまでの時間である。 T を求めよ。また, これは (7.22) の T に一致することを示せ。

問 7.6 $E = 0$ の場合, (7.25) を解き

$$t = \frac{1}{3\sqrt{GM}} \left(r + \frac{h^2}{GM} \right) \sqrt{2r - \frac{h^2}{GM}}$$

になることを示せ。ただし $t = 0$ で r は最小値 $h^2/(2GM)$ とする。

問 7.7 $f(r) = -\alpha r$ の場合, 運動方程式の x 成分と y 成分を求めよ。軌道は楕円軌道を描くこと, 力の中心が楕円の中心になることを示せ。楕円運動の周期を求めよ。

問 7.8 中心力 $f(r) = -\alpha r^n$ (α は正の定数) の場合, 2章で述べた改良オイラー法により運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f(r) \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を数値的に解くプログラムを作成せよ。 $X_1 = x$, $X_2 = dx/dt$, $X_3 = y$, $X_4 = dy/dt$ とすると

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, X_3, X_4), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

ただし

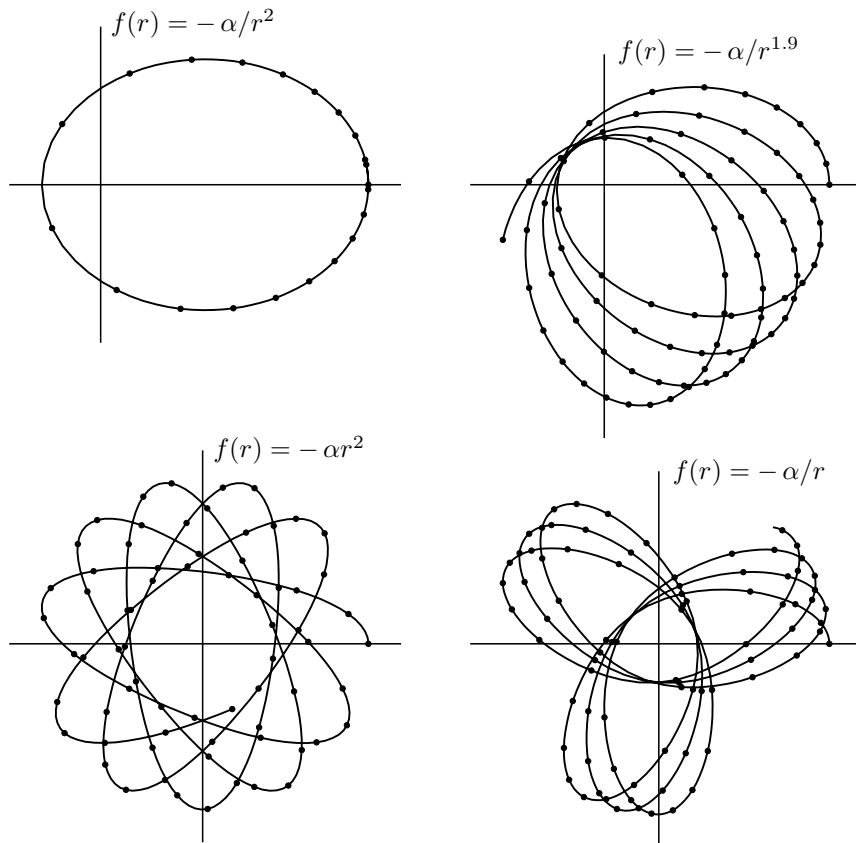
$$F_1 = X_2, \quad F_2 = f(r) \frac{X_1}{r}, \quad F_3 = X_4, \quad F_4 = f(r) \frac{X_3}{r}, \quad r = \sqrt{X_1^2 + X_3^2}$$

である。この場合は4元連立微分方程式になる。

数値解 $f(r) = -\alpha r^n$ (α は正の定数) である中心力の場合、運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(r) \frac{x}{r}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = f(r) \frac{y}{r}$$

をそのまま数値的に解いた例を下図に示す(問7.8参照)。 \bullet は一定時間ごとの質点の位置である。 $f(r)$ が $1/r^2$ あるいは r に比例する引力の場合、任意の初期条件に対して軌道は閉じる。



7.5 2体問題

惑星の運動を扱うとき、太陽は非常に重いので静止しているとした。しかし、厳密には太陽も惑星からの力を受け運動する。そこで、一般に2つの質点からなる系の運動を調べよう。これを2体問題 (two-body problem) という。

質点 1, 質点 2 の質量を m_1, m_2 , 位置を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする。質点 2 が質点 1 に及ぼす力を \mathbf{F} とすると, 作用反作用の法則から質点 1 が質点 2 に及ぼす力は $-\mathbf{F}$ である。質点には外部から力は働いていないとすると, 運動方程式は

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F} \quad (7.30)$$

である。これらを足し合わせれば

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad \text{つまり} \quad \ddot{\mathbf{r}}_G = 0$$

ただし, \mathbf{r}_G は重心の位置

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

である。したがって, 重心は等速度運動をする。あるいは, 運動量 $\mathbf{p}_1 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \mathbf{p}_2 = m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$ で表せば

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

であり全運動量は一定である (運動量保存則)。 (7.30) をそれぞれの質量で割り, 差をとれば

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}, \quad \therefore \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

になる。ただし

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{つまり} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

\mathbf{r} は 2 粒子間の相対位置ベクトル, μ は換算質量 (reduced mass) である。

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (7.31)$$

により系の運動エネルギーを \mathbf{r}_G と \mathbf{r} で表すと

$$\frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (7.32)$$

になる。第 1 項は重心の運動エネルギーで一定である。

万有引力や荷電粒子間に働くクーロン力は, 2 質点間の相対座標 \mathbf{r} だけに依存する。 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ の場合

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (7.33)$$

になる。これは質量 μ の 1 つの質点に力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が作用したときの運動方程式と同じである。2 つの質点が相対座標 \mathbf{r} だけに依存する力を及ぼし合うとき, 運動は重心運動と相対運動 (7.33) に完全に分離でき, (7.33) のみを考えればよい。これで扱う自由度は (7.30) の 6 から 3 に半減する。 \mathbf{r}_G, \mathbf{r} が求めれば (7.31) から $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ が決まる。

惑星と太陽の 2 体問題を考える。質点 1 を惑星, 質点 2 を太陽とし, $m_1 = m, m_2 = M$ とする。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と換算質量 μ の定義を使うと, (7.33) は

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{(M+m)m}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (7.34)$$

になる。重心が原点に静止しているとする

$$\mathbf{r}_1 = \frac{M}{M+m} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m}{M+m} \mathbf{r}$$

である。したがって、 m が M に比べて無視できる場合には

$$m \ddot{\mathbf{r}} \approx -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 \approx 0$$

となり、太陽は原点に静止しているとしてよい。

m が M に比べて無視できない場合、解くべき運動方程式は (7.34) から分かるように、 M を $M+m$ で置き換える必要がある。したがって、例えば、ケプラーの第3法則 (7.22) は

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3$$

になる。

問 7.9 月 (質点1) と地球 (質点2) の2体問題を考える。この2体系には外力として太陽からの万有引力が作用する。太陽を原点にとり、月、地球が太陽から受ける万有引力をそれぞれ $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}_2)$, 月が地球から受ける万有引力を $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ とする。必要な数値は自分で調べよ。

1. 2体系の重心は地球の中心から約 4600 km の位置にあることを示せ。
2. $|\mathbf{F}_1| \approx 2|\mathbf{F}|$ を示せ。
3. 外力が作用する場合の相対運動の運動方程式を求めよ。地球から見た月の相対運動を考えると、2. の結果にもかかわらず、太陽からの引力は無視できることを示せ。

7.6 2粒子の弾性衝突

2個の粒子が互いに力を及ぼしあいながら衝突する場合を考える。衝突前、粒子が互いに十分離れていて力が作用しないとき、質量 m_1 の粒子の速度を \mathbf{v}_1 , 質量 m_2 の粒子の速度を \mathbf{v}_2 とする。また、衝突後、粒子が十分離れたときの速度を \mathbf{v}'_1 , \mathbf{v}'_2 とする。運動量保存則から

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

力学的エネルギー保存則から

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2$$

である。ただし $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ などである。

重心の速度 $\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G$ は衝突の前後で一定である。一定速度 \mathbf{v}_G で移動する座標系を重心系という。これに対して実験室に固定した座標系を実験室系という。 \mathbf{v}_i と \mathbf{v}'_i , ($i = 1, 2$) は実験室系での速度である。重心系での速度を \mathbf{u}_i , \mathbf{u}'_i とすると

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{u}'_i = \mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_G$$

であるが、(7.31) を時間で微分すると、例えば

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

になるから

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}', \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}'$$

ただし, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$ は衝突前後での相対速度である。重心系での全運動量は

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{u}'_1 + m_2 \mathbf{u}'_2 = 0$$

になる。重心系では重心は静止したままである。エネルギー保存則は (7.32) を用いれば

$$\frac{\mu}{2} v^2 = \frac{\mu}{2} v'^2, \quad \therefore v' = v$$

になる。 \mathbf{v} 及び \mathbf{v}' 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e} , \mathbf{e}' とすると

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \mathbf{e}, \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \mathbf{e}', \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \mathbf{e}, \quad \mathbf{u}'_2 = -\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \mathbf{e}'$$

である。重心系では $u_1 = u'_1$, $u_2 = u'_2$ であるから衝突の前後で各粒子の速さは変わらず, 速度の方向が変わるだけである。また, 衝突後も 1 と 2 は逆方向に運動する。運動量保存とエネルギー保存で決まるのは以上である。 \mathbf{e} の方向は初期条件で与えられるが, \mathbf{e}' の方向は相対運動の運動方程式を解かないと決まらない。 \mathbf{u}'_i を実験室系に戻すと

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{u}'_1 + \mathbf{v}_G = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \mathbf{e}' + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(v \mathbf{e}' + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \right) \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{u}'_2 + \mathbf{v}_G = -\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \mathbf{e}' + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(-v \mathbf{e}' + \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2 \right) \end{aligned}$$

になる。

$\mathbf{v}_2 = 0$ の場合を考える。 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ である。 $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e}_1$ とおくと

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{v_1}{1 + \gamma} (\gamma \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'), \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{\gamma v_1}{1 + \gamma} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}'), \quad \text{ただし } \gamma = \frac{m_1}{m_2} \quad (7.35)$$

になる。 $\gamma > 1$ の場合に図示すると右図のように表せる。

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 = v'_1 \cos \theta_1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = v'_2 \cos \theta_2, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}' = \cos \phi$$

とする。 θ_1, θ_2 は入射方向 ($\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e}_1$ の方向) から測った衝突後の散乱角である。また, ϕ は \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}'_1 のなす角であり, 重心系での粒子 1 の散乱角になる。(7.35) から

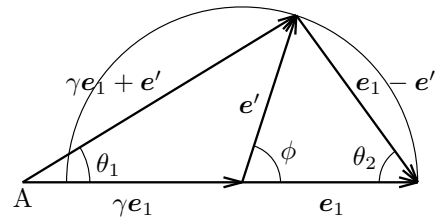
$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1}{1 + \gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 + 2\gamma \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'} = \frac{v_1}{1 + \gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \phi} \\ v'_2 &= \frac{\gamma v_1}{1 + \gamma} \sqrt{2 - 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'} = \frac{2\gamma v_1}{1 + \gamma} \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

図より

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \phi}{\gamma + \cos \phi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \phi}{2} \quad (7.36)$$

である。衝突前に静止していた粒子 2 が得る最大の速さは

$$v'_2(\phi = \pi) = \frac{2\gamma v_1}{1 + \gamma}$$



したがって、衝突後の粒子 2 の運動エネルギー E'_2 は

$$E'_2 \leq \frac{m_2}{2} \left(\frac{2\gamma v_1}{1+\gamma} \right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad E_1 = \frac{m_1}{2} v_1^2 = \text{入射エネルギー}$$

になる。 $\phi = \pi$ とき $e' = -e_1$ になるから

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

衝突後も衝突前と同じ直線上を運動する (正面衝突)。正面衝突では、衝突後、入射粒子 1 は $m_1 = m_2$ ならば静止し、 $m_1 < m_2$ ならば入射とは逆方向に跳ね返される。

$m_2 = m_1$ の場合は簡単になり

$$v'_1 = \frac{v_1}{2} (e' + e_1), \quad v'_2 = \frac{v_1}{2} (-e' + e_1)$$

である。 $v'_1 \cdot v'_2 = 0$ であるから、衝突後の粒子の方向は直交する。また

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \tan \frac{\phi}{2}, \quad \therefore \theta_1 = \frac{\phi}{2}$$

である。前図で点 A が半径 1 の円周上にあるから、以上の結果は図から明らかである。

7.7 ラザフォード散乱

前述の 2 粒子の衝突では、 e' あるいは角度 ϕ は未定であった。これを決定するためには相対運動の運動方程式 (7.33) を解く必要がある。ここでは $F(r)$ としてクーロン力

$$F(r) = f(r) \frac{r}{r}, \quad f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

の場合を考える。 q_1, q_2 は粒子 1, 2 の電荷である。

$$f(r) = \frac{k\mu}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\mu}$$

とし万有引力 (7.12) と比較すると

$$GM \rightarrow -k, \quad m \rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

の置き換えをすれば、万有引力の結果が適用できる。したがって、 $u = 1/r$ は (7.15) より

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = - \left(u + \frac{k}{h^2} \right)$$

を満たすから、 C と α を任意定数として $u + k/h^2 = C \cos(\theta + \alpha)$ となり

$$r = \frac{\ell}{\epsilon \cos(\theta + \alpha) - 1}, \quad \ell = \frac{h^2}{k}, \quad \epsilon = \frac{h^2 C}{k} \quad (7.37)$$

を得る。

(7.24) よりエネルギー E と離心率 ϵ の関係は

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2h^2 E}{\mu k^2} \quad (7.38)$$

である。ただし、 E は相対運動のエネルギーあるいは重心系でのエネルギーである。散乱問題は無限に離れている2粒子が力の影響を受けながら近づき、再び無限に離れていく。 $r \rightarrow \infty$ での相対速度を v_0 とすると位置エネルギーは0であるから

$$E = \frac{\mu}{2} v_0^2$$

になる。散乱問題の場合 $\varepsilon > 1$ であり (7.37) は双曲線を表す。

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \theta_0 > 0 \quad (7.39)$$

とすると、 $r > 0$ であるためには $-\theta_0 < \theta + \alpha < \theta_0$ である。 θ を測る基準線を適当にとれば、常に $\alpha = -\theta_0$ とできる。このようにすると、 θ の範囲は $0 < \theta < 2\theta_0$ である。 $\theta \rightarrow 0$, $2\theta_0$ のとき $r \rightarrow \infty$ になるから、傾き0と $\tan 2\theta_0$ の2つの直線は漸近線である。 $\theta = 0$ 方向から入射した粒子は、クーロン力により進行方向を曲げられて $2\theta_0$ 方向に出て行く。

(7.37) と (7.38) では、 E と h を初期条件から決める。散乱を扱う場合、初期条件として適当なのは、 $r \rightarrow \infty$ における相対速度 v_0 と力の中心 B から漸近線に下ろした垂線の長さ b である。 b を衝突径数 (impact parameter) という。面積速度 V_S は単位時間あたりに AB が掃過する面積であるから、 $r \rightarrow \infty$ では、底辺が v_0 で高さが b の三角形の面積 $v_0 b/2$ になる。したがって $h = 2V_S = v_0 b$ である。これと $E = \mu v_0^2/2$ を (7.38) に代入すると

$$\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{b v_0^2}{k} \right)^2$$

になる。入射方向から測った散乱角 $\phi = \pi - 2\theta_0$ は、(7.39) を使うと

$$\cot \frac{\phi}{2} = \frac{1}{\tan(\phi/2)} = \tan \theta_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{b v_0^2}{k}, \quad \therefore b = \frac{k}{v_0^2} \cot \frac{\phi}{2} \quad (7.40)$$

を得る。通常の散乱実験では、入射粒子の衝突径数 b を制御すること困難である。その代わりに b の分布が一様な多数の入射粒子を考え、散乱後ある方向に何個の粒子が出て来るかを測定する。散乱角が ϕ と $\phi + d\phi$ になる散乱の衝突径数を b と $b + db$ とすると (7.40) から

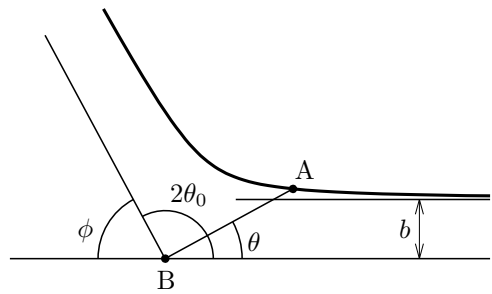
$$db = \frac{db}{d\phi} d\phi = -\frac{k}{2v_0^2} \frac{1}{\sin^2(\phi/2)} d\phi \quad (7.41)$$

である。衝突径数が b と $b + db$ の間にある入射粒子の個数 dN は半径 b , 幅 $|db|$ の円環の面積に比例する、すなわち $dN \propto 2\pi b |db|$ である。この dN は ϕ と $\phi + d\phi$ の間に散乱される粒子の個数でもある。断面積が dS である検出器が散乱体 B から十分離れた距離 R にあるとし、これに飛び込む粒子の数を考える。 dN は半径 R の球面上の角 ϕ と $\phi + d\phi$ の間に一様に散乱されてくる。この部分は半径 $R \sin \phi$, 幅 $R d\phi$ の円環であるから、検出器に飛び込む粒子の個数は

$$\frac{dS}{2\pi R^2 \sin \phi d\phi} dN \propto \frac{b}{\sin \phi} \left| \frac{db}{d\phi} \right| \frac{dS}{R^2} = \sigma(\phi) \frac{dS}{R^2}, \quad \sigma(\phi) = \frac{b}{\sin \phi} \left| \frac{db}{d\phi} \right|$$

になる。 dS/R^2 は散乱体から見た検出器の立体角であるから、散乱角 ϕ 方向の単位立体角に出て行く粒子の個数は σ に比例する。 σ を微分断面積 (differential cross section) という。(7.40) と (7.41) を σ に代入するとラザフォードの散乱公式

$$\sigma(\phi) = \left(\frac{k}{2v_0^2 \sin^2(\phi/2)} \right)^2 \quad (7.42)$$



を得る。

(7.42) は重心系における微分断面積である。粒子 2 が散乱前に静止している場合, 実験室系に変換するには (7.36) を用いる。実験室系, 重心系での検出器の立体角をそれぞれ $d\Omega_1, d\Omega$ とすると, 検出器で測定される粒子数は実験室系でも重心系でも同じであるから, 実験室系での粒子 1 の微分断面積 $\sigma_1(\theta_1)$ は

$$\sigma_1(\theta_1)d\Omega_1 = \sigma(\phi)d\Omega$$

で与えられる。

$$d\Omega_1 \propto \sin \theta_1 d\theta_1, \quad d\Omega \propto \sin \phi d\phi$$

より

$$\sigma_1(\theta_1) = \sigma(\phi) \frac{\sin \phi}{\sin \theta_1} \left| \frac{d\phi}{d\theta_1} \right|$$

になる。(7.36) より ($\gamma = m_1/m_2$)

$$\sin \theta_1 = \frac{\sin \phi}{\sqrt{1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \phi}}, \quad \frac{d\theta_1}{d\phi} = \frac{1 + \gamma \cos \phi}{1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \phi}$$

であるから

$$\sigma_1(\theta_1) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \phi)^{3/2}}{|1 + \gamma \cos \phi|} \sigma(\phi) \quad (7.43)$$

になる。一方, 最初静止していた粒子 2 の微分断面積 $\sigma_2(\theta_2)$ は $\phi = \pi - 2\theta_2$ より

$$\sigma_2(\theta_2) = \sigma(\phi) \frac{\sin \phi}{\sin \theta_2} \left| \frac{d\phi}{d\theta_2} \right| = 4 \cos \theta_2 \sigma(\pi - 2\theta_2) \quad (7.44)$$

である。

$m_1 = m_2$ の場合 $\phi = 2\theta_1$ であり

$$\sigma_1(\theta_1) = \frac{(2 + 2 \cos \phi)^{3/2}}{|1 + \cos \phi|} \sigma(\phi) = 4 \cos \frac{\phi}{2} \sigma(\phi) = 4 \cos \theta_1 \sigma(2\theta_1) \quad (7.45)$$

同一粒子の散乱では, 散乱後に, 入射粒子と最初に静止していた粒子を区別することは意味がない。(7.44), (7.45) で θ_1 と θ_2 を共通の θ で置き換えれば, 実験室系での微分断面積 σ_L は

$$\sigma_L(\theta) = \sigma_1(\theta) + \sigma_2(\theta) = 4 \cos \theta (\sigma(2\theta) + \sigma(\pi - 2\theta))$$

になる。

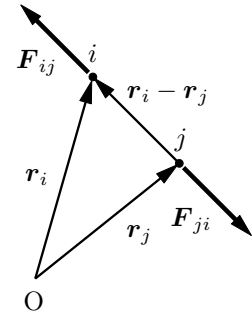
$m_2 \gg m_1$ ($\gamma \approx 0$) の場合 $\mathbf{r}_G \approx \mathbf{r}_2$ であり, 粒子 2 は最初静止しているから, 重心は静止ししたままであり重心系と実験室系は同じになる。実際, (7.35) より $v'_2 \approx 0$ である。(7.36) より $\theta_1 \approx \phi$ であり (7.43) は

$$\sigma_1(\theta_1) \approx \sigma(\theta_1) = \left(\frac{k}{2v_0^2 \sin^2(\theta_1/2)} \right)^2, \quad v_0 = \text{粒子 1 の入射速度} \quad (7.46)$$

になる。

8 質点系

大きさのある物体も細分化すると質点の集まりになり、質点が互いに力を及ぼしあって物体を形成していると思わせる。このような場合を扱うために、互いに力を及ぼしあう N 個の質点系を考察する。質点に番号 $1, 2, \dots, N$ をつけ、 i 番目の質点の質量と位置ベクトルを m_i, \mathbf{r}_i とする。質点 i には質点系の外部から働く力 \mathbf{F}_i と質点 j が質点 i に及ぼす力 \mathbf{F}_{ij} が作用する。質点が互いに及ぼしあう力 \mathbf{F}_{ij} を内力といい、外部から働く力 \mathbf{F}_i を外力という。作用・反作用の法則 (運動の第3法則) から、質点 i が j に及ぼす力と j が i に及ぼす力は、両者を結ぶ直線上で働き、大きさが同じで向きは反対である。すなわち



$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

である。これは $i \neq j$ の場合であるが、質点は自らに力を及ぼさない ($\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$) から $i = j$ のときも成り立つとしてよい。

8.1 質点系の運動量

質点 i の運動方程式は運動量 $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ で表すと

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \dots + \mathbf{F}_{iN} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (8.2)$$

これをすべての質点について総和をとると

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}$$

右辺の第2項を \mathbf{S} とする。和の添字 i と j を入れかえ $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ を使うと

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ji} = -\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{S} = \mathbf{0}$$

になる。したがって

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad \text{ただし } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \quad (8.3)$$

質点系の全運動量 \mathbf{P} の時間的変化は外力の和に等しい。特に、外力が作用しない質点系の全運動量は時間的に一定である。これは運動量保存則である。

質点系の重心 (質量中心) \mathbf{r}_G は各質点の位置をその質量の重みで平均したもの

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (8.4)$$

である。全運動量は

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d\mathbf{r}_G}{dt}$$

と書けるから (8.3) は

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (8.5)$$

質点系の重心はそこに全外力と全質量 M が集中した 1 つの質点の運動と同じである。現実には存在しない質点の運動で実際の物体の運動が扱えるのは、物体の重心を考えるとその運動が 1 つの質点と同じになるためである。外力が働かないとき重心は等速直線運動をするが、これは運動量保存則と同じことである。

質点に一定の重力が働く場合、大きさ g で鉛直下向きのベクトルを \mathbf{g} とすると $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$ であるから

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g} = M \mathbf{g}$$

したがって、質点の各々が複雑な運動をしても、重心は放物運動をする。

(8.2) あるいはそれらを適当に組み合わせた $3N$ 個の微分方程式のうち、質点系の重心の運動方程式 (8.5) は解析的に解くことも可能である。しかし、残りの $3(N-1)$ 個の方程式は内力を含むから独立に解くことはできず複雑な連立方程式になる。このため何らかの近似 (例えば質点系を剛体とみなす) を用いるか数値計算をしなければならない。残りの運動が簡単になるのは 2 個の質点からなる系の場合だけである。

質点系の運動エネルギーを重心の運動エネルギーと残りの部分に分離する。質点 i の位置 \mathbf{r}_i を重心 \mathbf{r}_G からみて \mathbf{r}'_i とすると

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i \quad (8.6)$$

である。重心の定義 (8.4) より

$$M \mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) = M \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i$$

であるから

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad \text{したがって} \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0} \quad (8.7)$$

になる。これから質点系の運動エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i)^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 \end{aligned} \quad (8.8)$$

第 1 項は重心に全質量が集まって運動するときの重心の運動エネルギーであり、第 2 項は重心に対する質点系の相対運動の運動エネルギーである。

8.2 質点系の角運動量

(8.2) と \mathbf{r}_i とのベクトル積をとり、 i について加えると

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \quad (8.9)$$

右辺の第2項の和の添字 i と j を入れかえ (8.1) を使うと

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

になる。ここで、等しいものを加えて2で割っても同じであることを使った。一方、(8.9)の左辺に対して

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

を使うと、(8.9)は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad \text{ただし} \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (8.10)$$

になる。原点 O まわりの全角運動量 \mathbf{L} の時間的変化は、 O まわりの外力のモーメントの和に等しい。もし外力のモーメントの総和が $\mathbf{0}$ ならば、全角運動量は一定である (角運動量保存則)。

原点まわりの運動方程式 (8.10) を任意の点 $\mathbf{R}(t)$ まわりの方程式に書き直す。 $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$ とすると

$$M\mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{R} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i$$

であるから

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = \mathbf{L}' + M(\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{R}} + M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{r}}_G, \quad \mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i$$

\mathbf{L}' は \mathbf{R} まわりの角運動量である。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + M(\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}} + M\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i$$

(8.5) より

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}' - M(\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{N}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (8.11)$$

になる。 \mathbf{R} を原点とする加速度系では、見かけの力 $-m_i \ddot{\mathbf{R}}$ が質点に作用する。この力のモーメントは

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times (-m_i \ddot{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (-m_i \ddot{\mathbf{R}}) = -M(\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}}$$

である。全体では重心に $-M\ddot{\mathbf{R}}$ が作用するのと等価である。 $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ の場合 $d\mathbf{L}'/dt = \mathbf{N}'$ になるが、これは \mathbf{R} を原点とする別の慣性系で (8.10) を表しただけである。

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_G(t)$ の場合、 \mathbf{R} まわりの見かけの力のモーメントは $\mathbf{0}$ になり

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G \quad (8.12)$$

が成り立つ。また

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_G, \quad \mathbf{L}_G = M\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G$$

に分離する。 \mathbf{L}_G は重心の角運動量である。外力が一律な重力 $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$ の場合、 $-\ddot{\mathbf{R}}$ と同様に

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}, \quad \mathbf{N}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{g} = M(\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (8.13)$$

であるから、重心まわりの角運動量 \mathbf{L}' は一定である。

8.3 剛体の運動

固い物体は力を加えてもほとんど変形しない。これを理想化し、形が全く変形しない物体を考えて、これを剛体という。剛体を細かく分ければ N 個 ($N \rightarrow \infty$) の質点系になるから、剛体は各質点間の距離がいつも一定に保たれている質点系といえる。 N 個の質点系の運動を指定するには、 $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$ という $3N$ 個の独立な変数が必要であり、系の自由度は $3N$ である。ところが、物体を剛体とみなすと自由度は 6 になってしまう。剛体上の適当な点 A, B, C の位置を決めると、剛体全体の位置は決定する。これに必要な変数の数は $3 \times 3 = 9$ である。剛体上の任意の 2 点間の距離は一定であるから、 $|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B| = \text{一定}$ 、 $|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C| = \text{一定}$ 、 $|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A| = \text{一定}$ という 3 個の条件がつく。したがって、9 個の変数のうち独立なものは $9 - 3 = 6$ である。

自由度 6 の剛体の運動を決定するには 6 個の方程式が必要である。重心の運動方程式

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (8.14)$$

と角運動量の方程式

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (8.15)$$

を用いればよい。あるいは重心まわりの角運動量

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}', \quad \mathbf{N}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (8.16)$$

でもよい。剛体が形を保持するのは各部分の間に内力が働くためであるが、上の方程式はすべて内力に依存しない。

剛体の釣り合い

剛体が多くを力を受けて釣り合うための条件は、重心が静止していること、つまり (8.14) より

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (8.17)$$

である。更に、重心が静止していてもそのまわりで回転しては静止とはいえないから、重心まわりの角運動量 \mathbf{L}' は $\mathbf{0}$ のまま一定でなければならない。重心は静止しているから重心の角運動量も $\mathbf{L}_G = \mathbf{0}$ であり、 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}' = \mathbf{0}$ になる。したがって (8.15) より

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (8.18)$$

になる。(8.17) と (8.18) の式を成分で書いた 6 個の式が釣り合いの条件である。

剛体の 2 点に大きさが等しく向きが反対の 2 力が作用するとき、これを偶力という。この 2 力の合力は $\mathbf{0}$ であるから、重心の運動 (8.14) には関与しないが、回転運動には寄与する。偶力 \mathbf{F} と $-\mathbf{F}$ がそれぞれ \mathbf{r}_a と \mathbf{r}_b で作用しているとき、偶力のモーメント \mathbf{N}_c は

$$\mathbf{N}_c = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_b \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ は原点の取り方に依存しない。したがって、偶力は \mathbf{N}_c が同じなら、どんな力がどこに作用するかには関係ない。

8.4 固定軸のある剛体の運動

剛体が固定した軸まわりに自由に回転でき、この回転以外の運動ができない場合、剛体の自由度は1である。固定軸を z 軸にとり、回転する剛体に固定した座標系を $x'y'z$ とする。 z 軸は紙面に垂直で上向きである。図の角度 $\phi = \phi(t)$ が求まれば、剛体の運動は決まる。剛体を細分した各質点 i の位置ベクトル \mathbf{r}_i は

$$\mathbf{r}_i = x'_i \mathbf{e}_{x'} + y'_i \mathbf{e}_{y'} + z_i \mathbf{e}_z \quad (8.19)$$

と表せる。 $\mathbf{e}_{x'}$ と $\mathbf{e}_{y'}$ だけが時間に依存する。

$$\mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi, \quad \mathbf{e}_{y'} = -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi$$

より

$$\frac{d\mathbf{e}_{x'}}{dt} = \dot{\phi} \mathbf{e}_{y'}, \quad \frac{d\mathbf{e}_{y'}}{dt} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_{x'}, \quad \therefore \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\phi} (-y'_i \mathbf{e}_{x'} + x'_i \mathbf{e}_{y'}) = \dot{\phi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_i$$

であるから

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\phi} (-x'_i z_i \mathbf{e}_{x'} - y'_i z_i \mathbf{e}_{y'} + (x_i'^2 + y_i'^2) \mathbf{e}_z)$$

したがって

$$\mathbf{L} = \dot{\phi} (I_{zx} \mathbf{e}_{x'} + I_{zy} \mathbf{e}_{y'} + I \mathbf{e}_z) \quad (8.20)$$

ただし

$$I_{zx} = -\sum_i m_i z_i x'_i, \quad I_{zy} = -\sum_i m_i z_i y'_i, \quad I = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

になる。これらは剛体の形、質量分布、固定軸の取り方によって決まる時間によらない量である。 I を剛体の固定軸まわりの慣性モーメントという。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (I_{zx} \ddot{\phi} - I_{zy} \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_{x'} + (I_{zy} \ddot{\phi} + I_{zx} \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_{y'} + I \ddot{\phi} \mathbf{e}_z$$

より (8.15) は

$$I_{zx} \ddot{\phi} - I_{zy} \dot{\phi}^2 = N_{x'}, \quad I_{zy} \ddot{\phi} + I_{zx} \dot{\phi}^2 = N_{y'} \quad (8.21)$$

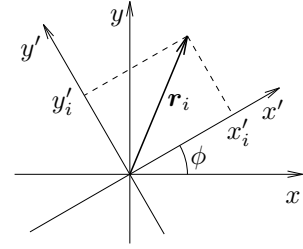
及び

$$I \ddot{\phi} = N_z \quad (8.22)$$

になる。剛体には軸を固定させるための力 \mathbf{F}_{axis} が軸受けから働く。この力は運動に束縛を課すために現れる束縛力であり、運動が束縛条件に反しなければ働かず、反すると出現する。束縛力は重力のようにあらかじめ分かっている力ではない。 \mathbf{F}_{axis} は z 軸上で作用するから、力のモーメントの z 成分 N_z には寄与しない。したがって、(8.22) を解くとき \mathbf{F}_{axis} を知る必要はない。この方程式から $\phi = \phi(t)$ が求まる。(8.21) は剛体の運動を決めるには不要であるが、未知の \mathbf{F}_{axis} を決めには必要である。

(8.22) と1次元の質点の運動方程式 $m\ddot{x} = F$ と比較すると、質量 m が直線運動の慣性の大きさを表すのに対応して、慣性モーメント I は回転運動の慣性の大きさを表す。 I が大きいと回転運動の速度 $\dot{\phi}$ は変化しにくい。 I は質量 m_i に比例するだけでなく、回転軸からの距離の2乗 r_i^2 にも比例するから、剛体の全質量 $\sum_i m_i$ が同じであっても、質量が軸から遠くに分布している程 I は大きくなる。固定軸まわりの回転による剛体の運動エネルギー K は

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad (8.23)$$



になる。これは1次元の質点の運動エネルギー $m\dot{x}^2/2$ と同じ形をしている。

(8.20) より $I_{zx} = I_{zy} = 0$ ならば角運動量は回転軸方向を向くが、一般には成り立たない。剛体が薄い板で回転軸が板面内の場合、 x' 軸を板面内にとる。 $y' = 0$ になるから $I_{zy} = 0$ であり

$$\mathbf{L} = I_{zx}\dot{\phi}\mathbf{e}_{x'} + I\dot{\phi}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_{zx}\ddot{\phi}\mathbf{e}_{x'} + I_{zx}\dot{\phi}^2\mathbf{e}_{y'} + I\ddot{\phi}\mathbf{e}_z$$

軸受けからの外力だけが作用する場合、 $N_z = 0$ であるから $\dot{\phi} = \text{一定} = \omega$ になり

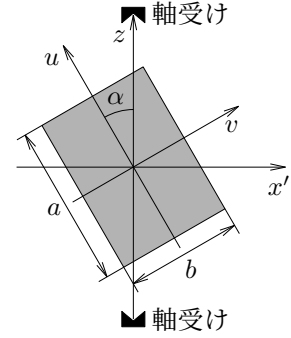
$$\mathbf{L} = I_{zx}\omega\mathbf{e}_{x'} + I\omega\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{N} = I_{zx}\omega^2\mathbf{e}_{y'}$$

軸受けからの力のモーメントは板に垂直な方向に働く。図のような質量 M の長方形の板の場合

$$I = \frac{M}{ab} \int dx' dz x'^2, \quad I_{zx} = -\frac{M}{ab} \int dx' dz x'z$$

積分領域は長方形内である。 u, v で表すと $|u| \leq a/2, |v| \leq b/2$ であり

$$x' = v \cos \alpha - u \sin \alpha, \quad z = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$



になるから

$$I = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} du \int_{-b/2}^{b/2} dv (v \cos \alpha - u \sin \alpha)^2 = \frac{M}{12} (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$$

$$I_{zx} = -\frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} du \int_{-b/2}^{b/2} dv (v \cos \alpha - u \sin \alpha)(u \cos \alpha + v \sin \alpha) = \frac{M}{12} (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha$$

である。正方形の場合 $I_{zx} = 0$ になるから $\mathbf{L} = I\omega\mathbf{e}_z, \mathbf{N} = 0$ であり、軸受けがなくても回転軸は一定である。

8.5 慣性モーメント

剛体に固定した1つの軸を考え、これを z 軸とする。 z 軸まわりの慣性モーメント I は

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (8.24)$$

である。ここで、 m_i は剛体を構成する質点 i の質量であり、 r_i は z 軸から質点までの距離である。

x, y, z 軸に平行で重心を通る軸を x', y', z' 軸とし、 z' 軸まわりの慣性モーメントを I_G とすると

$$I_G = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

である。重心の位置を x_G, y_G, z_G とすると、 $x_i = x_G + x_i', y_i = y_G + y_i'$ であるから

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i ((x_G + x_i')^2 + (y_G + y_i')^2) \\ &= (x_G^2 + y_G^2) \sum_i m_i + 2x_G \sum_i m_i x_i' + 2y_G \sum_i m_i y_i' + I_G \end{aligned}$$

$\sum_i m_i = M$ は剛体の質量であり、また重心の定義より

$$\sum_i m_i x_i' = 0, \quad \sum_i m_i y_i' = 0$$

になるから

$$I = Mh^2 + I_G, \quad h = \sqrt{x_G^2 + y_G^2} \quad (8.25)$$

を得る。 h は固定軸と重心の距離である。重心を通る軸まわりの慣性モーメント I_G が分かっているならば、これに平行な任意の軸まわりの慣性モーメントはすぐに求められる。

慣性モーメントの一般的性質については 84 ページ参照。

慣性モーメントの具体例

剛体は連続体であるから、(8.24) を計算するとき、 i の和は積分に置き変わる。

細い一様な棒 質量 M 、長さ ℓ の細い一様な棒を考える。棒の一端から a のところを通って棒に垂直な軸まわりの慣性モーメントを求める。この軸から距離 x にある長さ dx の微小部分の質量は Mdx/ℓ であるから

$$I = \int_{-a}^{\ell-a} \frac{M}{\ell} x^2 dx = \frac{M}{3\ell} [x^3]_{-a}^{\ell-a} = \frac{M}{3\ell} ((\ell-a)^3 - (-a)^3) = M \left(a - \frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{M\ell^2}{12}$$

になる。軸が棒の中心 ($a = \ell/2$) のとき I は最小値 $M\ell^2/12$ になり、軸が棒の一端にあるとき最大値 $M\ell^2/3$ になる。

薄い一様な円板 質量 M 、半径 a の円板の中心を通り円板に垂直な軸まわりの慣性モーメント I を求める。まず、半径 r と $r + dr$ の同心円で区切られた円環の慣性モーメント dI を考える。円環はすべて軸から等距離 r にあるから

$$dI = \sum_{i=\text{円環}} m_i r_i^2 = r^2 \sum_{i=\text{円環}} m_i = r^2 \times (\text{円環の質量})$$

である。円板の単位面積あたりの質量は $M/\pi a^2$ であり、円環の面積は $2\pi r dr$ であるから

$$\text{円環の質量} = \frac{M}{\pi a^2} 2\pi r dr = \frac{2Mr dr}{a^2}$$

したがって $dI = 2Mr^3 dr/a^2$ となり、これを r について 0 から a まで積分すると

$$I = \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2} Ma^2 \quad (8.26)$$

を得る。

円板上で中心を原点とする xy 座標を使うと、位置 (x, y) の面積 $dxdy$ の微小部分は質量 $\frac{M}{\pi a^2} dxdy$ であり、 z 軸からの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ であるから

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{M}{\pi a^2} (x^2 + y^2) dx dy$$

と表せる。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと

$$I = \frac{M}{\pi a^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta r^2 = \frac{2\pi M}{\pi a^2} \int_0^a dr r^3 = \frac{1}{2} Ma^2$$

一様な球 質量 M 、半径 a の球の中心を通る z 軸まわりの慣性モーメント I を求める。球を z 軸に垂直な薄い円板に区切り、中心から z のところの厚さ dz の薄い円板の慣性モーメント dI を考え

る。 dI は (8.26) を使えば求まる。この円板の半径は $\sqrt{a^2 - z^2}$ である。球の単位体積あたりの質量は $M/(4\pi a^3/3)$ であり、この円板の体積は $\pi(a^2 - z^2)dz$ であるからから、円板の質量は

$$\frac{3M}{4\pi a^3} \pi(a^2 - z^2)dz = \frac{3M}{4a^3} (a^2 - z^2)dz$$

したがって

$$dI = \frac{1}{2} \frac{3M}{4a^3} (a^2 - z^2)dz (a^2 - z^2) = \frac{3M}{8a^3} (a^2 - z^2)^2 dz$$

これから

$$I = \frac{3M}{8a^3} \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{8a^3} \left[\frac{1}{5} z^5 - \frac{2}{3} a^2 z^3 + a^4 z \right]_{-a}^a = \frac{2}{5} Ma^2$$

になる。 I は

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} \frac{3M}{4\pi a^2} (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (8.27)$$

を計算してもよい。

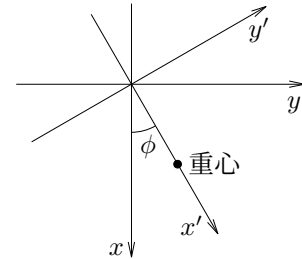
問 8.1 質量 M , 半径 a の薄い様な円板の直径軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

問 8.2 長さ ℓ で質量が無視できる細い棒の一端に質量 M , 半径 a の球を付ける。棒の他端を固定して微小振動させたときの周期 T を求めよ。

問 8.3 多重積分 (8.27) を実行せよ。

8.6 簡単な剛体の運動

実体振り子 (物理振り子) 重心を通らない軸を水平に固定し、重力によりこの軸まわりに自由に回転する剛体を実体振り子 (物理振り子) という。固定軸を z 軸にとり、 x 軸を鉛直下向きにとる。また、重心を通り回転する剛体に固定した座標軸を x' 軸とする。重心から z 軸に下ろした垂線の長さを h , x 軸と x' 軸のなす角を ϕ とする。 z 軸は紙面に垂直で上向きである。重心 \mathbf{r}_G は $\mathbf{r}_G = h\mathbf{e}_{x'}$ である。質点 i に働く重力は $m_i g \mathbf{e}_x$ であるから、重力のモーメントは



$$g \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_x = Mg \mathbf{r}_G \times \mathbf{e}_x = Mg h \mathbf{e}_{x'} \times \mathbf{e}_x = -Mgh \sin \phi \mathbf{e}_z$$

になる。剛体には重力以外に軸を固定させるための力が軸受けから働く。軸受けは z 軸上にあるから、軸受けからの力は力のモーメントの z 成分には寄与しない。(8.22) より

$$I \ddot{\phi} = -Mgh \sin \phi$$

になる。 I は回転軸 (z 軸) まわりの慣性モーメントである。 ϕ が小さくて $\sin \phi \approx \phi$ と近似できる場合、単振動

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \phi, \quad \ell = \frac{I}{Mh}$$

になる。振動の周期 T は $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ になり、実体振り子は長さ ℓ の単振り子と同じである。 ℓ を相当単振り子の長さという。

$\phi(t)$ が決まれば, 重心の位置 \mathbf{r}_G も時間の関数として求まる。したがって, 重心の運動方程式

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_i \mathbf{F}_i$$

の左辺は計算できるから, 外力の総和が求まる。これから既知の重力を引いた残りが, 軸受けから剛体に働く束縛力である。軸受けの位置を $\mathbf{a} = ae_z$, $-\mathbf{a}$ とし, そこから剛体に働く外力を \mathbf{F}_a , \mathbf{F}_{-a} とする。重力の総和は $Mg\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{x'} \cos \phi - \mathbf{e}_{y'} \sin \phi$ であるから

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = Mg(\mathbf{e}_{x'} \cos \phi - \mathbf{e}_{y'} \sin \phi) + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_{-a}$$

$\mathbf{r}_G = h\mathbf{e}_{x'}$ より $\ddot{\mathbf{r}}_G = h\ddot{\phi}\mathbf{e}_{y'} - h\dot{\phi}^2\mathbf{e}_{x'}$ であるから

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_{-a} = F_{x'}\mathbf{e}_{x'} + F_{y'}\mathbf{e}_{y'}, \quad F_{x'} = -Mg \cos \phi - Mh\dot{\phi}^2, \quad F_{y'} = Mg \sin \phi + Mh\ddot{\phi}$$

になる。 \mathbf{F}_a と \mathbf{F}_{-a} のモーメントは

$$\mathbf{a} \times \mathbf{F}_a - \mathbf{a} \times \mathbf{F}_{-a} = a(\mathbf{F}_{-a} - \mathbf{F}_a)_{y'}\mathbf{e}_{x'} + a(\mathbf{F}_a - \mathbf{F}_{-a})_{x'}\mathbf{e}_{y'}$$

である。重力のモーメントは z 成分のみであるから, (8.21) より

$$a(\mathbf{F}_a - \mathbf{F}_{-a})_{y'} = I_{zy}\dot{\phi}^2 - I_{zx}\ddot{\phi}, \quad a(\mathbf{F}_a - \mathbf{F}_{-a})_{x'} = I_{zx}\dot{\phi}^2 + I_{zy}\ddot{\phi}$$

以上から \mathbf{F}_a , \mathbf{F}_{-a} の x' 成分と y' 成分が求まる。 z 成分は和が 0 になるだけで各々は決まらない。

半径 R の一様な球の場合 ($\rho = M/(4\pi R^3/3)$)

$$I_{zx} = -\rho \int dx' dy' dz z x', \quad I_{zy} = -\rho \int dx' dy' dz z y'$$

積分領域は $(x' - h)^2 + y'^2 + z^2 \leq R^2$ であるから $I_{zx} = I_{zy} = 0$ になり

$$\mathbf{F}_a = \frac{F_{x'}}{2}\mathbf{e}_{x'} + \frac{F_{y'}}{2}\mathbf{e}_{y'} + F_z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_{-a} = \frac{F_{x'}}{2}\mathbf{e}_{x'} + \frac{F_{y'}}{2}\mathbf{e}_{y'} - F_z\mathbf{e}_z$$

である。 F_z は不定である。

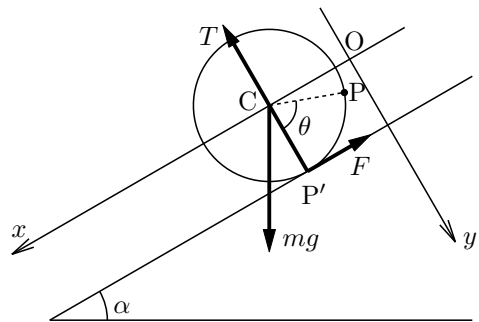
斜面を転がる剛体 半径 a , 質量 m の一様な円形 (円輪, 円板, 円柱, 球など) の剛体が, 角度 α の斜面を滑らずに転がる運動を考える。円形体には鉛直下向きの重力 mg , 斜面に垂直な抗力 T , 斜面方向の摩擦力 F が働く。 x 軸, y 軸を図のようにとり (z 軸は紙面に垂直で上向き), 円形体の重心の位置を $(x(t), 0, 0)$ とする。時刻 $t = 0$ のとき重心は原点 O にあり円形体は静止していた。P は $t = 0$ で斜面に接していた位置を表す。

斜面を滑らずに転がる条件より x は円弧 PP' の長さに等しいから

$$x = a\theta \tag{8.28}$$

である。抗力と重力は重心を通るから, 重心まわりの力のモーメント \mathbf{N} には寄与しない。したがって

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{CP'} \times (-F\mathbf{e}_x) = aF\mathbf{e}_z$$



重心をとおり紙面に垂直な軸まわりの慣性モーメントを I_G とすると

$$I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{I_G}{a} \frac{d^2x}{dt^2} = N_z = aF \quad (8.29)$$

これと重心の運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin \alpha - F \quad (8.30)$$

から未知の摩擦力 F を消去すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ma^2}{I_G + ma^2} g \sin \alpha \quad (8.31)$$

になり一定加速度で運動する。この加速度は、摩擦が働かず滑り落ちる場合の加速度 $g \sin \alpha$ より小さい。摩擦力 F は

$$F = \frac{I_G}{a^2} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{I_G}{I_G + ma^2} mg \sin \alpha \quad (8.32)$$

で与えられる。静止摩擦係数を μ とすると $F \leq \mu T = \mu mg \cos \alpha$ より

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{I_G + ma^2}{I_G} \quad (8.33)$$

である。これを超える角度 α の斜面では、接触点 P' で瞬間的に静止できず斜面を滑る。

剛体の力学的エネルギー E を求める。運動エネルギー K は (8.8), (8.23) から

$$K = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{I_G}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{ma^2 + I_G}{2a^2} \dot{x}^2$$

位置エネルギー U は原点 O を基準にとると $U = -mgx \sin \alpha$ になるから

$$E = \frac{ma^2 + I_G}{2a^2} \dot{x}^2 - mgx \sin \alpha$$

したがって

$$\frac{dE}{dt} = \frac{ma^2 + I_G}{a^2} \dot{x} \ddot{x} - mg \dot{x} \sin \alpha = \dot{x} \left(\frac{ma^2 + I_G}{a^2} \ddot{x} - mg \sin \alpha \right) = 0$$

になり保存する。抗力は運動方向とは直交する方向に働くから仕事をしない。また、剛体は斜面を滑らないから、摩擦力も仕事をしない。このため、力学的エネルギーは保存する。

斜面の角度 α が $\tan \alpha > \mu(I_G + ma^2)/I_G$ のとき、剛体は斜面を滑りながら転がる。動摩擦係数を μ' とすると摩擦力は既知の力

$$F = \mu' T = \mu' mg \cos \alpha$$

であるが、(8.28) が成り立たないため、 θ と x の関係は運動方程式から決まる。(8.29), (8.30) より

$$\ddot{\theta} = \frac{\mu' amg}{I_G} \cos \alpha, \quad \ddot{x} = g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)$$

一般に $\mu > \mu'$ であるから

$$\tan \alpha > \frac{I_G + ma^2}{I_G} \mu' > \mu', \quad \therefore \sin \alpha - \mu' \cos \alpha > 0$$

である。力学的エネルギーは

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + I_G \dot{\theta} \ddot{\theta} - mg \dot{x} \sin \alpha = -\mu' mg \cos \alpha \frac{d}{dt}(x - a\theta) = -F \frac{d}{dt}(x - a\theta)$$

になる。したがって、 E の時間的変化は摩擦力 $-F$ がなす単位時間の仕事に等しい。

(8.11)において \mathbf{R} を接地点 $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP'}$ にとり (8.31) を求める。

$$\mathbf{R} = a\theta\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{r}_c = \overrightarrow{OC} = a\theta\mathbf{e}_x$$

である。C を原点とした質点の位置 \mathbf{s}_i は (8.19) と同様に

$$\mathbf{s}_i = x'_i\mathbf{e}_{x'} + y'_i\mathbf{e}_{y'} + z_i\mathbf{e}_z, \quad \dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\theta}\mathbf{e}_z \times \mathbf{s}_i$$

とおける。 x'_i, y'_i, z_i は時間に依存しない。 \mathbf{R} を原点とする位置 \mathbf{r}'_i は $\mathbf{r}'_i = \overrightarrow{P'C} + \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i - a\mathbf{e}_y$ になるから

$$L'_z = \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i)_z = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 - a(s_i)_y) \dot{\theta}$$

である。

$$m\mathbf{r}_G = \sum_i m_i (\mathbf{r}_c + \mathbf{s}_i) = m\mathbf{r}_c + \sum_i m_i \mathbf{s}_i, \quad \therefore \sum_i m_i \mathbf{s}_i = m(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_c)$$

になるが、一様な円形の場合 $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_c$ より、P' まわりの軌道角運動量は

$$L'_z = I_c \dot{\theta}, \quad I_c = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

である。 I_c は P' ではなく C を通る z 軸まわりの慣性モーメントである。 $\ddot{\mathbf{R}} = a\ddot{\theta}\mathbf{e}_x$ より

$$m \left((\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}} \right)_z = -ma\ddot{\theta}(\mathbf{r}_c - \mathbf{R})_y = ma^2\ddot{\theta}$$

であるから、(8.11) は

$$I' \ddot{\theta} = N'_z, \quad I' = I_c + ma^2 = P' \text{ をとおる } z \text{ 軸まわりの慣性モーメント}$$

になる。P' まわりの力のモーメント N' には、摩擦力と抗力は寄与しないから

$$\mathbf{N}' = \overrightarrow{P'C} \times mg(\mathbf{e}_x \sin \alpha + \mathbf{e}_y \cos \alpha) = mga \sin \alpha \mathbf{e}_z$$

したがって (8.31) が求まる。(8.11) の利点は、摩擦力が現れないことである。

半円形などの場合 $\mathbf{d}(t) = \mathbf{r}_G(t) - \mathbf{r}_c(t) \neq \mathbf{0}$ である。 $L'_z = \dot{\theta}(I_c - mad_y)$ であり

$$m \left((\mathbf{r}_G - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}} \right)_z = -ma\ddot{\theta}(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_c - \mathbf{R})_y = -\ddot{\theta}(mad_y - ma^2)$$

になるから (8.11) は

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta}(I_c - mad_y) = N'_z + \ddot{\theta}(mad_y - ma^2)$$

である。 $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_G - \mathbf{d}$, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_G - \mathbf{d} + a\mathbf{e}_y$ より

$$I_c = I_G + m(d_x^2 + d_y^2), \quad I' = I_G + m(d_x^2 + (d_y - a)^2) = I_c + ma^2 - 2mad_y$$

になるから

$$I' \ddot{\theta} = N'_z + ma\theta \dot{d}_y, \quad \text{あるいは} \quad \frac{d}{dt} I' \dot{\theta} = N'_z - ma\theta \dot{d}_y$$

である。 $\mathbf{d} = -\ell \sin \theta \mathbf{e}_x + \ell \cos \theta \mathbf{e}_y$ とする。水平面 ($\alpha = 0$) の場合 $N'_z = mgd_x = -mg\ell \sin \theta$ であるから

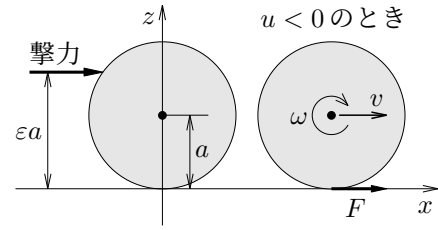
$$(I_c + ma^2 - 2mal \cos \theta) \ddot{\theta} = -m\ell(g + a\dot{\theta}^2) \sin \theta$$

$|\theta| \ll 1$ の場合

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{I_c + ma^2 - 2mal} \theta$$

になり $\ell > 0$ ならば単振動する。

ビリヤード 水辺面上で静止している半径 a , 質量 m の一様な円形の剛体に, 水平面から高さ εa の所で水平方向の撃力 $f_0\delta(t)$ を与えたときの運動を考える。 $\delta(t)$ はデルタ関数である。図のように座標系をとる。 y 軸は紙面に垂直で裏向きである。重心の位置は $(x(t), 0, a)$ である。 y 軸に平行な重心を通る回転軸まわりの角速度を ω とする。 y 軸は紙面裏向きであるから, 図で時計回りの回転の場合 $\omega > 0$ である。



鉛直下向きの重力と平面からの鉛直上向きの抗力は運動に影響しないから考えない。剛体には水平面の接点で摩擦力 $(F, 0, 0)$ が働くとする。剛体の接点の速度を u とすると, F は剛体と水平面の間に滑りがあるとき ($u \neq 0$), 滑りをなくす方向に働くから

$$u \geq 0 \text{ のとき } F = \mp \mu' mg, \quad \text{つまり } F = -\frac{|u|}{u} \mu' mg$$

である。一方, $u = 0$ のとき $F = 0$ になる ((8.32) で $\alpha = 0$)。回転軸まわりの慣性モーメント I は $I = kma^2$ とおける。球, 球殻, 円柱の場合, それぞれ $k = 2/5, 2/3, 1/2$ である。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_0 \delta(t) + F, \quad I \frac{d\omega}{dt} = a(\varepsilon - 1) f_0 \delta(t) - aF$$

であるから, 積分すると, $t > 0$ のとき, u の方向が変わらない間は

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{Ft}{m}, \quad a\omega(t) = a\omega_0 - \frac{Ft}{km}, \quad \text{ただし } v_0 = \frac{f_0}{m}, \quad a\omega_0 = \frac{\varepsilon - 1}{k} v_0$$

になる。水平面との接点の速度は, 重心系では x 軸方向に $-a\omega$ であるから

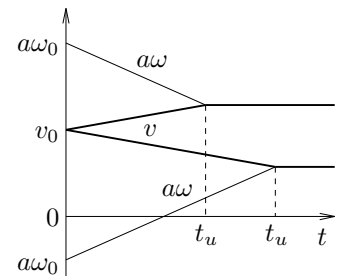
$$u = v - a\omega = u_0 + \frac{F}{m} \frac{1+k}{k} t, \quad u_0 = v_0 - a\omega_0 = \frac{1+k-\varepsilon}{k} v_0$$

である。

$\varepsilon = 1 + k$ のとき, 撃力が作用した直後では $u_0 = 0$ より摩擦力は現れない。外力が作用しない限り, 滑りは発生しないから, $t > 0$ でも $F = 0$ であり剛体は $v(t) = v_0$ で滑らずに転がり続ける。

$\varepsilon > 1 + k$ のとき $u_0 < 0$ であるから, 摩擦力は x 軸正の方向に働き $F = \mu' mg$ である。 v は v_0 から増加し, ω は ω_0 から減少する。一方, $\varepsilon < 1 + k$ の場合 $F = -\mu' mg$ になり, v は減少し ω は増加する (右図)。 $u = v - a\omega = 0$ になる時刻 t_u

$$t_u = \frac{k}{1+k} \frac{|u_0|}{\mu' g}, \quad v(t_u) = \frac{v_0 + a\omega_0 k}{1+k} = \frac{\varepsilon}{1+k} v_0$$



まで v, ω の増減は続く。 $t = t_u$ では $F = 0$ になり, その後 $v(t) = v(t_u) = \text{一定}$ で剛体は滑らずに転がる。 $\varepsilon = 0$ の場合, 剛体は静止する。 t_u は摩擦力に依存するが, $v(t_u)$ は摩擦力に依存しない。

剛体の力学的エネルギー $E = mv^2/2 + I\omega^2/2$ の時間変化は

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + I\omega \frac{d\omega}{dt} = (v + a\omega(\varepsilon - 1)) mv_0 \delta(t) + (v - a\omega) F = E_0 \delta(t) + uF$$

ただし

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v_0^2 + k(a\omega_0)^2)$$

なお, $t = 0$ で v は 0 から v_0 に不連続に変化するから $v(t)\delta(t) = v(0)\delta(t)$ を $(v_0/2)\delta(t)$ に置き換えた (ω も同様)。 $t > 0$ での E の時間的変化は, 摩擦力が単位時間になす仕事 uF に等しい。 $u \neq 0$ のとき $uF < 0$ であり E は時間とともに減少する。 $t \geq t_u$ での力学的エネルギーは

$$E_1 = \frac{m}{2}v(t_u)^2 + \frac{km}{2}v(t_u)^2 = \frac{m}{2} \frac{(v_0 + a\omega_0 k)^2}{1+k}$$

になるから

$$E_0 - E_1 = \frac{k}{1+k} \frac{m}{2} u_0^2 \geq 0$$

$u_0 = v_0 - a\omega_0 = 0$ のとき $E_0 = E_1$ であるが, $u_0 \neq 0$ のとき $E_0 > E_1$ である。

$0 \leq \varepsilon \leq 2$ より $-v_0 \leq a\omega_0 k \leq v_0$ であるが, 撃力の代わりに, 初期条件 v_0, ω_0 を適当に与えてもよい。 $v_0 > 0, \omega_0 < 0$ とする。 $u_0 = v_0 - a\omega_0 > 0$ であるから

$$v(t) = v_0 - \mu'gt, \quad a\omega(t) = a\omega_0 + \frac{\mu gt}{k}, \quad u(t) = u_0 - \frac{1+k}{k} \mu'gt$$

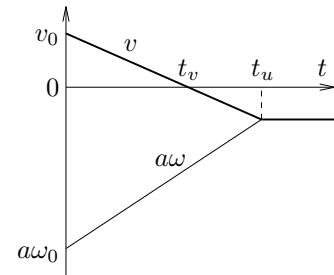
になる。 $v(t_v) = 0, \omega(t_\omega) = 0, u(t_u) = 0$ になる時刻は

$$t_v = \frac{v_0}{\mu'g}, \quad t_\omega = -\frac{a\omega_0 k}{\mu'g}, \quad t_u = \frac{k}{1+k} \frac{u_0}{\mu'g} = \frac{kt_v + t_\omega}{1+k}$$

である。 ω_0 に制限はないから $v_0 + a\omega_0 k < 0$ でもよい。 この場合, $t_v < t_u < t_\omega$ になるから $t \geq t_u$ で重心が一定速度

$$v(t_u) = \frac{v_0 + a\omega_0 k}{1+k} < 0$$

で滑らずに転がる以前に, 重心は $t = t_v$ で一旦止まる。 $t > t_v$ では $v < 0$ になり剛体は x 軸負方向に進む (右図)。 $v_0 + a\omega_0 k > 0$ の場合, $t_\omega < t_u < t_v$ であり, 撃力を $0 < \varepsilon < 1$ で与えた場合と同じである。



9 回転座標系

9.1 座標変換

原点が一致する2つの直交座標系 $O-xyz$ と $O-x'y'z'$ を考える。 x, y, z 軸の単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とし、 x', y', z' 軸の単位ベクトルをそれぞれ e'_1, e'_2, e'_3 とする。 e'_i は e_1, e_2, e_3 の和で表せるから

$$e'_i = \sum_j a_{ij} e_j \quad (9.1)$$

とおける。 e_j との内積から

$$e'_i \cdot e_j = \sum_k a_{ik} e_k \cdot e_j = \sum_k a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$$

である。逆に、 e_i を e'_i で表すと

$$e_i = \sum_j (e_i \cdot e'_j) e'_j = \sum_j a_{ji} e'_j \quad (9.2)$$

になる。規格直交性より

$$e'_i \cdot e'_j = \sum_{k\ell} a_{ik} a_{j\ell} e_k \cdot e_\ell = \sum_{k\ell} a_{ik} a_{j\ell} \delta_{k\ell} = \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{同様に} \quad e_i \cdot e_j = \sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$$

a_{ij} を行列要素とする 3×3 行列を A とする。 A の転置行列を \tilde{A} で表す。つまり、 $(\tilde{A})_{ij} = a_{ji}$ である。規格直交性は

$$\sum_k (A)_{ik} (\tilde{A})_{kj} = (A\tilde{A})_{ij} = \delta_{ij}, \quad (\tilde{A}A)_{ij} = \delta_{ij}, \quad \therefore \tilde{A} = A^{-1}$$

と簡潔に表せる。 A は直交行列である。ベクトル V

$$V = \sum_i V_i e_i = \sum_i V'_i e'_i$$

に (9.1) または (9.2) を代入すると

$$V'_i = \sum_j a_{ij} V_j, \quad V_i = \sum_j V'_j a_{ji} = \sum_j (A^{-1})_{ij} V'_j \quad (9.3)$$

行列で表せば $V' = AV, V = A^{-1}V'$ である。

9.2 回転座標系

原点 O のまわりに回転する直交座標系 $O-x'y'z'$ を考え、 x', y', z' 軸の単位ベクトルをそれぞれ e'_1, e'_2, e'_3 とする。 $O-x'y'z'$ は回転運動しているから e'_i は時間 t の関数 $e'_i = e'_i(t)$ である。(9.1) において $e_i = e'_i(t), e'_i = e'_i(t + \Delta t)$ とすると

$$e'_i(t + \Delta t) = \sum_j a_{ij} e'_j(t), \quad a_{ij} = e'_i(t + \Delta t) \cdot e'_j(t)$$

である。 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $e'_i(t + \Delta t) \rightarrow e'_i(t)$ であるから $(\Delta t)^2$ 以上を無視すると

$$a_{ij} = \delta_{ij} + b_{ij} \Delta t, \quad \text{つまり} \quad e'_i(t + \Delta t) = e'_i(t) + \Delta t \sum_j b_{ij} e'_j(t) \quad (9.4)$$

とおける。 $(\Delta t)^2$ を無視すると

$$\begin{aligned}\sum_m a_{im} a_{jm} &= \sum_m (\delta_{im} + b_{im} \Delta t) (\delta_{jm} + b_{jm} \Delta t) \\ &= \sum_m (\delta_{im} \delta_{jm} + (b_{im} \delta_{jm} + b_{jm} \delta_{im}) \Delta t) = \delta_{ij} + (b_{ij} + b_{ji}) \Delta t\end{aligned}$$

であるから $b_{ij} + b_{ji} = 0$ である。したがって、 $b_{ii} = 0$ 及び

$$b_{12} = -b_{21} = \omega_3, \quad b_{13} = -b_{31} = -\omega_2, \quad b_{23} = -b_{32} = \omega_1, \quad \text{つまり} \quad b_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k$$

とおける。これを (9.4) に代入すると

$$\mathbf{e}'_i(t + \Delta t) = \mathbf{e}'_i(t) + \Delta t \sum_{kj} \varepsilon_{ijk} \omega_k \mathbf{e}'_j(t) \quad (9.5)$$

ここで

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_k \omega_k \mathbf{e}'_k(t) \quad (9.6)$$

とする。(6.8) と同様に $\mathbf{e}'_k \times \mathbf{e}'_i = \sum_j \varepsilon_{kij} \mathbf{e}'_j$ であるから

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i(t) = \sum_k \omega_k \mathbf{e}'_k(t) \times \mathbf{e}'_i(t) = \sum_{jk} \omega_k \varepsilon_{kij} \mathbf{e}'_j(t)$$

(9.5) は

$$\mathbf{e}'_i(t + \Delta t) = \mathbf{e}'_i(t) + \Delta t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i(t), \quad \therefore \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i \quad (9.7)$$

になる。

ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を単位ベクトル \mathbf{n} を用いて $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ と表す。 \mathbf{n} 方向を軸として角速度 ω でベクトル \mathbf{a} を回転させる。

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t) = \overrightarrow{PQ}$$

を考える。 \mathbf{a} は回転軸から半径 $a \sin \theta$ の円周上にあり、 $\angle PRQ = \omega \Delta t$ であるから、PQ の長さは

$$a \omega \sin \theta \Delta t = |\mathbf{n} \times \mathbf{a}| \omega \Delta t$$

である。 \overrightarrow{PQ} の方向は \mathbf{a} と \mathbf{n} が作る平面に直交し、 \mathbf{n} から \mathbf{a} に右ネジの進む方向、つまり、 $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$ の方向である。したがって

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{a} \omega \Delta t, \quad \therefore \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \omega \mathbf{n} \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

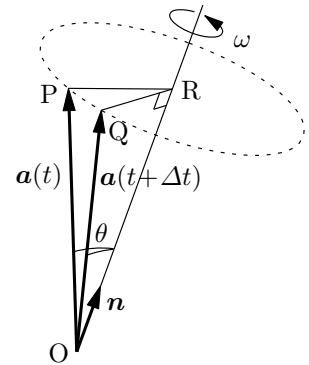
になる。(9.6) で定義される $\boldsymbol{\omega}(t)$ は時刻 t における回転座標系 $O-x'y'z'$ の回転の速さと回転軸を表すので角速度ベクトルと呼ばれる。

ベクトル $\mathbf{V}(t)$ を回転座標系の成分で表して

$$\mathbf{V}(t) = V'_1 \mathbf{e}'_1 + V'_2 \mathbf{e}'_2 + V'_3 \mathbf{e}'_3 = \sum_i V'_i \mathbf{e}'_i$$

とする。時間微分は

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_i (\dot{V}'_i \mathbf{e}'_i + V'_i \dot{\mathbf{e}}'_i) = \sum_i (\dot{V}'_i \mathbf{e}'_i + V'_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i) = \sum_i \dot{V}'_i \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (9.8)$$



である。第1項は回転座標系の各軸に対する \mathbf{V} の時間変化である。回転座標系と一緒に回転する観測者から見れば、 $\mathbf{e}'_i(t)$ の方向は常に一定であたかも時間に依存しないように見える。そこで、回転座標系での時間微分を

$$\frac{d'\mathbf{V}}{dt} = \sum_i \dot{V}'_i \mathbf{e}'_i, \quad \frac{d'^2\mathbf{V}}{dt^2} = \sum_i \ddot{V}'_i \mathbf{e}'_i$$

で定義すると

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d'\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (9.9)$$

になる。 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}$ とすると $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ であるから、 $\boldsymbol{\omega}$ の時間変化は座標系によらない。(9.8) を再度微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} &= \sum_i \left(\frac{d^2V'_i}{dt^2} \mathbf{e}'_i + \frac{dV'_i}{dt} \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= \frac{d'^2\mathbf{V}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \sum_i \frac{dV'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \right) \\ &= \frac{d'^2\mathbf{V}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \end{aligned}$$

になる。

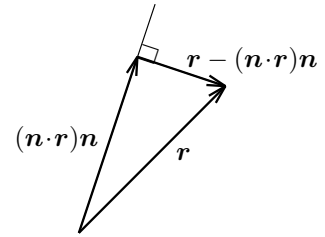
運動方程式 $m d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}$ は

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \left(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \right), \quad \text{ただし} \quad \mathbf{a}' = \frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} \quad (9.10)$$

と表せる。 \mathbf{v}' , \mathbf{a}' は回転座標系で観測する質点の速度と加速度である。回転座標系は慣性系ではないため $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}$ が成り立たず、回転による見かけの力が生じる。(6.11) より

$$\mathbf{F}_c = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\omega^2 (\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n})$$

であるが、右図から分かるように、回転軸から点 \mathbf{r} までの距離を l とすると $|\mathbf{F}_c| = ml\omega^2$ であり、方向は回転軸に直交し遠ざかる方向である。 \mathbf{F}_c は遠心力である。 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ をコリオリ力という。コリオリ力は回転軸と回転系における速度 \mathbf{v}' に直交する。



2次元の運動方程式を極座標で表した(7.8)は回転座標系での運動方程式と見なせる。 $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ としてそれぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ とする。この回転座標系は z 軸まわりに質点の運動とともに回転する。

$$x' = r, \quad y' = z' = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_z$$

である。 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = r \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r = 0$ より $\mathbf{F}_c = m\dot{\theta}^2 r \mathbf{e}_r$ である。また

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt} \mathbf{e}'_1 + \frac{dy'}{dt} \mathbf{e}'_2 + \frac{dz'}{dt} \mathbf{e}'_3 = \dot{r} \mathbf{e}_r$$

より

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -2m\dot{\theta} \dot{r} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = -2m\dot{\theta} \dot{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = r\ddot{\theta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = r\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

したがって、(9.10) は

$$m\ddot{r} \mathbf{e}_r = \mathbf{F} + m\dot{\theta}^2 r \mathbf{e}_r - 2m\dot{\theta} \dot{r} \mathbf{e}_\theta - mr\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \therefore \quad m\ddot{r} = F_r + m\dot{\theta}^2 r, \quad 0 = F_\theta - 2m\dot{\theta} \dot{r} - mr\ddot{\theta}$$

これは (7.8) である。

一定の角速度 ω で z 軸まわりに回転する座標系を考える。 xy 平面上の運動をこの座標系で表す。 \mathbf{r} と $\boldsymbol{\omega}$ は直交するから $\mathbf{F}_c = m\omega^2 \mathbf{r}$ である。 $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ よりコリオリ力は

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -2m\omega \mathbf{e}_z \times (\dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y) = -2m\omega\dot{x}'\mathbf{e}'_y + 2m\omega\dot{y}'\mathbf{e}'_x$$

したがって, (9.10) は $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ であるから

$$m\ddot{x}'\mathbf{e}'_x + m\ddot{y}'\mathbf{e}'_y = \mathbf{F} + m\omega^2(x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y) - 2m\omega\dot{x}'\mathbf{e}'_y + 2m\omega\dot{y}'\mathbf{e}'_x$$

になる。成分で表せば

$$m\ddot{x}' = F'_x + m\omega^2 x' + 2m\omega\dot{y}', \quad m\ddot{y}' = F'_y + m\omega^2 y' - 2m\omega\dot{x}'$$

この2式は複素数 $X = x' + iy'$ を用いると

$$m\ddot{X} = F'_x + iF'_y + m\omega^2 X - 2im\omega\dot{X} \quad (9.11)$$

と表せる。 $-2im\omega\dot{X} = 2m\omega\dot{X}e^{-i\pi/2}$ であるから, コリオリ力の方向は複素平面上で速度 \dot{X} を $-\pi/2$ 回転させた方向である。

$\mathbf{F} = 0$ の場合, 慣性系では等速直線運動する。一方, (9.11) は

$$\ddot{X} + 2i\omega\dot{X} - \omega^2 X = 0$$

になる。この微分方程式は減衰振動 (4.4) と同じ形式である。(4.5) に対応する2次方程式は

$$\lambda^2 + 2i\omega\lambda - \omega^2 = (\lambda + i\omega)^2 = 0$$

になり重根を持つ。したがって, (4.8) より一般解は A, B を任意定数として $X = (A + Bt)e^{-i\omega t}$ になる。 $t = 0$ で x 軸と x' 軸が一致しているとすると

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t, \quad y' = y \cos \omega t - x \sin \omega t, \quad \therefore X = (x + iy)e^{-i\omega t}$$

であるから $x + iy = A + Bt$, つまり, $x = \text{Re}A + t \text{Re}B, y = \text{Im}A + t \text{Im}B$ になり, 慣性系では等速直線運動をする。

9.3 地球表面上に固定した座標系

図のように自転する地球に固定した経度 α の点 P を通る座標系 S' を考える。 y' 軸は紙面に垂直で表から裏に向く (水平東)。地球の半径を R , 自転の角速度を ω とする。

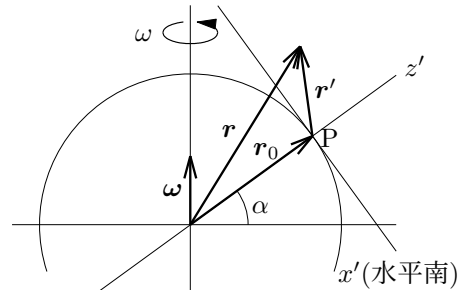
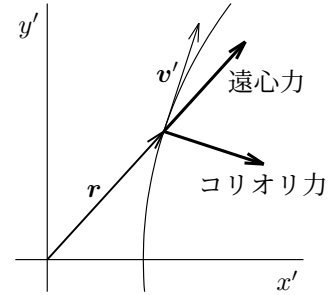
$$R \approx 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \times 60^2} = 0.727 \times 10^{-4} \text{ sec}$$

より

$$R\omega^2 \approx 3.4 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2 \approx \frac{g}{290}$$

である。点 P から測った質点の位置ベクトルを \mathbf{r}' とする。 \mathbf{r}_0 は S' 系から見ると定ベクトルであり $d'\mathbf{r}_0/dt = 0$ になるから (9.10) は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}')) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}'}{dt}$$



になる。ここで \mathbf{F} は質点に働く重力以外の力、 \mathbf{g} は大きさ g で地球の中心を向くベクトルである。P 近傍の運動を考える場合、 $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}_0|$ であるから

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + m \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}'}{dt}, \quad \mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)$$

としてよい。 \mathbf{g}_{eff} が実際に観測される地表での重力加速度であり、厳密には地球中心を向かない。しかし

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)| = \omega^2 \times \text{回転軸からの距離} = R\omega^2 \cos \alpha \approx \frac{\cos \alpha}{290} g \ll g$$

であるから $\mathbf{g}_{\text{eff}} \approx \mathbf{g}$ と近似できる。結局

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + m \mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}'}{dt}$$

になり遠心力は無視できる。以下、簡単のため ' は省略する。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m \mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (9.12)$$

である。成分で表すと $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$ より

$$m\ddot{x} = F_x + 2m\omega \sin \alpha \dot{y} \quad (9.13)$$

$$m\ddot{y} = F_y - 2m\omega (\sin \alpha \dot{x} + \cos \alpha \dot{z}) \quad (9.14)$$

$$m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega \cos \alpha \dot{y} \quad (9.15)$$

になる。

自由落下 $\mathbf{F} = 0$ の場合、(9.12) を $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ で表すと

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$$

になる。積分すると

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \mathbf{g}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') \\ &= \mathbf{v}(0) + \mathbf{g}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \int_0^t dt' \left(\mathbf{v}(0) + \mathbf{g}t' - 2\boldsymbol{\omega} \times \int_0^{t'} dt'' \mathbf{v}(t'') \right) \\ &= \mathbf{v}(0) + \mathbf{g}t - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(0) - t^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} + 4\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}(t) \right), \quad \mathbf{V}(t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{v}(t'') \end{aligned}$$

したがって、 ω^2 以上を無視する近似では

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(0) + \mathbf{g}t - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(0) - t^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} - t^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(0) - \frac{t^3}{3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}$$

になる。初速度ゼロで落下させる場合 ($\mathbf{v}(0) = 0$)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(0) + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}$$

成分で表せば

$$x = x(0), \quad y = y(0) + \frac{\omega g t^3}{3} \cos \alpha, \quad z = z(0) - \frac{g t^2}{2}$$

$x(0) = y(0) = 0, z(0) = h$ とし t を z で表すと

$$x = 0, \quad y = \frac{\omega \cos \alpha}{3} \sqrt{\frac{8(h-z)^3}{g}}$$

これをナイルの曲線という。鉛直真下に落下せず $y > 0$ の方向 (東側) にずれて落下する。

フーコー振り子 長さ ℓ の糸で質点をつるす。振り子の支点を原点にとると、質点に働く張力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = -F \frac{\mathbf{r}}{\ell}, \quad |\mathbf{r}| = \ell$$

である。(9.15) は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -F \frac{z}{\ell} - mg + 2m\omega \cos \alpha \frac{dy}{dt}$$

になる。 $|\mathbf{r}| = \ell$ より $z = -\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}$ であるが、微小振動 ($\sqrt{x^2 + y^2} \ll \ell$) の場合 $z \approx -\ell$ になるから

$$F \approx mg - 2m\omega \cos \alpha \frac{dy}{dt} \approx mg$$

である。 $X = x + iy$ とすると (9.13) + $i \times$ (9.14) より

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{F}{\ell} X - 2im\omega \sin \alpha \frac{dX}{dt} - 2im\omega \cos \alpha \frac{dz}{dt}$$

になるが、 $F \approx mg, \dot{z} \approx 0$ と近似できるから

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2i\omega_\alpha \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0, \quad \text{ただし } \omega_\alpha = \omega \sin \alpha, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

になる。2次方程式 $\lambda^2 + 2i\omega_\alpha \lambda + \omega_0^2 = 0$ の解は

$$\lambda = -i\omega_\alpha \pm i\sqrt{\omega_\alpha^2 + \omega_0^2}$$

$\omega_0 \sim 0.1 \text{ sec}^{-1}$ 程度であるから $\omega_\alpha/\omega_0 \sim 10^{-3}$ になり $\lambda = -i\omega_\alpha \pm i\omega_0$ としてよい。したがって

$$X = e^{-i\omega_\alpha t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t})$$

初期条件として

$$t = 0 \text{ のとき } x = 0, y = 0, \dot{x} = v_0, \dot{y} = 0 \quad (9.16)$$

とすると

$$X(0) = A + B = 0, \quad \dot{X}(0) = -i\omega_\alpha (A + B) + i\omega_0 (A - B) = v_0$$

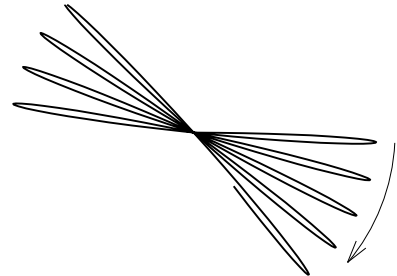
であるから $A = -B = v_0/(2i\omega_0)$ になる。これから

$$X = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\omega_\alpha t} \sin \omega_0 t$$

である。複素数 z に対して $e^{i\theta} z$ は複素平面上で z を角 θ 回転した複素数である。したがって、 X は単振動の振動面が角速度 $\omega_\alpha = \omega \sin \alpha$ で負の向き (時計まわり) に回転する。回転の周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \alpha} = \frac{1 \text{ 日}}{\sin \alpha}$$

$\alpha = 35^\circ$ の場合 $T = 1.74 \text{ 日} = 41.8 \text{ 時間}$ になるから、1時間あたり 9° で回転する。振り子の振動面が回転することは、地球が自転していることを直接的に示す。北極点 ($\alpha = \pi/2$) において、初期条件 (9.16) で振り子を振らす。慣性系から見れば、振り子の振動は1つの鉛直平面内で行われる。これを地球に固定した座標系から見れば、振動面は自転とは逆向きに回転し1日経過すると元の面に戻る。



9.4 固定点をもつ剛体

剛体の1点 O が空間に固定され、剛体が O まわりで運動する場合を考える。固定点のない剛体の場合でも、重心まわりの運動は、重心の運動 (8.14) とは無関係に (8.16) で決まるから、重心が固定されているかのように扱える。

剛体に固定した座標系 $O-x'y'z'$ の角速度ベクトル、つまり、剛体の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とする。剛体を微小部分に分割し、 i 番目の部分の位置ベクトルを \mathbf{r}_i とする。

$$\mathbf{r}_i = x'_i \mathbf{e}'_x + y'_i \mathbf{e}'_y + z'_i \mathbf{e}'_z$$

の成分 x'_i, y'_i, z'_i は剛体固定座標の成分であるから時間に依らない定数である。したがって

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \dot{x}'_i \mathbf{e}'_x + \dot{y}'_i \mathbf{e}'_y + \dot{z}'_i \mathbf{e}'_z = 0, \quad \therefore \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (9.17)$$

点 O まわりの剛体の角運動量 \mathbf{L} は

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}))$$

になる。 $\mathbf{r}_i, \mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}$ を剛体固定座標の成分で表して

$$\mathbf{r}_i = \sum_{\mu} x'_{i\mu} \mathbf{e}'_{\mu}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\mu} L'_{\mu} \mathbf{e}'_{\mu}, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_{\mu} \omega'_{\mu} \mathbf{e}'_{\mu}$$

とする ($x'_{i1} = x'_i, x'_{i2} = y'_i, x'_{i3} = z'_i$)。剛体の微小部分を表す添字 i と区別するため、ベクトルの成分を表す添字はギリシャ文字 μ, ν などを使う。

$$L'_{\mu} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2 \omega'_{\mu} - \sum_i m_i x'_{i\mu} \sum_{\nu} x'_{i\nu} \omega'_{\nu} = \sum_{\nu} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^2 \delta_{\mu\nu} - x'_{i\mu} x'_{i\nu}) \omega'_{\nu}$$

より

$$I'_{\mu\nu} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i^2 \delta_{\mu\nu} - x'_{i\mu} x'_{i\nu}) \quad (9.18)$$

と定義すると

$$L'_{\mu} = \sum_{\nu} I'_{\mu\nu} \omega'_{\nu} \quad (9.19)$$

になる。 $x'_{i\mu}$ は時間に依存しないから $I'_{\mu\nu}$ は定数である。 $I_{\mu\nu}$ を慣性テンソルという。 $\mu = \nu$ のとき

$$I'_{xx} = \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2), \quad I'_{yy} = \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2), \quad I'_{zz} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

はそれぞれ x', y', z' 軸に関する慣性モーメントである。また、 $\mu \neq \nu$ のとき

$$-I'_{\mu\nu} = \sum_i m_i x'_{i\mu} x'_{i\nu}$$

を慣性乗積という。

座標系 $O-x'y'z'$ は剛体の固定されていれば何でもよい。そこで、別の剛体固定座標系 $O-x''y''z''$ を考える。(9.1) において $\mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{e}'_{\mu}, \mathbf{e}'_{\mu} = \mathbf{e}''_{\mu}$ とする。(9.3) より

$$\mathbf{r} = \sum_{\mu} x'_{\mu} \mathbf{e}'_{\mu} = \sum_{\nu} x''_{\nu} \mathbf{e}''_{\nu}, \quad x''_{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x'_{\nu}$$

これから

$$\begin{aligned} I''_{\mu\nu} &= \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{\mu\nu} - x''_{i\mu} x''_{i\nu}) = \sum_{\mu'\nu'} \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{\mu'\nu'} - x'_{i\mu'} x'_{i\nu'}) a_{\mu\mu'} a_{\nu\nu'} \\ &= \sum_{\mu'\nu'} a_{\mu\mu'} a_{\nu\nu'} I'_{\mu'\nu'} \end{aligned} \quad (9.20)$$

になる。一般に、座標系の回転に対して成分が (9.3) で変換される量を **1 階のテンソル** という。1 階のテンソルとはベクトルのことである。また

$$T''_{\mu\nu} = \sum_{\mu'\nu'} a_{\mu\mu'} a_{\nu\nu'} T'_{\mu'\nu'}$$

で変換される量を **2 階のテンソル** という。慣性テンソルは 2 階のテンソルである。角運動量 (9.19) は 2 階のテンソル $I''_{\mu\nu}$ と 1 階のテンソル ω'_μ の積であるが、1 階のテンソルのはずである。実際

$$\begin{aligned} L''_\mu &= \sum_\nu I''_{\mu\nu} \omega''_\nu = \sum_\nu \sum_{\mu'\nu'} a_{\mu\mu'} a_{\nu\nu'} I'_{\mu'\nu'} \sum_{\nu''} a_{\nu\nu''} \omega'_{\nu''} \\ &= \sum_{\mu'\nu'\nu''} \left(\sum_\nu a_{\nu\nu'} a_{\nu\nu''} \right) a_{\mu\mu'} I'_{\mu'\nu'} \omega'_{\nu''} \\ &= \sum_{\mu'\nu'\nu''} \delta_{\nu'\nu''} a_{\mu\mu'} I'_{\mu'\nu'} \omega'_{\nu''} = \sum_{\mu'\nu'} a_{\mu\mu'} I'_{\mu'\nu'} \omega'_{\nu'} = \sum_{\mu'} a_{\mu\mu'} L'_{\mu'} \end{aligned}$$

になる。同様にして

$$S = \sum_{\mu\nu} I''_{\mu\nu} x''_\mu x''_\nu = \sum_{\mu\nu} I'_{\mu\nu} x'_\mu x'_\nu \quad (9.21)$$

になり、 S は座標系に依らないスカラーである。したがって、 $S = \text{定数}$ を満たす \mathbf{r} は座標系に依らない曲面を表す。

(9.20) は行列形式で表せば

$$I''_{\mu\nu} = \sum_{\mu'\nu'} (A)_{\mu\mu'} I'_{\mu'\nu'} (\tilde{A})_{\nu\nu'} = (A I' A^{-1})_{\mu\nu}$$

になる。 $I'_{\mu\nu} = I'_{\nu\mu}$ であるから I' は 3×3 の実対称行列である。一般に、実対称行列 M は適当な直交行列 P を用いて対角行列

$$(PMP^{-1})_{\mu\nu} = \lambda_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad \lambda_\mu = \text{行列 } M \text{ の固有値}$$

にすることができる。したがって

$$I''_{\mu\nu} = I''_{\mu\mu} \delta_{\mu\nu} \quad (9.22)$$

になる $a_{\mu\mu}$ が存在する。剛体固定座標系として (9.22) を満たす座標系を採用すると

$$\mathbf{L} = \sum_\mu I''_{\mu\mu} \omega''_\mu \mathbf{e}''_\mu$$

(9.21) で定義した $S = 1$ は

$$S = I''_{xx} x''^2 + I''_{yy} y''^2 + I''_{zz} z''^2 = 1$$

になるから楕円体を表す。この楕円体を慣性楕円体という。(9.22) を満たす座標軸を慣性主軸、主軸に対する慣性モーメント I''_{xx} , I''_{yy} , I''_{zz} を主慣性モーメントという。

座標系 $O-x'y'z'$ が慣性主軸の場合 $I'_{\mu\nu} = I'_\mu \delta_{\mu\nu}$ とおけるから

$$I''_{\mu\nu} = \sum_{\mu'} (A)_{\mu\mu'} I'_{\mu'} (\tilde{A})_{\mu'\nu}$$

主慣性モーメント $I'_\mu = I'$ で軸に依存しない場合

$$I''_{\mu\nu} = I' \sum_{\mu'} (A)_{\mu\mu'} (\tilde{A})_{\mu'\nu} = I' (A\tilde{A})_{\mu\nu} = I' \delta_{\mu\nu}$$

になるから、任意の座標軸が慣性主軸である。

以下では、簡単のため、慣性主軸に対しては $'$, $''$ は省略する。また、主慣性モーメント $I_{\mu\mu}$ を単に I_μ と書くことにする。

剛体の運動エネルギー K は (9.17), (6.13) より

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

(9.19) を代入すると

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \omega'_\mu L'_\mu = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} I'_{\mu\nu} \omega'_\mu \omega'_\nu$$

慣性主軸で表せば

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\mu} I_{\mu} \omega_{\mu}^2 \quad (9.23)$$

である。 $I'_{\mu\nu} = I'_{\nu\mu}$ は時間に依らないから、運動エネルギーの時間変化は

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{\mu\nu} \omega'_\mu \frac{d}{dt} I'_{\mu\nu} \omega'_\nu = \sum_{\mu\nu} \omega'_\mu \frac{dL'_\mu}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (9.24)$$

になる。

9.5 オイラーの運動方程式

固定点まわりの剛体の運動は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

で記述される。 \mathbf{F}_i は剛体の微小部分 i に作用する力である。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \quad \frac{d'\mathbf{L}}{dt} = \sum_{\mu} \frac{dL'_\mu}{dt} \mathbf{e}'_{\mu} \quad (9.25)$$

より

$$\frac{dL'_x}{dt} + \omega'_y L'_z - \omega'_z L'_y = N'_x, \quad \frac{dL'_y}{dt} + \omega'_z L'_x - \omega'_x L'_z = N'_y, \quad \frac{dL'_z}{dt} + \omega'_x L'_y - \omega'_y L'_x = N'_z$$

慣性主軸の場合 $L_\mu = I_\mu \omega_\mu$ であり I_μ は定数であるから

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = N_x \quad (9.26)$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x = N_y \quad (9.27)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = N_z \quad (9.28)$$

になる。これをオイラーの運動方程式という。 ω_μ は剛体に固定した慣性主軸の成分であるから、剛体の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ (ある瞬間での剛体の回転軸と角速度の大きさ) が剛体上をどのように運動するかが分かる。なお, (9.24), (9.25) より

$$\frac{dK}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}$$

である。

剛体の自由回転

$\mathbf{N} = 0$ の場合を考える。 \mathbf{L} と運動エネルギー K は一定になる。一様重力では (8.13) より重心まわりの力のモーメントは 0 になるから、重心まわりの剛体の運動については以下の議論が適用できる。オイラーの運動方程式

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z, \quad I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (I_z - I_x) \omega_z \omega_x, \quad I_z \frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \quad (9.29)$$

は ω について 2 次の項を含むため、一般には解析的に解くことは困難である。そこで、簡単になる 2 つの場合を扱う。

まず、主慣性モーメントのうち 2 つが等しい対称こまの場合を考える。 $I_x = I_y = I_0$ とする。(9.29) は

$$I_0 \frac{d\omega_x}{dt} = (I_0 - I_z) \omega_y \omega_z, \quad I_0 \frac{d\omega_y}{dt} = (I_z - I_0) \omega_z \omega_x, \quad I_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

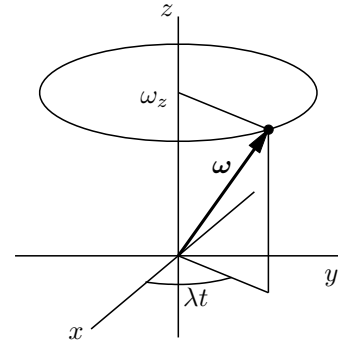
になる。最後の式から $\omega_z = \text{一定}$ であるから

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\lambda \omega_y, \quad \frac{d\omega_y}{dt} = \lambda \omega_x, \quad \text{ただし } \lambda = \frac{I_z - I_0}{I_0} \omega_z$$

これから $\ddot{\omega}_x = -\lambda^2 \omega_x$ になるから ω_0, θ を任意定数として

$$\omega_x = \omega_0 \cos(\lambda t + \theta), \quad \omega_y = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\omega_x}{dt} = \omega_0 \sin(\lambda t + \theta) \quad (9.30)$$

である。 $\boldsymbol{\omega}$ の大きさは $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2} = \text{一定}$ になる。 $\boldsymbol{\omega}$ を図示すると右図のようになり、対称軸 (z 軸) に垂直な平面内で一定の角速度 $|\lambda|$ で回転し対称軸まわりに才差運動する。角運動量



$$\mathbf{L} = I_0 (\omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y) + I_z \omega_z \mathbf{e}_z = I_0 \omega_0 (\cos(\lambda t + \theta) \mathbf{e}_x + \sin(\lambda t + \theta) \mathbf{e}_y) + I_z \omega_z \mathbf{e}_z$$

も対称軸まわりに才差運動する。ただし、これは剛体に固定した慣性主軸の成分で表した場合である。 $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{N} = 0$ より $\mathbf{L} = \text{一定}$ であるから、剛体の対称軸は \mathbf{L} のまわりに才差運動をすることになる。

次に、 I_μ はすべて異なるが、 $\omega_x \ll \omega_z, \omega_y \ll \omega_z$ を満たし $\boldsymbol{\omega}$ が z 軸近傍にある場合を考える。 $\omega_x \omega_y$ は微小量の 2 次であるから無視すると

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z, \quad I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (I_z - I_x) \omega_z \omega_x, \quad I_z \frac{d\omega_z}{dt} \approx 0$$

したがって $\omega_z = \text{一定}$ としてよい。これから

$$\frac{d^2 \omega_x}{dt^2} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \omega_z \frac{d\omega_y}{dt} = -\frac{(I_z - I_x)(I_z - I_y)}{I_x I_y} \omega_z^2 \omega_x$$

になる。

$$\lambda = \omega_z \sqrt{\frac{|(I_z - I_x)(I_z - I_y)|}{I_x I_y}}$$

とすると、 I_z が最大または最小 $(I_z - I_x)(I_z - I_y) > 0$ のとき $\ddot{\omega}_x = -\lambda^2 \omega_x$ より

$$\omega_x = C \sqrt{I_y |I_z - I_y|} \cos(\lambda t + \theta)$$

$$\omega_y = \frac{I_x}{(I_y - I_z) \omega_z} \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{|I_z - I_y|}{I_z - I_y} C \sqrt{I_x |I_z - I_x|} \sin(\lambda t + \theta)$$

になるから

$$\frac{\omega_x^2}{I_y |I_z - I_y|} + \frac{\omega_y^2}{I_x |I_z - I_x|} = C^2$$

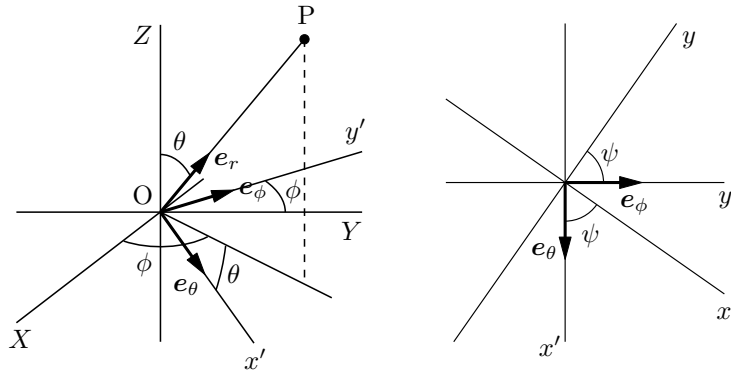
ω は z 軸上の点 ω_z を中心に楕円を描き、 z 軸から離れることはない。主慣性モーメントが最大または最小の慣性主軸まわりの回転は安定である。一方、主慣性モーメントが中間 $(I_z - I_x)(I_z - I_y) < 0$ の場合 $\ddot{\omega}_x = \lambda^2 \omega_x$ になるから

$$\omega_x = A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t}$$

であり、 $A = 0$ でない限り ω_x は指数関数的に増加する。したがって、中間の主慣性モーメントの慣性主軸まわりの回転は不安定である。

9.6 オイラー角

1 ページの 3 次極座標で用いた図を改めて下図に示す。ただし、空間固定の座標系 (慣性系) を $O-XYZ$ で表すことにする。OP を z 軸とし、 x' 軸と y' 軸を z 軸まわりに角 ψ 回転させた軸をそれぞれ x 軸、 y 軸とする。このようにして決めた座標系 $O-xyz$ を剛体固定の座標系として採用する。3 つの角 θ 、 ϕ 、 ψ をオイラー角という。 θ と ϕ を与えると OP の方向は決まるが、剛体はこの軸まわりに回転できるため、 θ と ϕ だけでは剛体の位置を完全に決めることはできない。更に ψ を与えると剛体の位置は完全に決まる。



図より

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\theta \cos \psi + \mathbf{e}_\phi \sin \psi, \quad \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_\theta \sin \psi + \mathbf{e}_\phi \cos \psi \quad (9.31)$$

あるいは

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_x \cos \psi - \mathbf{e}_y \sin \psi, \quad \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_x \sin \psi + \mathbf{e}_y \cos \psi \quad (9.32)$$

である。(1.21) より

$$\dot{\mathbf{e}}_z = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi = \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \right) \mathbf{e}_x - \left(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \right) \mathbf{e}_y$$

また, (1.22), (1.23) より

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \dot{\psi}(-e_\theta \sin \psi + e_\phi \cos \psi) + \dot{e}_\theta \cos \psi + \dot{e}_\phi \sin \psi \\ &= \dot{\psi}e_y + (-\dot{\theta}e_r + \dot{\phi} \cos \theta e_\phi) \cos \psi - \dot{\phi}(\sin \theta e_r + \cos \theta e_\theta) \sin \psi \\ &= (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) e_y - (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) e_z\end{aligned}$$

e_y は e_x で ψ を $\psi + \pi/2$ に置き換えればよいから

$$\dot{e}_y = -(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) e_x + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) e_z$$

したがって

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z$$

ただし

$$\omega_x = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad \omega_y = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \quad (9.33)$$

とすると $\dot{e}_\mu = \boldsymbol{\omega} \times e_\mu$ になるから $\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルである。

(1.20) より

$$e_z = e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta = -e_x \sin \theta \cos \psi + e_y \sin \theta \sin \psi + e_z \cos \theta \quad (9.34)$$

であるから, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z$ を $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ でまとめると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}(e_x \sin \psi + e_y \cos \psi) + \dot{\phi}(-e_x \sin \theta \cos \psi + e_y \sin \theta \sin \psi + e_z \cos \theta) + \dot{\psi}e_z \\ &= \dot{\theta}e_\phi + \dot{\phi}e_z + \dot{\psi}e_z\end{aligned} \quad (9.35)$$

になる。 e_z, e_ϕ, e_z まわりにそれぞれ角 ϕ, θ, ψ で回転させるから, 角速度は (9.35) で表される。

対称こまの自由回転

オイラー角を用いて $\mathbf{N} = 0$ での対称こまの自由回転を考える。 $\mathbf{L} = \text{一定}$ であるから空間固定座標系の Z 軸を \mathbf{L} の方向にとると

$$\mathbf{L} = L e_z = L(-e_x \sin \theta \cos \psi + e_y \sin \theta \sin \psi + e_z \cos \theta)$$

$O-xyz$ を z 軸が対称軸になる慣性主軸とすると $\mathbf{L} = I_0 \omega_x e_x + I_0 \omega_y e_y + I_z \omega_z e_z$ であるから

$$\omega_x = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi = -\frac{L}{I_0} \sin \theta \cos \psi \quad (9.36)$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = \frac{L}{I_0} \sin \theta \sin \psi \quad (9.37)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{L}{I_z} \cos \theta \quad (9.38)$$

(9.37) + i × (9.36) より

$$\left(\dot{\theta} - i\left(\dot{\phi} - \frac{L}{I_0}\right) \sin \theta\right) e^{i\psi} = 0, \quad \therefore \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{I_0}$$

$\sin \theta = 0$ は以下の結果に含まれるので考えない。これから

$$\theta = \text{一定} = \theta_0, \quad \omega_z = \frac{L}{I_z} \cos \theta_0 = \text{一定}$$

になる。(9.38) より

$$\dot{\psi} = \left(\frac{L}{I_z} - \frac{L}{I_0} \right) \cos \theta_0 = -\frac{I_z - I_0}{I_0} \omega_z = -\lambda, \quad \therefore \psi = -\lambda t + \psi_0$$

これを (9.36), (9.37) に代入すると (9.30)

$$\omega_x = \omega_0 \cos(\lambda t - \psi_0 + \pi), \quad \omega_y = \omega_0 \sin(\lambda t - \psi_0 + \pi), \quad \text{ただし} \quad \omega_0 = \frac{L}{I_0} \sin \theta_0$$

を得る。剛体固定座標系から見ると、 ω は対称軸まわりに一定の角速度 $\dot{\psi} = (I_0 - I_z)\omega_z/I_0$ で才差運動する。(9.32) より

$$\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z = -\omega_0 (e_x \cos \psi - e_y \sin \psi) + \omega_z e_z = -\omega_0 e_\theta + \omega_z e_r$$

であるが, (1.19) を代入すると

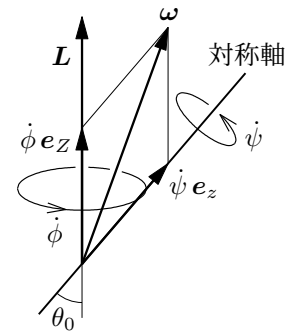
$$\omega = (-\omega_0 \cos \theta_0 + \omega_z \sin \theta_0) e(t) + (\omega_0 \sin \theta_0 + \omega_z \cos \theta_0) e_z, \quad e(t) = e_X \cos \phi + e_Y \sin \phi$$

になる。 $e(t)$ は XY 平面上の単位ベクトルであり一定の角速度 $\dot{\phi} = L/I_0$ で回転する。したがって、空間固定座標系から見ると、 ω は角運動量 $L = Le_z$ まわりに角速度 $\dot{\phi}$ で才差運動する。剛体の対称軸の方向 e_z も (1.19) より $e_z = e_r = e(t) \sin \theta_0 + e_z \cos \theta_0$ になるから、 L のまわりに角速度 $\dot{\phi}$ で才差運動する。3つのベクトル L, ω, e_z は $e(t)$ と e_z で張られる1つの平面上にあり、この平面が L を固定軸として角速度 $\dot{\phi}$ で回転することになる。なお、この平面を z 軸のまわりに角速度 $\dot{\psi}$ で回転させると、剛体に固定した xz 平面になる。

$\omega(t)$ は時刻 t における剛体の回転軸と回転の角速度を表すが、空間固定座標系から見て運動が最も分かりやすい表現は (9.35) である。 $\dot{\theta} = 0$ であるから

$$\omega = \dot{\phi} e_z + \dot{\psi} e_z = \frac{L}{I_0} e_z + \left(1 - \frac{I_z}{I_0} \right) \omega_z e_z$$

になる。第1項は一定方向 L まわりの回転、第2項は剛体の対称軸まわりの回転(自転)である。第2項は対称軸自体の運動には寄与しないから、対称軸は L まわりに角速度 $\dot{\phi} = L/I_0$ で才差運動する。更に、剛体は才差運動する対称軸まわりに $(1 - I_z/I_0)\omega_z$ で自転する。自転の向きは I_0 と I_z の大小関係で変わる。球対称こま ($I_z = I_0$) の場合、 $L = I_0 \omega$ になり自由回転は静止した軸 (L) まわりの一様な回転である。



9.7 重力が作用するときのこまの運動

重力が作用して運動する対称こまを考える。こまの先端は O に固定されるとする。空間固定の Z 軸を鉛直上向きに、 z 軸をこまの対称軸にとる。こまの重心と O の距離を l , こまの質量を M とすると、 O 点まわりの力のモーメント N は (9.34) より

$$N = l e_z \times (-Mg) e_z = Mgl \sin \theta (e_x \sin \psi + e_y \cos \psi) = Mgl e_\phi$$

になる (先端 O で働く抗力は N には寄与しない)。したがって、(9.27) + $i \times$ (9.26)

$$I_0 \frac{d}{dt} (\omega_y + i\omega_x) + i(I_z - I_0) \omega_z (\omega_y + i\omega_x) = N_y + iN_x$$

は $\omega_y + i\omega_x = (\dot{\theta} - i\dot{\phi} \sin \theta) e^{i\psi}$ より

$$I_0 \frac{d}{dt} (\dot{\theta} - i\dot{\phi} \sin \theta) + (I_0 \dot{\psi} + (I_z - I_0) \omega_z) (\dot{\phi} \sin \theta + i\dot{\theta}) = Mgl \sin \theta$$

つまり

$$I_0 \ddot{\theta} + (I_0 \dot{\psi} + (I_z - I_0) \omega_z) \dot{\phi} \sin \theta - Mgl \sin \theta = 0 \quad (9.39)$$

$$I_0 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) - \dot{\theta} (I_0 \dot{\psi} + (I_z - I_0) \omega_z) = 0 \quad (9.40)$$

である。(9.28) は $N_z = 0$ より

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 0, \quad \therefore \quad \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \text{一定} \quad (9.41)$$

$\dot{\psi} = \omega_z - \dot{\phi} \cos \theta$ を (9.39), (9.40) に代入すると

$$I_0 \ddot{\theta} + (I_z \omega_z - I_0 \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta - Mgl \sin \theta = 0 \quad (9.42)$$

$$I_0 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) - \dot{\theta} (I_z \omega_z - I_0 \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \quad (9.43)$$

である。

(9.42) に $\dot{\theta}$ をかけると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{I_0}{2} \frac{d}{dt} \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} (I_z \omega_z - I_0 \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta + Mgl \frac{d}{dt} \cos \theta \\ &= \frac{I_0}{2} \frac{d}{dt} \dot{\theta}^2 + I_0 \dot{\phi} \sin \theta \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) + Mgl \frac{d}{dt} \cos \theta \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{I_0}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_0}{2} (\dot{\phi} \sin \theta)^2 + Mgl \cos \theta \right) \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{I_0}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta = \text{一定} \quad (9.44)$$

これは力学的エネルギー保存則である。剛体の運動エネルギー (9.23) を (9.33) で表すと

$$\begin{aligned} K &= \frac{I_0}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{I_z}{2} \omega_z^2 = \frac{I_0}{2} \left((\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)^2 \right) + \frac{I_z}{2} \omega_z^2 \\ &= \frac{I_0}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_z}{2} \omega_z^2 \end{aligned}$$

になるから、力学的エネルギー E は

$$E = \frac{I_0}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_z}{2} \omega_z^2 + Mgl \cos \theta \quad (9.45)$$

である。 ω_z は一定であるから (9.44) は $E = \text{一定}$ を意味する。

次に, (9.43) の第 1 項を微分すると

$$I_0 (\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) - L_z \dot{\theta} = 0, \quad L_z = I_z \omega_z$$

これに $\sin \theta$ をかければ

$$\frac{d}{dt} (I_0 \dot{\phi} \sin^2 \theta + L_z \cos \theta) = 0, \quad \therefore \quad L_z = I_0 \dot{\phi} \sin^2 \theta + L_z \cos \theta = \text{一定} \quad (9.46)$$

になる。\$L_Z\$ は角運動量の鉛直成分である。実際, (9.33), (9.34) より

$$\begin{aligned} L_Z &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_Z = -L_x \sin \theta \cos \psi + L_y \sin \theta \sin \psi + L_z \cos \theta \\ &= -I_0 \omega_x \sin \theta \cos \psi + I_0 \omega_y \sin \theta \sin \psi + L_z \cos \theta = I_0 \dot{\phi} \sin^2 \theta + L_z \cos \theta \end{aligned}$$

である。\$N\$ は鉛直方向 \$\mathbf{e}_Z\$ に直交するから \$\dot{L}_Z = N_Z = 0\$ であり \$L_Z\$ は保存する。

(9.46) より \$\dot{\phi}\$ を \$\theta\$ で表すと

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}(\theta) = \frac{L_Z - L_z \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta} \quad (9.47)$$

になるから (9.45) は \$E' = E - I_z \omega_z^2/2 - Mgl\$ とすると

$$E' = \frac{I_0}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad (9.48)$$

ただし

$$V(\theta) = \frac{I_0}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - Mgl(1 - \cos \theta) = \frac{(L_Z - L_z \cos \theta)^2}{2I_0 \sin^2 \theta} - Mgl(1 - \cos \theta) \quad (9.49)$$

になる。\$V(\theta)\$ の概略を調べると

$$V'(\theta) = \frac{dV}{d\theta} = \left(I_0 \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\theta} \sin \theta + I_0 \dot{\phi}^2 \cos \theta - Mgl \right) \sin \theta$$

(9.46) を \$\theta\$ で微分すると

$$\left(I_0 \frac{d\dot{\phi}}{d\theta} \sin \theta + 2I_0 \dot{\phi} \cos \theta - L_z \right) \sin \theta = 0, \quad \therefore \quad I_0 \frac{d\dot{\phi}}{d\theta} \sin \theta = L_z - 2I_0 \dot{\phi} \cos \theta \quad (9.50)$$

これを \$V'(\theta)\$ に代入すると

$$V'(\theta) = - \left(I_0 \cos \theta \dot{\phi}^2 - L_z \dot{\phi} + Mgl \right) \sin \theta = \frac{Mgl}{\sin^3 \theta} \left(f(\cos \theta) - (1 - \cos^2 \theta)^2 \right) \quad (9.51)$$

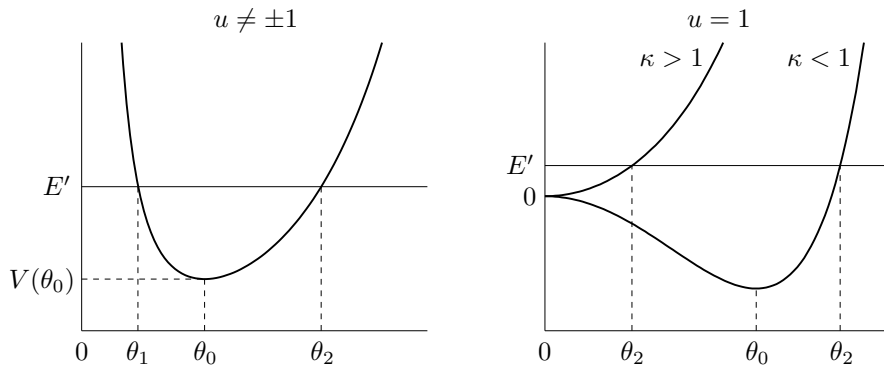
ただし

$$f(x) = 4\kappa u(x - u) \left(x - \frac{1}{u} \right), \quad u = \frac{L_Z}{L_z}, \quad \kappa = \frac{L_z^2}{4MglI_0} \quad (9.52)$$

\$u \neq \pm 1\$ の場合, \$f(x)\$ は異なる 2 点 \$u\$ と \$1/u\$ で 0 になる 2 次関数で, \$u\$ と \$1/u\$ のうち 1 つは必ず \$-1 < x < 1\$ の領域にある。したがって, \$f(x)\$ と 4 次関数 \$(1 - x^2)^2\$ は \$-1 < x < 1\$ の領域内の 1 点で交わる。この交点 \$x = \cos \theta\$ の \$\theta\$ を \$\theta_0\$ とすると, \$V'(\theta_0) = 0\$ であり \$\theta \leq \theta_0\$ のとき \$V'(\theta) \leq 0\$ になるから, \$V(\theta)\$ は \$\theta = \theta_0\$ の一か所だけで極小になる。また, \$u \neq \pm 1\$ のとき \$\theta \to 0, \theta \to \pi\$ で \$V \to \infty\$ であるから \$V(\theta)\$ の概略は下図のようになる。\$u = 1\$ の場合

$$V(\theta) = Mgl \left(\frac{2\kappa}{1 + \cos \theta} - 1 \right) (1 - \cos \theta), \quad V'(\theta) = \frac{4Mgl \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \left(\kappa - \cos^4 \frac{\theta}{2} \right) \quad (9.53)$$

\$\kappa > 1\$ のとき \$\theta_0 = 0\$ で極小になる。一方, \$\kappa < 1\$ のとき \$\theta = 0\$ では極大になり, \$\cos(\theta_0/2) = \kappa^{1/4}\$ で極小になる。



$V(\theta)$ を極小にする $\theta = \theta_0$ は

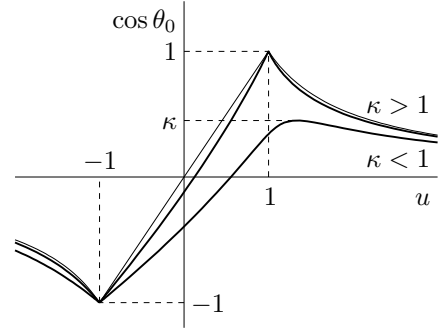
$$u \left(\cos \theta_0 - u \right) \left(\cos \theta_0 - \frac{1}{u} \right) = \frac{1}{4\kappa} (1 - \cos^2 \theta_0)^2 \quad (9.54)$$

で決まる。 κ を与えたとき, $\cos \theta_0$ を u の関数として数値的に求めると右図のようになる。対称軸まわりに高速回転する $\kappa \gg 1$ の場合, 近似解は簡単に求まる。

$$u \left(\cos \theta_0 - u \right) \left(\cos \theta_0 - \frac{1}{u} \right) \approx 0$$

より

$$\cos \theta_0 \approx \begin{cases} u, & |u| < 1 \\ 1/u, & |u| > 1 \end{cases} \quad (9.55)$$



である。これを細い曲線で示す。 $\kappa < 1$ の場合

$$\cos \theta_0 \leq \kappa = \frac{L_z^2}{4MglI_0} \quad (9.56)$$

になる。これは (9.54) を u で微分し極値の条件 $d \cos \theta_0 / du = 0$ を設定すれば得られる。

運動は $I_0 \dot{\theta}^2 / 2 = E' - V(\theta) \geq 0$ を満たす範囲で起こる。 $L_z / L_z \neq \pm 1$ のとき $E' > V(\theta_0)$ ならば

$$0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi, \quad E' = V(\theta_1) = V(\theta_2)$$

である。(9.48) を $\dot{\theta}$ について解けば

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{I_0}{2} (E' - V(\theta))}, \quad \therefore \int \frac{d\theta}{\sqrt{E' - V(\theta)}} = \pm \sqrt{\frac{I_0}{2}} \int dt$$

左辺の積分は楕円積分で表され $\theta = \theta(t)$ が決まる。これを (9.41), (9.46) に代入すれば $\phi = \phi(t)$, $\psi = \psi(t)$ も求まる。以下では $E' \approx V(\theta_0)$ という場合だけ考える。

眠りごま

任意の ϕ に対して $\theta = 0$ は (9.42), (9.43) の解である。このとき (9.41) から $\dot{\psi} + \dot{\phi} = \omega_z$ になり

$$\theta = 0, \quad \psi + \phi = \omega_z t + \text{定数}$$

はオイラー方程式を満たす。 ψ と ϕ の各々は決まらないが, $\theta = 0$ のとき Z 軸まわりの x 軸の角は $\psi + \phi$ になるから, 剛体の運動は決まる。こまは直立したまま対称軸まわりに一定の角速度 ω_z で回転する。回転しているのか静止しているのか一見して区別がつかないため, この状態のこまを眠りごまという。

眠りごまの安定性を調べる。 $\theta = 0$ 近傍の運動が実現するためには $\theta = 0$ で $V(\theta)$ は発散してはならないから $L_z = L_z$ である。このとき $V(\theta)$ は (9.53) で与えられる。 E' が $V(0) = 0$ よりわずかに大きい場合を考える。

$$\kappa = \frac{L_z^2}{4MglI_0} > 1, \quad \text{つまり} \quad \omega_z > \Omega = \frac{2\sqrt{MglI_0}}{I_z}$$

ならば, 前ページの図から $E' - V(\theta) \geq 0$ を満たす θ は $\theta = 0$ 近傍に限られる。したがって, 対称軸は鉛直軸近傍で振動し眠りごまは安定である。一方, $\omega_z < \Omega$ の場合, $E' - V(\theta) \geq 0$ を満たす領域

は $\theta = 0$ 近傍に限らない。このため、対称軸は大きく傾き眠りごまは不安定である。高速回転する安定な眠りごまであっても、現実には摩擦などのため ω_z は次第に小さくなり、 $\omega_z < \Omega$ になると対称軸は急に大きく傾き首を振り出すことになる。 Ω が小さければ、安定な時間は長くなる。そのため、こまの重心を低くしたり、対称軸まわりの慣性モーメント I_z を大きくすれよい。

θ が小さいとき $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \dots$ より

$$V(\theta) = \frac{I_z^2}{4I_0} (\omega_z^2 - \Omega^2) \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

(9.48) を時間で微分すれば $I_0 \ddot{\theta} = -V'(\theta)$ になるから

$$\ddot{\theta} = -\frac{I_z^2}{4I_0^2} (\omega_z^2 - \Omega^2) \theta + \dots, \quad \therefore \quad \theta \approx \begin{cases} a \cos(\lambda t + b), & \omega_z > \Omega \\ ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t}, & \omega_z < \Omega \end{cases}, \quad \lambda = \frac{I_z}{2I_0} \sqrt{|\omega_z^2 - \Omega^2|}$$

$\omega_z > \Omega$ のとき対称軸は鉛直軸近傍で振動するが、 $\omega_z < \Omega$ の場合 $a \neq 0$ でない限り対称軸は時間とともに傾く。

才差運動と章動

$E' = V(\theta_0)$ の場合、不等式 $E' - V(\theta) \geq 0$ を満たす θ は $\theta = \theta_0$ の一点だけである。したがって、こまの対称軸は鉛直軸と一定の角度 θ_0 を保ちながら才差運動する。 $V'(\theta_0) = 0$ であるから (9.51) より

$$I_0 \cos \theta_0 \dot{\phi}_0^2 - I_z \omega_z \dot{\phi}_0 + Mgl = 0, \quad \text{ただし} \quad \dot{\phi}_0 = \dot{\phi}(\theta_0) \quad (9.57)$$

になる。あるいは、(9.42) で $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ としてもよい。これから

$$\dot{\phi}_0 = \frac{I_z \omega_z}{2I_0 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\cos \theta_0}{\kappa}} \right), \quad \kappa = \frac{(I_z \omega_z)^2}{4I_0 Mgl} = (9.52) \text{ で定義した } \kappa$$

こまの対称軸は鉛直軸まわりに一定の角速度 $\dot{\phi}_0$ で才差運動する。この才差運動が実現するためには、根号内は非負でなければならぬから $\cos \theta_0 \leq \kappa$ である。これは (9.56) である。

ω_z が大きく対称軸まわりに高速回転する場合 $\kappa \gg 1$ であるから

$$\sqrt{1 - \frac{\cos \theta_0}{\kappa}} \approx 1 - \frac{\cos \theta_0}{2\kappa}$$

で近似すると

$$\text{速い才差運動} : \dot{\phi}_0 \approx \frac{I_z \omega_z}{I_0 \cos \theta_0} \quad \text{または} \quad \text{遅い才差運動} : \dot{\phi}_0 \approx \frac{Mgl}{I_z \omega_z} \quad (9.58)$$

になる。角運動量

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I_0 \omega_x \mathbf{e}_x + I_0 \omega_y \mathbf{e}_y + I_z \omega_z \mathbf{e}_z \\ &= I_0 \left(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \right) \mathbf{e}_x + I_0 \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \right) \mathbf{e}_y + I_z \omega_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

は

$$\mathbf{L} = I_0 \dot{\phi}_0 \sin \theta_0 \left(-\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y \right) + I_z \omega_z \mathbf{e}_z$$

になるが、速い才差運動の場合、(9.34) に注意すると

$$\mathbf{L} \approx \frac{I_z \omega_z}{\cos \theta_0} \left(-\sin \theta_0 \cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \theta_0 \sin \psi \mathbf{e}_y + \cos \theta_0 \mathbf{e}_z \right) = \frac{I_z \omega_z}{\cos \theta_0} \mathbf{e}_z$$

であり、角運動量はほぼ鉛直方向を向く。遅い才差運動では $I_0\dot{\phi}_0$ は $I_z\omega_z$ に比べて無視できるから $\mathbf{L} \approx I_z\omega_z\mathbf{e}_z$ になり、 \mathbf{L} は対称軸方向を向く。 $\kappa \gg 1$ のとき $\cos\theta_0$ は近似的に (9.55) で与えられる。(9.47) より

$$\dot{\phi}_0 = L_z \frac{u - \cos\theta_0}{I_0 \sin^2\theta_0} \approx \begin{cases} 0, & \cos\theta_0 \approx u \\ \frac{L_z}{I_0 \cos\theta_0}, & \cos\theta_0 \approx 1/u \end{cases}$$

になる。 $\cos\theta_0 \approx u$ の場合 $1/\kappa$ の補正を行えば (9.58) を再現する。

自由回転 ($g = 0$) の場合, (9.57) の解は, 速い才差運動に対応する

$$\dot{\phi}_0 = \frac{I_z\omega_z}{I_0 \cos\theta_0} = \frac{L}{I_0}, \quad \mathbf{L} = \frac{I_z\omega_z}{\cos\theta_0}\mathbf{e}_z = L\mathbf{e}_z$$

と遅い才差運動に対応する

$$\dot{\phi}_0 = 0, \quad \mathbf{L} = I_z\omega_z\mathbf{e}_z = L\mathbf{e}_z$$

になる。前者は 89 ページの結果を再現する。後者は対称軸が \mathbf{L} の方向に一致し、前者で $\theta_0 = 0$ とした場合である。 $\theta_0 = 0$ のとき、剛体の回転の角速度は $\dot{\phi} + \dot{\psi} = \omega_z$ である。

$E' > V(\theta_0)$ であるが $E' \approx V(\theta_0)$ のとき、 θ は θ_0 近傍で変化する。 $V(\theta)$ を $\theta = \theta_0$ でテイラー展開すると $V'(\theta_0) = 0$ より

$$V(\theta) = V(\theta_0) + \frac{1}{2}V''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 + \dots$$

になる。(9.51) を θ で微分し $d\dot{\phi}/d\theta$ に (9.50) を代入すると

$$\begin{aligned} V''(\theta) &= \left(I_0 \sin\theta \dot{\phi}^2 + \left(L_z - 2I_0 \cos\theta \dot{\phi} \right) \frac{d\dot{\phi}}{d\theta} \right) \sin\theta - \left(I_0 \cos\theta \dot{\phi}^2 - L_z \dot{\phi} + Mgl \right) \cos\theta \\ &= I_0 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 + \frac{1}{I_0} \left(L_z - 2I_0 \cos\theta \dot{\phi} \right)^2 - \left(I_0 \cos\theta \dot{\phi}^2 - L_z \dot{\phi} + Mgl \right) \cos\theta \end{aligned}$$

$\theta = \theta_0$ のとき第 3 項は 0 になるから

$$V''(\theta_0) = I_0\omega_n^2 > 0, \quad \text{ただし} \quad \omega_n = \sqrt{\sin^2\theta_0 \dot{\phi}_0^2 + \left(\frac{L_z}{I_0} - 2\cos\theta_0 \dot{\phi}_0 \right)^2}$$

したがって

$$E' = \frac{I_0}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta) = \frac{I_0}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta_0) + \frac{I_0\omega_n^2}{2}(\theta - \theta_0)^2 + \dots \quad (9.59)$$

時間で微分すると

$$I_0\dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \omega_n^2(\theta - \theta_0) \right) + \dots = 0, \quad \therefore \frac{d^2}{dt^2}(\theta - \theta_0) = -\omega_n^2(\theta - \theta_0)$$

これから、 a と b を任意定数として

$$\theta - \theta_0 = a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t$$

になる。対称軸は才差運動しながら角振動数 ω_n で上下に振動する。この振動を章動という。

ω_z が大きいとき、遅い才差運動の角速度

$$\dot{\phi}_0 \approx \omega_p = \frac{Mgl}{I_z\omega_z} = \frac{Mgl}{L_z}$$

は $L_z/I_0 = I_z\omega_z/I_0$ に比べて無視できるから、章動の角速度は $\omega_n \approx L_z/I_0$ になる。章動が起こる場合 $\dot{\phi}$ も振動する。(9.50) より

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \dot{\phi}(\theta_0) + \left. \frac{d\dot{\phi}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) + \dots = \dot{\phi}_0 + \frac{L_z - 2I_0\dot{\phi}_0 \cos \theta_0}{I_0 \sin \theta_0} (\theta - \theta_0) + \dots \\ &\approx \omega_p + \frac{\omega_n}{\sin \theta_0} \left(1 - \frac{2\omega_p \cos \theta_0}{\omega_n} \right) (\theta - \theta_0)\end{aligned}$$

ω_p/ω_n は微小であるから無視すると

$$\dot{\phi} \approx \omega_p + \frac{\omega_n}{\sin \theta_0} (\theta - \theta_0) = \omega_p + \frac{\omega_n}{\sin \theta_0} (a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t)$$

$t = 0$ での $\dot{\phi} = \dot{\phi}(0)$ で表すと

$$a = \frac{\dot{\phi}(0) - \omega_p}{\omega_n} \sin \theta_0, \quad \therefore \dot{\phi} \approx \omega_p + (\dot{\phi}(0) - \omega_p) \cos \omega_n t + \frac{\omega_n}{\sin \theta_0} b \sin \omega_n t$$

$t = 0$ で $\phi = 0$ として積分すると

$$\phi = \omega_p t + \frac{\dot{\phi}(0) - \omega_p}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{b}{\sin \theta_0} (1 - \cos \omega_n t)$$

一方

$$\theta = \theta_0 + \frac{\dot{\phi}(0) - \omega_p}{\omega_n} \sin \theta_0 \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t$$

$t = 0$ で $\dot{\theta} = 0$ とすると $b = 0$ になるから

$$\theta = \theta_0 + \frac{\dot{\phi}(0) - \omega_p}{\omega_n} \sin \theta_0 \cos \omega_n t, \quad \phi = \omega_p t + \frac{\dot{\phi}(0) - \omega_p}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (9.60)$$

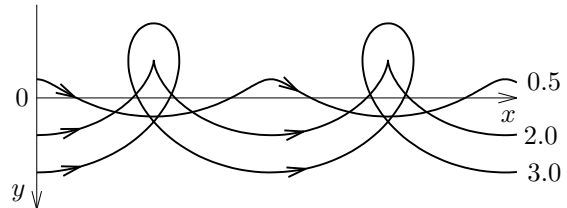
無次元量 $\tau = \omega_n t$, $u_0 = \dot{\phi}(0)/\omega_p$ で表せば

$$\theta - \theta_0 = \frac{\omega_p}{\omega_n} (u_0 - 1) \sin \theta_0 \cos \tau, \quad \phi = \frac{\omega_p}{\omega_n} (\tau + (u_0 - 1) \sin \tau)$$

になる。

$$x(\tau) = \frac{\omega_n}{\omega_p} \phi = \tau + (u_0 - 1) \sin \tau, \quad y(\tau) = \frac{\omega_n}{\omega_p} \frac{\theta - \theta_0}{\sin \theta_0} = (u_0 - 1) \cos \tau$$

を図示すると図のようなトロコイド曲線になる。ただし、 y は下向きが増加する方向である。これは対称軸が描く曲線 (ϕ, θ) に対応する。曲線に付けた数値は u_0 の値である。曲線は $|u_0 - 1| \leq 1$ で異なった振る舞いをする。 $|u_0 - 1| < 1$ つまり



$$|\dot{\phi}(0) - \omega_p| < \omega_p$$

の場合

$$\dot{\phi} = \omega_p + (\dot{\phi}(0) - \omega_p) \cos \omega_n t > 0$$

であるから $\phi(t)$ は単調増加関数である。したがって、対称軸は鉛直線のまわりに一定方向に才差運動しながら上下に振動する (図の $u = 0.5$)。 $|u_0 - 1| > 1$, ($|\dot{\phi}(0) - \omega_p| > \omega_p$) の場合、 $\dot{\phi}$ の符号は

変わるから、対称軸はらせんを描きながら鉛直線のまわりを回る (図の $u = 3$)。 $\dot{\phi}(0) = \omega_p = \pm \omega_p$ の場合

$$\dot{\phi} = \omega_p (1 \pm \cos \omega_n t) \geq 0, \quad \dot{\theta} = \mp \frac{\omega_p}{\omega_n} \sin \theta_0 \sin \omega_n t$$

である。 $\cos \omega_n t = \mp 1$ を満たす時刻で $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ になるから、図の $u = 2$ のような曲線を描く。

高速に自転するこまでは、遅い才差運動と章動の角速度は

$$\omega_p \approx \frac{Mg\ell}{I_z \omega_z}, \quad \omega_n \approx \frac{I_z \omega_z}{I_0}$$

であるから、 ω_z が増加するほど、 ω_p は小さくなり ω_n は大きくなる。非常にゆっくりした才差運動と激しく振動する章動になる。ところで (9.60) より章動の振幅は ω_n に反比例するから、 ω_z が非常に大きい場合、衝動は見えないことになる。これはエネルギー保存則から求まる運動可能領域を調べれば明らかかなことである。(9.59) より

$$\frac{I_0}{2} \dot{\theta}^2 = E' - V(\theta_0) - \frac{I_0 \omega_n^2}{2} (\theta - \theta_0)^2 + \dots \geq 0, \quad \therefore |\theta - \theta_0| \lesssim \frac{1}{\omega_n} \sqrt{\frac{2(E' - V(\theta_0))}{I_0}}$$

であるから、 ω_n が大きいと $\theta \approx \theta_0$ になる。

10 数学的補足

10.1 テイラー級数

$x = c$ 近傍における関数 $F(x)$ の様子を調べる場合, $F(x)$ を簡単な関数で近似することは有効な方法である。最も簡単な近似は, $x = c$ における $F(x)$ の接線, つまり

$$F(x) \approx F(c) + F'(c)(x - c)$$

で近似することである。これを一般化して, $x - c$ のべき級数 (power series) で展開して

$$F(x) = F(c) + F'(c)(x - c) + f_2(x - c)^2 + \cdots + f_n(x - c)^n + \cdots$$

としてみる。ここで, f_2, \dots, f_n, \dots は定数である。 x で順次微分すると

$$F'(x) = F'(c) + 2f_2(x - c) + 3f_3(x - c)^2 + \cdots + nf_n(x - c)^{n-1} + \cdots$$

$$F''(x) = 2f_2 + 3 \cdot 2f_3(x - c) + \cdots + n(n-1)f_n(x - c)^{n-2} + \cdots$$

$$F'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1f_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2f_4(x - c) + \cdots + n(n-1)(n-2)f_n(x - c)^{n-3} + \cdots$$

⋮

$x = c$ とすると, 一般に $F^{(n)}(c) = n!f_n$ になる。ただし, $F^{(n)}(x)$ は $F(x)$ を n 回微分した n 次導関数である。したがって, $F(x)$ は

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (10.1)$$

と展開できる。これをテイラー級数 (Taylor series) という。 x を $c + x$ に置き換えれば

$$F(c + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(c)}{n!} x^n \quad (10.2)$$

になる。 $c = 0$ とした

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

をマクローリン級数 (Maclaurin series) という。これらの級数は収束するとは限らない。代表的なマクローリン級数と収束範囲を示す。

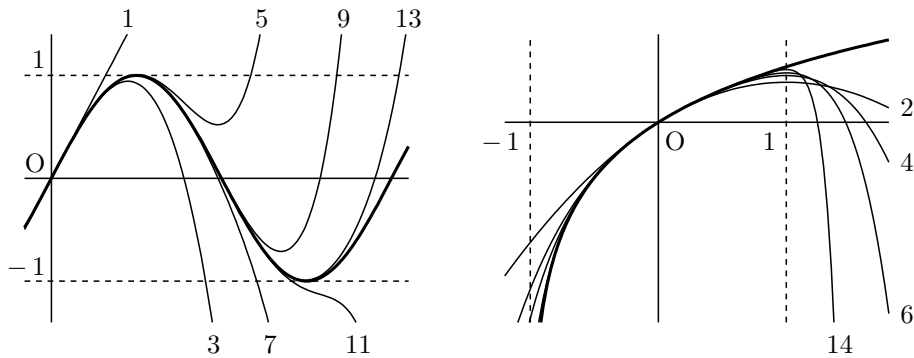
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad |x| < \infty \quad (10.3)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad |x| < \infty \quad (10.4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad |x| < \infty \quad (10.5)$$

$$\log(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1 \quad (10.6)$$

上の無限級数の部分和が元の関数に収束する様子を, $\sin x$ と $\log(1+x)$ について示したのが次の図である。細い曲線がそれぞれに付けた整数 N の x^N までの和を表す。 $\sin x$ の部分和は項数が増すにつれて $\sin x$ をよりよく近似するようになる。一方, $\log(1+x)$ は収束範囲 $-1 < x \leq 1$ では同様であるが, 収束範囲外では全く近似していない。



部分和は元の関数の近似式として使える。 $F'(c) = 0$ の場合, $x = c$ 近傍を

$$F(x) \approx F(c) + \frac{F''(c)}{2}(x - c)^2$$

で近似することはよく使う。

問 10.1 $F^{(n)}(x)$ を求めて, (10.3) から (10.6) のマクローリン級数を確かめよ。

10.2 複素数

物理量は実数 (real number) であるが, これを複素数 (complex number) に拡張すると, 扱いが簡単になることがある。ここで, 複素数についてまとめておく。

x と y を実数とすると, 複素数 z を

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1} \tag{10.7}$$

で定義する。ここで $i^2 = -1$ である i を虚数単位 (imaginary unit), x を複素数 z の実部 (real part), y を複素数 z の虚部 (imaginary part) といい

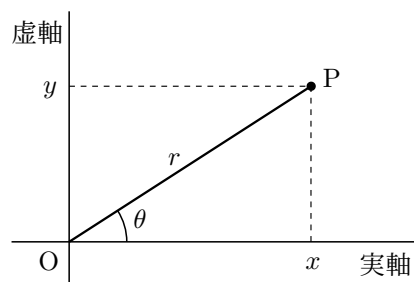
$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

で表す。 $z = iy$ を (純) 虚数 (imaginary number) という。 $z = x + iy$ に対して $x - iy$ を z の共役 (conjugate) 複素数といい, \bar{z} または z^* で表す。共役複素数を使うと, 実部と虚部は

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z^* = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z^* = \frac{z - z^*}{2i}$$

と表せる。 z が実数である条件は $z = z^*$ である。 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ を $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で定義する。 $|z|^2 = zz^*$ である。

実数は直線上の点で表せる。これと同様に, 2つの実数からなる複素数は平面上の点で表せる。 x 軸と y 軸からなる直交座標を考え, 点 $P(x, y)$ に対して複素数 $z = x + iy$ を対応させる。複素数を表示するために用いられる xy 平面を複素平面 (complex plane) またはガウス平面 (Gaussian plane) という。また, x 軸は実軸, y 軸は虚軸と呼ばれる。 z の共役複素数 $z^* = x - iy$ は, 複素平面上におい



て実軸 (x 軸) に関して対称の位置にある。原点 O から点 $z = x + iy$ までの距離 r は z の絶対値 $|z|$ に等しい。OP と x 軸のなす角を θ とすると

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (10.8)$$

と書ける。これを複素数の極形式という。

オイラー (Euler) の公式 指数関数をマクローリン級数で表すと

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

である。変数が純虚数 $x = i\theta$ の場合, n が偶数 ($n = 2k$) と奇数 ($n = 2k + 1$) に分ければ

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

になる。この実部と虚部はそれぞれ $\cos \theta$ と $\sin \theta$ のマクローリン級数であるから

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (10.9)$$

を得る。これをオイラーの公式という。

マクローリン級数を用いてオイラーの公式を導いたが, 次のようにしてもよい。 $e^{i\theta}$ は複素数であるから $F(\theta)$, $G(\theta)$ を実数の関数とすると

$$e^{i\theta} = F(\theta) + iG(\theta) \quad (10.10)$$

とおける。 $\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = ie^{i\theta}$ の両辺に (10.10) を代入すると

$$\frac{dF}{d\theta} + i \frac{dG}{d\theta} = i(F + iG) = -G + iF, \quad \text{したがって} \quad \frac{dF}{d\theta} = -G, \quad \frac{dG}{d\theta} = F \quad (10.11)$$

という関係を得る。 θ で微分すると

$$\frac{d^2 F}{d\theta^2} = -\frac{dG}{d\theta} = -F$$

微分方程式 $d^2 F/d\theta^2 = -F$ を満たす関数は $\sin \theta$ と $\cos \theta$ であるから, A, B を任意定数として

$$F = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad G = -\frac{dF}{d\theta} = A \sin \theta - B \cos \theta$$

になる。 $F(0) = A$, $G(0) = -B$ であるが, (10.10) で $\theta = 0$ とすると $F(0) = 1$, $G(0) = 0$ である。したがって, $A = 1$, $B = 0$ になるから, $F = \cos \theta$, $G = \sin \theta$ を得る。

オイラーの公式を使うと極形式 (10.8) は

$$z = re^{i\theta} \quad (10.12)$$

になる。任意の複素数を実数で表すとき, (10.7) の形式ばかりでなく, この形式もよく使う。共役複素数 z^* は

$$z^* = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}$$

になる。つまり, $(re^{i\theta})^* = re^{-i\theta}$ である。

オイラーの公式を使えば、三角関数のいろいろな等式を簡単に導ける。例えば、

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \quad (10.13)$$

であるが、 $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ と考えれば

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned} \quad (10.14)$$

(10.13) と (10.14) の実部と虚部はそれぞれ等しいから

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

を得る。

問 10.1 オイラーの公式より (ただし n は整数)

$$e^{in\pi} = (-1)^n, \quad |e^{i\theta}| = 1, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

を確かめよ。

問 10.2 $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ を用いて次の倍角の公式を確かめよ。

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, & \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta, & \sin 3\theta &= 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta \end{aligned}$$

問 10.3 x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を

$$x_n = \frac{(1 + ih)^n + (1 - ih)^n}{2}$$

とする。 $nh = \text{一定} = t$ として $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) のとき $x_n \rightarrow \cos t$ を示せ。

問 10.4 $z(t) = e^{i\omega t}$ と $z(t) = e^{-i\omega t}$ が微分方程式

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

を満たすことを確かめよ。したがって α, β を任意の複素定数とすると

$$z(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$$

はこの微分方程式の解である。

索引

あ

位相	21
位置エネルギー	35
位置ベクトル	1
因果律	11
運動エネルギー	35
運動方程式	9
運動量	14
運動量保存則	14, 59, 65
円運動	4
遠心力	52, 80
オイラー角	88
オイラーの運動方程式	87
オイラーの公式	100

か

外積	44
回転座標系	78
外力	14, 65
角運動量	48
角運動量保存則	48, 67
角振動数	21
角速度	4
角速度ベクトル	79
過減衰	23
重ね合わせ	22
加速度	3
過渡的な項	25
換算質量	59
慣性系	9
慣性質量	9
慣性主軸	85
慣性乗積	84
慣性楕円体	85
慣性テンソル	84
慣性の法則	9
慣性モーメント	49, 69, 84
基準座標	29
強制振動	25

共鳴	25
極形式	100
極座標	1, 5, 51
偶力	68
クロネッカーのデルタ記号	2
ケプラーの法則	52, 55
ケプラーの方程式	57
減衰振動	23
向心力	4
剛体	68
コリオリ力	80

さ

才差運動	87, 94
作用反作用の法則	14
次元解析	10
仕事	31
実験室系	60
実体振り子	72
周期	21
重心	14, 59, 65
重心系	60
自由度	1
主慣性モーメント	85
章動	95
衝突径数	63
初期条件	11
振動数	21
振幅	21
スカラー	2
静止摩擦係数	74
線積分	31
全微分	34
相当単振り子の長さ	72
速度	3

た

対称こま	87
単位ベクトル	2
単振動	21

単振り子	5, 39, 50
力のモーメント	48
中心力	48, 52
調和振動	21
テイラー級数	98
テンソル	85
同次線形微分方程式	22
動摩擦係数	74
<hr/>	
な	
内積	2
内力	14, 65
ナイルの曲線	83
ナブラ	34
眠りごま	93
<hr/>	
は	
半値幅	26
万有引力	53
非同次線形微分方程式	24
微分断面積	63
フーコー振り子	83
ベクトル	2
ベクトル積	44
法線方向	8
保存力	35
ポテンシャル・エネルギー	35
<hr/>	
ま	
マクローリン級数	98
面積速度	49
モース・ポテンシャル	41
<hr/>	
ら	
ラザフォード散乱	62
ラプラシアン	34
力学的エネルギー保存則	35, 53, 74, 91
離心率	55
臨界減衰	23
レビ・チビタの記号	46
連成振動	28