解析力学入門

倉澤治樹
http://kurasawa.c.ooco.jp

2016 年 10 月 11 日

目 次

参考書

- 大貫 義郎：物理テキストシリーズ２ 解析力学（岩波書店）
- 原島 鮮：力学（裳華房）
- 山内 恭彦：一般力学（岩波書店）
- ランダウ, リフシッツ：力学（東京図書）
- ゴールドスタイン：古典力学（吉岡書店）
- 武田 暁：現代力学（裳華房）

1　ラグランジュの運動方程式

1.1　一般化座標と束縛条件

N 個の質点からなる質点系を考える。k 番目の質点の質量を M_k, 座標を (X_k, Y_k, Z_k) とする。(X_k, Y_k, Z_k) は空間に固定した座標系のデカルト座標である。

$$X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \cdots, X_N, Y_N, Z_N$$

を通し番号で表して

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$$

とする。これに対応して, 質量を $m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k} = M_k$ とすると, 運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, 3N$$

になる。

一般化座標

質点の座標は空間に固定した座標系のデカルト座標 x_i である必要はない。例えば, 極座標 $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ を用いれば

$$x_1 = q_1 \sin q_2 \cos q_3\,, \qquad x_2 = q_1 \sin q_2 \sin q_3\,, \qquad x_3 = q_1 \cos q_2$$

である。z 軸まわりに角速度 ω で回転している回転座標系 q_1, q_2, q_3 で表すと

$$x_1 = q_1 \cos\omega t - q_2 \sin\omega t\,, \qquad x_2 = q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t\,, \qquad x_3 = q_3 \tag{1.1}$$

である。一般に, $3N$ 個の変数 $q_1, \cdots, q_{3N}$ により x_i は $q_1, \cdots, q_{3N}$ の関数として表せる。

$$x_i = x_i(\,q_1, \cdots, q_{3N}, t\,)$$

である。x_i は $q_j(t)$ により t に依存するだけでなく, 回転座標系の変換のように, 直接 t に依存してもよい。q_i を**一般化座標**という。

束縛条件

例えば, 長さ ℓ の棒の一端を固定し, 他端に付けた質点を鉛直平面内で運動させる (単振り子)。この場合 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \ell$, $x_3 = 0$ という束縛条件のため, 独立な変数は x_1 あるいは x_2 のどちらか 1 つである。また, 質点には**束縛力**である棒からの張力 $\boldsymbol{R}$ が作用する。運動が束縛条件を満たすように $\boldsymbol{R}$ は働くため未知の力である。一般に k 個の束縛条件

$$f_i(x_1, x_2 \cdots, x_{3N}, t) = 0\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, k < 3N$$

が存在する場合を考える。束縛条件が等式で表されるものを**ホロノミック**な束縛という。なお, $k = 0$ とすれば束縛条件が存在しない場合である。独立な変数の数 (自由度) は

$$n = 3N - k$$

である。n 個の独立な変数を適当に選んで $q_1, q_2, \cdots, q_n$ とする。簡単のため $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とおく。$x_i = x_i(\boldsymbol{q}, t)$ である。束縛力を R_i とすると運動方程式は

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + R_i\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, 3N \tag{1.2}$$

になる。$3N$ 個の運動方程式だけでは, 独立な $n = 3N - k$ 個の q_α と $3N$ 個の R_i は決定できない。R_i に付加条件を加える。ある時刻 t において, 仮想的に x_i を $x_i + \delta x_i$ に変位させる。ここで 2 点ともに束縛条件を満たす。このとき束縛力がなす仕事 δW は

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} R_i\,\delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} R_i \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_\alpha \delta q_\alpha \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \tag{1.3}$$

である。以下では, 任意の微小変位 δq_α に対して $\delta W = 0$, つまり

$$\sum_{i=1}^{3N} R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = 0\,, \qquad \alpha = 1,\, 2, \cdots, n \tag{1.4}$$

とする。(1.2) と (1.4) の方程式の数は $3N + n$ であるから, q_α と R_i を完全に決定できる。

質点の場合, 質点の位置 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$ が時刻 t での束縛条件を満たすとき $\delta W = \boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$ である。$\delta\boldsymbol{r}$ は時刻 t での束縛条件を満たす曲線 (曲面) に接するから, $\boldsymbol{R}$ は曲線 (曲面) の法線方向にだけ作用する。このため, (1.4) を満たすとき, 束縛は**滑らか**であるという。

実際の運動では, 微小時間 dt の間に束縛力がなす仕事 dW は

$$dW = \sum_{i=1}^{3N} R_i\,dx_i = \sum_{i=1}^{3N} R_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) dt = dt \sum_{i=1}^{3N} R_i \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

である。束縛条件が時間に依存する場合 $dW = 0$ とは限らない。

1.2　ラグランジュの運動方程式

運動方程式 (1.2) を q_α の方程式に書き換える。$x_i = x_i(\boldsymbol{q}, t)$ より

$$\dot x_i = \sum_{\beta=1}^{n} \dot q_\beta \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

以下では, ある変数とその時間微分は独立な変数と見なす。つまり, $\dot x_i$ は $q_1, \cdots, q_n, \dot q_1, \cdots, \dot q_n, t$ の関数である。これを $\dot q_\alpha$ 以外を定数として微分すると, $\partial x_i/\partial q_\beta$, $\partial x_i/\partial t$ は $\dot q_\alpha$ を含まないから

$$\frac{\partial \dot x_i}{\partial \dot q_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \tag{1.5}$$

になる。また

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \sum_\beta \dot q_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_\beta \dot q_\beta \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot x_i}{\partial q_\alpha} \tag{1.6}$$

であるから

$$\sum_i m_i \ddot x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \dot x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} - \sum_i m_i \dot x_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \dot x_i \frac{\partial \dot x_i}{\partial \dot q_\alpha} - \sum_i m_i \dot x_i \frac{\partial \dot x_i}{\partial q_\alpha}$$

つまり

$$\sum_i m_i \ddot x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\,, \qquad T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot x_i^2$$

T は系の運動エネルギーである。一方, (1.2), (1.4) より

$$\sum_i m_i \ddot x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \big(F_i + R_i\big)\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}$$

であり束縛力 R_i は消える。したがって

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \mathcal{F}_\alpha\,, \qquad \mathcal{F}_\alpha = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \tag{1.7}$$

になる。これを**ラグランジュの運動方程式**という。

仮想的に x_i を $x_i + \delta x_i$ に変位させたとき, F_i がなす仕事は

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta q_\alpha \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathcal{F}_\alpha\, \delta q_\alpha$$

と表せる。$\mathcal{F}_\alpha$ は一般化座標 q_α に対する**一般化力**である。$\mathcal{F}_\alpha$ の次元 $[\,\mathcal{F}_\alpha\,]$ は $[\,$仕事$\,]/[\,q_\alpha\,]$ であるから, $[\,q_\alpha\,]$ が長さの次元なら $[\,\mathcal{F}_\alpha\,]$ は力の次元になるが, 一般には力の次元ではない。

質点に働く力 F_i が

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\,, \qquad V = V(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) \tag{1.8}$$

で与えられるとする。V が $\dot{\boldsymbol{x}}$ に依存しない場合 $F_i = -\,\partial V/\partial x_i$ である。

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$$

及び (1.6) より

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}$$

になる。x_i は $\dot{\boldsymbol{q}}$ に依存しないから

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\,, \qquad \therefore \qquad \mathcal{F}_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{1.9}$$

である。したがって

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathcal{F}_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

つまり, ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\,, \qquad L = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,, \qquad \alpha = 1,\, 2,\, \cdots,\, n \tag{1.10}$$

になる。L を**ラグランジアン**, $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ を**一般化運動量**あるいは**正準運動量**という。デカルト座標の場合

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \tag{1.11}$$

である。V が $\dot{\boldsymbol{x}}$ に依存する場合 p_i は力学的運動量 $m_i \dot{x}_i$ とは一致しない。

ラグランジュの運動方程式がニュートン方程式と比べて有利な点は

- スカラーの T と V が求まれば, 機械的に微分して運動方程式が決定する。これはベクトルである加速度と力の各成分を直接求めるのに比べて簡単である。
- ニュートン方程式 (1.2) と異なり, 滑らかな束縛力は現れない。ただし, 束縛条件を満たすように q_i をとる必要がある。多くの場合, 束縛条件を満たす q_i は簡単に設定できる。例えば, 半径 a の球面上の場合

  $$r - a = 0\,, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

  であるが, $q_1 = r = a$ とすれば, 束縛条件を満たす。r について (1.10) を扱う必要はない。

V が $\dot{\boldsymbol{x}}$ に依存する代表例は, 電磁場中の荷電粒子である。電荷 e の粒子の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}\,, \qquad \boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + e\,\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.12}$$

である。スカラーポテンシャル $A_0(\boldsymbol{r},t)$, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ で表すと

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}A_0 - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

である。$\dot{\boldsymbol{r}}\times\big(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\big) = \boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}$ より

$$F_i = e\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-A_0 + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}\Big) - e\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}A_i + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)$$

になる。

$$\frac{dA_i}{dt} = \sum_j \dot{x}_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}A_i + \frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{1.13}$$

であるから

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}\,, \qquad V(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = e\Big(A_0(\boldsymbol{r},t) - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\Big)$$

になり (1.8) を満たす。電磁場中の荷電粒子のラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - eA_0(\boldsymbol{r},t) + e\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.14}$$

になる。ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m\ddot{x}_i + e\frac{dA_i}{dt} + e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} - e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i} = 0 \tag{1.15}$$

である。これに (1.13) を代入すれば (1.12) が求まる。

1.3　保存則

循環座標

L に含まれない一般化座標を**循環座標**という。例えば, q_1 が循環座標ならば

$$L = L(q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)$$

であり

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0\,, \qquad \therefore \qquad p_1 = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1} = \text{定数} \tag{1.16}$$

になる。この式を $\dot{q}_1$ について解けば $\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_2,\cdots,q_n,p_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)$ になるから, $\alpha = 2,\cdots,n$ に対する (1.10) から $\dot{q}_1$ を消去できる。$n-1$ 個の $q_2,\cdots,q_n$ について考えればよい。できるだけ循環座標が多くなるように一般座標を選ぶ。

単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表される固定軸まわりに系全体を角度 q_1 回転させるように q_1 が取れるとする。質点 i の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ は

$$\boldsymbol{r}_i(q_1+dq_1) = \boldsymbol{r}_i(q_1) + dq_1\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_i\,, \qquad \therefore \qquad \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_i$$

であるから

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1} = \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_1} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_1} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}\,, \qquad \boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$$

になる。ここで $\boldsymbol{p}_i$ は (1.11) の正準運動量である。速さ $|\dot{\boldsymbol{r}}|$ は座標系の回転では不変であるから T は q_1 を含まない。したがって, V が q_1 に依存しない, つまり, $\boldsymbol{n}$ 軸まわりの回転に対して不変ならば, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L} =$ 定数 である。角運動量保存則を循環座標に伴う保存則から導いた。

エネルギー保存則

$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ を時間で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_\alpha \left(\frac{dq_\alpha}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{d\dot{q}_\alpha}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_\alpha \left(\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{d\dot{q}_\alpha}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\end{aligned}$$

であるから, (1.10) より

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,, \qquad \mathcal{E} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \tag{1.17}$$

になる。$\dot{q}_\alpha = 0$ ならば (1.17) は成り立つから (1.17) $\Longrightarrow$ (1.10) とは限らない。

$\partial x_i / \partial \dot{q}_\alpha = 0$ より

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\alpha,i} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i \left(\dot{x}_i - \frac{\partial x_i}{\partial t}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

である。また

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m_i \dot{x}_i^2 - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 2T - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}$$

であるから

$$\mathcal{E} = E - \mathcal{E}_R\,, \qquad E = T + V - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\,, \qquad \mathcal{E}_R = \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{1.18}$$

と表せる。$p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ は正準運動量 (1.11) である。

$L = L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ の場合を考える。

- 束縛条件が存在しない場合
  E は保存する。実際
  $$\frac{dE}{dt} = \sum_i m\dot{x}_i\ddot{x}_i + \frac{dV}{dt} - \sum_i \ddot{x}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \sum_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \left(m\ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$
  である。一方, $x_i = x_i(\boldsymbol{q}, t)$ の場合, L を $\boldsymbol{q}$ で表すと直接 t に依存するから $\mathcal{E}$ は一般には保存しない。(例えば, 回転座標系)
- 束縛条件が存在し $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ の場合
  $\partial L / \partial t = 0$ より $\mathcal{E}$ は保存する。更に $x_i = x_i(\boldsymbol{q})$ のとき $\partial x_i / \partial t = 0$ であるから $\mathcal{E} = E$ になる。
  $$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha}\,, \qquad \therefore \qquad E = T + V - \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{1.19}$$
  とも表せる。一方, $x_i = x_i(\boldsymbol{q}, t)$ の場合, $\mathcal{E}$ は保存するが E は保存するとは限らない。
  $$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} - \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t}\right) = 0\,, \qquad \therefore \qquad \sum_i p_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

であるから
$$\frac{d\mathcal{E}_R}{dt}=\sum_i \dot{p}_i\frac{\partial x_i}{\partial t}+\sum_i p_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t}=\sum_i\left(\dot{p}_i+\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial t}$$
である。
$$\dot{p}_i=m_i\ddot{x}_i-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}=F_i+R_i-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}+R_i\,,\qquad\therefore\qquad \frac{d\mathcal{E}_R}{dt}=\sum_i R_i\frac{\partial x_i}{\partial t}$$
(1.4) より
$$\sum_i \dot{x}_iR_i=\sum_i\left(\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)R_i=\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\sum_i R_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}+\sum_i\frac{\partial x_i}{\partial t}R_i=\sum_i\frac{\partial x_i}{\partial t}R_i$$
になるから $dE/dt=d\mathcal{E}_R/dt=\sum_i \dot{x}_iR_i$ である。E の時間変化は, 束縛力が単位時間になす仕事に等しい。

電磁場中の荷電粒子のラグランジアン (1.14) の場合
$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m\dot{x}_i+eA_i(\boldsymbol{r},t)\,,\qquad E=T+V-\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2+eA_0(\boldsymbol{r},t)$$
である。電磁場が時間に依存せず束縛条件がないとき E は保存する。磁場よる力は速度に直交し仕事をしないから, 保存量 E に $\boldsymbol{A}$ は現れない。

ネーターの定理

一般化座標 $\boldsymbol{q}$ を微小変化 $\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}$ させたとき, ラグランジアン L の変化は
$$\begin{aligned}\delta L=L(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}+d\delta\boldsymbol{q}/dt,t)-L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)&=\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\\&=\frac{d}{dt}\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\end{aligned}$$
であるから, q_α がラグランジュ方程式を満たすとき
$$\delta L=\frac{dC}{dt}\,,\qquad C=\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_\alpha p_\alpha\,\delta q_\alpha$$
になる。微小変化 $\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}$ に対して L が不変 $\delta L=0$ のとき, C は定数である。これを**ネーターの定理**という。

- q_1 が循環座標の場合, $\delta q_\alpha=\varepsilon\,\delta_{\alpha,1}$ に対して $\delta L=0$ になるから $C=\varepsilon p_1=$ 定数 である。これは (1.16) である。
- 束縛条件がない場合 $C=\sum_{i=1}^N\boldsymbol{p}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$ と表せる。ここで $\boldsymbol{p}_i$ は (1.11) の正準運動量である。単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。

$$\boldsymbol{n}\text{方向への系全体の微小並進}\ :\ \delta\boldsymbol{r}_i=\varepsilon\,\boldsymbol{n}\qquad\therefore\qquad C=\varepsilon\,\boldsymbol{n}\cdot\sum_i\boldsymbol{p}_i$$
$$\boldsymbol{n}\text{軸まわりの系全体の微小回転}\ :\ \delta\boldsymbol{r}_i=\varepsilon\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_i\qquad\therefore\qquad C=\varepsilon\,\boldsymbol{n}\cdot\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$$

L が不変ならば, $\boldsymbol{n}$ 方向の全運動量あるいは全角運動量は保存する。

1.4　ラグランジアンの不定性

ラグランジアン L と $\tilde{L}$ のラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha}\,, \qquad \alpha = 1,\, 2,\, \cdots,\, n \tag{1.20}$$

が全く同じになる場合を考える。$F(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - \tilde{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ とすると

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.21}$$

である。(1.20) から $\boldsymbol{q}(t)$ は決定する。一方, (1.21) は $\boldsymbol{q}(t)$ を決定する方程式ではない。任意の初期条件に依存する (1.20) の解 $\boldsymbol{q}(t)$ は (1.21) を自動的に満たすから, (1.21) は恒等式である。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = \left(\sum_{\beta=1}^{n} \dot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} \ddot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.22}$$

になるが, 2 階微分 $\ddot{q}_\beta$ は第 2 項だけに現れるから, 上式が恒等的に成り立つには $\partial^2 F/\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta = 0$ であり

$$F(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = A_0(\boldsymbol{q}, t) + \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_\alpha = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_\mu\,, \quad \text{ただし} \quad q_0 = t$$

とおける。これを (1.22) に代入すると

$$\sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial q_\alpha} = \sum_{\mu=0}^{n} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\mu = 0$$

これが恒等的に成り立つには

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial q_\nu} = 0\,, \qquad \mu,\, \nu = 0,\, 1,\, \cdots,\, n \tag{1.23}$$

である。3 次元の場合 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0$ と $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} F$ は同値である。これと同様に, $A_\mu = \partial W/\partial q_\mu$ を満たす $W(\boldsymbol{q}, t)$ が存在するから

$$F(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} W(\boldsymbol{q}, t)$$

であり

$$\tilde{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - \frac{d}{dt} W(\boldsymbol{q}, t) \tag{1.24}$$

になる。ラグランジアンには任意関数 $W(\boldsymbol{q}, t)$ の全微分 dW/dt だけの不定性が存在する。この不定性は, 正準変換 (39 ページ) において重要になる。

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\,, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\,, \qquad \therefore \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

確かに, L と $\tilde{L}$ のラグランジュ方程式は同じである。(1.17) の $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{E} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L\,, \qquad \tilde{\mathcal{E}} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \tilde{L} = \mathcal{E} - \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{dW}{dt} = \mathcal{E} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

である。$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, $\tilde{L} = \tilde{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ ならば $\mathcal{E}$ と $\tilde{\mathcal{E}}$ は保存するが, この場合 $W = W(\boldsymbol{q})$ であるから $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$ になる。

1.5　具体的適用例

極座標

中心力ポテンシャル $V(r)$ の場合を考える。3 次元極座標 (r,θ,ϕ) を使うと $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ の距離は

$$(d\boldsymbol{r})^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta\,d\phi)^2\,, \qquad \therefore \qquad \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

になるから

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\Big) - V(r)$$

である。ϕ は循環座標になり

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta \tag{1.25}$$

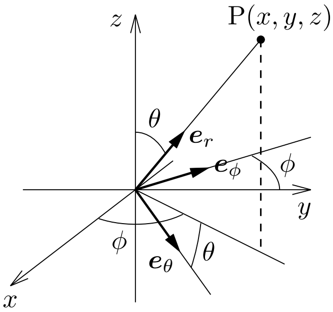
は保存する。r と θ のラグランジュ方程式より

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\big(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\big) + \frac{dV}{dr} = 0 \tag{1.26}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} - mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = m\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} - \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} = 0 \tag{1.27}$$

である。

ニュートンの運動方程式から以上の結果を導く。単位ベクトル



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\phi - \boldsymbol{e}_z\sin\theta \\
\boldsymbol{e}_\phi &= -\,\boldsymbol{e}_x\sin\phi + \boldsymbol{e}_y\cos\phi
\end{aligned} \tag{1.28}$$

を考える。

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\,, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\,\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi \\
&\dot{\boldsymbol{e}}_\phi = -\,\dot{\phi}\big(\boldsymbol{e}_r\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\big)
\end{aligned} \tag{1.29}$$

である。$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ より

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.30}$$

更に, 微分すると

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} = {} & \Big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\Big)\boldsymbol{e}_r + \Big(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\Big)\boldsymbol{e}_\theta \\
& + \Big(2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta\Big)\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned} \tag{1.31}$$

になる。上式よりニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\,\boldsymbol{e}_r\,dV/dr$ は

$$m\Big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\Big) = -\,\frac{dV}{dr}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} - r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = 0$$

$$2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}r^2\dot{\phi}\sin^2\theta = 0$$

になり, ラグランジュの運動方程式の結果と一致する。ニュートン方程式では, ベクトル $\boldsymbol{r}$ の 2 階微分 (1.31) を求める必要があり非常に煩雑である。これに比べて, スカラー量 L は容易に求まり, 後は極座標の変数で微分するだけである。

(1.25), (1.26), (1.27) から運動が決まる。

$$\lambda = m^2 r^4 \big(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta\big) = \big(mr^2\dot\theta\big)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \geq p_\phi^2 \tag{1.32}$$

とする。(1.27) より

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2mr^2\dot\theta\,\frac{d}{dt}mr^2\dot\theta - 2p_\phi^2\frac{\dot\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0$$

であり λ は定数になるから, (1.26) は r だけの方程式

$$m\ddot r = \frac{\lambda}{mr^3} - \frac{dV}{dr} = -\frac{dV_{\rm eff}(r)}{dr}\,, \qquad V_{\rm eff}(r) = V(r) + \frac{\lambda}{2mr^2} \tag{1.33}$$

になる。これから $r = r(t)$ が求まる。

(1.25), (1.32) より

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\dot\phi}{\dot\theta} = \pm\frac{p_\phi}{\sin^2\theta\sqrt{\lambda - p_\phi^2/\sin^2\theta}} \tag{1.34}$$

これは $V(r)$ の具体形に依存しない。$u = \cot\theta$ とすると

$$d\phi = \frac{\varepsilon\,du}{\sqrt{A^2-u^2}}\,, \qquad A = \sqrt{\lambda/p_\phi^2 - 1}\,, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

になるから $\phi = \varepsilon\sin^{-1}\big(u/A\big) + \phi_0$, つまり $A\sin\big(\phi-\phi_0\big) = \varepsilon u$ である。したがって

$$A\,r\sin\theta\sin\big(\phi_0 - \phi\big) + \varepsilon r\cos\theta = 0\,, \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r} = 0\,, \quad \boldsymbol{A} = \big(\,A\sin\phi_0,\, -A\cos\phi_0,\, \varepsilon\,\big)$$

質点は原点を通り $\boldsymbol{A}$ に直交する平面上で運動する。次に, (1.33) より $m\dot r^2/2 + V_{\rm eff}(r) = $ 定数 $= E$ であるから

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot r}{\dot\theta} = \pm\,r^2\sqrt{\frac{2m\big(E - V_{\rm eff}(r)\big)}{\lambda - p_\phi^2/\sin^2\theta}}\,, \qquad \therefore \qquad \frac{dr}{r^2\sqrt{2m\big(E-V_{\rm eff}(r)\big)}} = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{\lambda - p_\phi^2/\sin^2\theta}}$$

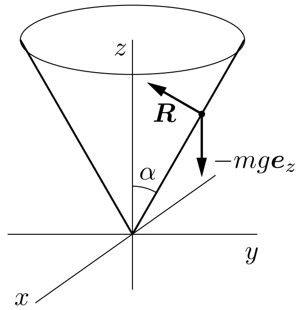
積分すると軌道 $r = r(\theta)$ が決まる。

なお, 角運動量は

$$\boldsymbol{\ell} = m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = mr^2\Big(\dot\theta\boldsymbol{e}_\phi - \dot\phi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\Big)\,, \qquad \ell_z = \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{e}_z = mr^2\dot\phi\sin^2\theta \tag{1.35}$$

になるから $\lambda = \boldsymbol{\ell}^2$, $p_\phi = \ell_z$ である。中心力では $\boldsymbol{\ell}$ は定ベクトルである。

円錐に束縛された運動



軸が鉛直で頂点が下に向いている滑らかな円錐面 (頂角 $= 2\alpha$) に沿って質点が運動する。頂点を原点とし鉛直上向きに z 軸をとる。$\theta(t) = \alpha$ は時間に依存しないから $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot r\boldsymbol{e}_r + r\dot\phi\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_\phi$ になり

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - mgr\cos\alpha = \frac{m}{2}\Big(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2\sin^2\alpha\Big) - mgr\cos\alpha$$

である。これから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\Big(\ddot r - r\dot\phi^2\sin^2\alpha + g\cos\alpha\Big) = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = m\sin^2\alpha\,\frac{d}{dt}r^2\dot\phi = 0$$

になる。$r^2\dot\phi = $ 定数 は $\ell_z = $ 定数 を表す。

ニュートンの運動方程式からこの結果を導く。(1.31) で $\theta=$ 定数 $=\alpha$ とすると

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\Big(\ddot r - r\dot\phi^2\sin^2\alpha\Big)\boldsymbol{e}_r - r\dot\phi^2\sin\alpha\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\sin\alpha}{r}\frac{d(r^2\dot\phi)}{dt}\,\boldsymbol{e}_\phi$$

円錐は滑らかであるから, 円錐から受ける束縛力 $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向に作用する。(1.4) の条件は

$$\sum_i R_i\frac{\partial x_i}{\partial r}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_r=0\,,\qquad \sum_i R_i\frac{\partial x_i}{\partial\phi}=r\sin\alpha\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_\phi=0$$

である。$\boldsymbol{R}=R\boldsymbol{e}_\theta$ とすると質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}=R\boldsymbol{e}_\theta-mg\boldsymbol{e}_z=-\,mg\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_r+\Big(mg\sin\alpha+R\Big)\boldsymbol{e}_\theta$$

であるから, 運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$ より

$$\ddot r=r\dot\phi^2\sin^2\alpha-g\cos\alpha\,,\qquad r^2\dot\phi=\text{定数}\,,\qquad R=-\,m\Big(g+r\dot\phi^2\cos\alpha\Big)\sin\alpha$$

になる。

$r=r_0$ のところから水平方向に初速 v_0 で運動させたとき, 質点が水平な円周上を運動する条件を求める。$t=0$ で $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot r\boldsymbol{e}_r+r\dot\phi\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_\phi=v_0\boldsymbol{e}_\phi$ より $\dot r=0$, $r_0\dot\phi(0)\sin\alpha=v_0$ である。

$$r^2\dot\phi=\text{定数}=r_0^2\dot\phi(0)=\frac{r_0v_0}{\sin\alpha}$$

になる。水平な円周上を運動するとき $r=$ 定数 $=r_0$ であるから $\ddot r=0$ より

$$r_0\dot\phi^2\sin^2\alpha-g\cos\alpha=\frac{v_0^2}{r_0}-g\cos\alpha=0$$

したがって $v_0^2=gr_0\cos\alpha$ が水平な円周上を運動する条件である。このとき

$$R=-\,m\left(g+\frac{v_0^2\cos\alpha}{r_0\sin^2\alpha}\right)\sin\alpha=-\frac{mg}{\sin\alpha}\,,\qquad\therefore\qquad R_z=-\,R\sin\alpha=mg$$

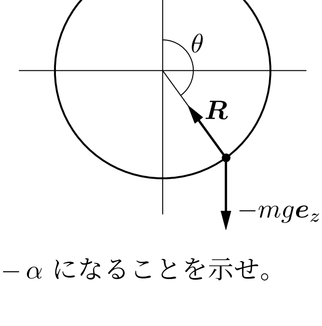
である。鉛直方向の合力は $R_z-mg=0$ になり釣り合う。

問題 1.1　$E=T+V$ が保存することから, 運動可能な $z=r\cos\alpha$ の範囲は

$$\begin{array}{ll} v_0^2\ge gz_0 \ \ \text{のとき}\ \ z_0\le z\le z_+ \\ v_0^2\le gz_0 \ \ \text{のとき}\ \ z_+\le z\le z_0\end{array},\qquad z_+=\frac{1}{4g}\left(v_0^2+v_0\sqrt{v_0^2+8gz_0}\right)$$

になることを示せ。質点が水平な円周上を運動するには $z_+=z_0$, つまり $v_0^2=gz_0$ である。

問題 1.2　一定の角速度 ω で鉛直の直径まわりに回転する滑らかな半径 a のリングに束縛された質点を考える。回転軸を通り鉛直上向きに z 軸をとる。



1. $L(\theta,\dot\theta)$ を求め, ラグランジュの運動方程式より

$$\ddot\theta=\omega^2\Big(\cos\theta+\alpha\Big)\sin\theta\,,\qquad \alpha=\frac{g}{a\omega^2}$$

を示せ。

2. θ が一定で安定な点は, $\alpha>1$ のとき $\theta=\pi$, $\alpha<1$ のとき $\cos\theta=-\,\alpha$ になることを示せ。

3. ニュートンの運動方程式から束縛力 $\boldsymbol{R}$ を求めよ。$\boldsymbol{R}$ は紙面に垂直な成分も持つ。
4. 力学的エネルギー E の時間変化は, $\boldsymbol{R}$ が単位時間になす仕事に等しことを示せ。

回転座標系

慣性系に対して角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で回転する座標系を考える。両座標系の原点は一致している。質点の座標を慣性系, 回転系でそれぞれ $(x_1,\, x_2,\, x_3)$, $(q_1,\, q_2,\, q_3)$ で表す。束縛条件はないとする。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}\,,\quad \text{つまり}\qquad \dot p_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\,,\qquad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = m\dot x_i - \frac{\partial V}{\partial \dot x_i}$$

である。これを q_α で表す。x_i 方向に単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$, q_α 方向に単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\alpha$ とすると

$$\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\boldsymbol{e}_i = \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha(t)\boldsymbol{e}_\alpha(t)\,,\qquad \frac{d\boldsymbol{e}_\alpha}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_\alpha$$

あるいは

$$x_i = \sum_\alpha a_{i\alpha}(t)\, q_\alpha\,,\qquad a_{i\alpha}(t) = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_\alpha(t)$$

である。$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3$ のとき (1.1) になる。

$$\sum_\alpha a_{i\alpha}a_{j\alpha} = \sum_\alpha \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\,,\qquad \sum_i a_{i\alpha}a_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{1.36}$$

を満たす。

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\,,\qquad \boldsymbol{q}' = \sum_\alpha \dot q_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$$

であるから

$$L = T - V(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) = \frac{m}{2}\Big(\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\Big)^2 - V(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.37}$$

になり, (1.14) と同様に時間の 1 階微分の 1 次を含む。

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} = m\dot q_\alpha + m\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\big)_\alpha - \frac{\partial V}{\partial \dot q_\alpha} \\ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= m\big(\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\big)\cdot\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_\alpha\big) - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = -\,m\Big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{\omega}\times\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\big)\Big)_\alpha - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

である。

$$\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\big)_\alpha = \sum_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}\frac{d}{dt}\big(\omega_\mu q_\nu\big) = \big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}\big)_\alpha \neq \big(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}\big)_\alpha \tag{1.38}$$

に注意すると, ラグランジュの運動方程式は, 回転座標系での運動方程式

$$m\ddot q_\alpha = -\,m\Big(2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{\omega}\times\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\big) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}\Big)_\alpha - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_\alpha} \tag{1.39}$$

を再現する。右辺第 1 項はコリオリ力, 第 2 項は遠心力である。

　V が直接 t に依存しない $V = V(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$ の場合 (1.18) の E は保存する。x_i を q_i で表せば V は直接 t に依存するから, (1.17) の $\mathcal{E}$ は一般には保存しない。q_α に対する正準運動量 p_α で表せば

$$\mathcal{E} = \sum_\alpha \dot q_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - L = E - \boldsymbol{\omega}\cdot\big(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\big)\,,\qquad E = \frac{1}{2m}\sum_\alpha p_\alpha^2 + V - \frac{1}{2m}\sum_\alpha\left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_\alpha}\right)^2 \tag{1.40}$$

になる。E が (1.18) に一致することを示す。$\partial x_i/\partial q_\alpha = a_{i\alpha}$ であるから (1.9) より

$$\frac{\partial V}{\partial \dot q_\alpha} = \sum_i a_{i\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot x_i}\,,\qquad p_\alpha = m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha - \sum_i a_{i\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot x_i} = \sum_i a_{i\alpha}p_i$$

$p_i = m\dot{x}_i - \partial V/\partial\dot{x}_i$ は x_i に対する正準運動量である。(1.36) より

$$E = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + V - \frac{1}{2m}\sum_i\left(\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}\right)^2 = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V - \sum_i \dot{x}_i\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}$$

になる。なお

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_\alpha \frac{da_{i\alpha}}{dt}q_\alpha = \boldsymbol{\omega}\cdot\big(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}_i\big)\,, \qquad \therefore \qquad \varepsilon_R = \sum_i p_i\frac{\partial x_i}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}\cdot\big(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\big)$$

である。$\boldsymbol{\omega}\cdot\big(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\big)$ は一般に時間に依存する。

1.6　剛体の運動

剛体に固定した点を $\boldsymbol{r}_0$ とし, $\boldsymbol{r}_0$ を原点とした剛体に固定した直交座標軸の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ とする。ここでは x, y, z の代わりに $1,2,3$ を用いる。$\boldsymbol{e}'_3$ を極座標で表して

$$\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_2\sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_3\cos\theta$$

とする。$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は空間に固定した座標軸の単位ベクトルである。$\boldsymbol{e}'_3$ を指定しても, 剛体はこの軸まわりに回転できるから, 剛体に固定した $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ としては (1.28) の $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\phi$ を $\boldsymbol{e}'_3$ を軸として角 ψ 回転したもの

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_\theta\cos\psi + \boldsymbol{e}_\phi\sin\psi \\
&= \Big(\cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(\cos\theta\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi\Big)\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{e}'_2 &= \boldsymbol{e}_\phi\cos\psi - \boldsymbol{e}_\theta\sin\psi \\
&= -\Big(\cos\theta\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\Big)\boldsymbol{e}_1 + \Big(-\cos\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\Big)\boldsymbol{e}_2 + \sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

を採用する。$\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ は右手系の直交する単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}'_\mu\cdot\boldsymbol{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu}\,, \qquad \boldsymbol{e}'_\mu\times\boldsymbol{e}'_\nu = \sum_\kappa \varepsilon_{\mu\nu\kappa}\boldsymbol{e}'_\kappa$$

である。$(\theta,\,\phi,\,\psi)$ を**オイラー角**という。$\boldsymbol{r}_0$ とオイラー角を指定すると, 剛体の位置は完全に決まる。剛体の自由度は 6 である。$\boldsymbol{e}'_\mu$ は 3×3 行列

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & \cos\theta\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ -\cos\theta\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & -\cos\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \sum_{\nu=1}^3 R_{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^3 \tilde{R}_{\nu\mu}\boldsymbol{e}_\nu\,, \qquad \tilde{R} = \text{転置行列}$$

と表せる。

$$\dot{\boldsymbol{e}}'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu}\boldsymbol{e}'_\nu\,, \qquad a_{\mu\nu} = \dot{\boldsymbol{e}}'_\mu\cdot\boldsymbol{e}'_\nu = \big(\dot{R}\tilde{R}\big)_{\mu\nu}$$

とおける。$\boldsymbol{e}'_\mu\cdot\boldsymbol{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu}$ を時間で微分すると $a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu} = 0$ になるから $a_{\mu\mu} = 0$ 及び

$$a_{12} = -\,a_{21} = \omega_3\,, \quad a_{23} = -\,a_{32} = \omega_1\,, \quad a_{31} = -\,a_{13} = \omega_2\,, \quad \text{つまり} \quad a_{\mu\nu} = \sum_\kappa \varepsilon_{\mu\nu\kappa}\,\omega_\kappa$$

とおける。これから

$$\dot{\boldsymbol{e}}'_\mu = \sum_{\nu\kappa} \varepsilon_{\mu\nu\kappa}\,\omega_\kappa \boldsymbol{e}'_\nu = \sum_\kappa \omega_\kappa \boldsymbol{e}'_\kappa \times \boldsymbol{e}'_\mu = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_\mu\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \sum_\mu \omega_\mu \boldsymbol{e}'_\mu$$

になる。$\boldsymbol{\omega}$ は剛体の角速度である。$\boldsymbol{\omega}$ をオイラー角で表しておく。$S_\mu = R_{\mu 1} + iR_{\mu 2}$ とすると

$$S_1 = \big(\cos\theta\cos\psi + i\sin\psi\big)e^{i\phi}\,, \qquad S_2 = \big(-\cos\theta\sin\psi + i\cos\psi\big)e^{i\phi}\,, \qquad S_3 = \sin\theta\, e^{i\phi}$$

である。$\big(\dot{R}\tilde{R}\big)_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\big(\dot{S}_\mu S^*_\nu\big) + \dot{R}_{\mu 3}R_{\nu 3}$ より

$$\omega_1 = \big(\dot{R}\tilde{R}\big)_{23} = \dot\theta\sin\psi - \dot\phi\sin\theta\cos\psi\,, \qquad \omega_2 = \big(\dot{R}\tilde{R}\big)_{31} = \dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_3 = \big(\dot{R}\tilde{R}\big)_{12} = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$$

になる。

剛体を微小部分に分割し, 各部分を質点と見なす。質点 i の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ は

$$\boldsymbol{r}_i(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + \boldsymbol{r}'_i(t)\,, \qquad \boldsymbol{r}'_i(t) = \sum_\mu x'_{i,\mu}\boldsymbol{e}'_\mu(t)$$

と表せる。剛体固定座標軸の成分 $x'_{i,\mu}$ は時間に依存しない。$\boldsymbol{r}_0$ を剛体の重心

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\,, \qquad M = \sum_i m_i$$

とすると, 剛体の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_c^2 + T_{\rm rot}\,, \qquad T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'^{\,2}$$

になり, 重心の運動エネルギーと重心まわりの運動エネルギー $T_{\rm rot}$ に分離する。

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_i = \sum_\mu x'_{i,\mu}\dot{\boldsymbol{e}}'_\mu = \sum_\mu x'_{i,\mu}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_\mu = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i$$

より

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i\big)\cdot\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_i\big) = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} I_{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu$$

ただし

$$I_{\mu\nu} = \sum_i m_i\Big(\boldsymbol{r}_i'^{\,2}\delta_{\mu\nu} - x'_{i,\mu}x'_{i,\nu}\Big) = \int d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\Big(\boldsymbol{r}'^{\,2}\delta_{\mu\nu} - x'_\mu x'_\nu\Big)$$

になる。$\rho(\boldsymbol{r}')$ は剛体の密度である。$I_{\mu\nu}$ は剛体に固定した座標軸に関する量であり, 剛体の運動とは無関係に定まる。これを**慣性テンソル**という。

$$I_{\mu\nu} = I_\mu\delta_{\mu\nu}\,, \qquad I_\mu = \int d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\Big(\boldsymbol{r}'^{\,2} - x_\mu'^{\,2}\Big)$$

を満たす座標軸 (**慣性主軸**) が存在する。I_μ を**主慣性モーメント**という。剛体に固定した座標軸として慣性主軸を採用すると, 剛体の運動エネルギーは

$$T = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_c^2 + T_{\rm rot}\,, \qquad T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\sum_\mu I_\mu\omega_\mu^2$$

になる。

対称こま

重力が作用する対称こまの運動を考える。こまの先端は固定されているとする。固定点を空間固定座標系の原点 O とし, 鉛直上向きに z 軸 ($\boldsymbol{e}_3$) をとる。また, 対称軸をこまに固定の z' 軸 ($\boldsymbol{e}'_3$) とする。$I_1 = I_2$ である。重心は z' 軸上にあるから, O と重心の距離を ℓ とすると

$$\frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_c^2 = \frac{M\ell^2}{2}\Big(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\Big)$$

$$T_{\rm rot} = \frac{I_1}{2}\Big(\omega_1^2+\omega_2^2\Big) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 = \frac{I_0}{2}\Big(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\Big) + \frac{I_3}{2}\Big(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\Big)^2$$

になる。したがって, ラグランジアン L は

$$L = T - Mg\ell\cos\theta = \frac{I_0}{2}\Big(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\Big) + \frac{I_3}{2}\Big(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\Big)^2 - Mg\ell\cos\theta\,, \qquad I_0 = M\ell^2 + I_1$$

で与えられる。ϕ, ψ は循環座標である。ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = I_0\ddot\theta - I_0\dot\phi^2\cos\theta\sin\theta + I_3\big(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\big)\dot\phi\sin\theta - Mg\ell\sin\theta = 0 \tag{1.41}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\Big(I_0\dot\phi\sin^2\theta + I_3\big(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\big)\cos\theta\Big) = 0 \tag{1.42}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = I_3\frac{d}{dt}\big(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\big) = 0 \tag{1.43}$$

第 2, 第 3 式より

$$L_3 = I_3\big(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\big) = \text{定数}\,, \qquad L_z = I_0\dot\phi\sin^2\theta + L_3\cos\theta = \text{定数} \tag{1.44}$$

L_3 は角運動量の対称軸成分 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}'_3$, L_z は空間固定系の z 成分 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_3$ である。$\dot\phi$, $\dot\psi$ は θ の関数として表せる。(1.41) は

$$I_0\ddot\theta = \Big(I_0\dot\phi^2\cos\theta - L_3\dot\phi + Mg\ell\Big)\sin\theta \tag{1.45}$$

になる。

$$V = \frac{I_0}{2}\dot\phi^2\sin^2\theta + Mg\ell\cos\theta$$

とおく。(1.44) の第 2 式を θ で微分すると

$$I_0\frac{d\dot\phi}{d\theta}\sin^2\theta = L_3\sin\theta - 2I_0\dot\phi\sin\theta\cos\theta \tag{1.46}$$

であるから

$$V'(\theta) = \frac{dV}{d\theta} = -\Big(I_0\dot\phi^2\cos\theta - L_3\dot\phi + Mg\ell\Big)\sin\theta \tag{1.47}$$

(1.45) は $I_0\ddot\theta = -V'(\theta)$ になるから $\dot\theta$ をかけると

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0\,, \qquad \mathcal{E} = \frac{I_0}{2}\dot\theta^2 + V = \frac{I_0}{2}\Big(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\Big) + Mg\ell\cos\theta$$

である。力学的エネルギー $E = \mathcal{E} + L_3^2/2I_3$ が保存することを表す。(1.44) より

$$\dot\phi = \frac{L_z - L_3\cos\theta}{I_0\sin^2\theta}\,, \qquad \therefore \qquad V = \frac{\big(L_z - L_3u\big)^2}{2I_0(1-u^2)} + Mg\ell u\,, \quad u = \cos\theta$$

になる。$I_0\dot\theta^2/2 = \mathcal{E} - V$ より

$$dt = \pm\sqrt{\frac{I_0}{2}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\mathcal{E} - V(\theta)}} = \pm\frac{I_0\,du}{\sqrt{f(u)}}\,, \qquad f(u) = 2I_0\big(\mathcal{E} - Mg\ell u\big)\big(1-u^2\big) - \big(L_z - L_3u\big)^2$$

これを積分すれば $\theta = \theta(t)$ が求まる。$|u| \le 1\,,\ f(u) \ge 0$ の範囲で運動する。

$$f(\pm 1) = -\big(L_z \mp L_3\big)^2 \le 0\,, \qquad f(\pm\infty) = \pm\infty$$

であるから, u の 3 次式 $f(u) \ge 0$ かつ $|u| \le 1$ の範囲は, 存在するとすれば, $-1 \le u_1 \le u \le u_2 \le 1$ になる。

$u_1 = u_2$ の場合 $\theta(t)$ は一定値 θ_0 になり, 対称軸は鉛直上向きの z 軸を中心に歳差運動をする。

$$I_0\ddot\theta_0 = -V'(\theta_0) = \sin\theta_0\Big(I_0\Omega^2\cos\theta_0 - L_3\Omega + Mg\ell\Big) = 0\,, \qquad \Omega = \dot\phi(\theta = \theta_0)$$

でなければならない。これと (1.44) から θ_0, Ω, $\dot\psi$ が決まる。

$\theta_0 = 0$ の場合 (1.44) より $L_3 = L_z = I_3\big(\dot\phi + \dot\psi\big)$ である。$\mathcal{E}$ を少し変えて $\theta = 0$ 近傍の運動を考える。$L_3 = L_z$ の場合

$$V(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_0}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} + Mg\ell\cos\theta = Mg\ell + \frac{L_3^2 - 4I_0Mg\ell}{8I_0}\theta^2 + \frac{L_3^2 + 2I_0Mg\ell}{48I_0}\theta^4 + \cdots$$

になるから, $L_3^2 - 4I_0Mg\ell \ge 0$ のとき $\theta = 0$ まわりのこまの回転は安定である。$\theta_0 = \pi$ の場合, $L_3 = -L_z$ であり

$$V(\theta) = \frac{L_3^2}{2I_0}\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + Mg\ell\cos\theta = -Mg\ell + \frac{L_3^2 + 4I_0Mg\ell}{8I_0}\big(\theta - \pi\big)^2 + \cdots$$

になる。

$\sin\theta_0 \ne 0$ のとき, (1.44) より $\dot\phi$ と $\dot\psi$ も一定になる。

$$I_0\Omega^2\cos\theta_0 - L_3\Omega + Mg\ell = 0$$

より Ω は実数であるから $L_3^2 - 4I_0Mg\ell\cos\theta_0 \ge 0$ を満たす必要がある。$V(\theta)$ を $\theta = \theta_0$ のまわりでテイラー展開する。(1.46), (1.47) より

$$\begin{aligned} V''(\theta) &= \big(-2I_0\dot\phi\cos\theta + L_3\big)\frac{d\dot\phi}{d\theta}\sin\theta + I_0\dot\phi^2\sin^2\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V'(\theta) \\ &= I_0\left(2\dot\phi\cos\theta - \frac{L_3}{I_0}\right)^2 + I_0\dot\phi^2\sin^2\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V'(\theta) \end{aligned}$$

である。

$$V'(\theta_0) = 0\,, \qquad V''(\theta_0) = I_0\omega_n^2 > 0\,, \qquad \omega_n^2 = \left(2\Omega\cos\theta_0 - \frac{L_3}{I_0}\right)^2 + \Omega^2\sin^2\theta_0$$

より, $\delta = \theta - \theta_0$ が微小な場合 $I_0\ddot\theta = -V'(\theta)$ は $\ddot\delta = -V''(\theta_0)\,\delta/I_0 = -\omega_n^2\,\delta$ になる。θ は θ_0 まわりに周期 $2\pi/\omega_n$ で振動する。この振動を章動という。

1.7　パラメータ共鳴

1 次元調和振動子で ω を時間の周期関数 $\omega(t+T) = \omega(t)$ とする。運動方程式は, ω が定数の場合と同様に

$$\ddot x + \omega^2 x = 0 \tag{1.48}$$

である。2 つ存在する独立な解を $x_1(t)$, $x_2(t)$ とする。$s = t + T$ のとき $\omega(s) = \omega(t)$ であるから

$$\frac{d^2}{dt^2}x_k(s) = \frac{d^2}{ds^2}x_k(s) = -\omega^2(s)x_k(s) = -\omega^2(t)x_k(s)$$

になり $x_k(s)=x_k(t+T)$ も (1.48) の解である。したがって c_{ij} を定数として

$$x_1(t+T)=c_{11}x_1(t)+c_{12}x_2(t)\,,\qquad x_2(t+T)=c_{21}x_1(t)+c_{22}x_2(t) \tag{1.49}$$

とおける。行列で表せば

$$\boldsymbol{x}(t+T)=C\boldsymbol{x}(t)\,,\qquad \boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} \tag{1.50}$$

である。C の固有値を $\lambda_1,\,\lambda_2$ とする。これらは

$$\det\bigl(C-\lambda\bigr)=\lambda^2-\bigl(c_{11}+c_{22}\bigr)\lambda+c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=0$$

の解であり実数とは限らない。(1.48) より $R(t)=x_2(t)\dot{x}_1(t)-x_1(t)\dot{x}_2(t)$ は $\dot{R}=0$ になる。x_1 と x_2 は独立であるから $R(t)$ は 0 でない定数である。(1.49) より

$$R(t+T)=\bigl(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\bigr)R(t)\,,\qquad \therefore\qquad c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=\lambda_1\lambda_2=1$$

である。

$$UC=\varLambda U\,,\qquad \varLambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \tag{1.51}$$

を満たす 2×2 行列 $U\neq 0$ が存在する。$\boldsymbol{q}(t)=U\boldsymbol{x}(t)$ は (1.50) より

$$\boldsymbol{q}(t+T)=UC\boldsymbol{x}(t)=\varLambda\boldsymbol{q}(t)\,,\qquad \therefore\qquad q_k(t+T)=\lambda_k q_k(t)$$

を満たす。

$$q_k(t)=\lambda_k^{t/T}Q_k(t) \tag{1.52}$$

とすると

$$\lambda_k^{(t+T)/T}Q_k(t+T)=\lambda_k\lambda_k^{t/T}Q_k(t)\,,\qquad \therefore\qquad Q_k(t+T)=Q_k(t)$$

$\omega(t)=\omega(t+T)$ の場合, (1.48) の解として $\lambda_k^{t/T}$ と周期 T の周期関数 $Q_k(t)$ の積で表せる解 $q_k(t)$ が存在し $\lambda_1\lambda_2=1$ である。

(1.48) の一般解は $C_1,\,C_2$ を任意定数として $x(t)=C_1q_1(t)+C_2q_2(t)$ であり

$$x(t+nT)=\lambda_1^n\,C_1\lambda_1^{t/T}Q_1(t)+\lambda_1^{-n}\,C_2\lambda_1^{-t/T}Q_2(t)\,,\qquad n=0,\,\pm 1,\,\pm 2,\,\cdots$$

を満たす。λ_k が実数ならば $\lambda_1\lambda_2=1$ より $|\lambda_1|\geq 1$ にとれる。$|\lambda_1|>1$ のとき, $x(t+nT)$ で Q_1 の部分は, 周期 T で振動しながら振幅は $|\lambda_1|^n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ になるから, 共鳴が起こる。$\omega(t)$ の周期的変化による共鳴を**パラメータ共鳴**という。λ_k が実数でない場合 $\lambda_2=\lambda_1^*$ である。$\lambda_1\lambda_2=|\lambda_1|^2=1$ になるから, パラメータ共鳴は起こらない。

$x(t)=0$ は (1.48) の自明な解であり, 原点に静止したままの静止状態が存在する。任意の微小な $C_1,\,C_2$ に対して $x(t)=C_1q_1(t)+C_2q_2(t)$ が $x(t)=0$ のまわりで微小振動するならば, 静止状態は安定である。ω が定数の場合 $q_1=\cos\omega t,\,q_2=\sin\omega t$ であるから, 静止状態は安定である。一方, パラメータ共鳴する場合, $C_1\neq 0$ ならば C_1 が微小でも $x(t)$ の振幅は時間とともに非常に大きくなる。パラメータ共鳴する系では, 静止状態は存在するが安定ではない。強制振動 $\ddot{x}+\omega^2x=f(t)$ での共鳴の場合, ある時刻で静止していても $x(t)=$ 一定 は運動方程式の解ではないから静止状態は存在しない。

問題 1.3　(1.51) が成り立つことを示せ。また, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき $\det U \neq 0$ を示せ。この場合, (1.51) は $UCU^{-1} = \Lambda$ と表せる。

具体例として

$$\omega^2 = \omega_0^2\big(1+\varepsilon\cos\alpha t\big)\,, \qquad 0<\varepsilon\ll 1\,, \qquad \alpha>0$$

の場合, パラメータ共鳴の条件を求める。運動方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \omega_0^2\varepsilon x\cos\alpha t = 0 \tag{1.53}$$

はマチウ方程式になる。x を ε で展開して $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$ とする。ε の各ベキで (1.53) が成り立つことを要請すると

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0\,, \qquad \ddot{x}_n + \omega_0^2 x_n + \omega_0^2 x_{n-1}\cos\alpha t = 0\,, \quad n=1,\,2,\,\cdots$$

である。0 次から A を複素定数として $x_0 = \mathrm{Re}\big(Ae^{i\omega_0 t}\big)$, 1 次は

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\,\omega_0^2 x_0\cos\alpha t = -\,\frac{\omega_0^2}{2}\mathrm{Re}\Big(Ae^{i(\omega_0-\alpha)t} + Ae^{i(\omega_0+\alpha)t}\Big)$$

になる。この方程式の特解は

$$x_1 = -\,\frac{\omega_0^2}{2}\mathrm{Re}\Big(A_- e^{i(\omega_0-\alpha)t} + A_+ e^{i(\omega_0+\alpha)t}\Big)\,, \qquad A_\pm = \frac{A}{\omega_0^2 - (\omega_0\pm\alpha)^2}$$

であるから, A_- が非常に大きくなる $\alpha-\omega_0 \approx \omega_0$ のとき共鳴が起こる。$\alpha\approx 0$ では $A_\pm$ の両方が非常に大きくなるが, x_1 は $\omega = \omega_0\sqrt{1+\varepsilon}$ での $x(t)$ を ε で展開した 1 次になり共鳴ではない。2 次の方程式は

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\,\omega_0^2 x_1\cos\alpha t = -\,\frac{\omega_0^2}{4}\mathrm{Re}\Big(A_- e^{i(\omega_0-2\alpha)t} + A_+ e^{i(\omega_0+2\alpha)t} + (A_- + A_+)e^{i\omega_0 t}\Big)$$

になるから $2\alpha-\omega_0\approx\omega_0$ のとき共鳴が起こる。一般に $n\alpha-\omega_0\approx\omega_0$, つまり $\alpha\approx 2\omega_0/n$ であれば共鳴する。

最も強く共鳴する $n=1$ の場合を考える。共鳴状態では 角振動数 $\approx\omega_0$ で振動しながら, 振幅は振動に比べて時間的にゆっくり増加する。そこで, ε のベキ展開はせずに, $z_0(t)$ をゆっくり変化する関数として (1.53) の近似解を

$$x(t) = \mathrm{Re}\Big(z_0(t)e^{i\alpha t/2}\Big)\,, \qquad \alpha = 2\omega_0\big(1+\phi\big)\,, \qquad \phi = O(\varepsilon)$$

とする。これを (1.53) に代入すると, $2e^{i\alpha t/2}\cos\alpha t = e^{i3\alpha t/2} + e^{-i\alpha t/2}$ より $e^{i3\alpha t/2}$ の成分が $O(\varepsilon)$ 程度混ざるから

$$x(t) = \mathrm{Re}\Big(z_0(t)e^{i\alpha t/2} + z_1(t)e^{i3\alpha t/2}\Big)$$

とした方がよい近似になる。$z_1/z_0 = O(\varepsilon)$ であり, $z_k(t)$ はゆっくり変化するから $\dot{z}_k/\omega_0 z_k = O(\varepsilon)$, $\ddot{z}_k/\omega_0^2 z_k = O(\varepsilon^2)$ と仮定する。(1.53) は $e^{i5\alpha t/2}$ の項を無視すると

$$\mathrm{Re}\,\Big(F_0 e^{i\alpha t/2} + F_1 e^{3i\alpha t/2}\Big) = 0 \tag{1.54}$$

ただし

$$F_0 = \ddot{z}_0 + i\alpha\dot{z}_0 + \left(\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)z_0 + \frac{\omega_0^2\varepsilon}{2}\big(z_0^* + z_1\big) \tag{1.55}$$

$$F_1 = \ddot{z}_1 + 3i\alpha\dot{z}_1 + \left(\omega_0^2 - \frac{9\alpha^2}{4}\right)z_1 + \frac{\omega_0^2\varepsilon}{2}z_0 \tag{1.56}$$

になる。z_0 に比べて $O(\varepsilon^2)$ 以上の項を無視すると

$$F_0 = 2i\omega_0 \dot{z}_0 + \frac{\omega_0^2}{2}\Big(-4\phi z_0 + \varepsilon z_0^*\Big)\,, \qquad F_1 = -8\omega_0^2 z_1 + \frac{\omega_0^2 \varepsilon}{2} z_0$$

である。F_k はゆっくり変化するから, (1.54) が成り立つには $F_0 = F_1 = 0$ である。$F_1 = 0$ より $z_1 = \varepsilon z_0/16$ になる。$A(t)$, $B(t)$ を実数として $z_0 = A + iB$ とする。$F_0 = 0$ より

$$\omega_0\big(\varepsilon/4 - \phi\big)A - \dot{B} = 0\,, \qquad \dot{A} - \omega_0\big(\varepsilon/4 + \phi\big)B = 0 \tag{1.57}$$

である。$\ddot{A} = \gamma^2 A$, $\gamma = \sqrt{(\varepsilon/4)^2 - \phi^2}\,\omega_0$ になるから, $\gamma \neq 0$ のとき a_1, a_2 を定数として

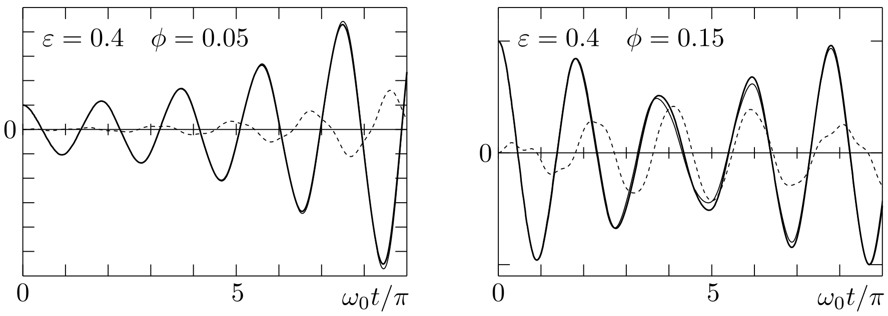
$$A = a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t}\,, \qquad B = b\Big(a_1 e^{\gamma t} - a_2 e^{-\gamma t}\Big)\,, \qquad b = \frac{\gamma}{\omega_0\big(\varepsilon/4 + \phi\big)}$$

とおける。これから

$$z_0 = a_1(1+ib)e^{\gamma t} + a_2(1-ib)e^{-\gamma t}\,, \qquad x(t) = \mathrm{Re}\Big[z_0 e^{i\alpha t/2}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{16}e^{i\alpha t}\Big)\Big] \tag{1.58}$$

である。$|\phi| < \varepsilon/4$ のとき γ は正の実数であるから $e^{\gamma t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ になり共鳴する。$O(\varepsilon^2)$ を無視すると, パラメータ共鳴が起こる条件は $|\phi| < \varepsilon/4$ であり $\gamma \le \omega_0\varepsilon/4$ になる。

下図に $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) = 0$ のとき (1.53) の数値解 $X(t)$ を太い実線で, (1.58) の $x(t)$ を細い実線で示す。破線は $\big(X - x\big)/\varepsilon^2$ である。$\phi = 0.05 < \varepsilon/4$ の場合, 周期的振動をしながら振幅は増加し共鳴する。$\phi = 0.15 > \varepsilon/4$ では共鳴は起こらない。



(1.58) は

$$x(t) = \mathrm{Re}\Big(a_1(1+ib)q_1(t) + a_2(1-ib)q_2(t)\Big)$$

ただし

$$q_1(t) = e^{(\gamma + i\alpha/2)t}Q(t)\,, \qquad q_2(t) = e^{(-\gamma + i\alpha/2)t}Q(t)\,, \qquad Q(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{16}e^{i\alpha t}$$

と表せる。Q は周期 $T = 2\pi/\alpha$ の周期関数である。$(-1)^x = \big(e^{i\pi}\big)^x = e^{i\pi x}$ であるから

$$q_k(t) = \lambda_k^{t/T}Q(t)\,, \qquad \lambda_1 = -\,e^{2\pi\gamma/\alpha}\,, \qquad \lambda_2 = -\,e^{-2\pi\gamma/\alpha}$$

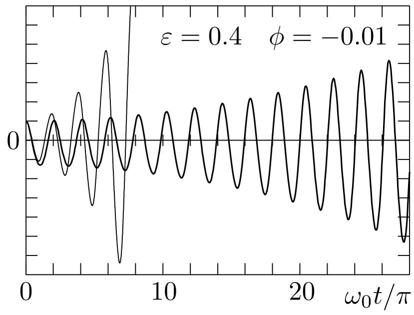
になる。これは (1.52) である。$\lambda_1\lambda_2 = 1$ を満たし, γ が正の実数のとき $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$ である。

問題 1.4 $O(\varepsilon^2)$ を考慮して共鳴条件を求める。a, b, μ を実数の定数として $z_0 = \big(a + ib\big)e^{\mu t}$ を (1.55) に代入する。ただし $z_1 = \varepsilon z_0/16$ である。$a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき $F_0 = 0$ が成り立つ必要がある。これから

$$\frac{\mu^2}{\omega_0^2} = \frac{\varepsilon^2}{16} - \phi^2 - \frac{\varepsilon^2\phi}{32} + O\big(\varepsilon^4\big)$$

を示せ。共鳴条件 $\mu^2 > 0$ は $\phi_- < \phi < \phi_+$, $\phi_\pm = \pm\,\varepsilon/4 - \varepsilon^2/64 + O\big(\varepsilon^3\big)$ になる。

$\alpha \approx 2\omega_0/n$ で共鳴が起こるから $\alpha = 2\omega_0\big(1+\phi\big)/n$ とする。右図に $n = 1, 2$ の数値解を示す。太い曲線が $n = 2$, 細い曲線は $n = 1$ であり $\omega_0 t \gtrsim 8\pi$ の部分は省略した。周期 $\approx 2\pi/\omega_0$ で振動しながら, 振幅は増加する。ϕ の幅と振幅 $e^{\mu t}$ の μ は $O\big(\varepsilon^n\big)$ であり, n が大きくなると急激に減少する。近似解 $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ は



$$z(t) = \sum_{k+n/2\ge 0} z_k(t) e^{i(k+n/2)\alpha t}$$

とすればよい。$z_0 e^{in\alpha t/2} \approx z_0 e^{i\omega_0 t}$ が主要な成分であり $z_k/z_0 = O\big(\varepsilon^{|k|}\big)$ になる。

問題 1.5　$n = 2$ のとき $k = 0, \pm 1$ を考える。$\phi = O\big(\varepsilon^2\big)$, $\dot z_k/\omega_0 z_k = O\big(\varepsilon^2\big)$ とする。**問題 1.4** と同様にして

$$\frac{\mu^2}{\omega_0^2} = \left(\frac{\varepsilon^2}{24} - \phi\right)\left(\phi + \frac{5\varepsilon^2}{24}\right) + O\big(\varepsilon^5\big)$$

を示せ。共鳴条件は $-5\varepsilon^2/24 < \phi < \varepsilon^2/24$ であり $\mu \le \omega_0\varepsilon^2/8$ になる。なお

$$z = \big(a+ib\big)e^{\mu t}\left(e^{i\alpha t} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6}e^{i2\alpha t} + O\big(\varepsilon^2\big)\right), \qquad b = \frac{a\mu/\omega_0}{\phi - \varepsilon^2/24}$$

である。

2　変分法と未定乗数法

2.1　変分法

n 個の関数 $y_i(x)$ 及び導関数 $y_i'(x) = dy_i/dx$ の関数

$$F\big(\boldsymbol{y}(x), \boldsymbol{y}'(x), x\big)\,, \qquad \boldsymbol{y}(x) = \big(y_1(x),\, y_2(x),\, \cdots,\, y_n(x)\big)$$

が与えられたとき, 積分

$$I = \int_a^b dx\, F\big(\boldsymbol{y}(x), \boldsymbol{y}'(x), x\big)$$

を考える。F は既知関数であるが, $\boldsymbol{y}(x)$ 自体は未知である。I は $\boldsymbol{y}(x)$ の関数形を与えると決まる。このとき, I は関数 $\boldsymbol{y}(x)$ の**汎関数**であるといい $I[\,\boldsymbol{y}\,]$ で表す。関数は変数に依存して値が変化するが, 汎関数は関数形に依存して値が変化する。

$\boldsymbol{y}(x)$ を微小変化 $\boldsymbol{y}(x) + \delta\boldsymbol{y}(x)$ させたとき, I の変化 δI が $\delta I = 0$ になる関数 $\boldsymbol{y}(x)$ を求める。δI を**変分**という。ただし, $\boldsymbol{y}(a)$ と $\boldsymbol{y}(b)$ の値は固定し $\delta\boldsymbol{y}(a) = \delta\boldsymbol{y}(b) = 0$ とする。テイラー展開すれば

$$F\big(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' + (\delta\boldsymbol{y})', x\big) = F\big(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', x\big) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i(x) + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\big(\delta y_i(x)\big)' \right)$$

ここで $y_i(x)$ と $y_i'(x)$ は独立と見なして微分する。

$$\delta I = \sum_i \int_a^b dx \Big(F\big(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' + (\delta\boldsymbol{y})', x\big) - F\big(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', x\big) \Big) = \sum_i \int_a^b dx \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i(x) + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\frac{d}{dx}\delta y_i(x) \right)$$

第 2 項を部分積分すると $\delta y_i(a) = \delta y_i(b) = 0$ より

$$\delta I = \sum_i \int_a^b dx\, \delta y_i(x)\, G_i(x)\,, \qquad G_i(x) = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} \tag{2.1}$$

である。$\delta y_i(x)$ は互いに独立な任意の微小量である。そこで $a < x_0 < b$ として

$$\delta y_i(x) = \begin{cases} 0\,, & i \neq k \\ \varepsilon\delta(x - x_0)\,, & i = k \end{cases}$$

とすれば $\delta I = \varepsilon G_k(x_0) = 0$ になる。x_0 は $a < x_0 < b$ であれば任意であるから, $G_k(x)$ は恒等的に 0 になる。以上から, 任意の微小変化 $\delta\boldsymbol{y}(x)$ に対して $\delta I = 0$ であるためには

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i}\,, \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n \tag{2.2}$$

である。これを変分問題 $\delta I = 0$ に対する**オイラーの方程式**という。$\boldsymbol{y}(a)$ と $\boldsymbol{y}(b)$ を与えたとき, I が停留値になる $\boldsymbol{y}(x)$ はオイラーの方程式の解である。

(1.17) と同様に

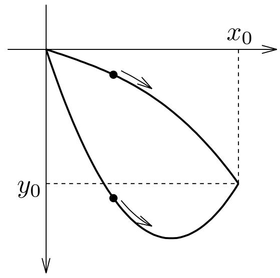
$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_i y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'} + \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_i y_i' \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right)$$

である。(2.2) が成り立つとき

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\,, \qquad \mathcal{F} = \sum_i y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'} - F \tag{2.3}$$

になる。F が直接 x に依存しない場合 $\mathcal{F} =$ 定数 である。

例題：最速降下曲線



水平方向に x 軸, 鉛直下向きに y 軸をとる。質点には鉛直下向きに重力が作用する。原点と点 (x_0, y_0) を滑らかな曲線 $y = y(x)$ で結ぶ。初速 0 で原点から $y = y(x)$ に沿って質点が運動するとき (x_0, y_0) に到達するのに必要な時間 T が最小になる $y(x)$ を求める。$y(x) \geq 0$ である。$x_0 > 0$ とする。エネルギー保存則より $(x, y(x))$ での速さ v は

$$\frac{mv^2}{2} - mgy(x) = 0\,, \qquad \therefore \quad v = \sqrt{2gy}$$

であり, $[\,x,\, x+dx\,]$ 間の曲線の長さ ds は $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^{\,2}}$ である。この間を通過に要する時間は ds/v になるから

$$T = \int_0^{x_0} dx\, \frac{\sqrt{1+y'^{\,2}}}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx\, F(y, y')\,, \qquad F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^{\,2}}{y}}$$

これを最小にする $y(x)$ は (2.2) の解である。正直に微分すれば

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2yy'' + 1 + y'^{\,2}}{2\Big(y\big(1+y'^{\,2}\big)\Big)^{3/2}} = 0$$

$y' \neq 0$ であるから, これは

$$y'\Big(2yy'' + 1 + y'^{\,2}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(y\big(1+y'^{\,2}\big)\Big) = 0\,, \qquad \therefore \qquad y(1+y'^{\,2}) = \text{定数} = 2a > 0$$

になる。$y = 2a$ もこの方程式の解であるが除外する。上式は (2.3) から簡単に求まる。F は直接 x に依存しないから

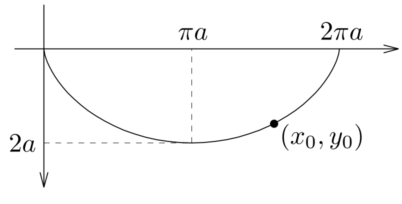
$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^{\,2})}} = 0$$

である。$0 \leq y \leq 2a$ より $y = a\big(1-\cos\theta\big)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とおける。このとき

$$y'^{\,2} = \frac{2a-y}{y} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2, \qquad \therefore \quad y' = \pm\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

になるから

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}\frac{1}{y'} = \pm\, a\big(1-\cos\theta\big)\,, \quad \therefore \quad x = \pm\, a\big(\theta - \sin\theta\big) + C$$



$\theta = 0$ のとき $x = 0$ より $C = 0$ である。$x \geq 0$ であるから

$$x = a\big(\theta - \sin\theta\big)\,, \quad y = a\big(1-\cos\theta\big)\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad (2.4)$$

になる。最速降下曲線はサイクロイドである。$\theta = \theta_0$ のとき $x = x_0$, $y = y_0$ とすると

$$x_0 = a\big(\theta_0 - \sin\theta_0\big)\,, \qquad y_0 = a\big(1-\cos\theta_0\big)$$

であり, x_0, y_0 を与えると a, θ_0 が決まる。例えば, $y_0 = 0$ の場合 $\theta_0 = 2\pi$, $a = x_0/2\pi$ である。

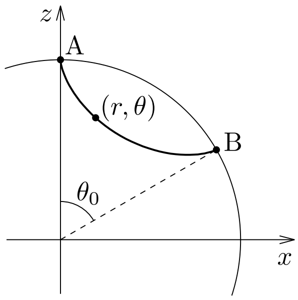
$1 + y'^{\,2} = 2a/y$ であるから $F = \sqrt{2a}/y$ になる。$dx/d\theta = y$ より

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{y(x)} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\theta_0} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\theta_0$$

である。

問題 2.1　$(0,0)$ と (x_0, y_0) を直線で結ぶ場合 $T = \sqrt{1+f^2(\theta_0)}\,T_{\min}$ と表せる。$f(\theta_0)$ を求めよ。ただし $T_{\min} = \sqrt{a/g}\,\theta_0$ である。$x_0 \neq 0$ のとき $T > T_{\min}$ になる。

問題 2.2　半径 R, 密度一定の地球内部を, 万有引力により質点が運動する。地表の点 A から B に至る最速曲線を求める。質点の位置を極座標 (r, θ, ϕ) で表す。最速曲線は $\phi =$ 定数 なるから $\phi = 0$ にとる。$\theta = 0$ のとき A, $\theta = \theta_0$ のとき B とする。



1. 初速 0 のとき, A から B まで到達するのに要する時間 T は

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\theta_0} d\theta \sqrt{\frac{r^2 + (dr/d\theta)^2}{R^2 - r^2}}$$

   になることを示せ。

2. $\lambda = 1 - \theta_0/\pi$ とする。最速降下曲線は φ を変数として ($0 \le \varphi \le \pi$)

$$r = R\sqrt{\cos^2\varphi + \lambda^2 \sin^2\varphi}\,, \qquad \tan\theta = \frac{\lambda\sin\varphi\cos(\lambda\varphi) - \cos\varphi\sin(\lambda\varphi)}{\lambda\sin\varphi\sin(\lambda\varphi) + \cos\varphi\cos(\lambda\varphi)}$$

   と表せることを示せ。これは直径 $R\theta_0/\pi$ の内サイクロイドになる。

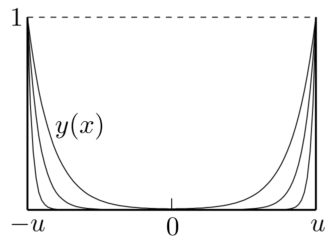
3. $T = \sqrt{\big(2\pi - \theta_0\big)\theta_0 R/g}$ を示せ。
4. $\theta_0 \to 0$ のとき x, $R - z$ は (2.4) になることを示せ。ただし $2\pi a = R\theta_0$, $\theta = 2\varphi$ である。
5. A と B を直線で結ぶとき $T = \pi\sqrt{R/g}$ を示せ。

例題：回転体の表面積

2 点 $(-u, v)$, (u, v) を通る曲線 $y = y(x)$ を考える。簡単のため x/v, y/v を改めて x, y とし $(-u, 1)$, $(u, 1)$ を通る曲線 $y = y(x)$ の問題にする。u, $y(x)$ は正とする。曲線 $y(x)$ を x 軸まわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V と表面積 S は

$$V[\,y\,] = \pi\int_{-u}^{u} dx\, y^2(x)\,, \qquad S[\,y\,] = 2\pi\int_{-u}^{u} dx\, F(y, y') \quad \text{ただし} \quad F(y, y') = y\sqrt{1 + y'^{\,2}}$$

である。$|x| \le u$ で滑らかな関数 $y(x)$ は, 太い線分で示した



$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & |x| = u \\ 0\,, & |x| < u \end{cases}$$

に限りなく近づける。この極限では $V = 0$, $S = S_g = 2\pi$ になる。S_g は $x = \pm\,u$ にある半径 1 の円盤の面積の和である。$V = 0$ は $V[\,y\,]$ の下限ではあるが最小値ではないから, V を最小にする $y(x)$ は存在しない。S の場合, 例えば, 回転体が円柱になる $y(x) = 1$ とすると $S = 4\pi u = 2uS_g$ である。$u < 1/2$ のとき $S < S_g$ になるから, 少なくとも $u < 1/2$ では S を最小にする $y(x)$ が存在する。この y は (2.3) より

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^{\,2}}} = \text{定数} = \frac{1}{a} > 0\,, \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{\sqrt{(ay)^2 - 1}} = \pm\, dx$$

の解である。積分すると

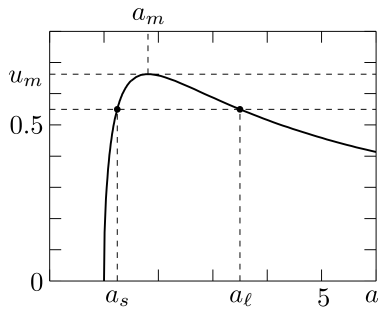
$$\cosh^{-1}\!\big(ay\big) = \pm\,\big(ax + b\big) \qquad \therefore \qquad y = \frac{1}{a}\cosh\!\big(ax + b\big)$$

境界条件 $\cosh\!\big(-au + b\big) = \cosh\!\big(au + b\big) = a$ 及び $au \neq 0$ より $b = 0$ になる。a は

$$\cosh(au) = a\,, \quad \text{つまり} \quad u = f(a) \equiv \frac{\cosh^{-1} a}{a} = \frac{1}{a}\log\!\Big(a + \sqrt{a^2 - 1}\Big)\,, \qquad a \ge 1$$

で決まる。$f(a)$ を右図に示す。$f(a)$ が最大になる a を数値的に求めると $a=a_m\approx 1.81$ になる。u の最大値 u_m と a_m の関係は

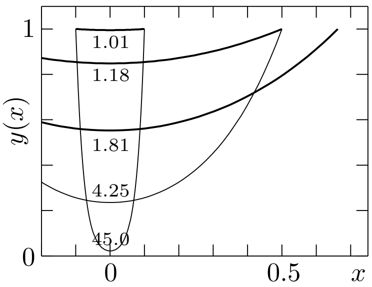
$$f'(a_m)=-\frac{u_m}{a_m}+\frac{1}{a_m\sqrt{a_m^2-1}}=0\,,\quad \therefore\quad u_m=\frac{1}{\sqrt{a_m^2-1}}$$



であり $u_m\approx 0.663$ になる。$0<u<u_m$ のとき, u を与えると $u=f(a)$ の解は 2 個存在する。大きい方を a_ℓ, 小さい方を a_s で表す。$u>u_m$ では $u=f(a)$ を満たす a は存在しないから, S が停留値になる $y(x)$ は存在しない。

右図に $u=0.1,\,0.5,\,u_m$ での

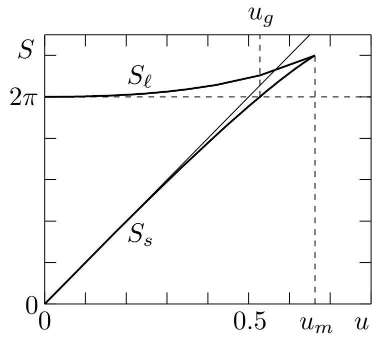
$$y(a,x)=\frac{\cosh(ax)}{a}\,,\qquad |x|\le u$$



を示す。太い曲線は $y_s=y(a_s,x)$, 細い曲線は $y_\ell=y(a_\ell,x)$ である。曲線の値は a を表す。a が大きいほど曲線は凹になる。$u\ll 1$ では $y_s(x)\approx 1$, $y_\ell(x)\approx g(x)$ である。

$\sqrt{1+y'^{\,2}}=ay$ より

$$S=\frac{4\pi}{a^2}\int_0^{au}dx\,\cosh^2 x=\frac{2\pi}{a^2}\Big(au+\cosh(au)\,\sinh(au)\Big)=\frac{2\pi}{a}\Big(u+\sqrt{a^2-1}\Big)\tag{2.5}$$



になる。$a=a_s$, $a=a_\ell$ の S をそれぞれ S_s, S_ℓ で表す。$u<u_m$ のとき S は a の増加関数になり $S_s<S_\ell$ である。$u\ll 1$ では $a_\ell\gg 1$ になるから $S_\ell\approx 2\pi=S_g$ である。これは $y_\ell\approx g$ に対応する。一方, $a_s\approx 1$ である。$f(a)$ を $a=1$ でテイラー展開すると $u\approx\sqrt{2(a_s-1)}$ になるから $S\approx S_0=4\pi u$ である。これは $y_s\approx 1$ に対応する。図で細い直線は S_0 を表す。$S_s=S_g=2\pi$ になる u を求めると $u_g\approx 0.528$ である。任意の u に対して $S\xrightarrow{y(x)\to g(x)}S_g$ になるから

$$\begin{array}{ll} u\le u_g & S_s\,\text{は最小値}\\ u_g<u<u_m & S_s\,\text{は極小値。}S\,\text{の最小値は存在しない。}\\ u_m\le u & S\,\text{の極小値と最小値は存在しない。}\end{array}\tag{2.6}$$

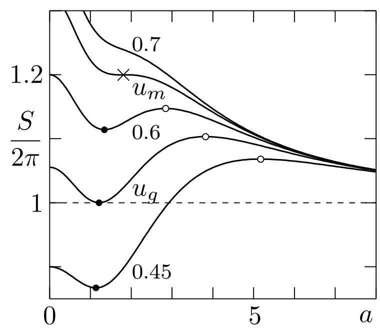
である。

問題 2.3　試行関数として $y(\pm u)=1$ を満たす

$$y(x)=\cosh\big(ax\big)/\cosh\big(au\big)$$

を考える。a は任意定数であり $y(x)\xrightarrow{a\to\infty}g(x)$ になる。

$$S=\frac{2\pi}{a^2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\sinh^{-1}t\right),\qquad t=a\tanh\big(au\big)$$



を示せ。また, $\cosh\big(au\big)=a$ のとき $dS/da=0$ であり S は (2.5) になることを示せ。u を与えたとき $S(a)$ を右図に示す。$S_s(\bullet)$ は極小値, $S_\ell(\circ)$ は極大値であり, (2.6) が成り立つ。

2.2　ラグランジュの未定乗数法

簡単な例として $g(x_1,x_2,x_3) =$ 定数 $= c$ のとき $f(x_1,x_2,x_3)$ の極値を求める。束縛条件

$$dg = (\partial_1 g)\, dx_1 + (\partial_2 g)\, dx_2 + (\partial_3 g)\, dx_3 = 0\,, \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.7}$$

のもとで

$$df = (\partial_1 f)\, dx_1 + (\partial_2 f)\, dx_2 + (\partial_3 f)\, dx_3 = 0 \tag{2.8}$$

を満たす (x_1,x_2,x_3) を求める問題である。束縛条件がなければ dx_1, dx_2, dx_3 は独立に変化できるから, $df = 0$ であるためには $\partial_1 f = \partial_2 f = \partial_3 f = 0$ である。束縛条件 $dg = 0$ があると, dx_1, dx_2, dx_3 は独立ではない。$\partial_3 g \neq 0$ のとき

$$dx_3 = -\frac{\partial_1 g}{\partial_3 g}\, dx_1 - \frac{\partial_2 g}{\partial_3 g}\, dx_2\,, \quad \therefore \quad df = \left(\partial_1 f - \frac{\partial_3 f}{\partial_3 g}\partial_1 g\right) dx_1 + \left(\partial_2 f - \frac{\partial_3 f}{\partial_3 g}\partial_2 g\right) dx_2 = 0$$

になる。dx_1, dx_2 は独立にとれるから

$$\partial_1 f - \frac{\partial_3 f}{\partial_3 g}\partial_1 g = 0\,, \qquad \partial_2 f - \frac{\partial_3 f}{\partial_3 g}\partial_2 g = 0 \tag{2.9}$$

が極値の条件である。この 2 つの条件から x_1, x_2, x_3 を決めるには $g(x_1,x_2,x_3) = c$ より x_3 を x_1, x_2 の関数として表す必要がある。以下では, これを回避する。

λ を任意定数として

$$F(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2,x_3) + \lambda\, g(x_1,x_2,x_3)$$

とする。束縛条件 $dg = 0$ のもとでは $df = 0$ と $dF = df + \lambda dg = 0$ は同じである。λ は任意であるから $\partial_3 F = \partial_3 f + \lambda \partial_3 g = 0$ を満たすように λ をとれば

$$dF = (\partial_1 F)\, dx_1 + (\partial_2 F)\, dx_2 = 0$$

になる。dx_1, dx_2 は独立であるから $\partial_1 F = \partial_2 F = 0$ になり

$$\partial_1 F = \partial_2 F = \partial_3 F = 0\,, \qquad F(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2,x_3) + \lambda\, g(x_1,x_2,x_3) \tag{2.10}$$

が極値の条件である。$\lambda = -\,\partial_3 f/\partial_3 g$ を代入すれば (2.9) になるが, x_1, x_2, x_3 を λ で表し, これを $g(x_1,x_2,x_3) = c$ に代入して λ を決めてもよい。(2.10) は x_1, x_2, x_3 を独立変数と見なし $F = f + \lambda g$ が極値になる点を求める。この方法を**ラグランジュの未定乗数法**という。

例題　点 (u_1,u_2,u_3) から平面 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + C = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + C = 0$ までの最短距離 $L_{\min}$

条件 $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + C = 0$ のもとで $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})^2$ の最小値を求める。

$$G(\boldsymbol{x}) = f + 2\lambda g = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})^2 + 2\lambda\big(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + C\big)$$

とすると

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = 2(x_i - u_i) + 2\lambda A_i = 0\,, \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{A}$$

が $L_{\min}$ を与える点である。$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + C = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} + C - \boldsymbol{A}^2\lambda = 0$ より

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} + C}{\boldsymbol{A}^2}\,, \qquad \therefore \qquad L_{\min} = \sqrt{f(\boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{A}^2\lambda^2} = \frac{|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} + C|}{|\boldsymbol{A}|}$$

になる。未定乗数法を用いずに $L_{\min}$ を求める。$A_1,\ A_2,\ A_3$ のうち少なくとも 1 つは 0 でないから $A_3\neq 0$ としてよい。$x_3=-\big(C+A_1x_1+A_2x_2\big)/A_3$ を $f(\boldsymbol{x})$ に代入すると

$$f(z_1,z_2)=z_1^2+z_2^2+\big(A_1z_1+A_2z_2+a\big)^2/A_3^2\,,\qquad a=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}+C$$

ただし $z_1=x_1-u_1,\ z_2=x_2-u_2$ である。$f(z_1,z_2)$ が最小になる条件は

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}=2z_1+\frac{2A_1}{A_3^2}\big(A_1z_1+A_2z_2+a\big)=0\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial z_2}=2z_2+\frac{2A_2}{A_3^2}\big(A_1z_1+A_2z_2+a\big)=0$$

第 1 式$\times A_2$ と 第 2 式$\times A_1$ の差より $A_2z_1=A_1z_2$ であり, 上式は $\boldsymbol{A}^2z_i+aA_i=0$ になる。最小値は

$$f=\left(\frac{A_1a}{\boldsymbol{A}^2}\right)^2+\left(\frac{A_2a}{\boldsymbol{A}^2}\right)^2+\frac{a^2}{A_3^2}\left(-\frac{A_1^2}{\boldsymbol{A}^2}-\frac{A_2^2}{\boldsymbol{A}^2}+1\right)^2=\frac{a^2}{\boldsymbol{A}^2}\,,\quad\therefore\quad L_{\min}=\frac{|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}+C|}{|\boldsymbol{A}|}$$

である。未定乗数法に比べて計算が煩雑である。

積分

$$I=\int_a^b dx\,f(y(x),y'(x),x)\,,\qquad J=\int_a^b dx\,g(y(x),y'(x),x)$$

を考える。J が与えられた定数のとき, I を極値にする $y(x)$ を求める。(2.1) と同様に

$$\delta I=\int_a^b dx\,\delta y(x)\,\tilde f(x)\,,\qquad \delta J=\int_a^b dx\,\delta y(x)\,\tilde g(x)$$

ただし

$$\tilde f(x)=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\,,\qquad \tilde g(x)=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}$$

である。$a\le x\le b$ を n 等分し $F_i=F(x=x_i)\,,\ \varDelta x=(b-a)/n$ とおくと

$$\delta J=\sum_i\delta y_i\,\tilde g_i\varDelta x=0\quad\text{の条件下で}\quad \delta I=\sum_i\delta y_i\,\tilde f_i\varDelta x=0$$

を満たす $y(x)$ を求める問題である。(2.7), (2.8) との対応関係は

$$dx_i\to\delta y_i,\qquad \partial_i g\to\tilde g_i\varDelta x,\qquad \partial_i f\to\tilde f_i\varDelta x$$

になるから, (2.10) の $\partial_iF=\partial_if+\lambda\partial_ig=0$ に対応して $\tilde f_i\varDelta x+\lambda\tilde g_i\varDelta x=0$, つまり

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial F}{\partial y}\,,\qquad F=f\big(y(x),y'(x),x\big)+\lambda g\big(y(x),y'(x),x\big)$$

である。λ は J が与えられた定数を満たすように決める。

例題：懸垂曲線

一般に, 質点系の質点が静止した状態を考える。これを平衡状態という。(1.2) より $F_i+R_i=0$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在すれば, $\boldsymbol{x}$ で質点は静止したままである。これは任意の微小変位 δx_i に対して

$$\sum_{i=1}^{3N}\big(F_i+R_i\big)\,\delta x_i=0$$

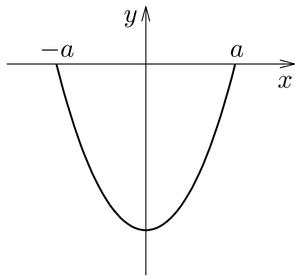
と同値である。R_i が滑らかな束縛力のとき, δx_i を束縛条件を満たすようにとれば (1.3), (1.4) より束縛力は寄与せず

$$\sum_i F_i\,\delta x_i=0$$

が平衡状態の条件になる。$F_i=-\partial V(\boldsymbol{x})/\partial x_i$ の場合

$$\delta V=\sum_i\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i=-\sum_i F_i\,\delta x_i$$

になるから, 束縛条件のもとで $\delta V=0$ とすると, 平衡状態が求まる。



糸の両端を固定し一様重力のもとでつるすとき, 平衡状態での糸の形を求める。単位長さあたりの質量を ρ, 糸の長さを ℓ とする。水平方向に x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとり, 糸の両端を $(-a,0)$, $(a,0)$ とする。$\ell > 2a$ である。求める糸の形 $y = y(x)$ は, 糸の長さが ℓ という条件のもとで, 糸全体の位置エネルギー V を最小にすればよい。微小部分 $[\,x,\, x+dx\,]$ の糸の長さは $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dx\sqrt{1+y'(x)^2}$ であるから

$$V = \int_{-a}^{a} dx\, F(y,y')\,, \qquad F(y,y') = \rho\sqrt{1+y'^{\,2}}\,U(y)$$

$$\ell = \int_{-a}^{a} dx\, G(y,y')\,, \qquad G(y,y') = \sqrt{1+y'^{\,2}}$$

になる。$U(y) = gy(x)$ であるが, y の任意関数でもよい。未定乗数を $\rho\lambda$ として

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,, \qquad L = F + \rho\lambda G = \rho\sqrt{1+y'^{\,2}}\Big(U(y)+\lambda\Big)$$

であるから

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^{\,2}}}\Big(U(y)+\lambda\Big) = \sqrt{1+y'^{\,2}}\,\frac{dU}{dy}$$

になる。左辺の微分は煩雑である。この代わりに (2.3) より

$$y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{U+\lambda}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} = \text{定数} = \frac{1}{\alpha}\,, \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\alpha^2\Big(U(y)+\lambda\Big)^2 - 1}$$

である。$U(y) = gy$ の場合, $z = \alpha(gy+\lambda)$ とおくと

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \pm\,\alpha g\,dx\,, \qquad \therefore \quad \cosh^{-1} z = \pm\,\big(\alpha g x + \beta\big)$$

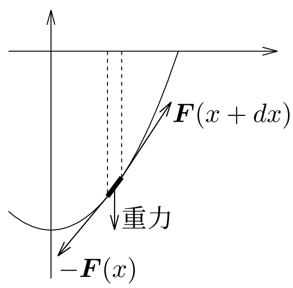
αg, λ/g をそれぞれ α, λ に置き直せば $y(x) = \dfrac{1}{\alpha}\cosh\big(\alpha x+\beta\big) - \lambda$ である。$y(\pm\,a) = 0$ より

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}\Big(\cosh\big(\alpha x\big) - \cosh\big(\alpha a\big)\Big) \tag{2.11}$$

である。任意定数 α は束縛条件

$$\ell = \int_{-a}^{a} dx\,\sqrt{1+y'^{\,2}} = \int_{-a}^{a} dx\,\cosh\big(\alpha x\big) = \frac{2}{\alpha}\sinh\big(\alpha a\big)\,, \qquad \therefore \qquad \frac{\sinh(\alpha a)}{\alpha a} = \frac{\ell}{2a}$$

で決まる。$\sinh(x)/x \geq 1$ である。$\ell > 2a$ より α として正と負がそれぞれ 1 つ存在するが, $\alpha > 0$ が位置エネルギー最小の解になる。



問題 2.4　x における張力の水平成分を $F_x(x)$, 鉛直成分を $F_y(x)$ とする。微小部分 $[\,x,\, x+dx\,]$ の糸に働く力の釣り合いから

$$F_x(x) = \text{一定}, \qquad \frac{dF_y}{dx} = g\rho\sqrt{1+y'^{\,2}}$$

を示せ。張力は接線方向に働くから $F_y(x)/F_x = y'(x)$ である。これから (2.11) を求めよ。

2.3　束縛条件とラグランジュの運動方程式

束縛条件がない場合, ラグランジュの運動方程式 (1.10) は (2.2) で $x \to t$, $y_i \to q_i$, $F \to L$ の置き換えをすれば求まる。$\boldsymbol{q} = (q_1,\, q_2,\, \cdots,\, q_{3N})$ とする。$t = t_1$, $t = t_2$ での $\boldsymbol{q}(t)$ を与えたとき, 無数の経路 $\boldsymbol{q}(t)$ が考えられるが, 実現される経路は微小変位 $\delta\boldsymbol{q}$ に対して

$$\delta S = S[\,\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}\,] - S[\,\boldsymbol{q}\,] = 0\,, \qquad S[\,\boldsymbol{q}\,] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) \tag{2.12}$$

を満たす $\boldsymbol{q}(t)$ である。これをハミルトンの原理という。S を作用という。

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta q_i(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

になるから, 全ての $\delta q_i(t)$ が独立な場合, (2.2) と同様に

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3N \tag{2.13}$$

が停留値の条件である。

k 個の束縛条件

$$f_\mu(\boldsymbol{q}, t) = 0\,, \qquad \mu = 1,\, 2, \cdots,\, k$$

が存在する場合

$$f_\mu(\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}, t) - f_\mu(\boldsymbol{q}, t) = \sum_{i=1}^{3N} \delta q_i \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} = 0$$

でなければならないから δq_i は独立ではない。(1.10) では $n = 3N - k$ 個の独立な q_α を考えた。この場合, 束縛力は運動方程式に現れないが, q_α 以外の q_i は束縛条件を満たすように q_α で表す必要がある。これが複雑であったり束縛力を求めたい場合, 全ての q_i を扱った方がよい。そこで, 未定乗数法を用いて

$$S[\,\boldsymbol{q}\,] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \tilde{L}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\,, \qquad \tilde{L}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) = L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) + F(\boldsymbol{q}, t) \tag{2.14}$$

を停留値にする。ただし

$$F(\boldsymbol{q}(t), t) = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu(t) f_\mu\big(\boldsymbol{q}(t), t\big)$$

である。未定乗数 λ_μ は t の関数でもよい。

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta q_i(t) \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta q_i(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

ここでは δq_i は独立であるから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + R_{q_i}\,, \qquad R_{q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_\mu \lambda_\mu(t) f_\mu(\boldsymbol{q}, t)\,, \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3N \tag{2.15}$$

になる。$\partial L/\partial q_i = -\,\partial V/\partial q_i$ は既知の力の q_i 成分 (q_i が変化する方向) であるが, R_{q_i} が束縛力の q_i 成分を表す。$3N$ 個の上式と k 個の束縛条件から, $3N$ 個の q_i と k 個の λ_μ は決まる。

$$\delta W = \sum_i R_{q_i} \delta q_i = \sum_{i\mu} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_\mu \lambda_\mu \Big(f_\mu(\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}, t) - f_\mu(\boldsymbol{q}, t) \Big)$$

$\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q}$ が束縛条件を満たすとき $\delta W = 0$ になり滑らかな束縛である。

$$\sum_j R_{q_j}\delta q_j = \sum_{i,j} R_{q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta x_i = \sum_i R_i\,\delta x_i\,, \qquad \therefore \qquad R_i = \sum_j R_{q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \tag{2.16}$$

である。

$3N$ 個の変数 δq_i が束縛条件

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{\mu i}\,\delta q_i = 0\,, \qquad f_{\mu i} \equiv \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i}\,, \qquad \mu = 1, \cdots, k \tag{2.17}$$

を満たすとき

$$\sum_{i=1}^{3N} \mathscr{L}_i\,\delta q_i = 0\,, \qquad \mathscr{L}_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \tag{2.18}$$

である $\mathscr{L}_i$ を求める。δq_i が全て独立ならば $\mathscr{L}_i = 0$ になるが, 独立な δq_i は $3N-k$ 個であるから $\mathscr{L}_i = 0$ ではない。$\delta q_{k+1}, \cdots, \delta q_{3N}$ を独立変数にとる。$k\times 3N$ 行列 f の $k\times k$ 部分行列を $g_{\mu\nu}$ で表す。$\det g \neq 0$ とする。(2.17) は

$$\sum_{\nu=1}^{k} g_{\mu\nu}\,\delta q_\nu = -\sum_{i=k+1}^{3N} f_{\mu i}\,\delta q_i\,, \qquad \therefore \qquad \delta q_\nu = -\sum_{i=k+1}^{3N}\big(g^{-1}f\big)_{\nu i}\delta q_i\,, \qquad \nu = 1, \cdots, k$$

である。これを (2.18) に代入すると

$$\sum_{\nu=1}^{k}\mathscr{L}_\nu\delta q_\nu + \sum_{i=k+1}^{3N}\mathscr{L}_i\delta q_i = \sum_{i=k+1}^{3N}\left(\mathscr{L}_i - \sum_{\nu=1}^{k}\mathscr{L}_\nu\big(g^{-1}f\big)_{\nu i}\right)\delta q_i = 0$$

$\delta q_{k+1}, \cdots, \delta q_{3N}$ は独立であるから

$$\mathscr{L}_i - \sum_{\nu=1}^{k}\mathscr{L}_\nu\big(g^{-1}f\big)_{\nu i} = 0\,, \qquad i = k+1, \cdots, 3N \tag{2.19}$$

になる。$i \le k$ を含めてもよい。この場合, $\big(g^{-1}f\big)_{\nu i} = \delta_{\nu i}$ より単に $\mathscr{L}_i - \mathscr{L}_i = 0$ である。

行列 $g^{-1}f$ の具体的形は複雑になるから, 未定乗数法により (2.19) を簡潔な表現で表す。任意の λ_μ に対して, 条件 (2.17) のもとでは (2.18) と

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(\mathscr{L}_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu f_{\mu i}\right)\delta q_i = 0 \tag{2.20}$$

は同等である。λ_μ は任意であるから, k 個の連立 1 次方程式

$$\mathscr{L}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu f_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \nu = 1, \cdots, k$$

の解 $\lambda_\mu = -\sum_\nu \mathscr{L}_\nu (g^{-1})_{\nu\mu}$ を採用してもよい。このとき (2.20) で $i = 1, \cdots, k$ の項は消え

$$\sum_{i=k+1}^{3N}\left(\mathscr{L}_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu f_{\mu i}\right)\delta q_i = 0$$

になる。$\delta q_{k+1}, \cdots, \delta q_{3N}$ は独立であるから, 係数は 0 でなければならない。したがって, 全ての i に対して

$$\mathscr{L}_i + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu f_{\mu i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, \cdots, 3N$$

になり (2.15) が求まる。$\lambda_\mu = -\sum_\nu \mathscr{L}_\nu (g^{-1})_{\nu\mu}$ より (2.15) は (2.19) になるが, この λ_μ を用いないで, $3N$ 個の (2.15) と k 個の束縛条件で q_i と λ_μ を決める方が簡単になることが多い。

(1.24) より L と

$$\tilde{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - \frac{d}{dt}W(\boldsymbol{q}, t)$$

は, 全く同一のラグランジュの方程式を導く。

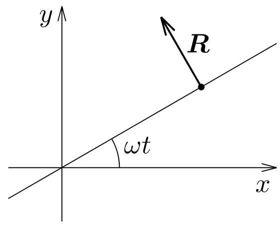
$$S[\,\boldsymbol{q}\,] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\,, \qquad \tilde{S}[\,\boldsymbol{q}\,] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \tilde{L}(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$$

とすると

$$\tilde{S} = S - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{dW}{dt} = S - W_{12}\,, \qquad W_{12} = W\big(\boldsymbol{q}(t_2), t_2\big) - W\big(\boldsymbol{q}(t_1), t_1\big)$$

である。変分を行うとき $\boldsymbol{q}(t_1)$ と $\boldsymbol{q}(t_2)$ は固定するから $\delta W_{12} = 0$ であり, 変分には寄与しない。したがって $\delta\tilde{S} = 0$ と $\delta S = 0$ は同じラグランジュの方程式になる。

例題：回転する直線に束縛された運動



平面内において, 原点まわりに一定の角速度 ω で回転する滑らかな直線上で質点が運動する。質点には中心力ポテンシャル $V(r)$ による力と回転する直線からの束縛力 $\boldsymbol{R}$ が働くとする。極座標 (r, θ) で表すと, 束縛条件は $f(\theta) = \theta - \omega t = 0$ になるから

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\Big) - V(r) + \lambda f(\theta)$$

である。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = m\frac{d}{dt}\big(r^2\dot{\theta}\big) - \lambda = 0$$

束縛条件を代入すると

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r + \frac{dV}{dr} = 0\,, \qquad \lambda = m\omega\frac{dr^2}{dt}$$

である。(2.16) より束縛力は

$$\boldsymbol{R} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y\right) = \frac{\lambda}{r}\Big(-\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_y\cos\theta\Big)$$

になる。

ニュートン方程式は

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{r}\frac{dV}{dr} + R_x\,, \qquad m\ddot{y} = -\frac{y}{r}\frac{dV}{dr} + R_y$$

である。$\boldsymbol{R}$ は回転する直線に直交するから

$$R_x = -R\sin\omega t\,, \qquad R_y = R\cos\omega t$$

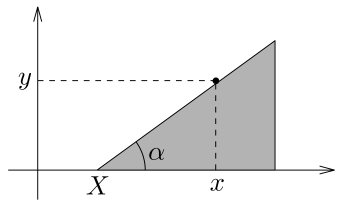
とおける。$z = x + iy = re^{i\omega t}$ とすると $\ddot{z} = \big(\ddot{r} - \omega^2 r + 2i\omega\dot{r}\big)e^{i\omega t}$ より, ニュートン方程式は

$$m\big(\ddot{r} - \omega^2 r + 2i\omega\dot{r}\big)e^{i\omega t} = \left(-\frac{dV}{dr} + iR\right)e^{i\omega t}\,, \qquad \therefore\quad m\big(\ddot{r} - \omega^2 r\big) = -\frac{dV}{dr}\,, \quad R = 2m\omega\dot{r} = \frac{\lambda}{r}$$

である。

問題 2.5　**問題 1.2** の回転するリングに束縛された運動の場合, 束縛条件は $r - a = 0\,,\ \phi - \omega t = 0$ である。これから束縛力 $\boldsymbol{R}$ を求めよ。

問題 2.6　滑らかな水平面に傾斜角 α, 質量 M の台を置く。質量 m の質点が台の斜面上を鉛直平面内で運動する。質点には鉛直下向きの重力 mg が作用する。図のように X, x, y をとると (2.14) の F は



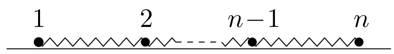
$$F = \lambda\Big(y\cos\alpha - (x-X)\sin\alpha\Big)$$

とおける。ラグランジュの運動方程式より

$$\lambda = \frac{M\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}mg\,, \qquad m\ddot{x} = -\,\lambda\sin\alpha\,, \qquad m\ddot{y} = -\,mg + \lambda\cos\alpha\,, \qquad M\ddot{X} = \lambda\sin\alpha$$

を示せ。λ は斜面から作用する束縛力の大きさである。

2.4　連続体



質量 0, 自然長 Δx, バネ定数 k のバネに結ばた質量 m の質点系を考える。質点は x 軸上を運動する。i 番目の質点の変位を $q_i(t)$ とする。ただし $i = 1, \cdots, n$ である。運動方程式は

$$m\ddot{q}_i = k\Big((q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1})\Big) = k\Big(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}\Big)\,, \qquad i = 1,\,2,\cdots,\,n \tag{2.21}$$

ただし, q_0 と q_{n+1} はダミーの変数で, 固定端の場合 $q_0 = 0$, $q_{n+1} = 0$, 自由端の場合 $q_0 = q_1$, $q_{n+1} = q_n$ とする。

$n \to \infty$ の極限を考える。系全体の質量 $M = mn$ と長さ $\ell = (n-1)\Delta x$ は有限になるべきである。質点系の両端を力 F で引っ張ると, 個々のバネの伸びは F/k であるから, 全体の伸びは $(n-1)F/k = F\ell/(k\Delta x)$ になる。これも有限である。したがって

$$\mu = \frac{M}{\ell} = \frac{n}{n-1}\frac{m}{\Delta x}\,, \qquad \ell = (n-1)\Delta x\,, \qquad \lambda = k\Delta x$$

を有限に保って $n \to \infty$ の極限をとる。$x = i\Delta x$, $q_i(t) = \phi(x,t)$ とする。x と t は独立な変数で $x = x(t)$ ではない。$q_{i\pm1} = \phi(x \pm \Delta x, t)$ をテイラー展開すると

$$q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1} = (\Delta x)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + O\big((\Delta x)^4\big)$$

になるから, 運動方程式は

$$\frac{m}{\Delta x}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = k\Delta x\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + O\big((\Delta x)^3\big)\,, \qquad \therefore \qquad \mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{2.22}$$

である。これを波動方程式という。境界条件は固定端では $\phi = 0$, 自由端では $\partial\phi/\partial x = 0$ になる。

ラグランジアン $L(q,\dot{q})$ は

$$L = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j^2 - \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{n}\big(q_{j+1} - q_j\big)^2$$

である。q_i で偏微分するとき $j+1 = i$ と $j = i$ の 2 つあるから

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -k\big(q_i - q_{i-1}\big) - k\big(q_i - q_{i+1}\big) = k\Big(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}\Big)$$

したがって, ラグランジュ方程式は (2.21) を再現する。

$$L=\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\left(\frac{\partial\phi(i\Delta x,t)}{\partial t}\right)^2-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\left(\frac{\phi(i\Delta x+\Delta x,t)-\phi(i\Delta x,t)}{\Delta x}\right)^2$$

であるから $n\to 0$ の極限では $\Delta x\to 0$ より

$$L=\frac{\mu}{2}\int_0^{\ell}dx\left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)$$

になる。

$$\partial_0=\frac{\partial}{\partial t}\,,\qquad \partial_1=\frac{\partial}{\partial x}$$

と略記すれば

$$L=\int_0^{\ell}dx\,\mathscr{L}(\partial_0\phi,\partial_1\phi\,)\,,\qquad \mathscr{L}(\partial_0\phi,\partial_1\phi)=\frac{\mu}{2}\big(\partial_0\phi\big)^2-\frac{\lambda}{2}\big(\partial_1\phi\big)^2 \tag{2.23}$$

である。$\mathscr{L}$ をラグランジアン密度という。

(2.23) にハミルトンの原理を適用して (2.22) を導く。一般に $\mathscr{L}$ を $\partial_0\phi$, $\partial_1\phi$, ϕ の関数とする。$\phi(x,t)$ を微小変化 $\phi(x,t)+\delta\phi(x,t)$ させたときの作用 S の変化 δS

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\Big(L[\,\phi+\delta\phi\,]-L[\,\phi\,]\Big)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_0^{\ell}dx\,\Big(\mathscr{L}(\partial_0\phi+\partial_0\delta\phi,\,\partial_1\phi+\partial_1\delta\phi,\,\phi+\delta\phi\,)-\mathscr{L}(\partial_0\phi,\partial_1\phi,\phi\,)\Big)\end{aligned}$$

を求める。テイラー展開すると

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\partial_0\phi+\partial_0\delta\phi,\,\partial_1\phi+\partial_1\phi,\,\phi+\delta\phi\,)\\&=\mathscr{L}(\partial_0\phi,\partial_1\phi,\phi\,)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_0\phi\big)}\partial_0\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_1\phi\big)}\partial_1\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\cdots\end{aligned}$$

になるから

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_0^{\ell}dx\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_0\phi\big)}\partial_0\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_1\phi\big)}\partial_1\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi\right)$$

である。第 1 項, 第 2 項でそれぞれ t, x の部分積分すると, 端点では $\delta\phi(x,t)=0$ であるから

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_0^{\ell}dx\,\delta\phi\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_0\phi\big)}-\partial_1\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_1\phi\big)}\right)$$

になる。任意の微小変化 $\delta\phi(x,t)$ に対して $\delta S=0$ であるためには

$$\partial_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_0\phi\big)}+\partial_1\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_1\phi\big)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}$$

でなければならない。これが場 $\phi(x,t)$ に対するラグランジュ方程式である。(2.23) の場合

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_0\phi\big)}=\mu\partial_0\phi\,,\qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial_1\phi\big)}=-\,\lambda\partial_1\phi\,,\qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}=0$$

であるから

$$\mu\partial_0^2\phi-\lambda\partial_1^2\phi=\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0$$

になり (2.22) が求まる。

3 ハミルトン形式

3.1 ハミルトンの運動方程式

x, y の関数 $F(x,y)$ を考える。

$$dF = u\,dx + v\,dy\,, \qquad u = u(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\,, \quad v = v(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

である。

$$f(x,y,v) = \partial F/\partial y - v = 0$$

とする。$\partial f/\partial y = \partial^2 F/\partial y^2 \neq 0$ のとき, 上の方程式から y を x と v の関数として一意に表せるから, 独立変数を x, y から x, v に変更できる。$dF = u\,dx - y\,dv + d\big(yv\big)$ より $G(x,v) = yv - F$ とすると

$$dG = y\,dv - u\,dx$$

である。x, v を独立変数としたとき

$$y = y(x,v) = \frac{\partial G}{\partial v}\,, \qquad u = u(x,v) = -\frac{\partial G}{\partial x} \tag{3.1}$$

になる。独立変数を (x,y) から (x,v) に, 関数を F から G に変換することを**ルジャンドル変換**という。

ホロノミックな力学系で (1.10) が成り立つ場合を考える。ラグランジアン $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ にルジャンドル変換を適用する。$\boldsymbol{q}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ を独立変数として見なして, ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1,\,2,\,\cdots,\,n$$

を導いた。n は独立な変数の数 (自由度) である。$\dot{\boldsymbol{q}}$ の代わりに一般化運動量 (正準運動量) $\boldsymbol{p}$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を用いる。上の例で F として L, y として $\dot{\boldsymbol{q}}$ である。$\det\big(\partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j\big) \neq 0$ のとき, $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ を $\dot{q}_i$ について解けば $\dot{q}_i$ を $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ の関数として表せる。G に対応するものは

$$H = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \tag{3.2}$$

である。これを**ハミルトニアン**という。ハミルトン形式では, $2n$ 個の $q_1,\,\cdots,\,q_n,\,p_1,\,\cdots,\,p_n$ は互いに独立な変数である。(3.1) に対応して

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

が成り立つ。ラグランジュ方程式より第 2 式の左辺は $\dot{p}_i$ になるから

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{3.3}$$

である。これを**ハミルトンの運動方程式**あるいは**正準方程式**という。また, q_i, p_i を**正準変数**あるいは**正準共役量**という。

(3.3) をハミルトンの原理 (2.12)

$$\delta S = S[\,\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}+\delta\boldsymbol{p}\,] - S[\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\,] = 0\,, \qquad S[\,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\,] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,L\,, \qquad L = \sum_i \dot{q}_i p_i - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$$

から導く。(2.13) を導出したのと同様に $t=t_1,\, t_2$ では $\boldsymbol{q}$ を固定すると, L は $\dot{p}_i$ を含まなかから

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial p_i}\delta p_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \delta p_i \frac{\partial L}{\partial p_i} \right]$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta q_i \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) + \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right]$$

全ての $\delta q_i,\, \delta p_i$ は独立であるから $\delta S = 0$ であるためには (3.3) でなければならい。

(3.3) より

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.4}$$

である。H が t を直接含まない場合 H は定数になり保存する。一般に $x_i = x_i(\boldsymbol{q}, t)$ であるが, $x_i = x_i(\boldsymbol{q})$ の場合 (1.19) より

$$H = T + V - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$$

V が $\dot{\boldsymbol{q}}$ を含まないとき $H = T + V$ である。

$q_i,\ i = k+1, k+2, \cdots, n$ が循環座標, つまり, H が q_i を含まない場合 $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i = 0$ より $p_i =$ 定数 $= \alpha_i$ である。H は

$$H = H(q_1, \cdots, q_k, p_1, \cdots, p_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n, t)$$

になり, 正準方程式は

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1, \cdots, k$$

の $2k$ 個に縮小する。これを解けば $q_i = q_i(t),\, p_i = p_i(t)$ が決まる。$i \ge k$ の場合 $\dot{q}_i = \partial H/\partial \alpha_i$ から $q_i = q_i(t)$ が求まる。

例題

ポテンシャルが原点からの距離 r の関数 $V(r)$ の場合を考える。3 次元極座標を使うと (1.30) より

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) - V(r)$$

になる。x_i の正準運動量を p_i とすると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i\,, \qquad H = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p} - L = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(r)$$

である。極座標 $r,\, \theta,\, \phi$ の正準運動量を $p_r,\, p_\theta,\, p_\phi$ とすると

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\,, \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta \tag{3.5}$$

である。$p_r = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r$ であるが, (1.35) より $p_\theta = \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{e}_\phi$, $p_\phi = \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{e}_z$ であり, 正準運動量 $p_\theta,\, p_\phi$ は角運動量を表す。ハミルトニアン H は

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} \right) + V(r) \tag{3.6}$$

になる。$r,\, \theta,\, \phi,\, p_r,\, p_\theta,\, p_\phi$ は独立変数である。正準方程式より

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\,, \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}\,, \qquad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}$$
$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2\theta}{mr^3} - \frac{dV}{dr}\,, \qquad \dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}\,, \qquad \dot{p}_\phi = 0$$

である。(3.5) はハミルトンの運動方程式の結果として成り立つ。$p_\phi =$ 定数 である。(3.5) を 2 行目の式に代入すると (1.25), (1.26) になる。(1.35) の角運動量 $\boldsymbol{\ell} = p_\theta \boldsymbol{e}_\phi - p_\phi \boldsymbol{e}_\theta / \sin\theta$ は

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} &= \dot{p}_\theta \boldsymbol{e}_\phi + p_\theta \dot{\boldsymbol{e}}_\phi + \frac{\dot{\theta}\cos\theta}{\sin^2\theta} p_\phi \boldsymbol{e}_\theta - \frac{p_\phi}{\sin\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= \left(\dot{\theta}\frac{p_\phi}{\sin^2\theta} - \dot{\phi} p_\theta\right)\left(\boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\right) + \left(\dot{p}_\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\phi} p_\phi\right)\boldsymbol{e}_\phi = 0\end{aligned}$$

であり定ベクトルになる (中心力での角運動量保存則)。これから

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + V_{\rm eff}(r)\,, \qquad \dot{p}_r = -\frac{dV_{\rm eff}(r)}{dr}\,, \qquad V_{\rm eff}(r) = V(r) + \frac{\boldsymbol{\ell}^2}{2mr^2} \tag{3.7}$$

になる。$V_{\rm eff}$ は r だけの関数である。

電磁場中のラグランジアン (1.14)

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V\,, \qquad V = eA_0(\boldsymbol{r},t) - e\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

の場合

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i(\boldsymbol{r},t)\,, \qquad \boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.8}$$

になる。正準運動量 $\boldsymbol{p} \neq m\dot{\boldsymbol{r}}$ である。ハミルトニアン H は

$$H = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p} - L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + eA_0(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2m}\Big(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\Big)^2 + eA_0(\boldsymbol{r},t)$$

$H = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 + V$ ではない。

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i - eA_i}{m}$$

は (3.8) である。

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{e}{m}\Big(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\Big)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} + e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} = -e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} + e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} \tag{3.9}$$

より $\dot{p}_i = -\partial H/\partial x_i$ は

$$m\ddot{x}_i + e\frac{dA_i}{dt} = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} - e\frac{\partial A_0}{\partial x_i}$$

これは (1.15) である。なお, H は

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\boldsymbol{p}^2 - e^2\boldsymbol{A}^2\Big) + V$$

とも表せる。これから

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} + e\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(A_0 - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}\Big) = -\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} + e\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_i} - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\right)$$

とするのは誤りである。(3.8) では $\boldsymbol{r}$ と $\dot{\boldsymbol{r}}$ を独立変数と見なしたが, (3.9) では $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ が独立変数である。したがって, 上式は

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} + e\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_i} - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\right) - e\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{A}$$

である。$\dot{\boldsymbol{r}} = \big(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\big)/m$ より

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial x_i} = -\frac{e}{m}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\,, \qquad \therefore \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} = e\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_i} - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\right)$$

になる。

問題 3.1　回転座標系の場合 (1.40) より

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V + \boldsymbol{r}\cdot\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}\big) - \frac{1}{2m}\sum_\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_\alpha}\right)^2 , \qquad p_\alpha = m\dot q_\alpha + m\big(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\big)_\alpha - \frac{\partial V}{\partial \dot q_\alpha}$$

である。$\dot p_\alpha = -\,\partial H/\partial q_\alpha$ より (1.39) を導け。

3.2　位相空間

ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} , \qquad L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) , \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots n$$

は n 個の連立 **2** 階微分方程式である。n 個の $q_i(t)$ が独立変数であり, $\dot q_i$ は独立変数ではなく q_i の時間微分である。系の状態は n 個の q_i を座標する n 次元の空間の点 $\boldsymbol{q}$ として表される。この空間を**配位空間**という。$\boldsymbol{q}$ はラグランジュ方程式に従い配位空間内を運動する。ある時刻での n 個の q_i と n 個の $\dot q_i$ を与えれば運動は決まる。

一方, ハミルトンの運動方程式 (3.3) は $2n$ 個の連立 **1** 階微分方程式であり, $2n$ 個の独立変数が必要になる。この $2n$ 個の独立変数が n 個の q_i と n 個の p_i である。正準運動量の定義式 $p_i = \partial L/\partial \dot q_i$ はハミルトンの運動方程式の結果として成り立つのであって, p_i は q_i とは独立な変数である。系の状態は n 個の q_i と n 個の p_i を座標する $2n$ 次元の空間の点として表される。この空間を**位相空間**という。初期条件の数はラグランジュ方程式と同じで $2n$ 個である。

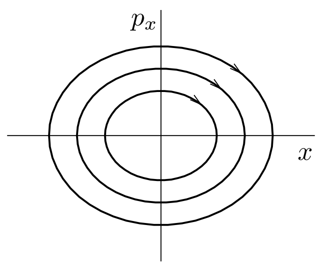
位相空間の次元は配位空間の 2 倍であり情報量が多い。配位空間の 1 点 $\boldsymbol{q}$ を与えても $\dot{\boldsymbol{q}}$ は不定であるから, 系の状態は決まらない。一方, 位相空間内の 1 点 $(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{p})$ を与えれば, 系の状態は完全に決まる。ε を微小量とするとハミルトンの運動方程式より

$$q_i(t+\varepsilon) = q_i(t) + \varepsilon\frac{\partial H(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t), t)}{\partial p_i} , \qquad p_i(t+\varepsilon) = p_i(t) - \varepsilon\frac{\partial H(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t), t)}{\partial q_i}$$

である。時刻 $t+\varepsilon$ での位相空間の点は, t での位相空間の点により一意に決まる。これを繰り返し行えば, 位相空間内での軌道が求まり, ハミルトンの運動方程式が解けたことになる。初期条件を変えれば, それに応じて様々な軌道が現れるが, これらの軌道は同時刻では決して交わらない。もし交われば, 交点を初期値とする 2 つの軌道が存在することになり, 軌道の一意性と矛盾する。H が直接 t に依存しない場合, 異なる時刻でも軌道は交わらない。

1 次元調和振動子

$$L = \frac{m}{2}\dot x^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 , \qquad \omega > 0$$



の場合

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x , \qquad H = \dot x p_x - L = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

である。$H = \text{定数} = E$ であるから

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{b^2} = 1 , \qquad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} , \qquad b = \sqrt{2mE}$$

になり, 位相空間での軌道は楕円である。t の増加とともに楕円上を時計回りに動く。初期条件で E を変えると a と b は $\sqrt{E}$ に比例して変わるから, 楕円が交わることはない。

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} , \qquad \dot p_x = -\,\frac{\partial H}{\partial x} = -\,m\omega^2 x$$

の解は

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p_x(0)}{m\omega}\sin\omega t\,, \qquad p_x(t) = p_x(0)\cos\omega t - m\omega x(0)\sin\omega t$$

である。$q = \sqrt{m\omega}\,x$ とすると

$$L = \frac{\dot q^2}{2\omega} - \frac{\omega}{2}q^2\,, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\dot q}{\omega} = \frac{p_x}{\sqrt{m\omega}}\,, \qquad \therefore \quad H = \dot q p - L = \frac{\omega}{2}\big(p^2 + q^2\big) \tag{3.10}$$

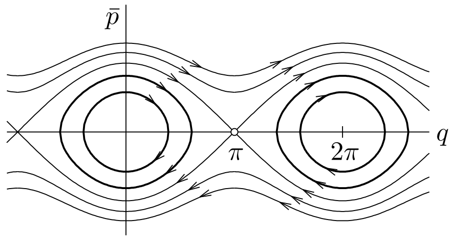
q, p の位相空間では軌道は円になる。

長さ ℓ の単振り子を考える。鉛直下向きからの角度を q とする。水平の位置 $(q = \pi/2)$ をポテンシャルの基準にとると $L = m\ell^2\dot q^2/2 + mg\ell\cos q$ である。$p = \partial L/\partial\dot q = m\ell^2\dot q$ より

$$H = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos q \tag{3.11}$$

$H =$ 一定 $= E$ である。$\mathcal{E} = E/mg\ell\,,\ \omega = \sqrt{g/\ell}$ とすると

$$\bar p^2 = \frac{p^2}{\big(m\ell^2\omega\big)^2} = 2\big(\mathcal{E} + \cos q\big) \tag{3.12}$$



になる。右図に位相空間での軌道を示す。

- $-1 < \mathcal{E} < 1$
  $|q| \le \cos^{-1}(-\mathcal{E})$ の範囲で振動し, 軌道は太い曲線で示した閉曲線になる。$\mathcal{E} \approx -1$ の場合 $q \approx 0$ になるから単振動 $q^2 + \bar p^2 = 2(1+\mathcal{E})$ である。
- $\mathcal{E} > 1$
  q に制限はない。軌道は細い曲線になり $\bar p(q)$ は周期 2π の周期関数になる。単振り子は振動ではなく回転する。
- $\mathcal{E} = 1$
  $\bar p = \pm 2\cos(q/2)$ である。$\circ$ で示した $(q, \bar p) = (\pi, 0)$ で軌道が交わる運動は存在しない。$q = \pi + \phi$, $|\phi| \ll 1$ とおくと $\dot q^2 = 2\omega^2(1+\cos q)$ は $\dot\phi = \pm\omega\phi$ になるから $q = \pi + Ce^{\pm\omega t}$ である。$C = 0$ で恒等的に $q = \pi$, または $C \ne 0$ で $q \ne \pi$ のどちらかである。

$H(q,p) = E$ は H の等高線を表す。一般に, $p = 0$ のとき $q = 2n\pi$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) は H の極小点, $q = (2n+1)\pi$ は鞍点である。

3.3 シンプレクティック表現

正準変数 q_i, p_i をまとめて 1 つの変数で表す。$2n$ 個の要素からなる x_i を

$$x_i \equiv q_i\,, \qquad x_{n+i} \equiv p_i\,, \qquad i = 1,\,2,\,\cdots,\,n \tag{3.13}$$

とし, $2n\times 2n$ 行列 M を

$$M_{ij} \equiv \delta_{i+n,j} - \delta_{i-n,j}\,, \quad \text{つまり} \quad M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \mathbf{0} = n\times n \text{ のゼロ行列} \\ \mathbf{1} = n\times n \text{ の単位行列} \end{array} \tag{3.14}$$

とする。x_i, $(\,i = 1, 2, \cdots, 2n\,)$ をシンプレクティックな変数という。

$$\text{転置行列 } \tilde M = -M = M^{-1}\,, \qquad M^2 = -\mathbf{1}\,, \qquad \det M = 1 \tag{3.15}$$

である。正準方程式 (3.3) は

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial x_{i+n}} = \sum_{j=1}^{2n} M_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\,, \qquad \dot{x}_{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2n} M_{n+i,j}\frac{\partial H}{\partial x_j}\,, \qquad i=1,\cdots,n$$

になるから

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2n} M_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \left(M\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_i, \qquad i=1,\cdots,2n \tag{3.16}$$

にまとまる。ただし $\left(\partial H/\partial \boldsymbol{x}\right)_i = \partial H/\partial x_i$ である。

3.4 ポアソン括弧

$A=A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\,,\ B=B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ のとき

$$\begin{aligned}\left[\,A\,,\,B\,\right] &\equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial x_{n+i}} - \frac{\partial A}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial B}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial x_i}M_{ij}\frac{\partial B}{\partial x_j} = \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{x}}M\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

をポアソン括弧という。

$$\left[\,x_i\,,\,B\,\right] = \sum_{j=1}^{2n} M_{ij}\frac{\partial B}{\partial x_j}\,, \qquad \left[\,A\,,\,B\,\right] = \sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial x_i}\left[\,x_i\,,\,B\,\right] \tag{3.18}$$

と表せる。したがって

$$\left[\,x_i\,,\,x_j\,\right] = M_{ij}\,, \quad \text{つまり} \quad \left[\,q_i\,,\,p_j\,\right] = \delta_{ij}\,, \quad \left[\,q_i\,,\,q_j\,\right] = \left[\,p_i\,,\,p_j\,\right] = 0 \tag{3.19}$$

であり, 正準方程式は (3.16) より

$$\dot{x}_i = \sum_j M_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \left[\,x_i\,,\,H\,\right], \quad \text{つまり} \quad \dot{q}_i = \left[\,q_i\,,\,H\,\right], \quad \dot{p}_i = \left[\,p_i\,,\,H\,\right] \tag{3.20}$$

と表せる。$A=A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ の時間微分は

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial A}{\partial x_i} + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_i \left[\,x_i\,,\,H\,\right]\frac{\partial A}{\partial x_i} + \frac{\partial A}{\partial t} = \left[\,A\,,\,H\,\right] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

である。A が時間に直接含まず $\left[\,A\,,\,H\,\right]=0$ ならば A は保存する。

ポアソン括弧は

$$\left[\,A\,,\,B\,\right] = -\left[\,B\,,\,A\,\right], \qquad \left[\,AB\,,\,C\,\right] = A\left[\,B\,,\,C\,\right] + \left[\,A\,,\,C\,\right]B \tag{3.21}$$

及びヤコビの恒等式

$$\left[\left[\,A\,,\,B\,\right],\,C\,\right] + \left[\left[\,B\,,\,C\,\right],\,A\,\right] + \left[\left[\,C\,,\,A\,\right],\,B\,\right] = 0 \tag{3.22}$$

を満たす。(3.21) は自明である。ヤコビの恒等式を証明する。$A_i = \dfrac{\partial A}{\partial x_i}\,,\ A_{ij} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j}$ とおくと

$$\left[\,A\,,\,B\,\right]_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\,A\,,\,B\,\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k\ell} A_k M_{k\ell} B_\ell = \sum_{k\ell}\Big(A_{ik}M_{k\ell}B_\ell + A_i M_{k\ell} B_{i\ell}\Big)$$

であるから

$$[\,[\,A\,,\,B\,]\,,\,C\,] = \sum_{ij} [\,A\,,\,B\,]_i M_{ij} C_j = \sum_{ijk\ell} M_{ij} M_{k\ell} \big(A_{ik} B_\ell + A_k B_{i\ell}\big) C_j$$

になる。したがって

$$\begin{aligned} &[\,[\,A\,,\,B\,]\,,\,C\,] + [\,[\,B\,,\,C\,]\,,\,A\,] + [\,[\,C\,,\,A\,]\,,\,B\,] \\ =& \sum M_{ij} M_{k\ell} \Big(\big(\underbrace{A_{ik} B_\ell}_{1} + \underbrace{A_k B_{i\ell}}_{2}\big) C_j + \big(\underbrace{B_{ik} C_\ell}_{2} + \underbrace{B_k C_{i\ell}}_{3}\big) A_j + \big(\underbrace{C_{ik} A_\ell}_{3} + \underbrace{C_k A_{i\ell}}_{1}\big) B_j \Big) \end{aligned}$$

番号を付けた項の和を S_i とする。例えば

$$S_1 = \sum M_{ij} M_{k\ell} \Big(A_{ik} B_\ell C_j + C_k A_{i\ell} B_j \Big)$$

である。第 2 項で $i,\,j,\,k,\,\ell \to k,\,\ell,\,j,\,i$ の置き換えをすると (3.15) より

$$S_1 = \sum \big(M_{ij} + M_{ji}\big) M_{k\ell} A_{ik} B_\ell C_j = 0\,, \quad \text{同様にして} \quad S_2 = S_3 = 0$$

になり, ヤコビの恒等式が成り立つ。

問題 3.2

1. ヤコビの恒等式より

$$[\,[\,A\,,\,B\,]\,,\,H\,] = [\,[\,A\,,\,H\,]\,,\,B\,] + [\,A\,,\,[\,B\,,\,H\,]\,]$$

である。

$$\frac{d}{dt}[\,A\,,\,B\,] = [\,dA/dt\,,\,B\,] + [\,A\,,\,dB/dt\,]$$

を示せ。

2. $A,\,H$ が直接 t に依存しない場合 $A_n(t) \equiv \dfrac{d^n A}{dt^n}$ は

$$A_{n+1}(t) = \big[\,A_n(t)\,,\,H\,\big]\,, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\cdots$$

を満たすことを示せ。$A_0 = A$ である。

問題 3.3　H が直接 t に依存しない場合, $A(t) = A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ をマクローリン展開すると

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A_n(0)$$

である。これから 1 次元調和振動子 (3.10) の場合

$$q(t) = q(0)\cos\omega t + p(0)\sin\omega t$$

を示せ。

4　正準変換

4.1　正準変換

正準方程式

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1,\,2,\,\cdots,\,n \tag{4.1}$$

はハミルトンの原理

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta L = 0\,, \qquad L(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t) = \sum_i \dot q_i p_i - H(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t)$$

から導ける。ところで, (1.24) と同様に, L には $dW(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t)/dt$ だけの任意性がある。

$$\tilde L(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t) = L(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t) - \frac{d}{dt}W(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t)$$

とすると

$$\tilde S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\tilde L = S - W_{12}\,, \qquad W_{12} = W\big(\boldsymbol q(t_2),\boldsymbol p(t_2),t_2\big) - W\big(\boldsymbol q(t_1),\boldsymbol p(t_1),t_1\big)$$

である。$t=t_1,\,t_2$ での $\boldsymbol q,\,\boldsymbol p$ を固定して変分するから $\delta W_{12}=0$ であり, L と $\tilde L$ は同じ正準方程式 (4.1) を与える。変数変換

$$Q_i(t) = Q_i\big(\boldsymbol q(t),\boldsymbol p(t),t\big)\,, \qquad P_i(t) = P_i\big(\boldsymbol q(t),\boldsymbol p(t),t\big) \tag{4.2}$$

を考える。$\tilde L(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t)$ を $\boldsymbol Q,\,\boldsymbol P,\,t$ で表すと

$$\tilde L = \sum_i \dot q_i p_i - H(\boldsymbol q,\boldsymbol p,t) - \frac{dW}{dt} = \sum_i \dot Q_i P_i - K(\boldsymbol Q,\boldsymbol P,t) \tag{4.3}$$

になる場合, $\delta\tilde S = 0$ より $\boldsymbol Q,\,\boldsymbol P$ の方程式は正準方程式

$$\dot Q_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\,, \qquad \dot P_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

になる。$\boldsymbol Q(t),\,\boldsymbol P(t)$ が求まれば $\boldsymbol q(t),\,\boldsymbol p(t)$ が決まる。これは (4.1) を満たす。(4.3) が成り立つ変換 (4.2) を**正準変換**という。

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i\left(\dot q_i\frac{\partial W}{\partial q_i} + \dot p_i\frac{\partial W}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial W}{\partial t}\,, \qquad \dot Q_i = \sum_j\left(\dot q_j\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + \dot p_j\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t}$$

であるから (4.3) は

$$\sum_i\Big(\dot q_i A_i - \dot p_i B_i\Big) + C = 0$$

ただし

$$A_i = p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i} - \sum_j P_j\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\,, \qquad B_i = \frac{\partial W}{\partial p_i} + \sum_j P_j\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\,, \qquad C = K - H - \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_i P_i\frac{\partial Q_i}{\partial t}$$

になる。(4.3) は任意の $\boldsymbol q,\,\boldsymbol p$ について成り立つ恒等式である。$A_i,\,B_i,\,C$ は $\dot{\boldsymbol q},\,\dot{\boldsymbol p}$ を含まないから, 恒等的に成り立つには $A_i=B_i=C=0$, つまり

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i - \sum_j P_j\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial p_i} = -\sum_j P_j\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \tag{4.4}$$

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i P_i\frac{\partial Q_i}{\partial t} \tag{4.5}$$

である。(4.4) が正準変換の条件である。(4.5) は K を与える。

- $K \neq H$ の場合 K は系のエネルギーではない。$Q_i = Q_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, $P_i = P_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ の場合, $W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ ととれば $K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ である。
- 要請として H は $\det\bigl(\partial^2 H/\partial p_i \partial p_j\bigr) \neq 0$ を満たす。これから $\dot q_i = \partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)/\partial p_i$ を $\boldsymbol{p}$ について解けば $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\bigl(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\bigr)$ と表せ, ラグランジアンは $L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ になる。一方, 正準変換した K が $\det\bigl(\partial^2 K/\partial P_i \partial P_j\bigr) = 0$ になる場合がある。この場合, $\tilde L = \tilde L(\boldsymbol{Q},\dot{\boldsymbol{Q}},t)$ とは表せないから, ラグランジュ形式には戻れない。後で $K=0$ になる場合を扱う。

正準変換の条件を簡潔な表現で表す。(3.13) と同様に

$$X_i \equiv Q_i\,, \qquad X_{n+i} \equiv P_i\,, \qquad i = 1,\,2,\,\cdots,\,n$$

とすると, (4.4) は

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2n} N_{ik} x_k - \sum_{k,\ell=1}^{2n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} N_{k\ell} X_\ell\,, \qquad N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

と表せる。N は $2n\times 2n$ 行列である。x_j で偏微分すると

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = N_{ij} - \sum_{k\ell} \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} N_{k\ell} X_\ell - \sum_{k\ell} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} N_{k\ell} \frac{\partial X_\ell}{\partial x_j}$$

i と j を入れ替えれば

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = N_{ji} - \sum_{k\ell} \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} N_{k\ell} X_\ell - \sum_{k\ell} \frac{\partial X_\ell}{\partial x_j} N_{\ell k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

両式の差より

$$N_{ij} - N_{ji} - \sum_{k\ell} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \bigl(N_{k\ell} - N_{\ell k}\bigr) \frac{\partial X_\ell}{\partial x_j} = 0 \tag{4.7}$$

(3.14) で定義した行列 M は $M_{ij} = N_{ij} - N_{ji}$ であるから

$$\sum_{k,\ell} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} M_{k\ell} \frac{\partial X_\ell}{\partial x_j} = M_{ij}$$

これは行列を用いて

$$\tilde J M J = M\,, \quad \text{ただし} \quad J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\,, \quad \tilde J_{ij} = J_{ji} \tag{4.8}$$

と表せる。$\det \tilde J = \det J$ より

$$\det\bigl(\tilde J M J\bigr) = \bigl(\det J\bigr)^2 \det M = \det M\,, \qquad \therefore \quad \det J = \pm 1 \neq 0$$

であり逆行列 J^{-1} が存在する。$\tilde J M J = M$ の逆行列をとれば $M^{-1} = -M$ より

$$J^{-1} M (\tilde J)^{-1} = M\,, \qquad \therefore \quad J M \tilde J = M \tag{4.9}$$

である。(4.4) $\Longrightarrow$ (4.9) , つまり (4.6) $\Longrightarrow$ (4.7) であるが, 逆も示せる。(4.6) の右辺を W_i とする。(4.7) が成り立つならば $\partial W_i/\partial x_j = \partial W_j/\partial x_i$ である。(1.23) と同様に, $W_i = \partial W/\partial x_i$ を満たす W が存在するから, (4.7) $\Longrightarrow$ (4.6) である。正準変換の条件は (4.8) または (4.9) になる。

(3.17) より (4.9) は

$$\bigl(J M \tilde J\bigr)_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{2n} J_{ik} M_{k\ell} J_{j\ell} = \sum_{k,\ell=1}^{2n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} M_{k\ell} \frac{\partial X_j}{\partial x_\ell} = \bigl[\, X_i\,,\, X_j\,\bigr]_x = M_{ij}$$

つまり, 正準変換の条件はポアソン括弧で

$$\big[\, Q_i \,,\, Q_j \,\big]_{(q,p)} = \big[\, P_i \,,\, P_j \,\big]_{(q,p)} = 0\,, \qquad \big[\, Q_i \,,\, P_j \,\big]_{(q,p)} = \delta_{ij} \tag{4.10}$$

と表せる。添字 (q,p) は q_i, p_i で微分することを表す。(3.19) が $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ でも成り立つことである。

問題 4.1　$\boldsymbol{x}$ は正準方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = M\partial H/\partial \boldsymbol{x}$ を満たす。時間に直接依存しない $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ の場合

$$\dot{\boldsymbol{X}} = JM\tilde{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{X}}$$

を示せ。したがって, (4.9) が正準変換の必要十分条件である。

$(J_X)_{ij} = \partial X_i/\partial x_j$, $(J_x)_{ij} = \partial x_i/\partial X_j$ とする。

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}\,, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \big(J_x J_X\big)_{ij}\,, \qquad \therefore \qquad J_x = (J_X)^{-1}$$

である。(4.9) は $J_x M \tilde{J}_x = M$ とも表せるから, 逆変換 $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{x}$ も正準変換である。次に, 2 つの正準変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ を考える。

$$J_X M \tilde{J}_X = M\,, \qquad J_Y M \tilde{J}_Y = M\,, \qquad \text{ただし} \qquad (J_X)_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\,, \qquad (J_Y)_{ij} = \frac{\partial Y_i}{\partial X_j}$$

である。$J_Z = J_Y J_X$ とすると

$$J_Z M \tilde{J}_Z = J_Y J_X M \tilde{J}_X \tilde{J}_Y = M\,, \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial Y_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \sum_k (J_Y)_{ik}(J_X)_{kj} = (J_Z)_{ij}$$

であるから $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{Y}$ は正準変換である。一般に, 正準変換を繰り返し行なった変換全体も 1 つの正準変換である。

正準不変量

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial X_k} = \sum_k J_{ki}\frac{\partial A}{\partial X_k}\,, \qquad J_{ki} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

であるから, ポアソン括弧 (3.17) は

$$\big[\, A \,,\, B \,\big]_x = \sum_{ijk\ell} J_{ki}\frac{\partial A}{\partial X_k} M_{ij} J_{\ell j}\frac{\partial B}{\partial X_\ell} = \sum \frac{\partial A}{\partial X_k}\big(JM\tilde{J}\big)_{k\ell}\frac{\partial B}{\partial X_\ell} = \sum \frac{\partial A}{\partial X_k} M_{k\ell}\frac{\partial B}{\partial X_\ell} = \big[\, A \,,\, B \,\big]_X$$

になる。ポアソン括弧は正準変換で不変である。正準変数を扱う限り, 正準変数の組を表す添字は不要である。

$J_{ij} = \partial X_i/\partial x_j$ は変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{X}$ のヤコビアンであるから

$$dX_1 \cdots dX_{2n} = \big|\det J\,\big| dx_1 \cdots dx_{2n} = dx_1 \cdots dx_{2n} \tag{4.11}$$

位相空間の体積要素は正準変換で不変である。

無限小正準変換

$$X_i = x_i + \varepsilon F_i(\boldsymbol{x}, t)\,, \qquad \varepsilon \to 0$$

が正準変換になる条件を求める。

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \varepsilon\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

を (4.8) に代入すると

$$\sum_{k\ell}\left(\delta_{ik}+\varepsilon\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)M_{k\ell}\left(\delta_{j\ell}+\varepsilon\frac{\partial F_\ell}{\partial x_j}\right)=M_{ij}+\varepsilon\sum_k\left(M_{kj}\frac{\partial F_k}{\partial x_i}+M_{ik}\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\right)=M_{ij}$$

であるから

$$\frac{\partial G_j}{\partial x_i}-\frac{\partial G_i}{\partial x_j}=0\,,\quad \text{ただし}\quad G_i=-\sum_k M_{ik}F_k=-\big(MF\big)_i$$

(1.23) と同様に, $G_i=\partial g(\boldsymbol{x},t)/\partial x_i$ である $g(\boldsymbol{x},t)$ が存在する。$F_i=\big(MG\big)_i$ より

$$X_i=x_i+\varepsilon\sum_j M_{ij}\frac{\partial g(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}=x_i+\varepsilon\big[\,x_i\,,\,g\,\big] \tag{4.12}$$

が無限正準変換である。ここで (3.18) を用いた。

無限小変換 (4.12) を無限回繰り返し行なえば, 有限の正準変換が求まる。$\boldsymbol{x}$ が変数 s の関数で, ε をパラメータ s が s から $s+ds$ に変化するときの ds とする。

$$X_i=x_i(s+ds)=x_i(s)+ds\big[\,x_i(s)\,,\,g\,\big]\,,\qquad\therefore\quad\frac{dx_i}{ds}=\big[\,x_i(s)\,,\,g\,\big] \tag{4.13}$$

である。この微分方程式を積分すると $x_i(0)$ から $x_i(s)$ が求まる。一般に, (3.18) より

$$\frac{dF(\boldsymbol{x})}{ds}=\sum_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}=\sum_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\big[\,x_i(s)\,,\,g\,\big]=\big[\,F\,,\,g\,\big] \tag{4.14}$$

になる。

(4.13) において $s=t$, $g=H$ とすれば正準方程式 (3.20) に一致する。$\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{x}(t+dt)$ はハミルトニアン H により生成される無限小正準変換で結ばれる。$\boldsymbol{x}(t_1)\to\boldsymbol{x}(t_2)$ の変換は無限小変換を無限回繰り返し行えばよいから正準変換である。(4.11) より

$$dx_1(t_1)\cdots dx_{2n}(t_1)=dx_1(t_2)\cdots dx_{2n}(t_2)$$

が成り立つ。時刻 t_1 で位相空間内の領域 D_1 内にある各点 $\boldsymbol{x}(t_1)$ が正準方程式に従い運動するとき, 時刻 t_2 では領域 D_2 を占めたとする。一般に D_1 と D_2 は形状は異なるが, 上式より体積は不変である。これを**リウビルの定理**という。

4.2　母関数

連立微分方程式 (4.4) から $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$, t の関数として表せるが, これは複雑になる。ところで, (4.2) 及びこれの逆変換により $W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ を元の変数 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ と新しい変数 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$, 合計 $4n$ 個のうちの適当な $2n$ 個の関数として表せる。元の変数を n 個, 新しい変数を n 個採用する場合, (4.4) に比べて簡単な関係式になる。

- $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{Q}$

  $W=W_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$ の場合

$$\frac{dW_1}{dt}=\sum_i\left(\dot q_i\frac{\partial W_1}{\partial q_i}+\dot Q_i\frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\right)+\frac{\partial W_1}{\partial t}$$

  になるから (4.3) は

$$\sum_i\dot q_i\left(p_i-\frac{\partial W_1}{\partial q_i}\right)-\sum_i\dot Q_i\left(P_i+\frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\right)-H+K-\frac{\partial W_1}{\partial t}=0$$

したがって

$$p_i = \frac{\partial W_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)}{\partial q_i}\,, \qquad P_i = -\frac{\partial W_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)}{\partial Q_i}\,, \qquad K = H + \frac{\partial W_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)}{\partial t} \tag{4.15}$$

である。$\det\bigl(\partial^2 W_1/\partial q_i \partial Q_j\bigr) \neq 0$ のとき第 1 式より $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ が求まり, これを第 2 式に代入すると $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ も決まる。

- $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{P}$

  $\dot{Q}P = d(QP)/dt - Q\dot{P}$ であるから

$$\sum_i \dot{q}_i p_i - H = -\sum_i Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d\tilde{W}}{dt}\,, \qquad \tilde{W} = W + \sum_i Q_i P_i$$

  になる。$\tilde{W} = W_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$ のとき

$$\sum_i \dot{q}_i \left(p_i - \frac{\partial W_2}{\partial q_i}\right) + \sum_i \dot{P}_i \left(Q_i - \frac{\partial W_2}{\partial P_i}\right) - H + K - \frac{\partial W_2}{\partial t} = 0$$

  であるから

$$p_i = \frac{\partial W_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial q_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial W_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial P_i}\,, \qquad K = H + \frac{\partial W_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial t} \tag{4.16}$$

  $\det\bigl(\partial^2 W_2/\partial q_i \partial P_j\bigr) \neq 0$ のとき第 1 式から $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$, これを第 2 式に代入して $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ が決まる。

- $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{Q}$

$$-\sum_i q_i \dot{p}_i - H = \sum_i \dot{Q}_i P_i - K + \frac{d\tilde{W}}{dt}\,, \qquad \tilde{W} = W - \sum_i q_i p_i$$

  であるから $\tilde{W} = -W_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t)$ のとき

$$q_i = \frac{\partial W_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i}\,, \qquad P_i = \frac{\partial W_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial Q_i}\,, \qquad K = H - \frac{\partial W_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial t} \tag{4.17}$$

  になる。

- $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$

$$-\sum_i q_i \dot{p}_i - H = -\sum_i Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d\tilde{W}}{dt}\,, \qquad \tilde{W} = W + \sum_i \bigl(Q_i P_i - q_i p_i\bigr)$$

  より $\tilde{W} = W_4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t)$ のとき

$$q_i = -\frac{\partial W_4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial p_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial W_4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial P_i}\,, \qquad K = H + \frac{\partial W_4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, t)}{\partial t} \tag{4.18}$$

  である。

W_k を与えると正準変換が決まるので W_k を**母関数**という。

W_2 の例として $\lambda \neq 0$ を定数とした

$$W_2 = \lambda \sum_i q_i P_i \tag{4.19}$$

の場合 (4.16) より $p_i = \lambda P_i$, $Q_i = \lambda q_i$ になるから

$$Q_i = \lambda q_i\,, \qquad P_i = \frac{1}{\lambda} p_i \tag{4.20}$$

は正準変換である。$\alpha\beta \neq 1$ のとき $Q_i = \alpha q_i$, $P_i = \beta p_i$ は正準変換ではない。(3.10) の $(x, p_x) \to (q, p)$ は $\lambda = \sqrt{m\omega}$ の場合である。$\lambda = 1$ とすると $P_i = p_i$, $Q_i = q_i$ になるから恒等変換である。

恒等変換から微小変化した母関数

$$W_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)\,, \qquad \varepsilon \to 0$$

を考える。(4.16) より

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon \frac{\partial}{\partial P_i} g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t) = q_i + \varepsilon \frac{\partial}{\partial p_i} g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \\ P_i &= p_i - \varepsilon \frac{\partial}{\partial q_i} g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t) = p_i - \varepsilon \frac{\partial}{\partial q_i} g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \end{aligned}\right\} \quad X_i = x_i + \varepsilon \sum_k M_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

ε の 2 次以上を無視するから, 右辺の $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{p}$ で置き換えた。上式は無限小正準変換 (4.12) である。

$$J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \varepsilon \sum_k M_{ik} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}$$

であるから

$$\big(J M \tilde{J}\big)_{ij} = \sum_{k\ell} J_{ik} M_{k\ell} J_{j\ell} = M_{ij} + \varepsilon \sum_{k\ell} M_{ik} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_\ell} \big(M_{\ell j} + M_{j\ell}\big) + O\big(\varepsilon^2\big)$$

$M_{\ell j} + M_{j\ell} = 0$ より正準変換の条件 (4.9) が求まる。

問題 4.2　次の変換

$$Q = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right)\,, \qquad P = q \cot p$$

に対して

$$\big[\, Q\,,\, P \,\big]_{(q,p)} = 1\,, \qquad W(q,p) = q\big(p + \cot p\big)\,, \qquad W_3(Q,p) = e^{-Q}\cos p$$

を示せ。したがって, 正準変換である。

例題：調和振動子

(3.10) の $H = \omega\big(p^2 + q^2\big)/2$ の場合, 正準変換

$$q = \sqrt{2}\, F(P) \sin Q\,, \qquad p = \sqrt{2}\, F(P) \cos Q \tag{4.21}$$

が存在するならば $K = H = \omega F^2(P)$ になる。

$$\big[\, q,\, p \,\big]_{(Q,P)} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} = 2F\frac{dF}{dP} = \frac{dF^2}{dP} = 1$$

より $F^2(P) = P$ のとき (4.21) は正準変換である。

$$K = \omega F^2(P) = \omega P\,, \qquad \therefore \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0\,, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

$P =$ 定数 $= E/\omega$, $Q = \omega t + \alpha$ とおけるから

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\, \sin\big(\omega t + \alpha\big)\,, \qquad p_x = \pm\sqrt{2mE}\, \cos\big(\omega t + \alpha\big) = m\dot{x}$$

である。

(3.10) で示したように, (q,p) の位相空間では軌道は角速度 ω で回転する。(q,p) に対して ω で回転する正準変数 (Q,P) の位相空間では, 静止した点になるだろう。そこで

$$Q = q\cos\alpha(t) - p\sin\alpha(t)\,, \qquad P = q\sin\alpha(t) + p\cos\alpha(t) \tag{4.22}$$

とする。α は時間に依存する。$\big[\,Q\,,\,P\,\big]_{(q,p)} = 1$ になるから, 任意の α に対して Q, P は正準変数であるが, Q, P の正準方程式を求めるには K が必要である。(4.4) は

$$\frac{\partial W}{\partial q} = p\sin^2\alpha - q\sin\alpha\cos\alpha\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial p} = q\sin^2\alpha + p\sin\alpha\cos\alpha$$

になるから

$$W = qp\sin^2\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\big(p^2 - q^2\big)$$

とすればよい。

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} + P\frac{\partial Q}{\partial t} = H - \frac{\dot\alpha}{2}\big(p^2+q^2\big) = \frac{\omega-\dot\alpha}{2}\big(P^2+Q^2\big)$$

である。$\dot\alpha = \omega$ とすれば $K=0$ になるから $\dot Q = \partial K/\partial P = 0\,,\ \dot P = -\,\partial K/\partial Q = 0$ である。(Q,P) の位相空間では, 運動は静止した点になる。(4.22) の逆変換より, Q, P を任意定数として

$$q = Q\cos\omega t + P\sin\omega t\,, \qquad p = P\cos\omega t - Q\sin\omega t$$

になる。$Q=q(0)$, $P=p(0)$ であるから $\big(\,q(0),\,p(0)\,\big) \leftrightarrow \big(\,q(t),\,p(t)\,\big)$ は正準変換である。

(4.22) は

$$p = \frac{q\cos\alpha - Q}{\sin\alpha}\,, \qquad P = \frac{q - Q\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

とも表せる。

$$W_1(q,Q) = \frac{\big(q^2+Q^2\big)\cos\alpha - 2qQ}{2\sin\alpha}$$

とすれば (4.15) を満たす。

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = -\,\dot\alpha\frac{q^2+Q^2-2qQ\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = -\,\frac{\dot\alpha}{2}\big(p^2+q^2\big)\,, \qquad \therefore\quad K = \frac{\omega-\dot\alpha}{2}\big(p^2+q^2\big)$$

である。

4.3　ハミルトン・ヤコビの方程式

(4.16) において

$$K = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) + \frac{\partial}{\partial t}W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) = 0$$

である W_2 が存在するならば, 正準方程式より $\dot Q_i = \dot P_i = 0$ であるから Q_i, P_i は定数になる。(4.16) より $p_i = \partial W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)/\partial q_i$ であるから

$$Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} = \text{定数}\,, \qquad H\big(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}}W_2,t\big) + \frac{\partial W_2}{\partial t} = 0\,, \qquad \partial_{\boldsymbol{q}}W_2 \equiv \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W_2}{\partial q_n}\right) \tag{4.23}$$

になる。これが $W_2 = W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$ の満たすべき方程式である。ここで, 1 階の偏微分方程式

$$H\big(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}}S,t\big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,, \qquad S = S(\boldsymbol{q},t) \tag{4.24}$$

を考える。これを**ハミルトン・ヤコビの方程式**という。ハミルトン・ヤコビの方程式は $n+1$ 個の独立変数 $\boldsymbol{q}$, t の 1 階微分の方程式であるから, S は $n+1$ 個の任意定数を含む。(4.24) は $\boldsymbol{q}$ と t についての 1 階微分だけ含むから, S が解のとき C を任意定数として $S+C$ も解になる。この付加的な定数を除いた n 個の任意定数 α_1, α_2, $\cdots$, α_n を含む解 $S=S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ を考える。S を**ハミルトンの主関数**という。

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t)\,, \qquad \beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t) = \text{定数} \tag{4.25}$$

とする。

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\right) \neq 0 \tag{4.26}$$

のとき, 第 2 式を q_i について解けば $q_i = q_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$ が求まり, これを第 1 式に代入すると $p_i = p_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$ も求まる。この q_i, p_i が正準方程式を満たすことを示す。(4.24) $\partial S/\partial t = -H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ を偏微分すると

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} = -\sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} = -\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

である。(4.25) を t で微分すると

$$\dot{p}_i = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial S}{\partial q_i \partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}$$

$$0 = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i \partial t} = \sum_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}$$

(4.26) 及び第 2 式より $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$ であり, これを第 1 式に代入すれば $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$ になる。したがって, (4.25) の $q_i = q_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$, $p_i = p_i(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$ は正準方程式 (3.3) を満たす。

$2n$ 個の連立 1 階微分方程式である正準方程式の解 $\boldsymbol{q}(t)$, $\boldsymbol{p}(t)$ は, 1 階微分方程式であるハミルトン・ヤコビの方程式 (4.24) の解 $S(\boldsymbol{q},t)$ を求めれば (4.25) で与えられる。$2n$ 個の任意定数 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ は初期条件で決まる。

(4.25) より $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ は母関数 $S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ による正準変換である。また, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ は母関数 $W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$ による正準変換であるから, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ は S の逆変換と W_2 の変換の積による正準変換である。(4.23) と比較すると, $Q_i = \beta_i$, $P_i = \alpha_i$ ならば $W_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t) = S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ になるが, これが成り立つ必要はない。

変数分離

H が t を含まない場合 (4.24) は

$$H\big(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}} S\big) + \frac{\partial}{\partial t} S(\boldsymbol{q},t) = 0$$

になるが, $S(\boldsymbol{q},t) = W(\boldsymbol{q}) + f(t)$ とすると, 上式は

$$H\big(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}} W\big) = -\frac{df}{dt}$$

である。左辺は $\boldsymbol{q}$ だけ, 右辺は t だけの関数になるが, これが恒等的に一致するには定数でなければならない。この定数を E とすると

$$H\big(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}} W\big) = E\,, \qquad S(\boldsymbol{q},t) = W(\boldsymbol{q}) - Et \tag{4.27}$$

になる。$f(t)$ に現れる付加的な積分定数は無視した。E はエネルギーである。n 個の変数 $\boldsymbol{q}$ についての 1 階微分方程式の解である $W(\boldsymbol{q})$ は, 付加的な定数を除くと $n-1$ 個の任意定数を含む。これを $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすると

$$W(\boldsymbol{q}) = W(\boldsymbol{q}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}) , \qquad \text{ただし} \quad \alpha_1 = E$$

とおける。(4.25) より

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} , \qquad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} \partial W/\partial\alpha_1 - t , & i = 1 \\ \partial W/\partial\alpha_i , & i = 2, \cdots, n \end{cases} \tag{4.28}$$

になる。

H が q_n を含まないとき (循環変数), その共役運動量 p_n は定数になるから $p_n = \alpha_n$ とする。

$$H(q_1, \cdots, q_{n-1}, \partial W/\partial q_1, \cdots, \partial W/\partial q_{n-1}, \alpha_n) = E$$

である。$W = W_n(q_n) + \tilde{W}(q_1, \cdots, q_{n-1})$ とすれば

$$H(q_1, \cdots, q_{n-1}, \partial\tilde{W}/\partial q_1, \cdots, \partial\tilde{W}/\partial q_{n-1}, \alpha_n) = E , \qquad p_n = \frac{\partial W_n}{\partial q_n} = \alpha_n$$

であるから $W_n = \alpha_n q_n$ になる。一般に, q_ℓ, $q_{\ell+1}$, $\cdots$, q_n が循環変数ならば

$$W(\boldsymbol{q}) = \tilde{W}(q_1, \cdots, q_{\ell-1}) + \sum_{i=\ell}^{n} \alpha_i q_i$$

になり $\tilde{W}$ は

$$H(q_1, \cdots, q_{\ell-1}, \partial\tilde{W}/\partial q_1, \cdots, \partial\tilde{W}/\partial q_{\ell-1}, \alpha_\ell, \cdots, \alpha_n) = E$$

で決まる。$\tilde{W}$ は新たに $\ell-2$ 個の任意定数を含む。これと $n-\ell+2$ 個の定数 $\alpha_\ell, \cdots, \alpha_n$, E と合わせて n 個の定数になる。

H の中で q_i と p_i が 1 つの関数 $f_i(q_i, p_i)$ としてまとまった形で含まれる

$$H = H\big(f_1(q_1, p_1),\, f_2(p_2, q_2),\, \cdots,\, f_n(q_n, p_n)\big)$$

の場合

$$W(\boldsymbol{q}) = \sum_i W_i(q_i)$$

とする。$p_i = \partial W/\partial q_i = dW_i(q_i)/dq_i$ より (4.27) は

$$H\big(\, h_1(q_1),\, h_2(q_2),\, \cdots,\, h_n(q_n)\,\big) = E , \qquad h_i(q_i) = f_i\big(q_i, dW_i/dq_i\big)$$

になる。上式を $h_i(q_i)$ について解けば

$$h_i(q_i) = h_i(q_i) \text{ 以外の } h_j(q_j) \text{ と } E \text{ の関数}$$

になる。これが任意の $\boldsymbol{q}$ について成り立つには

$$h_i(q_i) = f_i\big(q_i, dW_i/dq_i\big) = \text{定数} = \alpha_i , \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

でなければならない。ただし $H(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = E$ である。$f_i\big(q_i, p_i\big) = \alpha_i$ より $p_i = p_i(q, \alpha_i)$ と表せるから

$$\frac{dW_i}{dq_i} = p_i(q_i, \alpha_i) , \qquad \therefore \qquad W_i(q_i, \alpha_i) = \int dq_i\, p_i(q_i, \alpha_i)$$

になり

$$S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t)=\sum_i W_i(q_i,\alpha_i)-Et\,,\qquad E=H(\boldsymbol{\alpha})$$

である。(4.25) は

$$p_i=p_i(q_i,\alpha_i)\,,\qquad \beta_i=\frac{\partial W_i}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial E}{\partial\alpha_i}t$$

になり, これから運動が定まる。$H(\boldsymbol{\alpha})=E$ より α_n を $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},E$ で表せば

$$p_i=p_i(q_i,\alpha_i)\,,\qquad \beta_i=\begin{cases}\dfrac{\partial W_i}{\partial\alpha_i}+\dfrac{\partial\alpha_n}{\partial\alpha_i}\dfrac{\partial W_n}{\partial\alpha_n}\,, & i=1,\cdots,n-1\\[2ex] \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial E}\dfrac{\partial W_n}{\partial\alpha_n}-t\,, & i=n\end{cases}$$

である。q_i が循環変数ならば $f_i(q_i,p_i)=f_i(p_i)=$ 定数 より $p_i=$ 定数 $=\alpha_i$ になるから $W_i(q_i,\alpha_i)=\alpha_i q_i$ である。

例題

1 次元等方調和振動子 $H=p^2/2m+m\omega^2x^2/2$ の場合 (4.27) は

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2+\frac{m\omega^2}{2}x^2=E\,,\qquad \frac{dW}{dx}=\pm\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}$$

である。

$$\beta=\frac{\partial W}{\partial E}-t=\pm\int dx\,\frac{m}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}}-t=\pm\frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x\right)-t$$

より

$$x=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin\bigl(\omega t+\omega\beta\bigr)$$

である。$-$ 符号の場合 $\omega\beta+\pi$ を $\omega\beta$ と置き換えればよい。

3 次元等方調和振動子の場合

$$H=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2m}p_k^2+\frac{m\omega^2}{2}x_k^2\right)\,,\qquad \therefore\qquad \sum_k\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)^2+\frac{m\omega^2}{2}x_k^2\right)=E$$

である。$W(x_1,x_2,x_3)=W_1(x_1)+W_2(x_2)+W_3(x_3)$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_k}{dx_k}\right)^2+\frac{m\omega^2}{2}x_k^2\right)=E$$

これが恒等的に成り立つには E_k を定数として

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_k}{dx_k}\right)^2+\frac{m\omega^2}{2}x_k^2=E_k\,,\qquad E=E_1+E_2+E_3$$

である。各々は 1 次元調和振動子と同じになる。

3 次元極座標 (r,θ,ϕ) を用いれば (3.6) より

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r)\,,\qquad V(r)=\frac{m\omega^2}{2}r^2$$

である。以下の議論は $V(r)$ の具体形に依存しない。ϕ は循環座標であるから $p_\phi=$ 定数 $=\alpha_\phi$ として

$$\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{\alpha_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}=2m\bigl(E-V(r)\bigr)\,,\qquad W(r,\theta,\phi)=W_r(r)+W_\theta(\theta)+\alpha_\phi\phi$$

つまり

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} = r^2\left(2m\big(E - V(r)\big) - \left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2\right)$$

したがって, α_θ を定数として

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2\,, \qquad \left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 = 2m\big(E - V_{\rm eff}(r)\big)\,, \qquad V_{\rm eff}(r) = V(r) + \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}$$

になる。(3.7) と比較すると $\alpha_\theta^2 = \boldsymbol{\ell}^2$ である。これから $\varepsilon_r = \pm 1$, $\varepsilon_\theta = \pm 1$ として

$$W_\theta = \varepsilon_\theta \int d\theta \sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\phi^2/\sin^2\theta}\,, \qquad W_r = \varepsilon_r \int dr \sqrt{2m\big(E - V_{\rm eff}(r)\big)}$$

(4.28) は

$$\beta_r = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \int dr\, \frac{\varepsilon_r m}{\sqrt{2m\big(E - V_{\rm eff}(r)\big)}} - t \tag{4.29}$$

$$\beta_\theta = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta} = \int d\theta\, \frac{\varepsilon_\theta \alpha_\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\phi^2/\sin^2\theta}} - \int dr\, \frac{\varepsilon_r \alpha_\theta}{r^2\sqrt{2m\big(E - V_{\rm eff}(r)\big)}} \tag{4.30}$$

$$\beta_\phi = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\phi} = \int d\theta\, \frac{\varepsilon_\theta \alpha_\phi}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\phi^2/\sin^2\theta}} + \phi \tag{4.31}$$

になる。(4.31) は $V(r)$ を含まないから, 中心力ならば常に成り立つ。$\alpha_\theta^2 = \boldsymbol{\ell}^2 \ge \ell_z^2 = \alpha_\phi^2$ より

$$c_0 = \cos\theta_0 = \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta}\,, \qquad s_0 = \sin\theta_0 = \sqrt{1 - c_0^2}\,, \qquad 0 \le \theta_0 \le \pi$$

とおける。変数変換 $u = \cot\theta$ を行えば

$$\phi - \beta_\phi = \varepsilon_\theta c_0 \int du\, \frac{1}{\sqrt{s_0^2 - c_0^2 u^2}} = \varepsilon_\theta \sin^{-1}\left(\frac{c_0}{s_0}u\right)\,, \qquad \therefore \qquad \sin(\phi - \beta_\phi) = \varepsilon_\theta \frac{c_0 \cos\theta}{s_0 \sin\theta}$$

したがって

$$r\sin\theta\sin(\phi - \beta_\phi) = y\cos\beta_\phi - x\sin\beta_\phi = \varepsilon_\theta \frac{c_0}{s_0} z$$

$\boldsymbol{n} = (\sin\beta_\phi\,,\, -\cos\beta_\phi\,,\, \varepsilon_\theta c_0/s_0\,)$ とおくと $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ である。質点は原点を含み $\boldsymbol{n}$ に直交する平面上で運動する。平面と z 軸のなす角を $\varTheta$ とすると

$$\boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{e}_z = \varepsilon_\theta \frac{c_0}{s_0} = |\boldsymbol{n}|\cos\varTheta = \frac{\cos\varTheta}{s_0}\,, \qquad \therefore \qquad \varTheta = \theta_0\,,\ \ \pi - \theta_0$$

いずれにしろ, z 軸とのなす角は $\theta_0 = \cos^{-1}(\alpha_\phi/\alpha_\theta) = \cos^{-1}(\ell_z/|\boldsymbol{\ell}|)$ である。$\phi = \beta_\phi$ のとき $\theta = \pi/2$ である。軌道上の 2 点

$$\boldsymbol{r} = r\big(\cos\phi\sin\theta,\, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta\,\big)\,, \qquad \boldsymbol{r}_0 = r_0\big(\cos\beta_\phi,\, \sin\beta_\phi, 0\,\big)$$

の間のなす角を φ とすると

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}_0|}{rr_0} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2(\phi - \beta_\phi)} = \frac{\cos\theta}{s_0}$$

である。

(4.29) から $r = r(t)$ が決まる。(4.30)

$$\int dr\,\frac{\alpha_\theta}{r^2\sqrt{2m\big(E-V_{\rm eff}(r)\big)}} = f(\theta)+\frac{\pi}{4}\,,\qquad f(\theta) = \int d\theta\,\frac{\varepsilon_r\varepsilon_\theta}{\sqrt{1-c_0^2/\sin^2\theta}} - \varepsilon_r\beta_\theta - \frac{\pi}{4}$$

は r と θ の関係を与え軌道が求まる。$u=\cos\theta$ とすると

$$\int d\theta\,\frac{1}{\sqrt{1-c_0^2/\sin^2\theta}} = -\int du\,\frac{1}{\sqrt{s_0^2-u^2}} = -\sin^{-1}\frac{u}{s_0} = -\varphi$$

になるから

$$f(\theta) = -\varepsilon_r\varepsilon_\theta\big(\varphi+\varphi_0\big)\,,\qquad \varphi_0 = \varepsilon_\theta\beta_\theta + \frac{\pi}{4}\varepsilon_r\varepsilon_\theta$$

である。$V(r) = m\omega^2 r^2/2$ の場合 $x = r^2$ とすると

$$\int dr\,\frac{\alpha_\theta}{r^2\sqrt{2m\big(E-V_{\rm eff}(r)\big)}} = \frac{1}{2}\int dx\,\frac{\alpha_\theta}{x\sqrt{-(m\omega)^2x^2+2mEx-\alpha_\theta^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{mEx-\alpha_\theta^2}{mx\sqrt{E^2-\omega^2\alpha_\theta^2}}\right)$$

になるから

$$\frac{mEr^2-\alpha_\theta^2}{mr^2\sqrt{E^2-\omega^2\alpha_\theta^2}} = \sin\big(2f+\pi/2\big) = \cos 2f = \cos^2(\varphi+\varphi_0)-\sin^2(\varphi+\varphi_0)$$

したがって

$$\frac{r^2\cos^2(\varphi+\varphi_0)}{a_-^2} + \frac{r^2\sin^2(\varphi+\varphi_0)}{a_+^2} = 1\,,\qquad a_\pm^2 = \frac{\alpha_\theta^2/m}{E\pm\sqrt{E^2-\omega^2\alpha_\theta^2}}$$

になるから軌道は楕円である。

4.4　作用変数と角変数

H が直接 t に依存しない場合のハミルトン・ヤコビの方程式 (4.27), (4.28) は次のようにしても導ける。$\boldsymbol{Q}$ が循環座標になる正準変換を考える。母関数を $W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P})$ とすると

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}\,,\qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}\,,\qquad K(\boldsymbol{P}) = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

である。$\dot P_i = -\,\partial K/\partial Q_i = 0$ より P_i は定数である。$\dot Q_i = \partial K/\partial P_i$ も定数になるから

$$Q_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}t + \beta_i\,,\qquad \beta_i = \text{定数}$$

である。特に, $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = H(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}}W) = P_1$ を満たすように W を採用すれば, $K = P_1$ より

$$P_1 = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = H(\boldsymbol{q},\partial_{\boldsymbol{q}}W)\,,\qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \begin{cases} t+\beta_1\,, & i=1 \\ \beta_i\,, & i = 2,\,\cdots,\,n \end{cases}$$

である。定数 P_i を α_i とおけば (4.27), (4.28) である。

P_1 はエネルギー E であるが, これに共役な正準変数 Q_1 は時間 t である。周期運動の場合, Q_1 と P_1 の代わりに, 1 周期すると 2π 増加する変数 θ とこれに共役な正準変数 J を用いると便利である。1 次元の運動を考える。$H(q,p) = E$ を p について解けば $p = p(q,E)$ である。$p = \partial W/\partial q$ より

$$W(q,E) = \int dq\,p(q,E)$$

と表せる。したがって

$$Q = \frac{\partial W}{\partial E} = \int dq\,\frac{\partial p(q,E)}{\partial E}$$

である。位相空間 (q,p) における軌道が閉曲線 C になる場合, 運動の周期 T は C を 1 周するのに要する時間である。$Q = t + \beta$ であるから

$$T = \oint_{\mathrm{C}} dq\,\frac{\partial p}{\partial E}$$

になる。閉曲線 C に沿った線積分である。

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}} dq\,p(q,E) \tag{4.32}$$

とする。閉曲線 C は E を与えると決まるから J は E だけの関数 $J = J(E)$ である。E は q に依存しないから

$$T = \frac{\partial}{\partial E}\oint_{\mathrm{C}} dq\,p(q,E) = 2\pi\frac{dJ}{dE}$$

と表せる。$q = q(t)$ を求めなくても, $J = J(E)$ さえ分かれば, 周期運動の周期は求まる。

$P = E$ の代わりに J を正準変数にとり, これに共役な変数を θ とする。E を J で表して母関数

$$W(q,J) = \int dq\,p(q,J)$$

による正準変換 $(q,p) \to (\theta,J)$ を考える。(4.16) において Q, P をそれぞれ θ, J に置き換える。第 1 式は単に

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\int dq\,p(q,J) = p(q,J)$$

である。第 2 式は $\theta = \partial W(q,J)/\partial J$ である。これを q について解けば $q = q(\theta,J)$ と表せる。$K = H = E(J)$ であるから正準方程式より

$$\dot{J} = -\frac{\partial K}{\partial\theta} = 0\,, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{dE}{dJ} = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad \therefore \qquad J = \text{定数}\,, \quad \theta = \frac{2\pi\big(t+\beta\big)}{T} \tag{4.33}$$

になる。軌道を 1 周すると θ は 2π 増加する。θ は回転の回転角と同じ変化をするから θ を**角変数**, θ に共役な正準変数 J を**作用変数**という。

調和振動子

$H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$ の場合, $q = \sqrt{2E/m\omega^2}\,\sin\phi$ とおくと

$$p = \pm\sqrt{2m(E - m\omega^2 q^2/2)} = \pm\sqrt{2mE}\,|\cos\phi| = \sqrt{2mE}\,\cos\phi$$

になるから

$$W = \int dq\,p = \frac{2E}{\omega}\int d\phi\,\cos^2\phi = \frac{E}{\omega}\left(\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi\right), \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint dq\,p = \frac{E}{\omega} \tag{4.34}$$

である。周期 $T = 2\pi\,dJ/dE = 2\pi/\omega$ は直ちに求まる。$\theta = \partial W(q,J)/\partial q$ では q と J を独立変数として W を J で微分するから

$$\theta = \phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi + J\frac{\partial\phi}{\partial J}\big(1 + \cos 2\phi\big)$$

$\sin\phi(q,J) = \sqrt{m\omega/2J}\,q$ より

$$\frac{\partial\phi}{\partial J}\cos\phi = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\,\frac{q}{J} = -\frac{\sin\phi}{2J}\,, \qquad \therefore \qquad \theta = \phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi - \frac{\sin\phi}{2\cos\phi}\big(1+\cos 2\phi\big) = \phi$$

である。したがって

$$W(\theta,J)=\frac{J}{2}\Big(2\theta+\sin 2\theta\Big)\,,\qquad q=\sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\,\sin\theta\,,\qquad p=\sqrt{2m\omega J}\cos\theta \tag{4.35}$$

(4.33) を代入すると $q=q(t)$, $p=p(t)$ が求まる。上式は正準変換 (4.21) である。

問題 4.3　単振り子 (3.12) で $|\mathcal{E}|<1$ の場合 $\cos q_0=-\mathcal{E}$, $0<q_0<\pi$ とすると

$$J=\frac{4m\ell^2\omega}{2\pi}\int_0^{q_0}dq\,\sqrt{2\big(\cos q-\cos q_0\big)}=\frac{4m\ell^2\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/2}dx\,\frac{4k^2\cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

$$T=2\pi\frac{dJ}{dE}=\frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

を示せ。ただし $k=\sin(q_0/2)$ である。T の定積分は第 1 種完全楕円積分 $K(k)$ である。

4.5　断熱不変量

時間に依存する外力が質点に作用し周期的運動をする場合を考える。外力の効果を H がパラメータ $\lambda(t)$ に依存する形で表し $H=H(q,p,\lambda)$ とする。エネルギー $E=H(p,q,\lambda)$ は正準方程式より

$$\frac{dE}{dt}=\dot q\frac{\partial H}{\partial q}+\dot p\frac{\partial H}{\partial p}+\dot\lambda\frac{\partial H}{\partial\lambda}=\dot\lambda\frac{\partial H}{\partial\lambda} \tag{4.36}$$

である。λ が一定ならば E は保存し, $E=H(q,p,\lambda)$ で決まる閉曲線上を質点は周期運動する。

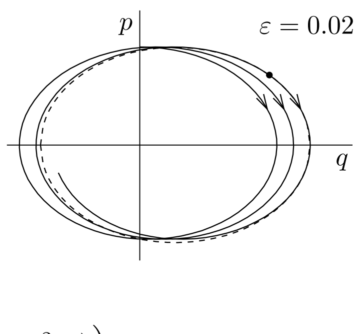
λ が t に依存すると, E は保存せず軌道は閉じない。$\lambda(t)$ がゆっくり変化 (**断熱変化**) する場合を考える。$E(t)$ の時間変化は $\lambda(t)$ によるゆっくりした変化と $q(t)$, $p(t)$ による早い変化からなる。断熱変化の場合, 運動は近似的に周期運動をする。この周期性のため $q(t)$, $p(t)$ による時間変化は, 1 周期で平均化すれば, ゆっくりしたものになるだろう。平均化した $\langle\,E\,\rangle$ は長い時間スケールにわたって $\lambda(t)$ の効果を概観するには適している。更に, E と λ の適当な組み合わせで, 平均化すると近似的に時間変化しない量が存在する。この量を**断熱不変量**という。断熱不変量はゆっくり変化する外力の影響をほとんど受けないという重要な性質をもつ。

簡単な例として, 調和振動子に時間に比例する外力 $m\omega^2\lambda(t)$, $\lambda(t)=\lambda_0\omega t$ が作用する場合

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}q^2-m\omega^2\lambda q=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\big(q-\lambda\big)^2-\frac{m\omega^2}{2}\lambda^2$$

を考える。$\tau=\omega t$ とする。運動方程式 $d^2q/d\tau^2=-q+\lambda_0\tau$ の解は $q(0)=0$ のとき

$$q=A\sin\tau+\lambda_0\tau=A\big(\sin\tau+\varepsilon\tau\big)\,,\qquad p=m\dot q=m\omega A\big(\cos\tau+\varepsilon\big)\,,\qquad \lambda_0=A\,\varepsilon$$

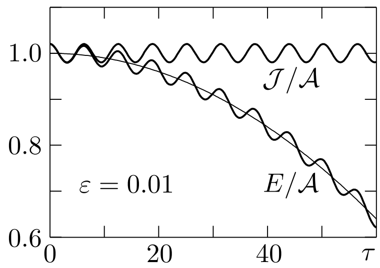


になる。$A>0$ での軌道を右図に示す。時間の経過とともに軌道は q の正方向に移動し閉じない。ある時刻 t の位置を $\bullet$ で示す。破線は λ を $\lambda(t)$ に固定した楕円軌道 C である。$|\varepsilon|\ll 1$ のとき t を中心とした 1 周期程度では, 軌道は C に近い。エネルギー E は

$$E(t)=\mathcal{A}\Big(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\tau-\varepsilon^2\tau^2\Big)\,,\qquad \mathcal{A}=\frac{m\omega^2A^2}{2}$$

であり, t を中心とした 1 周期 $T=2\pi/\omega$ での平均 $\langle\,E\,\rangle$ は

$$\langle\,E\,\rangle=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}ds\,E(s)=\mathcal{A}\Big(1-(\varepsilon\tau)^2+\varepsilon^2\big(1-\pi^2/3\big)\Big) \tag{4.37}$$



になる。周期的運動に伴う早い時間変化 $\cos\tau$ は 1 周期で平均すると 0 である。右図に E を太い曲線で, $\langle E\rangle$ を細い曲線で示す。$\langle E\rangle$ は外力によるゆっくりした時間変化をし, E は $\langle E\rangle$ のまわりに振幅 $O(\varepsilon)$ で早い時間変化 $\cos\tau$ をする。右図には

$$\mathcal{J} = E + m\omega^2\lambda^2/2 = \mathcal{A}\Big(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\tau\Big)$$

も示した。$\langle \mathcal{J}\rangle = \mathcal{A}\big(1+\varepsilon^2\big)$ は定数になるから断熱不変量である。ところで, 作用変数 J

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}} dq\, p\,, \qquad \frac{p^2}{2m} = E + \frac{m\omega^2}{2}\lambda^2 - \frac{m\omega^2}{2}\big(q-\lambda\big)^2$$

は (4.34) で E を $E + m\omega^2\lambda^2/2$ と置き換えればよいから $\omega J = E + m\omega^2\lambda^2/2 = \mathcal{J}$ である。この例では, 任意の ε に対して $\langle J\rangle$ は定数になる。

一般に, 断熱変化では $\langle J\rangle$ は近似的に一定で断熱不変量になることを示す。λ を $\lambda(t)$ に固定したとき $H\big(q,p,\lambda\big) = E$ で決まる閉曲線を C, 周期を T とする。J を

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}} dq\, p\big(q, E, \lambda\big) \tag{4.38}$$

で定義する。(4.38) より $E = E(J,\lambda)$ と表せ $p = p(q,J,\lambda)$ になる。母関数

$$W(q,J,\lambda) = \int dq\, p(q,J,\lambda) \tag{4.39}$$

による正準変換 $(q,p) \to (\theta, J)$ を考える。$\theta = \partial W(q,J,\lambda)/\partial J$ である。これを q について解けば $q = q(\theta,J,\lambda)$ と表せる。W は $\lambda(t)$ のため時間に直接依存するから

$$K(\theta,J) = H(p,q,\lambda) + \frac{\partial W}{\partial t} = E(J,\lambda) + \dot\lambda\varLambda(\theta,J,\lambda)\,, \qquad \varLambda(\theta,J,\lambda) = \frac{\partial W(q,J,\lambda)}{\partial\lambda}$$

になる。q, J を独立変数として W を λ で微分し, その後で $q = q(\theta,J,\lambda)$ に置き換え $\varLambda(\theta,J,\lambda)$ が決まる。正準方程式は

$$\dot J = -\frac{\partial K}{\partial\theta} = -\dot\lambda\frac{\partial\varLambda}{\partial\theta}\,, \qquad \dot\theta = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{\partial E}{\partial J} + \dot\lambda\frac{\partial\varLambda}{\partial J} \tag{4.40}$$

である。$\dot J$ の平均値は

$$\langle \dot J\rangle = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds\,\frac{dJ}{ds} = -\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds\,\dot\lambda(s)\frac{\partial\varLambda}{\partial\theta} = -\frac{\dot\lambda(t)}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds\,\frac{\partial\varLambda}{\partial\theta} + O\big(\ddot\lambda\big)$$

になる。ただし $\dot\lambda(s) = \dot\lambda(t) + (s-t)\ddot\lambda(t) + \cdots = \dot\lambda(t) + O\big(\ddot\lambda\big)$ である。(4.38), (4.39) より C を 1 周すると W は $2\pi J$ だけ増加するが, $\varLambda = \partial W/\partial\lambda$ は J と λ を独立として微分するから $\varLambda$ はもとの値に戻る。$\theta = \partial W/\partial J$ は 2π 増加するから $\varLambda(\theta+2\pi) = \varLambda(\theta)$ である。これから $\varLambda$ は

$$\varLambda(\theta,J,\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(J,\lambda)e^{ik\theta}$$

とフーリエ展開でき

$$\langle \dot J\rangle = -\sum_k \frac{ik\dot\lambda}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds\, a_k(s)e^{ik\theta(s)} + O\big(\ddot\lambda\big)\,, \qquad a_k(s) = a_k(J(s),\lambda(s))$$

である。$k=0$ は寄与しない。(4.40) より $a_k(s)=a_k(t)+O\big(\dot\lambda\big)$, $\dot\theta(s)=2\pi/T+O\big(\dot\lambda\big)$ であるから

$$\langle\,\dot J\,\rangle=-\sum_k\frac{ik}{2\pi}\dot\lambda a_k(t)\int_0^{2\pi}d\theta\,e^{ik\theta}+O\big(\dot\lambda^2,\,\ddot\lambda\big)=0+O\big(\dot\lambda^2,\,\ddot\lambda\big)$$

したがって, J は断熱不変量である。一方, $\dot E=\dot\lambda\,\partial H/\partial\lambda$ より $\langle\,\dot E\,\rangle=O\big(\dot\lambda\big)$ になる。なお, T の時間依存性を無視すれば

$$\langle\,\dot J\,\rangle=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}ds\,\frac{dJ}{ds}=\frac{J(t+T/2)-J(t-T/2)}{T}=\frac{1}{T}\frac{d}{dt}\int_{t-T/2}^{t+T/2}ds\,J(s)=\frac{d}{dt}\langle\,J\,\rangle$$

である。

調和振動子

ω が時間に依存する調和振動子を考える。(4.38) の経路 C は $\omega(t)$ を固定したときの閉曲線であるから (4.34), (4.35) はそのまま使える。$\mathit{\Lambda}(\theta,J,\omega)=\partial W(q,J,\omega)/\partial\omega$ を求めるとき $\theta=\theta(q,J,\omega)$ として ω で微分する。(4.35) より

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\,q\,,\qquad\therefore\qquad\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2\omega J}}\,q=\frac{\sin\theta}{2\omega}$$

であるから

$$\mathit{\Lambda}(\theta,J,\omega)=J\big(1+\cos2\theta\big)\frac{\partial\theta}{\partial\omega}=\frac{J}{2\omega}\sin2\theta\,,\qquad\therefore\qquad K=H+\dot\omega\mathit{\Lambda}=\omega J+\frac{\dot\omega}{2\omega}J\sin2\theta$$

(4.40) は

$$\dot J=-\frac{\partial K}{\partial\theta}=-\frac{\dot\omega}{\omega}J\cos2\theta\,,\qquad\dot\theta=\frac{\partial K}{\partial J}=\omega+\frac{\dot\omega}{2\omega}\sin2\theta\tag{4.41}$$

になる。

$\omega(t)$ がゆっくり変化する断熱変化の場合, $t_0-T/2\le t\le t_0+T/2$ の間では ε を微小量として

$$\omega(t)=\omega_0\Big(1+\varepsilon\omega_0(t-t_0)\Big)\,,\qquad T=2\pi/\omega_0$$

とおける。ε の 2 次以上を無視すると, θ の運動方程式は

$$\dot\theta=\omega_0\left(1+\varepsilon\tau+\frac{\varepsilon}{2}\sin2\theta\right)\,,\qquad\tau=\omega_0(t-t_0)\,,\quad-\pi\le\tau\le\pi$$

になるから

$$\theta=\int\frac{d\tau}{\omega_0}\,\dot\theta=\tau+\frac{\varepsilon}{2}\tau^2+\frac{\varepsilon}{2}\int d\tau\sin2\theta=\tau+\frac{\varepsilon}{2}\tau^2+\frac{\varepsilon}{2}\int d\tau\sin2\tau=\theta_0+\tau+\frac{\varepsilon}{2}f(\tau)$$

ただし $f(\tau)=\tau^2+(1-\cos2\tau)/2$ である。ε の 2 次までで

$$\frac{\dot J}{J}=-\,\omega_0\varepsilon\big(1-\varepsilon\tau\big)\cos2\theta=-\,\omega_0\varepsilon\cos\big(2\tau+2\theta_0\big)+\omega_0\varepsilon^2\Big(\tau\cos\big(2\tau+2\theta_0\big)+f(\tau)\sin\big(2\tau+2\theta_0\big)\Big)$$

である。1 周期で平均すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\tau\,\frac{\dot J}{J}=\frac{3}{4}\omega_0\varepsilon^2\sin2\theta_0$$

になり ε の 1 次は現れない。J の平均は断熱不変量である。

問題 4.4 (4.41) より $\dot q=p/m\,,\,\dot p=-\,m\omega^2q$ を示せ。(4.41) は厳密な方程式である。

運動方程式が解析的に解ける例として, 時間に依存する外力 $m\omega^2\lambda(t)$ が作用する調和振動子

$$E(t) = H(q,p,\lambda) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 - m\omega^2\lambda q$$

つまり

$$E + \frac{m\omega^2}{2}\lambda^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\big(q-\lambda\big)^2$$

を改めて考える。ω は定数である。(4.34), (4.35) で $E \to E + m\omega^2\lambda^2/2$, $q \to q-\lambda$ と置き換えれば

$$E = \omega J - \frac{m\omega^2}{2}\lambda^2\,, \qquad W(\theta,J,\lambda) = \frac{J}{2}\Big(2\theta + \sin 2\theta\Big) \tag{4.42}$$

$$q = \lambda + \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin\theta\,, \qquad p = \sqrt{2m\omega J}\cos\theta \tag{4.43}$$

になる。$\omega = \omega(t)$ の場合と同様に, $\Lambda = \partial W/\partial\lambda$ では $\theta = \theta(q,J,\lambda)$ として λ で微分するから

$$\Lambda(\theta,J,\lambda) = \frac{\partial W(q,J,\lambda)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = J\big(1+\cos 2\theta\big)\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$$

であるが, (4.43) の第 1 式を λ で微分すると

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = -\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\,\frac{1}{\cos\theta}\,, \qquad \therefore \qquad \Lambda(\theta,J,\lambda) = -\sqrt{2m\omega J}\cos\theta$$

である。したがって

$$K(\theta,J,\lambda) = H + \dot\lambda\Lambda = \omega J - \frac{m\omega^2}{2}\lambda^2 - \sqrt{2m\omega J}\,\dot\lambda\cos\theta$$

になる。正準方程式は

$$\dot J = -\frac{\partial K}{\partial\theta} = -\sqrt{2m\omega J}\,\dot\lambda\sin\theta\,, \qquad \dot\theta = \frac{\partial K}{\partial J} = \omega - \sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\,\dot\lambda\cos\theta \tag{4.44}$$

$Z = \sqrt{2J/m\omega}\,e^{i\theta}$ とすると $\dot Z = i\omega Z - i\dot\lambda$ になるから, C を複素定数として

$$Z = Ce^{i\omega t} - i\int_0^t ds\,\dot\lambda(s)e^{i\omega(t-s)} = Ce^{i\omega t} + \frac{1}{\omega}\int_0^t ds\,\dot\lambda(s)\frac{d}{ds}e^{i\omega(t-s)}$$

である。部分積分すると

$$Z = De^{i\omega t} + \frac{\dot\lambda(t)}{\omega} - \frac{1}{\omega}\int_0^t ds\,\ddot\lambda(s)e^{i\omega(t-s)}\,, \qquad D = C - \frac{\dot\lambda(0)}{\omega} \tag{4.45}$$

になる。断熱変化では $\ddot\lambda \approx 0$ であり, 最後の積分項は無視できる。A, α を実数として $D = Ae^{i\alpha}$ とおくと

$$J = \frac{m\omega}{2}|Z|^2 = \frac{m\omega A^2}{2} + mA\dot\lambda\cos(\omega t+\alpha) + \frac{m\dot\lambda^2}{2\omega} + O\big(\ddot\lambda\big)\,, \qquad E = \omega J - \frac{m\omega^2\lambda^2}{2}$$

1 周期 $T = 2\pi/\omega$ について時間平均をとると

$$\langle\, J\,\rangle = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds\,J(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\,J(t+x/\omega)\,, \qquad \langle\, E\,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\,E(t+x/\omega)$$

であるが

$$\dot\lambda(t+x/\omega) = \dot\lambda(t) + O\big(\ddot\lambda\big)\,, \qquad \lambda(t+x/\omega) = \lambda(t) + \frac{x}{\omega}\dot\lambda(t) + O\big(\ddot\lambda\big)$$

より

$$\langle\, J\,\rangle = \frac{m\omega A^2}{2} + \frac{m\dot{\lambda}^2}{2\omega} + O\big(\ddot{\lambda}\big)\,, \qquad \langle\, E\,\rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\lambda^2 + \frac{m}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right)\dot{\lambda}^2 + O\big(\ddot{\lambda}\big)$$

になる。$\ddot{\lambda}$, $\dot{\lambda}^2$ を無視すると $\langle\, J\,\rangle$ は一定になり断熱不変量であるが, $\langle\, E\,\rangle$ は λ^2 でゆっくり時間変化する。$\lambda = A\varepsilon\omega t$ の場合 ($\ddot{\lambda} = 0$), $\langle\, E\,\rangle$ は (4.37) である。

Z の定義より $\mathrm{Im}\, Z = q - \lambda$ であるから, 運動方程式 $\ddot{q} + \omega^2 q = \omega^2\lambda$ は

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Im}\, Z + \omega^2 \mathrm{Im}\, Z = -\,\ddot{\lambda}$$

になる。(4.45) の $\mathrm{Im}\, Z$ はこの方程式の一般解である。

問題 4.5　(4.43), (4.44) より $\dot{q} = p/m$, $\dot{p} = -\, m\omega^2\big(q - \lambda\big)$ を示せ。

索 引