

目次

1	単位	1
2	原子核の大きさ	2
2.1	古典力学によるラザフォード散乱	2
2.2	量子力学によるラザフォード散乱	6
2.3	核子密度分布	8
3	角運動量	10
3.1	角運動量の量子力学	10
3.2	スピン	12
3.3	角運動量の合成	15
3.4	回転と角運動量	17
4	アイソスピン	20
4.1	アイソスピン	20
4.2	アイソスピン不変性	21
5	2核子系と核力	25
5.1	2核子系	25
5.2	核力	27
6	結合エネルギー	33
6.1	結合エネルギー	33
6.2	質量公式	34
6.3	原子核の存在領域	38
6.4	フェルミガス模型	41
7	調和振動子	45
7.1	1次元調和振動子	45
7.2	3次元調和振動子	48
8	平均場近似	53
8.1	一体ポテンシャル	53
8.2	スピン軌道力	56
8.3	原子核のスピン	59
8.4	磁気モーメント	60
A	合流型超幾何微分方程式	62

1 単位

原子核を扱うとき長さやエネルギーの単位は通常以下のものを使う。

- 長さ 長さの単位として fm (フェルミと読む) をつかう。1 fm = 10^{-15} m
- エネルギー MeV (メブ, メガ電子ボルト) = 10^6 eV, GeV (ジエブ, ギガ電子ボルト) = 10^9 eV
- 質量 mc^2 の次元は [エネルギー] になるから m を [エネルギー]/ c^2 で表す。陽子 (proton), 中性子 (neutron), 電子 (electron) の質量をそれぞれ m_p, m_n, m_e とすると

$$m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2 \approx 1 \text{ GeV}/c^2, \quad m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2 \approx 1 \text{ GeV}/c^2$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \approx 0.5 \text{ MeV}/c^2$$

- 運動量 速度 × 運動量 の次元は [エネルギー] であるから, 速度として c を用いて運動量を MeV/ c や GeV/ c で表す。
- クーロンポテンシャル 真空中での電荷 Q_1, Q_2 間のクーロンポテンシャル $V(r)$ は

$$V(r) = k_c \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

であり, 比例定数 k_c は用いる単位系で異なる。有理 MKS 単位系では $k_c = 1/(4\pi\epsilon_0)$, CGS 静電単位系では $k_c = 1$, ローレンツ・ヘビサイド単位系では $k_c = 1/(4\pi)$ である。電荷を電気素量 e 単位で表わし, $Q_1 = eq_1, Q_2 = eq_2$ とすると

$$V(r) = \frac{\alpha \hbar c q_1 q_2}{r}, \quad \alpha = \frac{k_c e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.04} \approx \frac{1}{137} \quad (1.1)$$

になる。無次元の定数 α を微細構造定数という。電気素量 e の値は単位系で異なるが, α は単位系に依らない。

ここで与えた α , 質量の近似値及び

$$\hbar c = 197.327 \text{ MeV fm} \approx 200 \text{ MeV fm}$$

は覚えておくべき数値である。 m, \hbar, e^2 などを $mc^2, \hbar c, \alpha$ で表すようにすると, 物理量の次元や概算値が簡単に求まる。(1.1) で $V(r)$ と $\hbar c/r$ は [エネルギー], q は無次元であるから, α は無次元である。電子のボーア半径 a_B は

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar c}{m_e c^2 \alpha} \approx \frac{200 \times 137}{0.5} \text{ fm} \approx 0.55 \times 10^5 \text{ fm} = 0.55 \text{ \AA}$$

である。 $\hbar c/(m_e c^2 \alpha)$ ならば長さの次元になることは容易に分かる。

素粒子・原子核では \hbar と c が無次元で $\hbar = 1, c = 1$ とする自然単位 (natural unit) をよく使う。この単位系では [エネルギー] = [質量] = [時間] $^{-1}$ = [長さ] $^{-1}$ になる。

問 1.1 陽子-陽子間の距離が 1 fm のときクーロンポテンシャルは何 MeV か。また, 陽子間に働く重力とクーロン力の比を求めよ。重力定数は $G/\hbar c = 6.71 \times 10^{-39} (c^2/\text{GeV})^2$ である。

問 1.2 $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ と $\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ がエネルギーの次元になることを示せ。

問 1.3 運動量 p を $p = \hbar q$ とする。 q の次元が [長さ] $^{-1}$ になることを示せ。 $p = 500 \text{ MeV}/c$ のとき q は何 fm^{-1} か。

2 原子核の大きさ

2.1 古典力学によるラザフォード散乱

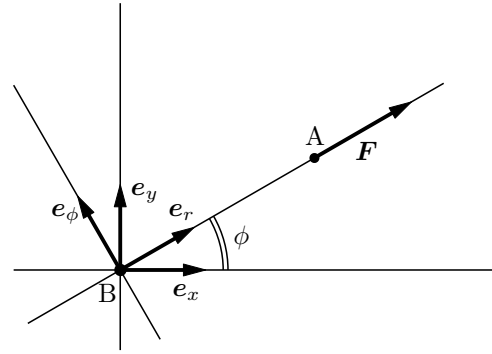
電荷 $Z_A e$ の軽い粒子 A が電荷 $Z_B e$ の重い粒子 B のクーロン力により散乱される問題を古典力学で考える。B も A から力を受けるが、重いので原点に静止しているとする。A の質量を m 、位置ベクトルを \mathbf{r} とすると、A の運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} = f(r)\mathbf{e}_r, \quad f(r) = \frac{f_c}{r^2}, \quad f_c = Z_A Z_B \alpha \hbar c \quad (2.1)$$

ただし、 $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ である ($\dot{}$ は時間微分を表すニュートンの記号)。上の両辺と \mathbf{r} のベクトル積をとると、 \mathbf{r} と \mathbf{e}_r は平行であるから $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = 0$ になる。これから、角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ の時間変化は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

になり、角運動量の大きさと方向は時間に依らず一定である (角運動量保存則)。ところで \mathbf{r} , \mathbf{v} は \mathbf{L} に垂直であるから、 \mathbf{r} と \mathbf{v} を含む平面も一定になり、運動は \mathbf{L} に垂直な平面内で行われる。この運動平面内に B を原点 O とする x - y 座標を考え、A の極座標を r , ϕ とする。 x 方向、 y 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y とし、 r 方向、 ϕ 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϕ とすると



$$\mathbf{e}_r = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

である。 \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y は時間に依らないが、 \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϕ は質点の運動とともに向きが変わり時間に依存する。これらの時間微分を求めると

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{d\phi} = \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \quad (2.2)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{d\phi} = \dot{\phi} (-\cos \phi \mathbf{e}_x - \sin \phi \mathbf{e}_y) = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r \quad (2.3)$$

$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ であるから

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (2.4)$$

したがって、角運動量 \mathbf{L} は

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) = mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z \quad (2.5)$$

となる。ただし、 \mathbf{e}_z は xy 平面に垂直な z 軸方向の単位ベクトルである。角運動量は保存するから、 $L = mr^2\dot{\phi}$ は一定である。これから $\dot{\phi}$ は

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \quad (2.6)$$

と表せる。これを使うと、力学的エネルギー E は

$$E = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.7)$$

となる。ただし、 $V(r)$ はポテンシャルエネルギー

$$V(r) = - \int f(r) dr = \frac{f_c}{r} \quad (2.8)$$

である。ここで、 $r \rightarrow \infty$ のとき $V(r) \rightarrow 0$ となるように、積分定数を取った。

エネルギーも保存するから E は定数である。(2.7) を \dot{r} について解くと

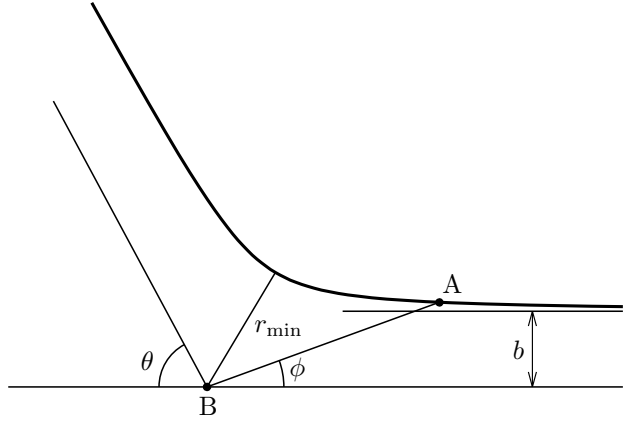
$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))}, \quad W(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.9)$$

である。(2.6) と (2.9) から

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \quad (2.10)$$

複号は $\dot{r} > 0$ のとき +, $\dot{r} < 0$ のとき - である。

$\phi = 0$ 方向の無限遠方から入射してきた A が B に接近して、再び無限遠方に飛び去る場合、入射方向から測った散乱角 θ を求める。(2.9) の $\sqrt{\quad}$ の中が負でない領域 $E - W(r) \geq 0$ が A の運動可能な領域である。したがって、A が B に最接近する距離 r_{\min} は $E - W(r_{\min}) = 0$ で決まる。A が無限遠から B に近づく間は $\dot{r} < 0$ であるから、(2.10) の複号は - になり、逆に、遠ざかるときは $\dot{r} > 0$ より + である。これから、(2.10) を積分すると



$$\begin{aligned} \pi - \theta &= - \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} + \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \\ &= \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$W(r)$ の具体形を代入し

$$s = \frac{b}{r}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \quad (2.12)$$

とすると

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{b/r_{\min}} \frac{ds}{\sqrt{1 - as - s^2}} = \pi - 2 \left[\tan^{-1} \frac{s + a/2}{\sqrt{1 - as - s^2}} \right]_0^{b/r_{\min}}, \quad a = \frac{f_c}{Eb}$$

$E - W(r_{\min}) = 0$ であるから、 $s = b/r_{\min}$ のとき $1 - as - s^2 = 0$ になる。したがって

$$\theta = \pi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{a}{2} \right) = 2 \tan^{-1} \frac{a}{2} = 2 \tan^{-1} \frac{f_c}{2Eb} \quad (2.13)$$

を得る。初期条件により E と L を与えると散乱角 θ が決まる。

(2.12) で与えた b の物理的意味を考える。無限遠方での入射粒子の速度を v_{∞} とすると、 $r \rightarrow \infty$ では $W(r) \rightarrow 0$ であるから $E = mv_{\infty}^2/2$ となる。したがって

$$b = \frac{L}{mv_{\infty}}$$

である。ところで、角運動量の大きさ L は、 r と mv の 2 辺が作る平行四辺形の面積である。これは、 $r \rightarrow \infty$ では、底辺 mv_∞ の四辺形になるから、 b は高さを表わす。つまり、3 ページの図に示したように、粒子に力が作用しないときの直線軌道に B からおろした垂線の長さである。 b を衝突径数 (impact parameter) という。(2.13) より

$$b = \frac{f_c}{2E} \frac{1}{\tan(\theta/2)} \quad (2.14)$$

である。

原子核を標的とする散乱実験では、入射粒子の衝突径数 b は制御できない。その代わりに、 b の分布が一様な同一速度の多数の入射粒子を散乱させ、散乱後ある方向に来る粒子の個数を測定する。入射方向に垂直な単位面積を単位時間あたり N 個の粒子が通過するとしよう。散乱角が θ と $\theta + d\theta$ になる衝突径数を b と $b + db$ とする。入射粒子のうち衝突径数が b と $b + db$ の間にある粒子数 dN は、 db が負の場合もあることを考慮すると

$$dN = 2\pi b |db| N$$

である。 dN は θ と $\theta + d\theta$ の間に単位時間あたりに散乱される粒子の個数でもある。断面積 dS の検出器が散乱体 B から十分離れた距離 R にあるとし、これに飛び込む粒子の数を考える。 dN は半径 R の球面上の角 θ と $\theta + d\theta$ の間の帯に様に散乱されてくる。この帯は半径 $R \sin \theta$ 、幅 $R d\theta$ であるから、検出器に飛び込む粒子の個数は、単位時間あたり

$$\frac{dS}{2\pi R^2 \sin \theta d\theta} dN = N \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\Omega \quad (2.15)$$

となる。ただし、 $d\Omega = dS/R^2$ は散乱体から見た検出器の立体角である。

単位面積を単位時間あたり N 個の粒子が入射したとき、単位時間に立体角 $d\Omega$ を通過する散乱粒子の個数を

$$Nd\sigma = N \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.16)$$

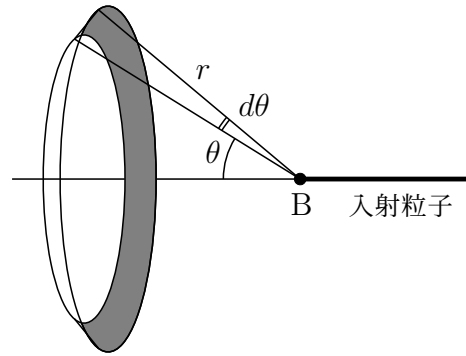
で表わす。これで定義される σ を断面積 (cross section)、 $d\sigma/d\Omega$ を微分断面積 (differential cross section) という。 $Nd\sigma$ は単位時間あたりの粒子数であるから、次元は [時間] $^{-1}$ である。一方、 N の次元は [時間] $^{-1}$ [面積] $^{-1}$ である。したがって、 σ は面積の次元になるので断面積と呼ばれる。ポテンシャルがはっきりした幾何学的な面積をもつ剛体球による散乱では、 σ は球の断面積に一致する (問 2.1 参照)。(2.16) と (2.15) を比較すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.17)$$

である。この表現は入射粒子が受ける力に依らない。力の影響は b と散乱角 θ の関係に現れる。クーロン散乱の場合、この関係は (2.14) で与えられるから、(2.17) は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{f_c}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.18)$$

となる。これをラザフォードの散乱公式という。



1909年, Geiger(ガイガー)とMarsden(マルズデン)は, $^{214}_{84}\text{Po}$ の α 崩壊により生ずる α 粒子 (^4He) を金の薄膜に衝突させる実験をしたが, ラザフォードは1911年に(2.18)を導出し, これが実験とよく一致することを示した。また, e を単位にした Au(金) の電荷 Z_B が, 実験誤差の範囲内で原子番号に等しいという結果を得た。散乱角 θ に散乱される α 粒子が最も Au に近づく距離 r_{\min} を求めると, $s = b/r_{\min}$ は $1 - as - s^2 = 0$ の根であるから

$$\frac{b}{r_{\min}} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

となる。(2.13) から $a = 2 \tan(\theta/2)$ であり, b に(2.14)を代入すると

$$r_{\min}(\theta) = \frac{f_c}{2E} \left(1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right) \quad (2.19)$$

を得る。入射粒子は $\theta = \pi$, つまり入射側に散乱されてくるとき, 最も散乱体に近づく。 ^{214}Po の α 崩壊により生ずる α 粒子のエネルギー E は 5.4 MeV である。これと

$$Z_A = 2, \quad Z_B = 79, \quad hc = 197.33 \text{ MeV fm}, \quad \alpha = \frac{1}{137}$$

を用いると

$$r_{\min}(\theta = \pi) = \frac{f_c}{E} = \frac{Z_A Z_B \alpha \hbar c}{E} = \frac{2 \times 79 \times 197}{137 \times 5.4} = 42 \text{ fm}$$

である。ラザフォードの公式はこの距離までは成り立つ。したがって, α 粒子は 42 fm より小さい $Z_B e$ の正電荷を持つ物体により散乱されたことになる。この結果, 原子核の存在が確立した。

加速した α 粒子を用いると, ある散乱角度以上の微分断面積はラザフォードの公式からずれる。例えば 48 MeV の運動エネルギーをもつ α 粒子を $^{208}_{82}\text{Pb}$ に衝突させると, $\theta < 30^\circ$ では微分断面積の実験値はラザフォードの式と一致するが, $\theta > 30^\circ$ では θ の増加とともにラザフォードの式に比べて急速に小さくなる。これは $\theta > 30^\circ$ では α 粒子が $^{208}_{82}\text{Pb}$ に接触し, 作用範囲の短い核力が影響するようになるからである。 $\theta = 30^\circ$ での r_{\min}

$$r_{\min}(\theta = 30^\circ) = \frac{2 \times 82 \times 197}{137 \times 2 \times 48} \times 4.86 = 12 \text{ fm}$$

は α 粒子と $^{208}_{82}\text{Pb}$ の大きさの和と解釈できる。原子の大きさは ボーア半径 $\approx 1 \text{ \AA} = 10^5 \text{ fm}$ 程度であるから, 原子核の大きさは原子の約 10^{-4} と非常に小さい。

電子の質量は陽子の質量の約 $1/2000$ で無視できるから, 質量数 (原子量に近い整数) A の原子核は A 個の陽子と $A - Z$ 個の電子からなるとすると, 質量と電荷を説明できる。しかし, この考えには困難がある。例えば, $A = 14, Z = 7$ である $^{14}_7\text{N}$ の核スピン (原子核の角運動量) は \hbar を単位として 1 である。陽子と電子はスピン $1/2$ であるから, 陽子 14 個と電子 7 個の合計 21 個の系では核スピンは整数にはならない。1932年に Chadwick は, Be に α 粒子を衝突させるとき発生する透過性が強い放射線は, 質量が陽子とほとんど同じで電荷 0 の中性粒子, つまり, 中性子であることを発見した。中性子のスピンも $1/2$ である。したがって, 原子核を Z 個の陽子と $A - Z$ 個の中性子からなるとすると, 質量と電荷を説明するだけでなく, 核スピンの実験値と矛盾しない。 $^{14}_7\text{N}$ は総計 14 個の陽子と中性子からできているから, 核スピンは整数になる。

問 2.1 半径 R の剛体球による弾性散乱を考える。ただし, 剛体球は非常に重いので, 散乱の前後で原点に静止している。

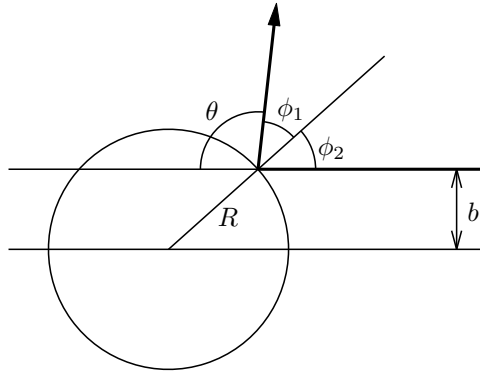
1. 下図で $b < R$ のとき, 運動量保存則等を用いて $\phi_1 = \phi_2$ になることを示せ。また, 散乱角 θ を b と R を用いて表せ。

2. この散乱は次のポテンシャルで記述できる:

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

$W(r)$ を図示し, $W(r_{\min}) - E = 0$ を満たす r_{\min} は $b < R$ のとき R , $b > R$ のとき b になることを示せ。これは図から当然のことである。

3. (2.11) を積分して θ を求め, 1. の結果を再現することを示せ。また, 微分断面積を求め, 断面積が πR^2 になることを示せ。



問 2.2 井戸型ポテンシャル (ただし, $V_0 > 0$)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

の場合, $b < R$ ならば粒子は球内に入り込み, その後, 球外に出て行く。1. と同様に運動量保存則等を用いて散乱角 θ を衝突係数 b の関数として表し, 微分断面積を求めよ。

2.2 量子力学によるラザフォード散乱

原子核のような微視的粒子の散乱は, 古典力学ではなく量子力学で扱う必要があるが, 偶然にもクーロンポテンシャルによる散乱では, 量子力学の結果は (2.18) に一致する。

量子力学によりラザフォード散乱を扱う。シュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{f_c}{r} \right) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r})$$

つまり

$$\left(\nabla^2 + k^2 - \frac{2k\eta}{r} \right) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \eta = \frac{mf_c}{\hbar^2 k}$$

を考える。この方程式は

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} \varphi(u), \quad u = r - z$$

という解をもつ。実際, 素直に微分すると

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} \left(\frac{2u}{r} \frac{d^2 \varphi}{du^2} + \frac{2(1-iku)}{r} \frac{d\varphi}{du} - k^2 \varphi \right)$$

である。 $\rho = iku$ とすると、シュレディンガー方程式は

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 - \rho) \frac{d}{d\rho} + i\eta \right) \varphi = 0 \quad (2.20)$$

となる。これは (A.1) で $a = -i\eta$, $b = 1$ とした方程式であるから、原点で正則な解として

$$\psi(\mathbf{r}) = A e^{ikz} M(-i\eta, 1, \rho) = A e^{ikz} M(-i\eta, 1, iku) \quad (2.21)$$

を得る。ただし A は適当な規格化定数である。 $|z| \rightarrow \infty$ での漸近形 (A.4) より

$$M(-i\eta, 1, iku) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{\pi\eta/2}}{\Gamma(1+i\eta)} e^{i\eta \log ku} + \frac{e^{\pi\eta/2}}{\Gamma(-i\eta)} \frac{e^{iku - i\eta \log ku}}{iku}$$

であるから

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A \frac{e^{\pi\eta/2}}{\Gamma(1+i\eta)} \left(e^{ikz + i\eta \log k(r-z)} + \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} \frac{e^{ikr - i\eta \log ku}}{iku} \right)$$

になる。したがって、 $A = \Gamma(1+i\eta) e^{-\pi\eta/2}$ とし

$$i\Gamma(-i\eta) = -\Gamma(1-i\eta)/\eta, \quad u = r - z = 2r \sin^2(\theta/2)$$

を使うと

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz + i\eta \log k(r-z)} + f(\theta) \frac{e^{ikr - i\eta \log 2kr}}{r} \quad (2.22)$$

ただし

$$f(\theta) = -\eta \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} \frac{e^{-i\eta \log \sin^2(\theta/2)}}{2k \sin^2(\theta/2)}$$

となる。(2.22) の右辺第 1 項は z 軸正方向に進む入射粒子の“平面”波と解釈できる。一方、右辺第 2 項は散乱されて出ていく球面波である。 r が十分大きい領域でもクーロン力は波動関数に影響し、入射波も散乱波も対数的位相因子 $\eta \log r$ だけ歪む。

入射波と散乱波の確率の流れの密度

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) \right)$$

を求める。 ψ に (2.22) の右辺第 1 項を代入すると、入射方向 (z 方向) の流れの密度は

$$j_{\text{in}} = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(e^{-ikz - i\eta \log k(r-z)} \frac{\partial}{\partial z} e^{ikz + i\eta \log k(r-z)} \right) = \frac{\hbar}{m} \left(k - \frac{\eta}{r} \right) \rightarrow \frac{\hbar k}{m}$$

散乱波の動径方向の流れの密度は

$$j_r = \frac{\hbar}{m} |f|^2 \text{Im} \left(\frac{e^{-ikr + i\eta \log 2kr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr - i\eta \log 2kr}}{r} \right) = \frac{\hbar}{m} \frac{|f|^2}{r^2} \left(k - \frac{\eta}{r} \right) \rightarrow \frac{\hbar k}{m} \frac{|f|^2}{r^2}$$

面積 dS の検出器を通過する粒子の個数は $j_r dS$ に比例する。量子力学における微分断面積の定義も (2.16) で与えられる。(2.16) における N は j_{in} に対応するから

$$d\sigma = \frac{1}{j_{\text{in}}} j_r dS = |f(\theta)|^2 \frac{dS}{r^2}$$

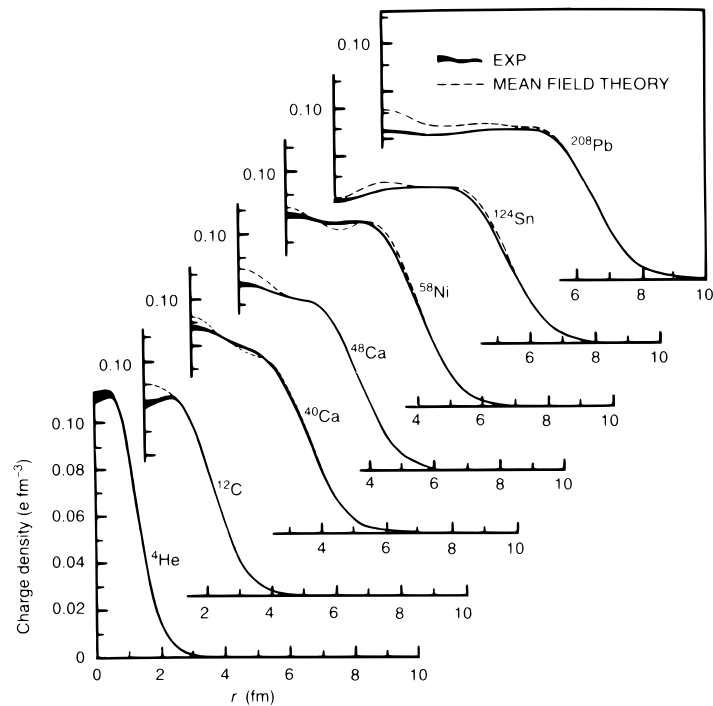
したがって、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{f_c}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

となり、古典力学の結果 (2.18) と一致する。

問 2.3 剛体球による散乱を量子力学的に扱え。 $E \rightarrow \infty$ のとき、断面積は古典力学の 2 倍になることを示せ。これは波動性 (回折) に原因がある。

2.3 核子密度分布



ラザフォード散乱では原子核の電荷分布の大きさだけしか分からないが、他の各種の実験、例えば、高エネルギーの電子を原子核に衝突させる実験などから、核子（陽子と中性子の総称）の密度分布について詳しい情報が得られる。上図は電子散乱により求められた電荷密度の実験値である。

これら実験データを総合すると、核子数 A が $A > 16$ である原子核の場合、核子密度（単位体積当りの核子数）はフェルミ分布関数を使って近似的に

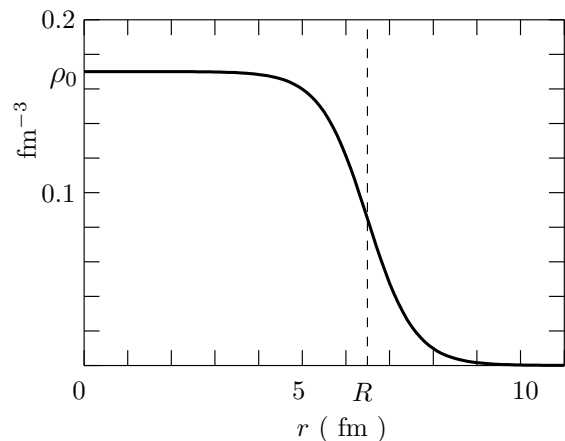
$$\rho(r) \approx \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - R)/a)} \quad (2.23)$$

と表わせる。ここで ρ_0 と a は原子核に依らずほぼ一定で

$$\rho_0 \approx 0.17 \text{ fm}^{-3}, \quad a \approx 0.54 \text{ fm}$$

である。 ^{208}Pb の場合 (2.23) の $\rho(r)$ を右図に示す。ただし

$$\int d^3r \rho(r) = A \quad (2.24)$$



となるように R を決めた。この場合 $R = 6.49 \text{ fm}$ である。中心部の密度はほぼ一定で、その値は原子核に依らない。これを密度の飽和性 (saturation of density) といい、原子核を特徴付ける基本的な性質である。核子数 A が変化しても、中心密度はあまり変わらずに R が変化する。 R の A 依存性は、近似的には次のように求まる。 a は R に比べて十分小さいはずであるから、 $a \rightarrow +0$ の極限を考えると、 $r - R < 0$ のとき $(r - R)/a \rightarrow -\infty$ 、 $r - R > 0$ では $(r - R)/a \rightarrow \infty$ となる。した

がって

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r < R \text{ のとき} \\ 0, & r > R \text{ のとき} \end{cases}$$

これは半径 R の密度一定の球である。これから

$$\frac{4\pi}{3}R^3\rho_0 = A, \quad \text{つまり} \quad R = r_0A^{1/3}, \quad r_0 = \left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3} = 1.12 \text{ fm} \quad (2.25)$$

もっとよい近似で R を評価するには、積分 (2.24) に対して

$$\int_0^\infty dx \frac{g(x)}{1 + \exp((x-R)/a)} = \int_0^R g(x) dx + \frac{\pi^2}{6} a^2 g'(R) + \dots \quad (2.26)$$

を使えばよい。

核子の質量 m は 1.67×10^{-24} g であるから、 ρ_0 を質量に換算すると $m\rho_0 \approx 2.8 \times 10^{14}$ g/cm³ になる。これは普通の物質の密度に比べて約 $10^{12} \sim 10^{14}$ 倍であり、原子核は超高密度の物質である。要するに、原子核の大きさは原子の 10^{-4} 程度であり、物質の質量はほとんど原子核の質量であるから、密度は $(10^4)^3 = 10^{12}$ 倍程度になる。

核子を数 fm 程度の非常に狭い領域に閉じ込め、 3×10^{14} g/cm³ という超高密度の系を作り出す力は何であろうか。中性子間にはクーロン力は働かないし、陽子間のクーロン力は斥力 (反発力) であるから、クーロン力ではない。また、重力ではあまりに弱すぎる。質量 Am のまわりを回っている質量 m の粒子の重力によるボーア半径は

$$\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{GAm^2} = \frac{1}{A} \frac{\hbar c}{(mc^2)^3 G/(\hbar c c^4)} \approx \frac{3 \times 10^{37}}{A} \text{ fm} = \frac{3 \times 10^{22}}{A} \text{ m}$$

ここで $\hbar c \approx 0.2 \text{ fm GeV}$, $mc^2 \approx 1 \text{ GeV}$, $G \approx 7 \times 10^{-39} \hbar c (c^2/\text{GeV})^2$ を代入した。 $A \approx 100$ の場合、ボーア半径は 3×10^{20} m になる。これは銀河の直径程度である。

したがって、核子間には電磁気力でも重力でもない力が作用してしているはずである。この力を核力 (nuclear force) という。核力は陽子間に働く斥力のクーロン力よりも強い引力でなければならない。また、ラザフォード散乱から、 α 粒子と原子核間の距離が数十 fm 程度まではクーロン力だけの散乱であり、核力は作用しない。したがって、核力の作用する範囲は原子核の大きさ程度である。

問 2.4 地球の質量 5.97×10^{24} kg と同じ質量の原子核の半径を求めよ。

問 2.5 (2.26) を証明せよ。また、(2.26) を用いて

$$\int d^3r \rho(r) = \frac{4\pi\rho_0}{3} R^3 \left(1 + \pi^2 \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \dots \right) \quad (2.27)$$

を示せ。これから

$$R \approx \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} a^2 \left(\frac{4\pi\rho_0}{3A}\right)^{2/3} \right] = 1.12A^{1/3} \left(1 - \frac{0.768}{A^{2/3}} \right) \text{ fm} \quad (2.28)$$

を導け。(2.26) と (2.27) を用いて

$$\langle r^n \rangle \equiv \frac{1}{A} \int d^3r r^n \rho(r) = \frac{n}{n+3} R^n \left(1 + \frac{n(n+5)}{6} \pi^2 \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \dots \right)$$

となることを示せ。

3 角運動量

3.1 角運動量の量子力学

角運動量の量子力学について詳しくは量子力学の教科書, 例えば

メシア	量子力学 (東京図書) 第 13 章
J. J. Sakurai	現代の量子力学 (吉岡書店) 第 3 章
猪木・川合	量子力学 I (講談社サイエンティフィク) 第 7 章
ローズ	角運動量の基礎理論 (みすず書房)

を参照せよ。角運動量の量子力学は量子力学における代数的扱いの代表例であり, これを理解することは量子力学自体の理解を深める。また, この代数は最も単純なリー代数 (Lie algebra) である。リー代数は素粒子の標準模型 (弱電相互作用を記述するワインバーグ・サラム模型と強い相互作用を扱う量子色力学) で重要な役割をする。原子や原子核のような有限系の状態は角運動量の量子数で指定されるので, この点でも角運動量は重要である。

定義 ベクトル演算子 \mathbf{j} の各成分が交換関係

$$[j_1, j_2] = ij_3, \quad [j_2, j_3] = ij_1, \quad [j_3, j_1] = ij_2 \quad (3.1)$$

を満たすとき $\hbar\mathbf{j}$ を角運動量 (angular momentum) と定義する。この交換関係だけで角運動量の性質は完全に決まる。 ε_{klm} を

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 0 & \text{2つの添字が等しいとき} \\ +1 & \text{klm が 123 の偶置換であるとき} \\ -1 & \text{klm が 123 の奇置換であるとき} \end{cases} \quad (3.2)$$

とすると*, (3.1) は

$$[j_k, j_l] = i \sum_m \varepsilon_{klm} j_m \quad (3.3)$$

になる。次の等式は ε_{klm} を含む代数でよく使う。

$$\sum_k \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{km'n'} = \delta_{mm'} \delta_{nn'} - \delta_{mn'} \delta_{nm'} \quad (3.4)$$

問 3.1 軌道角運動量 $\hbar\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar\mathbf{r} \times \nabla$ が交換関係 (3.1) を満たすことを示せ。

問 3.2 (3.1) から次の関係式を導け。ただし, $j_{\pm} = j_1 \pm ij_2$ である。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = i\mathbf{j}, \quad [\mathbf{j}^2, j_k] = 0$$

$$[j_3, j_{\pm}] = \pm j_{\pm}, \quad [j_+, j_-] = 2j_3, \quad j_{\mp} j_{\pm} = \mathbf{j}^2 - j_3(j_3 \pm 1)$$

\mathbf{j}^2 と j_3 の固有値と同時に固有状態 \mathbf{j} の成分は互いに交換しないが \mathbf{j}^2 と \mathbf{j} の各成分は交換するから, \mathbf{j} の成分の 1 つと \mathbf{j}^2 の同時固有状態が存在する。普通, j_3 と \mathbf{j}^2 の同時固有状態を考える。 \mathbf{j}^2

* i, j, k を 1, 2, 3 のどれかとする。 i, j, k がすべて異なる 3 つの並び ijk を考える。このうち 2 つを交換することを互換という。互換を繰り返すと, ある並び ijk から別の並び $i'j'k'$ が得られる。このとき, 繰り返す互換の組み合わせは, 一意には決まらない。例えば 123 から 213 を得るには $123 \rightarrow 213$, $123 \rightarrow 321 \rightarrow 231 \rightarrow 213$ など, いろいろある。しかし, 現れる互換の回数が偶数回か奇数回かは定まる。偶 (奇) 数回必要な置換 $ijk \rightarrow i'j'k'$ を偶 (奇) 置換という。

の固有値が $j(j+1)$ で j_3 の固有値が m である同時固有状態を $|j m\rangle$ とする: †

$$\mathbf{j}^2|j m\rangle = j(j+1)|j m\rangle, \quad j_3|j m\rangle = m|j m\rangle \quad (3.5)$$

\mathbf{j}^2 の固有値は負ではないから j は負でない実数である。 $j_1^2 + j_2^2 = \mathbf{j}^2 - j_3^2$ の固有値も負ではない。したがって

$$(\mathbf{j}^2 - j_3^2)|j m\rangle = (j(j+1) - m^2)|j m\rangle$$

より

$$-\sqrt{j(j+1)} \leq m \leq \sqrt{j(j+1)} \quad (3.6)$$

でなければならない。 \mathbf{j}^2 と $j_{\pm} = j_1 \pm ij_2$ は交換するから

$$\mathbf{j}^2 j_{\pm}|j m\rangle = j_{\pm} \mathbf{j}^2|j m\rangle = j(j+1) j_{\pm}|j m\rangle$$

$j_3 j_{\pm} = j_{\pm}(j_3 \pm 1)$ であるから

$$j_3 j_{\pm}|j m\rangle = j_{\pm}(j_3 \pm 1)|j m\rangle = (m \pm 1) j_{\pm}|j m\rangle$$

となる。 $j_{\pm}|j m\rangle$ も \mathbf{j}^2 と j_3 の固有状態であり、固有値はそれぞれ $j(j+1)$, $m \pm 1$ である。 j_{\pm} は j_3 の固有値を ± 1 変化させるから、 $|j m\rangle$ に j_{\pm} を n 回作用させたとき $(j_{\pm})^n|j m\rangle \neq 0$ ならば j_3 の固有値は $m \pm n$ になる。このような操作がいつまでも可能ならば条件 (3.6) と矛盾する。したがって

$$j_+|j m_{\max}\rangle = 0, \quad j_-|j m_{\min}\rangle = 0 \quad (3.7)$$

となる m の最大値 m_{\max} , 最小値 m_{\min} が存在しなければならない。これから

$$\begin{aligned} j_- j_+|j m_{\max}\rangle &= (\mathbf{j}^2 - j_3(j_3 + 1))|j m_{\max}\rangle = (j(j+1) - m_{\max}(m_{\max} + 1))|j m_{\max}\rangle \\ &= (j - m_{\max})(j + m_{\max} + 1)|j m_{\max}\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$j_+ j_-|j m_{\min}\rangle = (\mathbf{j}^2 - j_3(j_3 - 1))|j m_{\min}\rangle = (j + m_{\min})(j - m_{\min} + 1)|j m_{\min}\rangle = 0$$

m は (3.6) の範囲にあるから $m_{\max} = j$, $m_{\min} = -j$ である。 $|j j\rangle$ に j_- を n 回作用させると $|j j - n\rangle$ になるが、最終的には m が最小値の状態 $|j - j\rangle$ になるべきであるから $j - n = -j$ となる整数 n が存在する。したがって、 j は整数か半整数である。与えられた j に対して m は

$$m = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$$

の $2j + 1$ 個の値をとる。

$|j m\rangle$ は規格化された状態を表わすとする。 $m < j$ ならば $j_+|j m\rangle = c_m|j m+1\rangle$ とおける。この関係式は $j_+^\dagger = j_-$ より $\langle j m|j_- = c_m^* \langle j m+1|$ になるから

$$\langle j m|j_- j_+|j m\rangle = |c_m|^2 \langle j m+1|j m+1\rangle = |c_m|^2$$

$j_- j_+ = \mathbf{j}^2 - j_3(j_3 + 1)$ を使うと

$$\langle j m|j_- j_+|j m\rangle = (j(j+1) - m(m+1)) \langle j m|j m\rangle = (j-m)(j+m+1)$$

† ベクトル \mathbf{j} と j に添え字がつく j_3 などは演算子であり、単なる j は数である。

c_m の位相は任意に選べるが、習慣として c_m を正の実数にとる。したがって

$$j_+|j m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j m+1\rangle \quad (3.8)$$

である。 $j_-|j m\rangle$ についても同様にして

$$j_-|j m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j m-1\rangle \quad (3.9)$$

を得る。(3.8) と (3.9) を繰り返し適用すれば、1つの固有状態 $|j m\rangle$ から出発して $2j+1$ 個の互いに直交する規格化された状態を作れる。例えば

$$|j m\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}} (j_-)^{j-m} |j j\rangle \quad (3.10)$$

である。

3.2 スピン

素粒子はその粒子固有の性質として内部角運動量 (スピン) を持つ。スピンは軌道運動に伴う軌道角運動量 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ とは別物であるが、角運動量の種類である。スピンは純粋に量子力学的物理量であり、対応する古典力学的物理量は存在しない。よく自転に例えられるが、これは無理やり古典力学に対応させた場合の話である。大きさのない点に自転など考えられない。軌道角運動量は運動に応じて j は $j = 0, 1, 2, \dots$ である様々な値をとるが、スピンの j の値は粒子に固有のものであり運動に依らずに不変である。

電子、陽子、中性子のスピンは $j = 1/2$ である。ここでは $j = 1/2$ のスピンについてまとめておく。スピンの性質は前節で $j = 1/2$ とすればよいが、 $j = 1/2$ に特有で便利な関係式がある。

スピン演算子を \mathbf{s} で表す。また、 j の代わりに s を使う。 \mathbf{s}^2 と s_3 の同時固有状態は $m = \pm 1/2$ の2つだけであり

$$|+\rangle = |s = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle, \quad |-\rangle = |s = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle \quad (3.11)$$

と略記する。スピンに関する任意の状態 $|\alpha\rangle$ は

$$|\alpha\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$$

と表せる。 $|\pm\rangle$ を基底とする2次元空間であり、このため代数的には非常に簡単になる。

スピンに関する演算子 A, B が $A|\pm\rangle = B|\pm\rangle$ ならば、任意の状態 $|\alpha\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ に対して $A|\alpha\rangle = B|\alpha\rangle$ となるから $A = B$ である。 $\boldsymbol{\sigma} \equiv 2\mathbf{s}$ とする。角運動量の交換関係を $\boldsymbol{\sigma}$ で表すと

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.12)$$

である。

$$\boldsymbol{\sigma}^2|\pm\rangle = 4\mathbf{s}^2|\pm\rangle = 4 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |\pm\rangle = 3|\pm\rangle, \quad \text{すなわち } \boldsymbol{\sigma}^2 = 3 \quad (3.13)$$

である。(3.8) において $j = 1/2, m = \pm 1/2$ とすると、 $\sigma_{\pm} = 2(s_1 \pm is_2)$ は

$$\sigma_+|+\rangle = 0, \quad \sigma_+|-\rangle = 2|+\rangle, \quad \sigma_-|+\rangle = 2|-\rangle, \quad \sigma_-|-\rangle = 0 \quad (3.14)$$

したがって

$$\sigma_+^2|+\rangle = 0, \quad \sigma_+^2|-\rangle = 2\sigma_+|+\rangle = 0 \quad \text{つまり } \sigma_+^2 = 0$$

である。同様にして

$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = \sigma_3\sigma_\pm + \sigma_\pm\sigma_3 = 0 \quad (3.15)$$

$\sigma_3^2|\pm\rangle = |\pm\rangle$ から $\sigma_3^2 = 1$ である。これと $\sigma_+\sigma_- + \sigma_-\sigma_+ = 2(\sigma^2 - \sigma_3^2) = 4$ より

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\sigma_+^2 + \sigma_-^2 + \sigma_+\sigma_- + \sigma_-\sigma_+) = 1$$

σ_2^2 についても同様にすると

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \quad (3.16)$$

を得る。 $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ から (3.15) は

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3 = 0 \quad (3.17)$$

となり、 σ_i は互いに反交換する。(3.16) と (3.17) はまとめて

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \quad (3.18)$$

と書ける。この結果と (3.12) を加えれば

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.19)$$

になる。この関係式だけ知っていれば、(3.12)～(3.18) は簡単に導ける。

例題 \mathbf{B} を定数ベクトルとして、ハミルトニアン H が $H = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ で与えられるとき、 H の固有値と固有状態を求めよう。固有値を E 、固有状態を $c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ とすると

$$H(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle) = E(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle) \quad (3.20)$$

を満たす E, c_\pm を求める。この問題ではベクトル \mathbf{B} を直交座標で表すよりも極座標で表した方が便利になる。そこで

$$B_1 = B \sin \theta \cos \phi, \quad B_2 = B \sin \theta \sin \phi, \quad B_3 = B \cos \theta$$

とする。 $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ を $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2, \sigma_3$ で表すと

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3 = \frac{B_1 - iB_2}{2}\sigma_+ + \frac{B_1 + iB_2}{2}\sigma_- + B_3\sigma_3 \\ &= \frac{B}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \sigma_+ + \frac{B}{2} \sin \theta e^{i\phi} \sigma_- + B \cos \theta \sigma_3 \end{aligned}$$

$\sigma_+|+\rangle = 0, \sigma_-|+\rangle = 2|-\rangle, \sigma_3|+\rangle = |+\rangle$ であるから

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} |+\rangle = B \sin \theta e^{i\phi} |-\rangle + B \cos \theta |+\rangle$$

同様にして

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} |-\rangle = B \sin \theta e^{-i\phi} |+\rangle - B \cos \theta |-\rangle$$

これから

$$H(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle) = (B \cos \theta c_+ + B \sin \theta e^{-i\phi} c_-)|+\rangle + (B \sin \theta e^{i\phi} c_+ - B \cos \theta c_-)|-\rangle$$

したがって (3.20) は

$$B \cos \theta c_+ + B \sin \theta e^{-i\phi} c_- = E c_+, \quad B \sin \theta e^{i\phi} c_+ - B \cos \theta c_- = E c_- \quad (3.21)$$

となる。行列で書くと

$$\begin{pmatrix} B \cos \theta - E & B \sin \theta e^{-i\phi} \\ B \sin \theta e^{i\phi} & -B \cos \theta - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c_+, c_- が共に 0 にならないためには

$$\begin{vmatrix} B \cos \theta - E & B \sin \theta e^{-i\phi} \\ B \sin \theta e^{i\phi} & -B \cos \theta - E \end{vmatrix} = E^2 - B^2 = 0$$

したがって, H の固有値 E は $E = \pm B$ になる。次に, 規格化された固有状態を求める。(3.21) から

$$c_- = \frac{E - B \cos \theta}{B \sin \theta} e^{i\phi} c_+$$

であるから

$$|c_+|^2 + |c_-|^2 = \frac{B^2 + E^2 - 2EB \cos \theta}{B^2 \sin^2 \theta} |c_+|^2 = 1$$

$E = \pm B$ を代入すると

$$|c_+|^2 = \frac{\sin^2 \theta}{2(1 \mp \cos \theta)} = \frac{1 \pm \cos \theta}{2}$$

したがって, 物理的に意味のない位相は別にして

$$\begin{aligned} E = B \text{ のとき} \quad c_+ &= \cos \frac{\theta}{2}, \quad c_- = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ E = -B \text{ のとき} \quad c_+ &= \sin \frac{\theta}{2}, \quad c_- = -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。

θ, ϕ 方向を向いた単位ベクトル $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ で H を表すと $H = B \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ であるから, H の固有値が $\pm B$ ということは $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ の固有値が ± 1 になることを表す。また, (3.22) は $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ の固有状態である。

問 3.3 (3.19) を用いて

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

を示せ。 \mathbf{A} と \mathbf{B} は $\boldsymbol{\sigma}$ と交換するなら演算子でもよい。

問 3.4 \mathbf{n} をある方向の単位ベクトルとし, $\sigma_n \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ を考える。前問の結果を使い $\sigma_n^2 = 1$ を示せ。さらに

$$\exp(i\theta \sigma_n) = \cos \theta + i \sigma_n \sin \theta$$

を示せ。ただし, A を演算子とするとき $e^A \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ である。

問 3.5 時間に依存するシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = H |t\rangle, \quad H = B \sigma_1$$

を考える。 B は定数である。時刻 t における状態 $|t\rangle$ を $|\pm\rangle$ で表せ。ただし

$$|t=0\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

とする。また, $\boldsymbol{\sigma}$ の期待値 $\langle t | \boldsymbol{\sigma} | t \rangle$ は x 軸まわりに再差運動することを示せ。

3.3 角運動量の合成

2個以上の粒子系の全角運動量やスピンを持つ1粒子の軌道角運動量とスピンの和を扱うとき、角運動量の合成が必要になる。角運動量の合成の一般論は量子力学の教科書を参照してもらうことにして、ここでは一方の角運動量がスピン s の場合を考え

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{s}$$

を扱う。 \mathbf{j} は \mathbf{s} とは独立な系の角運動量である。具体例としては、同一粒子の軌道角運動量あるいは別な粒子のスピンなどである。古典力学では \mathbf{J} の大きさは $|\mathbf{j}| - |\mathbf{s}|$ から $|\mathbf{j}| + |\mathbf{s}|$ まで連続的に自由な値をとるが、量子力学では異なる。

\mathbf{j} と \mathbf{s} のそれぞれの状態の直積

$$|jm\rangle|\pm\rangle \quad (3.23)$$

により合成系の状態は表せる。 $|jm\rangle$ が \mathbf{j}^2, j_3 の固有状態, $|\pm\rangle$ がスピンの固有状態を表す。状態が直積である場合、どの演算子がどの状態に作用するかという点は注意すべきである。 \mathbf{j} の系の演算子を D_j , \mathbf{s} の系の演算子を D_s とすると, D_j は $|jm\rangle$ に, D_s は $|\pm\rangle$ に作用するから

$$(D_j + D_s)|jm\rangle|\pm\rangle = (D_j|jm\rangle)|\pm\rangle + |jm\rangle(D_s|\pm\rangle), \quad D_j D_s |jm\rangle|\pm\rangle = (D_j|jm\rangle)(D_s|\pm\rangle)$$

である。ここで右辺の () はどの状態に作用するかを明確にするために記した。

合成系の状態として \mathbf{J}^2 と J_3 の同時固有状態 $|JM\rangle$

$$\mathbf{J}^2 |JM\rangle = J(J+1)|JM\rangle, \quad J_3 |JM\rangle = M|JM\rangle, \quad M = J, J-1, \dots, -J$$

を用いることもできる。 $|jm\rangle|\pm\rangle$ がこれを満たすか調べてみる。 $J_3 = j_3 + s_3$ を作用させると

$$J_3 |jm\rangle|\pm\rangle = \left(j_3 |jm\rangle\right)|\pm\rangle + |jm\rangle\left(s_3 |\pm\rangle\right) = \left(m \pm \frac{1}{2}\right) |jm\rangle|\pm\rangle \quad (3.24)$$

したがって $|jm\rangle|\pm\rangle$ は J_3 の固有状態で固有値 M は $M = m \pm 1/2$ である。一方

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{j}^2 + \mathbf{s}^2 + 2\mathbf{j} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{j}^2 + \mathbf{s}^2 + 2j_3 s_3 + j_+ s_- + j_- s_+ \quad (3.25)$$

であるから、例えば

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |jm\rangle|+\rangle &= \left(j(j+1) + \frac{3}{4} + m\right) |jm\rangle|+\rangle + j_+ |jm\rangle s_- |+\rangle \\ &= \left(j(j+1) + \frac{3}{4} + m\right) |jm\rangle|+\rangle + \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |jm+1\rangle|-\rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

となり, $m \neq j$ のとき $|jm\rangle|+\rangle$ は J_3 の固有状態ではあるが \mathbf{J}^2 の固有状態ではない。 $|jm\rangle|-\rangle$ についても同様である。

j が与えられたとき、可能な J の値と $|JM\rangle$ を求める。(3.24) から M の最大値は $j + 1/2$ である。また, J が与えられたとき M の取りうる値は $J, J-1, \dots, -J+1, -J$ である。したがって J の最大値も $j + 1/2$ でなければならない。 $M = j + 1/2$ となる状態は $|jj\rangle|+\rangle$ だけであるから

$$|J=j+\frac{1}{2} M=j+\frac{1}{2}\rangle = |jj\rangle|+\rangle \quad (3.27)$$

となる。実際, (3.26) で $m = j$ とすると

$$\mathbf{J}^2 |jj\rangle|+\rangle = \left(j(j+1) + \frac{3}{4} + j\right) |jj\rangle|+\rangle = \left(j + \frac{1}{2}\right) \left(j + \frac{1}{2} + 1\right) |jj\rangle|+\rangle \quad (3.28)$$

確かに $|jj\rangle|+\rangle$ は $J = j + 1/2$ である J^2 の固有状態である。

$|J = j + \frac{1}{2} M = j + \frac{1}{2}\rangle$ が分かれば他の $|J = j + \frac{1}{2} M\rangle$ は次のようにして求まる。(3.27) の両辺に J_- を作用させると

$$J_- |J = j + \frac{1}{2} M = j + \frac{1}{2}\rangle = J_- |jj\rangle|+\rangle$$

(3.8) より左辺は

$$J_- |J = j + \frac{1}{2} M = j + \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2j+1} |J = j + \frac{1}{2} M = j - \frac{1}{2}\rangle$$

一方, 右辺は $J_- = j_- + s_-$ であるから

$$J_- |jj\rangle|+\rangle = j_- |jj\rangle|+\rangle + |jj\rangle s_- |+\rangle = \sqrt{2j} |jj-1\rangle|+\rangle + |jj\rangle|-\rangle$$

したがって

$$|J = j + \frac{1}{2} M = j - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2j}{2j+1}} |jj-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{2j+1}} |jj\rangle|-\rangle \quad (3.29)$$

以下, 繰り返し J_- を作用させれば

$$|J = j + \frac{1}{2} M\rangle = \sqrt{\frac{j+M+1/2}{2j+1}} |jM-\frac{1}{2}\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{j-M+1/2}{2j+1}} |jM+\frac{1}{2}\rangle|-\rangle \quad (3.30)$$

が求まる。

$M = j - 1/2$ となる状態は $|jj-1\rangle|+\rangle, |jj\rangle|-\rangle$ の2つあるから, これらの線形結合から直交する2つの状態を作れる。1つは(3.29)であり, もう一つはこれに直交する状態

$$-\sqrt{\frac{1}{2j+1}} |jj-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2j}{2j+1}} |jj\rangle|-\rangle$$

である。全体の位相はある規約に基づいている。 $|J = j + \frac{1}{2} M = j - \frac{1}{2}\rangle$ に直交し $M = j - 1/2$ である状態は $J \neq j + 1/2$ である。 $J \leq j + 1/2$ であるから, このような状態は $|J = j - \frac{1}{2} M = j - \frac{1}{2}\rangle$ だけである。したがって

$$|J = j - \frac{1}{2} M = j - \frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{1}{2j+1}} |jj-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2j}{2j+1}} |jj\rangle|-\rangle \quad (3.31)$$

これを出発点にして J_- を作用させると

$$|J = j - \frac{1}{2} M\rangle = -\sqrt{\frac{j-M+1/2}{2j+1}} |jM-\frac{1}{2}\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{j+M+1/2}{2j+1}} |jM+\frac{1}{2}\rangle|-\rangle \quad (3.32)$$

が求まる。

$|J = j + \frac{1}{2} M\rangle$ の状態は $2J + 1 = 2j + 2$ 個, $|J = j - \frac{1}{2} M\rangle$ の状態は $2J + 1 = 2j$ 個ある。合わせると $2(2j + 1)$ 個の状態が得られた。この数は $|jm\rangle|\pm\rangle$ の状態数 $2(2j + 1)$ に等しいから, これ以上 $|JM\rangle$ の状態はない。したがって, j が与えられたとき, 許される J は $J = j \pm 1/2$ である。 $j = 0$ の場合は $J = j - 1/2$ はありえないから, $J = 1/2$ だけである。

J_3 の固有値が M になる状態は $|jM-\frac{1}{2}\rangle|+\rangle$ と $|jM+\frac{1}{2}\rangle|-\rangle$ の2つあることは(3.24)から直ぐに分かる。したがって $|JM\rangle$ がこの2つの状態の線形結合で表されるのは当然である。

問 3.6 (3.30), (3.32) を示せ。

問 3.7 (3.31) が J^2 の固有状態であることを直接確かめよ。

問 3.8 $|JM\rangle = \alpha |j M - \frac{1}{2}\rangle|+\rangle + \beta |j M + \frac{1}{2}\rangle|-\rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ とおける。 $J^2 |JM\rangle = J(J+1) |JM\rangle$ となるように α, β, J を決めよ。計算の途中では $j' = j + 1/2$ とでもおけば、少し計算は簡単になる。

3.4 回転と角運動量

単位ベクトル \mathbf{n} で指定された直線を軸とした角 θ の回転を考える。ただし $\theta > 0$ の回転とは \mathbf{n} の方向に右ネジが進む場合を指す。この回転によりベクトル \mathbf{a} が \mathbf{a}' になったとすると、 $\theta = \Delta\theta$ が無限小ならば

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \Delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{a} \quad (3.33)$$

である。例えば、 z 軸まわりの回転を考えると

$$a'_x = a_x \cos \Delta\theta - a_y \sin \Delta\theta = a_x - a_y \Delta\theta, \quad a'_y = a_x \sin \Delta\theta + a_y \cos \Delta\theta = a_x \Delta\theta + a_y, \quad a'_z = a_z$$

であるから確かに

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \Delta\theta (-a_y, a_x, 0) = \mathbf{a} + \Delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

となる。

物理系を回転させれば、回転後の系の状態 $|\tilde{\alpha}\rangle$ は回転前の状態 $|\alpha\rangle$ とは異なる。 $|\alpha\rangle$ と $|\tilde{\alpha}\rangle$ を関係付ける演算子 R

$$|\tilde{\alpha}\rangle = R(\mathbf{n}, \theta) |\alpha\rangle$$

を求めよう。ここではスピン 0 粒子の場合を考え、その結果を一般化する。回転前の波動関数を $\psi(\mathbf{r})$ 、回転後の波動関数を $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$ とする。点 \mathbf{r} における回転後の波動関数の値は、回転すると \mathbf{r} になる点 \mathbf{r}_1 における回転前の値に等しいから

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}_1)$$

である。 \mathbf{r}_1 は \mathbf{r} を逆回転して得られる点であるから、無限小回転 $\theta = \Delta\theta$ の場合には、(3.33) より $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ となる。したがって

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - \Delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - \Delta\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r})$$

$(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)$ を使うと

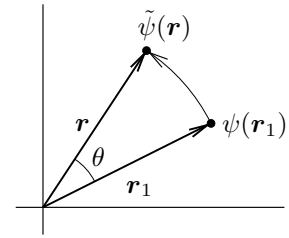
$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \left(1 - \Delta\theta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\right) \psi(\mathbf{r}) = \left(1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}\right) \psi(\mathbf{r}), \quad \hbar \boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$$

ただし $\hbar \boldsymbol{\ell}$ は軌道角運動量である。無限小回転の場合、回転演算子は

$$R(\mathbf{n}, \Delta\theta) = 1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}$$

となる。この結果を一般化すると、系の全角運動量が \mathbf{j} であるとき、単位ベクトル \mathbf{n} まわりの無限小回転演算子は

$$R(\mathbf{n}, \Delta\theta) = 1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \quad (3.34)$$



である。

有限の回転は無限小回転の重ね合わせである。特に

$$R(\mathbf{n}, \theta + d\theta) = R(\mathbf{n}, d\theta)R(\mathbf{n}, \theta) = (1 - i d\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) R(\mathbf{n}, \theta)$$

すなわち

$$\frac{dR(\mathbf{n}, \theta)}{d\theta} = -i\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} R(\mathbf{n}, \theta)$$

である。したがって、 $R(\mathbf{n}, 0) = 1$ を考慮すると

$$R(\mathbf{n}, \theta) = \exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \quad (3.35)$$

を得る。この様に角運動量 \mathbf{j} は回転の生成演算子である。(3.35) がスピンの場合に正しい結果を与えることを次の間で確かめよ。

問 3.9 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} |\pm\rangle_n = \pm |\pm\rangle_n$ を満たす $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ の固有状態 $|\pm\rangle_n$ を σ_3 の固有状態 $|\pm\rangle$ で表して

$$|\pm\rangle_n = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$$

としたとき、係数 c_{\pm} は (3.22) で与えられる。ところで、 $|\pm\rangle_n$ は $|\pm\rangle$ を y 軸のまわりに角 θ だけ回転し、次に z 軸のまわりに角 ϕ 回転した状態

$$\exp(-i\phi s_3) \exp(-i\theta s_2) |\pm\rangle$$

で与えられるはずである。この状態が (3.22) を再現することを示せ。

演算子は回転に対する変換性で分類できる。基本的なものはスカラー演算子とベクトル演算子である。スカラー演算子とは回転により期待値が不変な演算子である。どんな回転でも無限小回転の積で表わせるから、無限小回転に対する不変性を考えれば十分である。スカラー演算子を S とすると、無限小回転に対する不変性は

$$\begin{aligned} \langle \alpha | S | \alpha \rangle &= \langle \tilde{\alpha} | S | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | (1 + i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) S (1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | (S + i\Delta\theta [\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, S]) | \alpha \rangle \end{aligned}$$

したがって

$$[S, \mathbf{j}] = 0 \quad (3.36)$$

がスカラーの条件である。このとき S は回転不変であるという。例えば、原点からの距離 r だけに依存する関数 $S(r)$ の場合、軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ は角度についての微分だけ含むから $[S(r), \boldsymbol{\ell}] = 0$ であり $S(r)$ はスカラーである。

系のハミルトニアン H が回転不変 $[H, \mathbf{j}] = 0$ である場合、 H, \mathbf{j}^2, j_3 の同時固有状態が存在する。これを $|n j m\rangle$ で表わし、そのエネルギー固有値を $E_{n j m}$ とする:

$$H|n j m\rangle = E_{n j m}|n j m\rangle, \quad \mathbf{j}^2|n j m\rangle = j(j+1)|n j m\rangle, \quad j_3|n j m\rangle = m|n j m\rangle$$

n は状態を指定するのに必要な j, m 以外の量子数の組である。 $[H, j_{\pm}] = 0$ より

$$H j_{\pm} |n j m\rangle = j_{\pm} H |n j m\rangle = E_{n j m} j_{\pm} |n j m\rangle$$

$j_-|n, j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|n, j, m-1\rangle$ であるから

$$H|n, j, m\pm 1\rangle = E_{njm}|n, j, m\pm 1\rangle$$

したがって $E_{njm\pm 1} = E_{njm}$ となりエネルギー固有値は m によらない。回転不変な H の固有状態は $2j+1$ 重に縮退している。

問 3.10 ベクトル演算子 \mathbf{V} の場合, その期待値が普通のベクトルの変換に従うことを要請する。

1. 無限小変換では (3.33) と (3.34) から

$$\langle \tilde{\alpha} | \mathbf{V} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | \mathbf{V} | \alpha \rangle + \Delta\theta \mathbf{n} \times \langle \alpha | \mathbf{V} | \alpha \rangle, \quad |\tilde{\alpha}\rangle = (1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) |\alpha\rangle$$

である。これから

$$[V_m, j_n] = i \sum_k \varepsilon_{mnk} V_k$$

を示せ。 $\mathbf{V} = \mathbf{j}$ とすると, 角運動量の交換関係を得る。

2. ベクトル演算子 \mathbf{A} と \mathbf{B} の内積は

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{j}] = 0$$

を満たすことを示せ。内積はスカラー演算子である。

問 3.11 行列要素が $(s_k)_{mn} = -i\varepsilon_{kmn}$ である 3 つの 3×3 行列 s_1, s_2, s_3 を直交成分とするベクトル \mathbf{s} を考える。ただし, ε_{kmn} は (3.2) で定義された反対称テンソルである。

1. ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を \mathbf{n} 軸のまわりに微小回転 $\Delta\theta$ したとき, 回転後のベクトル場を $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ とする。回転すると \mathbf{r} になる点を \mathbf{r}_1 で表わすと, 点 \mathbf{r} における \mathbf{A}' は, \mathbf{r}_1 における \mathbf{A} に回転を施せばよいから

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) + \Delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

である。これは

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \left(1 - i\Delta\theta \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\ell} + \mathbf{s})\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\ell} = -i\mathbf{r} \times \nabla$$

と書けることを示せ。ただし, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ で表わす。

2. s_1, s_2, s_3 は角運動量の交換関係を満たし, $\mathbf{s}^2 = 2$ となることを示せ。したがって, ベクトル場は $s = 1$ であるスピンを持つ。
3. s_1, s_2, s_3 を具体的に 3×3 行列で表わし, s_1, s_2, s_3 の固有値が $0, \pm 1$ になることを確かめよ。

4 アイソスピン

4.1 アイソスピン

原子核は陽子と中性子から構成されている。陽子と中性子はスピン 1/2 のフェルミオンである。陽子の質量と中性子の質量の差は約 1% しかなくほぼ等しい。陽子と中性子は主に電荷などの電磁氣的性質により区別される。もし電磁相互作用がなければ陽子と中性子は区別できないであろう。原子核では電磁相互作用よりも核子間に働く強い相互作用 (strong interaction), つまり核力 (nuclear force) の方が重要である。そこで、陽子と中性子を核子という粒子の 2 つの異なる状態と見なす。この 2 つの状態を識別するために、各核子に補助的な力学変数を付け加える。この力学変数は 2 つの異なる固有値だけをとればよいから、 $s = 1/2$ のスピン s と同じ代数的性質を満たす演算子 t を導入する。この t を荷電スピンとかアイソスピン (isospin) という。もちろん、2 つの状態を区別するという理由だけではアイソスピンを導入する必然性はない。実は、アイソスピンはスピンと同様に素粒子の基本的性質であり、アイソスピン導入により核力の重要な性質を簡単に表現できる。

さて、 t_3 の 2 つの固有値 $m_t = \pm 1/2$ により陽子と中性子を区別する。 t^2, t_3 の同時固有状態を $|m_t\rangle$ で表す:

$$t^2|m_t\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|m_t\rangle, \quad t_3|m_t\rangle = m_t|m_t\rangle$$

このテキストでは $|m_t = \frac{1}{2}\rangle$ を陽子状態, $|m_t = -\frac{1}{2}\rangle$ を中性子状態に割り当てる。以下

$$|p\rangle = |m_t = \frac{1}{2}\rangle, \quad |n\rangle = |m_t = -\frac{1}{2}\rangle$$

と略記する。核子の状態は軌道運動, スピン, アイソスピンの状態という 3 つの部分からなる。

スピンにおける σ と同様に $\tau = 2t$ を考えると

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \tau_k$$

を満たす。スピンに関する代数はすべてアイソスピンでも成り立つ。 $\tau_{\pm} = \tau_1 \pm i\tau_2$ とすると

$$\tau_3|p\rangle = |p\rangle, \quad \tau_3|n\rangle = -|n\rangle, \quad (4.1)$$

$$\tau_+|p\rangle = 0, \quad \tau_+|n\rangle = 2|p\rangle, \quad \tau_-|p\rangle = 2|n\rangle, \quad \tau_-|n\rangle = 0 \quad (4.2)$$

である。代数的には τ_{\pm} は m_t を ± 1 変えるだけだが、 τ_+ は中性子を陽子に、 τ_- は陽子を中性子に変化させるという物理的意味がある。

陽子と中性子で作用が異なる物理量は τ で表わせる。例えば $Q = e(1 + \tau_3)/2$ を考えると

$$\text{陽子の場合 : } Q|p\rangle = e|p\rangle, \quad \text{中性子の場合 : } Q|n\rangle = 0$$

であるから、 Q は核子の電荷演算子である。また、核子 1 と核子 2 の間に働くクーロン力ポテンシャルは

$$\frac{e^2}{4\pi r} \frac{1 + (\tau_1)_3}{2} \frac{1 + (\tau_2)_3}{2} \quad (4.3)$$

と書ける。ただし、 $(\tau_k)_3$ は核子 k の τ の z 成分を表わす。

2 核子系のアイソスピン状態 アイソスピンの合成は角運動量の合成と全く同じである。2 核子系の場合、核子 1 のアイソスピンを \mathbf{t}_1 、核子 2 のアイソスピンを \mathbf{t}_2 とすると、系の全アイソスピン $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ の固有状態 $|T M_T\rangle$

$$\mathbf{T}^2|T M_T\rangle = T(T+1)|T M_T\rangle, \quad T_3|T M_T\rangle = M_T|T M_T\rangle \quad (4.4)$$

を求めよう。核子 1 のアイソスピン状態が $|a\rangle$ 、核子 2 のアイソスピン状態が $|b\rangle$ であるとき $|a\rangle|b\rangle$ で表すことにする。 $M_T = 1$ になる状態は $|p\rangle|p\rangle$ だけであるから

$$|T=1 M_T=1\rangle = |p\rangle|p\rangle$$

である。両辺に $T_- = (t_-)_1 + (t_-)_2$ を作用させると、左辺は (3.9) から

$$T_-|T=1 M_T=1\rangle = \sqrt{2}|T=1 M_T=0\rangle$$

一方、右辺は

$$\left((t_-)_1|p\rangle\right)|p\rangle + |p\rangle\left((t_-)_2|p\rangle\right) = |n\rangle|p\rangle + |p\rangle|n\rangle$$

となるから

$$|T=1 M_T=0\rangle = \frac{|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}$$

$M_T = -1$ となる状態は $|n\rangle|n\rangle$ だけであるから

$$|T=1 M_T=-1\rangle = |n\rangle|n\rangle$$

となる。あるいは、 $|T=1 M_T=0\rangle$ に再び T_- を作用させてもよい。まとめると

$$|T=1 M_T\rangle = \begin{cases} |p\rangle|p\rangle, & M_T = 1 \\ \frac{|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}, & M_T = 0 \\ |n\rangle|n\rangle, & M_T = -1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$M_T = 0$ となる状態には $|T=0 M_T=0\rangle$ もある。これは $|T=1 M_T=0\rangle$ と直交するから

$$|T=0 M_T=0\rangle = \frac{|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.6)$$

である。 $T = 1, M_T = 1$ は 2 個の陽子、 $T = 1, M_T = -1$ は 2 個の中性子系である。 $M_T = 0$ は陽子と中性子の系であり、 $T = 1$ と $T = 0$ の 2 つある。 $T = 1$ である 3 つの状態をアイソスピン 3 重項、 $T = 0$ の状態をアイソスピン 1 重項という。アイソスピン 3 重項は核子 1 と 2 の状態の交換に関して対称 (全く変わらない) であるが、アイソスピン 1 重項は反対称 (符号が変わる) である。これは後で重要になる。

4.2 アイソスピン不変性

アイソスピンを使えば陽子と中性子を統一的に扱える。これはアイソスピンの利点ではあるが、より重要なことは核子間に作用する核力がアイソスピン不変性 (isospin invariance) という性質をもつことである。核子 1 と核子 2 の間に作用する核力ポテンシャルを $V(1, 2)$ とすると、アイソスピン不変性とは

$$[V, \mathbf{T}] = 0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \quad (4.7)$$

である。スカラー演算子とは空間回転に関して不変、つまり角運動量と交換する演算子のことであるが、これと同様に、 \mathbf{T} と交換する演算子をアイソスカラー (isoscalar) と呼ぶ。核力 V はアイソスカラーである。2 核子系の全アイソスピンの固有状態 (4.4) は

$$T_+ |T M_T\rangle = \sqrt{T(T+1) - M_T(M_T+1)} |T M_{T+1}\rangle, \quad T_+ = T_1 + iT_2$$

を満たすから

$$\langle T M_{T+1} | V | T M_{T+1} \rangle = \frac{\langle T M_T | T_- V T_+ | T M_T \rangle}{T(T+1) - M_T(M_T+1)}$$

となる。 V と T_- は交換するから $T_- V T_+ = V T_- T_+$ であり、 $T_- T_+ = \mathbf{T}^2 - T_3(T_3+1)$ であるから

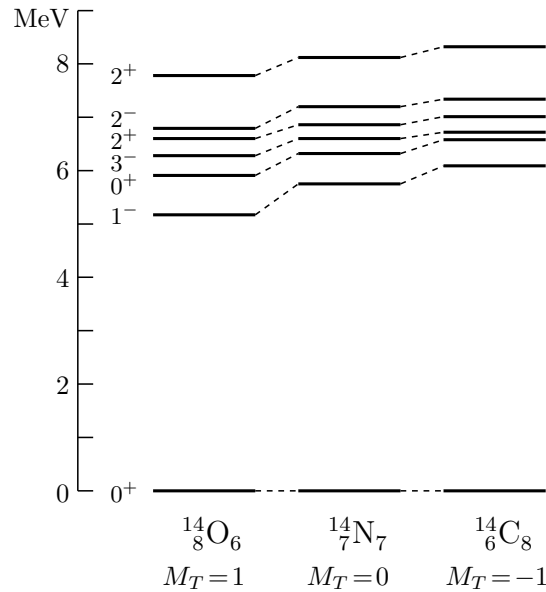
$$\langle T M_{T+1} | V | T M_{T+1} \rangle = \frac{\langle T M_T | V (\mathbf{T}^2 - T_3(T_3+1)) | T M_T \rangle}{T(T+1) - M_T(M_T+1)} = \langle T M_T | V | T M_T \rangle$$

である。したがって、アイソスピン 3 重項の 陽子-陽子, 中性子-中性子, 陽子-中性子 に作用する核力の期待値は同じである。ただし、 $T=0$ と $T=1$ の陽子-中性子で核力が同じであるとはいえない。核力については次の章で改めて考える。

クーロン力 (4.3) は T_3 と交換するが、 T_1, T_2 とは交換しないからアイソスカラーではない。また、陽子と中性子は質量が違う。したがって、 A 核子系のハミルトニアン H は厳密にはアイソスカラーではない。しかし、クーロン力は核力に比べれば弱く、陽子と中性子の質量差は小さいから、この 2 つを無視しても第 0 近似ではよいと考えられる。この場合、 H は A 核子系の全アイソスピン \mathbf{T} と交換する:

$$[H, \mathbf{T}] = 0, \quad \mathbf{T} = \sum_{k=1}^A \mathbf{t}_k \quad (4.8)$$

(4.8) が成り立つとき、 H, \mathbf{T}^2, T_3 の同時固有状態が存在する。 T_3 は個々の核子 t_3 の和であり、 t_3 の固有値は陽子の場合 $1/2$, 中性子の場合 $-1/2$ である。したがって、系が Z 個の陽子と N 個の中性子からなる場合、 T_3 の固有値 M_T は $M_T = (Z - N)/2$ になる。18 ページの回転不変と縮退の関係はアイソスピン不変の場合にも成り立つ。したがって、ハミルトニアンが (4.8) を満たすならば、 H の固有値は M_T に依らない。つまり、 $A = Z + N$ が同じで Z, N の異なる原子核のエネルギースペクトルを比較すると、 M_T 以外の量子数が同じ状態は縮退する。図は $T=1$ 状態のエネルギースペクトルの実験値である。同じ角運動量とパリティの状態を破線で結んである。この図から (4.8) がよい近似で成り立っていることが分かる。図に示した最低エネルギー準位は、実際には同じエネルギーではなく $E(^{14}\text{N}) - E(^{14}\text{C}) = 1.64 \text{ MeV}$, $E(^{14}\text{O}) - E(^{14}\text{N}) = 2.33 \text{ MeV}$ だけずれている。これは中性子と陽子の質量差 ($1.29 \text{ MeV}/c^2$) と陽子数の違いによるクーロンエネルギーの差として理解できる。



アイソスピンは、核子に限らず一般に素粒子を特徴付ける基本的性質である。例えば、 π 中間子 (π meson) あるいはパイオン (pion) と呼ばれる粒子は電荷が $\pm e$ の π^\pm (質量 $139.57 \text{ MeV}/c^2$) と中性の π^0 ($134.98 \text{ MeV}/c^2$) の 3 種類ある。これらはアイソスピン $t = 1$ である同一粒子の 3 つの固有状態

$$|\pi^\pm\rangle = |t=1, m_t = \pm 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |t=1, m_t = 0\rangle$$

と見なせる。

問 4.1 次の反交換関係を満たす a_p, a_n を考える。

$$\{a_\alpha^\dagger, a_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0, \quad \{a_\alpha, a_\beta\} = 0$$

1. ここで

$$T_3 = \frac{1}{2} (a_p^\dagger a_p - a_n^\dagger a_n), \quad T_+ = a_p^\dagger a_n, \quad T_- = a_n^\dagger a_p$$

とすると、角運動量と同じ交換関係

$$[T_+, T_-] = 2T_3, \quad [T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$$

が成り立つことを示せ。

2. 状態 $|0\rangle$ を $a_\alpha|0\rangle = 0$ で定義する。 $|p\rangle = a_p^\dagger|0\rangle$, $|n\rangle = a_n^\dagger|0\rangle$ とすると

$$T_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle, \quad T_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$$

$$T_+|p\rangle = 0, \quad T_+|n\rangle = |p\rangle, \quad T_-|p\rangle = |n\rangle, \quad T_-|n\rangle = 0$$

となることを示せ。これらは (4.1), (4.2) と同等な関係式である。

$a_p^\dagger(a_p)$ を陽子の生成 (消滅) 演算子, $a_n^\dagger(a_n)$ を中性子の生成 (消滅) 演算子と解釈すれば、ここで定義した \mathbf{T} は核子のアイソスピンである。

問 4.2 核子とパイオンの系を考える。この系の全アイソスピンの固有状態を $|TM_T\rangle$ とする。 T は $t = 1/2$ と $t = 1$ の合成であるから、 $T = 3/2, 1/2$ の2つの値をとる。

1. $|\pi^+ p\rangle, |\pi^- p\rangle, |\pi^0 n\rangle$ を $|TM_T\rangle$ で表わせ。
2. パイオン-核子散乱において、散乱前の状態を $|a\rangle$ 、散乱後の状態を $|b\rangle$ とする。この反応の散乱振幅 $f(a \rightarrow b)$ は、あるアイソスカラー演算子 S により

$$f(a \rightarrow b) = \langle b|S|a\rangle$$

で与えられる。このとき

$$f(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = f_{3/2}$$

$$f(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = \frac{f_{3/2} + 2f_{1/2}}{3}$$

$$f(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = \frac{\sqrt{2}}{3} (f_{3/2} - f_{1/2})$$

となることを示せ。ただし、 $f_T = \langle T M_T|S|T M_T\rangle$ である。 S がアイソスカラーであるから、 f_T は M_T に依らない。

5 2核子系と核力

5.1 2核子系

陽子1個と中性子1個からなる重陽子 (deuteron) は2核子系としては唯一の束縛状態である。重陽子を調べるにより核力の情報が得られる。陽子と中性子の質量差を無視して核子の質量を m とする。核子1と2から成る系のハミルトニアン H は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 + V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$$

である。ここで V は核力を表わす。 V は一般に2核子間の相対距離及び核子のスピン、アイソスピんに依存する。重心の位置 \mathbf{R} と相対位置 \mathbf{r} は

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

である。 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を \mathbf{R}, \mathbf{r} で表わすと

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_T}\nabla_R^2 + \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right), \quad r = |\mathbf{r}|$$

になる。ただし $m_T = 2m$ は全質量, $\mu = m/2$ は換算質量である。 H は \mathbf{R} の部分と \mathbf{r} の部分に分離するから, $H\Psi = E\Psi$ を満たす2粒子系の波動関数 Ψ は

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r})$$

という型に書け, 各々は

$$-\frac{\hbar^2}{2m_T}\nabla_R^2\Phi(\mathbf{R}) = E_R\Phi(\mathbf{R}), \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(\mathbf{r}) = E_r\psi(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

を満たす。ただし, $E = E_R + E_r$ である。重心運動は自由粒子の運動であり, 波動関数は平面波になる。2体問題はポテンシャル $V(r)$ における換算質量 μ の1体問題(5.1)に帰結する。

ψ は軌道空間, スピン, アイソスピンの状態の積である。軌道部分とスピン部分の波動関数を相対運動の軌道角運動量 $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ と2核子の全スピン $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ の固有状態で表わそう。全角運動量 \mathbf{J} は

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

である。 \mathbf{S} がとりうる固有値は $S = 0, 1$ の2つである。この S と $L = 0, 1, 2, \dots$ を合成して J を作る。したがって

$$S = 0 \text{ のとき } J = L, \quad S = 1 \text{ のとき } \begin{cases} J = L, L \pm 1 & L \neq 0 \\ J = 1 & L = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

になる。これらの状態は慣例として $^{2S+1}記号_J$ と表記する。ここで“記号”は $L = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して大文字の S, P, D, F, \dots で表わす。例えば 3D_1 は $L = 2, S = 1, J = 1$ の状態である。

$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ の固有状態 $|SM_S\rangle$ は(4.5), (4.6)で

$$|p\rangle \longrightarrow |+\rangle = |s = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle, \quad |n\rangle \longrightarrow |-\rangle = |s = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle$$

の置き換えをすればよい。 \mathbf{L} の固有状態 $|LM_L\rangle$ は球面調和関数 $Y_{LM_L}(\theta, \phi)$ で表される。ここで θ, ϕ は相対座標 \mathbf{r} を極座標で表したときの角度である。角運動量の合成での議論から分かるように

$$\mathbf{J}^2 |(LS)JM\rangle = J(J+1) |(LS)JM\rangle, \quad J_3 |(LS)JM\rangle = M |(LS)JM\rangle$$

を満たす固有状態 $|(LS)JM\rangle$ を S と L の固有状態の積

$$|(LS)JM\rangle = \sum_{M_L, M_S} C_{M_L M_S} Y_{L M_L}(\theta, \phi) |S M_S\rangle$$

で作れる。ここでは係数 $C_{M_L M_S}$ の具体的表現は問題ではない。以上から、求める固有関数 $\psi(\mathbf{r})$ は

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r) |(LS)JM\rangle |T M_T\rangle \quad (5.3)$$

となる。ここで $R(r)$ は相対運動の動径方向の波動関数、 $|T M_T\rangle$ は全アイソスピン $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ の固有状態 (4.5) あるいは (4.6) である。

パウリ原理から、2 核子系の波動関数は核子を交換したとき符号が変わらなければならない。粒子 1 と 2 を交換する演算子を P_{12} で表わすと

$$P_{12}\Psi = -\Psi$$

である。2 粒子の交換に関して重心 \mathbf{R} と相対位置 \mathbf{r} は

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \xrightarrow{P_{12}} \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1}{2} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \xrightarrow{P_{12}} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}$$

である。したがって、粒子の交換に対して重心の波動関数は不変であるから、相対運動の波動関数は符号を変えなければならない。 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ を極座標で表すと $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \pi + \phi)$ である。球面調和関数は

$$Y_{L M_L}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^L Y_{L M_L}(\theta, \phi) \quad (5.4)$$

を満たす。また、(4.5), (4.6) から $T = 1$ の状態は粒子の交換に関して対称であり、 $T = 0$ は反対称であるから、2 粒子の交換に対して $|T M_T\rangle$ は $(-1)^{T+1}$ という符号変化をする。同様に $|S M_S\rangle$ も $(-1)^{S+1}$ である。これから

$$P_{12}\psi(\mathbf{r}) = (-1)^L (-1)^{S+1} (-1)^{T+1} \psi(\mathbf{r}) = (-1)^{L+S+T} \psi(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

である。したがって、 $L + S + T$ は奇数のみが許される。

座標系を反転する変換をパリティという。重心を原点とする座標系でのパリティ演算子 P は

$$P\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{R}, -\mathbf{r}), \quad \text{つまり } P\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$$

である。(5.3) の場合

$$P\psi(\mathbf{r}) = (-1)^L \psi(\mathbf{r})$$

になるから、この状態はパリティの固有状態で固有値は $(-1)^L$ である。粒子交換と異なりスピン・アイソスピンは P に関して不変である。

重陽子 実験によれば重陽子の基底状態のパリティは $+1$ 、全角運動量 J は $J = 1$ である。パリティから軌道角運動量 L は偶数である。これと (5.2) から $J = 1$ であるためには $S = 1, L = 0, 2$ である。さらに、(5.5) より $L + S + T$ は奇数でなければならないから $T = 0$ である。したがって、重陽子の基底状態は (5.3) の重ね合わせで

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(R_0(r) |(01)1M\rangle + R_2(r) |(21)1M\rangle \right) |T=0\rangle$$

と表わせる。実験によると $|R_2(r)|^2 \sim 0.05|R_0(r)|^2$ であり、陽子の基底状態は主に $L = 0$ であるが $L = 2$ をわずかに含む。

重陽子の基底状態が $T = 0$ であることは次の議論からも導ける。(4.5) から $T = 1$ の状態は陽子-中性子 ($M_T = 0$) 以外にも 陽子-陽子 ($M_T = 1$) と 中性子-中性子 ($M_T = -1$) がある。アイソスピン不変性から $T = 1$ における 陽子-陽子, 中性子-中性子, 陽子-中性子 間の核力は同じである。したがって, 陽子-陽子 と 中性子-中性子 の束縛状態が存在しない以上, $T = 1$ の陽子-中性子も束縛状態をつくらない。これから重陽子は $T = 0$ でなければならない。

核力は $T = 0$ の 2 核子間に働く場合と $T = 1$ の場合では異なり, $T = 0$ では $T = 1$ よりも強い引力になる。

問 5.1 仮想的に重陽子の基底状態のパリティが -1 , 全角運動量 J が $J = 0$ とする。このとき, 核子間の相対軌道角運動量 L , 全スピン S , 全アイソスピン T として許される値を求めよ。

5.2 核力

核力は原理的には強い相互作用を記述する QCD から導出できるはずであるが, 実際には不可能である。この様に原理的なことから核力を決定できないところに核力の問題の難しさがある。ここでは対称性の観点から, 核力としてどのような型が可能か考えてみよう。

- 並進不変性 2 核子間に働く力は核子の絶対的位置に依らずに, 2 核子間の相対的位置にだけ依存するはずである。核子 1, 2 の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とすると

$$V = V_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

である。

- 回転不変性 何らかの外場が作用しないかぎり, 核力は 2 核子間の相対位置 \mathbf{r} の向きには依存しないであろう。したがって

$$V = V_0(r), \quad r = |\mathbf{r}|$$

である。 V は核子のスピン $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ に依存してもよい。このスピンから作れる回転不変なスカラー量で 2 核子に依存するものは $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ であるから

$$V = V_0(r) + V_\sigma(r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$$

になる。

- アイソスピン不変性 V はアイソスカラーであるから $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$ を含んでもよい。これから

$$V = V_0(r) + V_\sigma(r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + V_\tau(r) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + V_{\sigma\tau}(r) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \quad (5.6)$$

である。

V は核子の運動量や軌道角運動量に依存する項も考えられるが, ここではこれ以上一般化しない。(5.6) に含まれる $V(r), V_\sigma(r), \dots$ などの関数形は対称性の議論からは決まらない。これらは中間子交換による核力からの類推や半経験的に決められた関数を仮定し, 重陽子の性質や核子-核子散乱の実験データを再現するように決める。

2 核子の全アイソスピン $\mathbf{T} = (\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2)/2$ を使うと

$$\mathbf{T}^2 = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + 2\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = \frac{1}{4} (3 + 3 + 2\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$$

であるから $\tau_1 \cdot \tau_2 = 2T^2 - 3$ となる。これから2核子系のアイソスピン状態 $|TM_T\rangle$ に対して

$$\tau_1 \cdot \tau_2 |TM_T\rangle = \begin{cases} -3, & T=0 \text{ のとき} \\ 1, & T=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。したがって、例えば $V = V_0(r) + V_\tau(r) \tau_1 \cdot \tau_2$ とすると

$$V|TM_T\rangle = \begin{cases} (V_0(r) - 3V_\tau(r)) |TM_T\rangle, & T=0 \text{ のとき} \\ (V_0(r) + V_\tau(r)) |TM_T\rangle, & T=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。したがって、重陽子で議論した様に、 $T=0$ と $T=1$ では核力は異なる。また、 $T=1$ において陽子-陽子、中性子-中性子、陽子-中性子間の力は同じ、つまり、 M_T に依存しない。

スピンについてもアイソスピンと同様のことが成り立ち、2核子がスピン三重項に組む場合とスピン一重項に組む場合で(5.6)は異なる作用をする。このように核力は内部自由度であるスピン・アイソスピンに強く依存する。これは電磁相互作用にはない核力の重要な性質である。

(5.6)は2核子の相対軌道角運動量 \mathbf{L} と交換するから、重陽子の基底状態における $L=0$ と $L=2$ の混合を説明することはできない。混合を説明するためには、(5.6)に次のようなテンソル力

$$V_T(r) S_{12}, \quad S_{12} = 3 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (5.7)$$

を導入する必要がある。 S_{12} はスカラーであるが、軌道空間についてだけ考えると、 $r_i r_j / r^2$ という型をしており、これは球面調和関数 $Y_{2q}(\theta, \phi)$ の線形結合で表わせる。したがって、 $L=0$ と $L=2$ の混合が起こる。

対称性に基づいた以上の議論では $V(r)$ を決定できない。核力をさらに解明する有効な方法は、湯川の間接子理論を出発点とする方法である。量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics, QED) によれば、クーロン力は2粒子間で光子を交換すると生じる。湯川はこれから類推して、2核子間にある未知の粒子 (現在では π 中間子あるいはパイオンと呼ばれる) を交換すると核力が生じると考えた。中間子交換による核力の導出は相対論的場の理論を使う必要があるが、ここではクーロン力との類似から核力を導いてみよう。原点に点電荷 e が存在する場合、電磁場のスカラーポテンシャル $V(\mathbf{r})$ はポアソン方程式

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -e \delta(\mathbf{r})$$

を満たす。量子力学では $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$ であるから、上の式は

$$c^2 \mathbf{p}^2 V(\mathbf{r}) = \hbar^2 c^2 e \delta(\mathbf{r})$$

と書ける。 $c^2 \mathbf{p}^2$ が光子のエネルギーの2乗であることに注意すると、質量 m の中間子を交換したときのポテンシャルは、 $c^2 \mathbf{p}^2$ を質量 m の粒子のエネルギーの2乗 $c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4$ で置き換えた方程式

$$(c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4) V(\mathbf{r}) = \hbar^2 c^2 g \delta(\mathbf{r}), \quad \text{つまり} \quad (\nabla^2 - \lambda^{-2}) V(\mathbf{r}) = -g \delta(\mathbf{r}), \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (5.8)$$

を満たすであろう。ここで λ はコンプトン波長である。電荷 e は荷電粒子と光子の結合の強さを表わす定数である。これに対応して g は核子と中間子の結合の強さを表わす。方程式(5.8)の解を求めよう。 $V(\mathbf{r})$ をフーリエ変換して

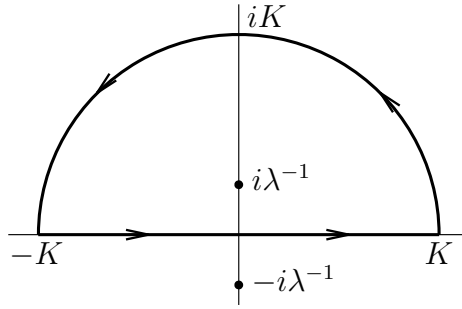
$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{k}) \quad (5.9)$$

とする。また、デルタ関数は

$$\delta(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \quad (5.10)$$

である。これらを (5.8) に代入すると $(\mathbf{k}^2 + \lambda^{-2})V(\mathbf{k}) = g$ を得る。したがって

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \frac{g}{\mathbf{k}^2 + \lambda^{-2}} \\ &= \frac{g}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\exp(ikr \cos\theta)}{k^2 + \lambda^{-2}} \\ &= \frac{g}{4i\pi^2 r} \int_0^\infty dk k \frac{\exp(ikr) - \exp(-ikr)}{k^2 + \lambda^{-2}} \\ &= \frac{g}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \exp(ikr) \frac{k}{k^2 + \lambda^{-2}} = -\frac{g}{4\pi^2 r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\exp(ikr)}{k^2 + \lambda^{-2}} \end{aligned} \quad (5.11)$$



図のようなガウス平面上の積分路 C を考える。上の被積分関数は $z = \pm i\lambda^{-1}$ に一位の極をもつ。したがって、留数定理から

$$\int_C dz \frac{e^{izr}}{z^2 + \lambda^{-2}} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i/\lambda} (z - i\lambda^{-1}) \frac{e^{izr}}{z^2 + \lambda^{-2}} = \pi\lambda e^{-r/\lambda} \quad (5.12)$$

一方

$$\int_C dz \frac{e^{izr}}{z^2 + \lambda^{-2}} = \int_{-K}^K dk \frac{e^{ikr}}{k^2 + \lambda^{-2}} + \int_0^\pi d\theta \frac{dz}{d\theta} \frac{e^{izr}}{z^2 + \lambda^{-2}}, \quad z = Ke^{i\theta}$$

$r \sin\theta \geq 0$ ならば

$$\left| \frac{dz}{d\theta} \frac{e^{izr}}{z^2 + \lambda^{-2}} \right| = \frac{Ke^{-Kr \sin\theta}}{|K^2 e^{i2\theta} + \lambda^{-2}|} \leq \frac{Ke^{-Kr \sin\theta}}{K^2 - \lambda^{-2}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

したがって $K \rightarrow \infty$ では半円の寄与は 0 になり

$$\int_C dz \frac{e^{izr}}{z^2 + \lambda^{-2}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{k^2 + \lambda^{-2}} \quad (5.13)$$

(5.11), (5.12), (5.13) から

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{g}{4\pi^2 r} \frac{d}{dr} \pi\lambda e^{-r/\lambda} = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (5.14)$$

を得る。 $e^{-r/\lambda}/r$ を湯川型という。光子のように $m=0$ のときは $V(\mathbf{r}) = \frac{g}{4\pi r}$ になり、クーロンポテンシャルを再現する。

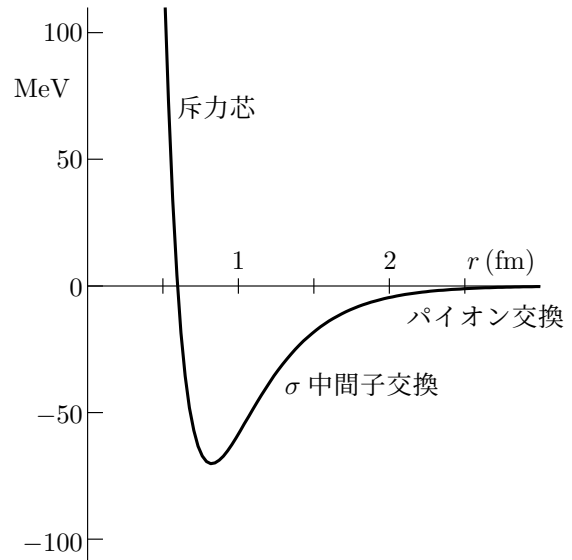
$m \neq 0$ ならば (5.14) は r の増加とともに指数関数的に急激に小さくなる。この力の作用する範囲は $e^{-r/\lambda} = e^{-1}$ になる r , つまりコンプトン波長 λ としてよかろう。パイオンの質量は $mc^2 \approx 140$ MeV であるから

$$\lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{140 \text{ MeV}} \approx 1.4 \text{ fm}$$

となり, 非常に近距離の力である。これに反して, クーロン力や重力のポテンシャルは $1/r$ でゆっくり 0 に近づく。原子核よりも大きな系では, 核力は表に現れずクーロン力と重力が重要な役割をする。結合定数 g は陽子-陽子散乱の実験等から決められ, $g^2/(4\pi\hbar c) \approx 14$ である。これに対応するクーロン力の定数は微細構造定数 $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$ である。 g^2 は e^2 に比べて非常に大きいため, 核力をもたらす相互作用を強い相互作用という。

パイオン交換を場の理論で扱くと, (5.6) の型のポテンシャルが具体的に求まる。また, テンソル力 (5.7) の存在も説明する。しかし, 核力のすべての性質をパイオン交換だけで理解することはできない。パイオン交換による核力は核子間距離 r が大きいところ ($r > 2 \text{ fm}$) でのみ適用できる。核力の作用範囲は (5.14) から交換する中間子の質量に逆比例するから, r が小さくなるとパイオンより重い中間子 ($\sigma, \omega, \rho, \dots$) の交換が重要になってくる。

核力 $V(r)$ は 2 核子間の S, T に強く依存するが, 定性的には図のようになり, 大きく分けて 3 つの領域に分類できる。遠距離 ($r > 2 \text{ fm}$) では, 上に述べた様に, 核力はパイオン交換により生ずる。これは比較的弱い引力である。中距離 ($1 < r < 2 \text{ fm}$) では, 2 個のパイオン交換あるいは σ 中間子 ($m_\sigma c^2 \sim 500 \text{ MeV}$) と呼ばれる中間子の交換が重要になり, 核子から原子核を形成する主要な引力をもたらす。近距離 ($r < 1 \text{ fm}$) には強い斥力芯 (repulsive core) が存在する。斥力芯の存在は, 原子核の飽和性や高エネルギーの核子-核子散乱の実験データを説明するために必要である。斥力芯の起源はまだよく分かっていない。中間子交換の立場からすれば, ω 中間子 ($m_\omega c^2 = 783 \text{ MeV}$) 交換によると考えられる。しかし, この領域では核子同士が重なりあうから, 核子と中間子を基本粒子とする扱いでよいとは一概に言えない。



重陽子の簡単な模型 図に示した $V(r)$ を単純化したモデル

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & r < c \\ -V_0 & c < r < c+b \\ 0 & c+b < r \end{cases} \quad (V_0 > 0) \quad (5.15)$$

を用いて重陽子の基底状態を考えよう。基底状態は $L=0$ であるとする。波動関数 (5.3) は

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{00}(\theta, \phi) |S=1 M_S\rangle |T=0 M_T=0\rangle$$

になる。 $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ であるから ψ は θ, ϕ に依存しない。このような場合

$$\frac{\partial}{\partial x} F(r) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

であるから

$$\nabla^2 F = \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} rF$$

したがって, (5.1) は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) \right) u(r) = E u(r)$$

となる。ここで E_r を単に E と記した。 $-V_0 < E < 0$ であるから

$$K = \sqrt{2\mu(V_0 + E)/\hbar^2} b, \quad k = \sqrt{-2\mu E/\hbar^2} b \tag{5.16}$$

とおくと (K, k は無次元)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{K^2}{b^2} u \quad (c < r < c + b), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{k^2}{b^2} u \quad (c + b < r)$$

となる。したがって, 境界条件 $u(r = c) = 0, u(r)/r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ を考慮すると

$$u(r) = \begin{cases} C_1 \sin \frac{K(r-c)}{b} & c < r < c + b \\ C_2 e^{-kr/b} & c + b < r \end{cases} \tag{5.17}$$

である。 u'/u が $r = b + c$ で連続という条件から $K \cot K = -k$ を得る。この方程式を図式的に解くために $K_0 = \sqrt{2\mu V_0/\hbar^2} b$ とすると

$$K \cot K = -\sqrt{K_0^2 - K^2} \tag{5.18}$$

となる。方程式 (5.18) の両辺を K の関数として描いたとき, 両曲線の交点の K が求める解である。

方程式 (5.18) の解 K が求まれば, E は (5.16) から

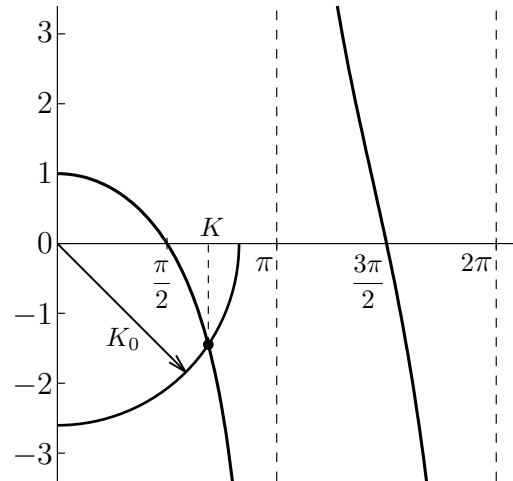
$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2 K^2}{2\mu b^2} \tag{5.19}$$

で与えられる。図から明らかなように

$$K_0 < \frac{\pi}{2} \quad \text{つまり} \quad V_0 < \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2$$

では束縛状態はない。また, $\pi/2 \leq K_0 < 3\pi/2$ のとき束縛状態は1つ, $3\pi/2 \leq K_0 < 5\pi/2$ では2つ存在する。

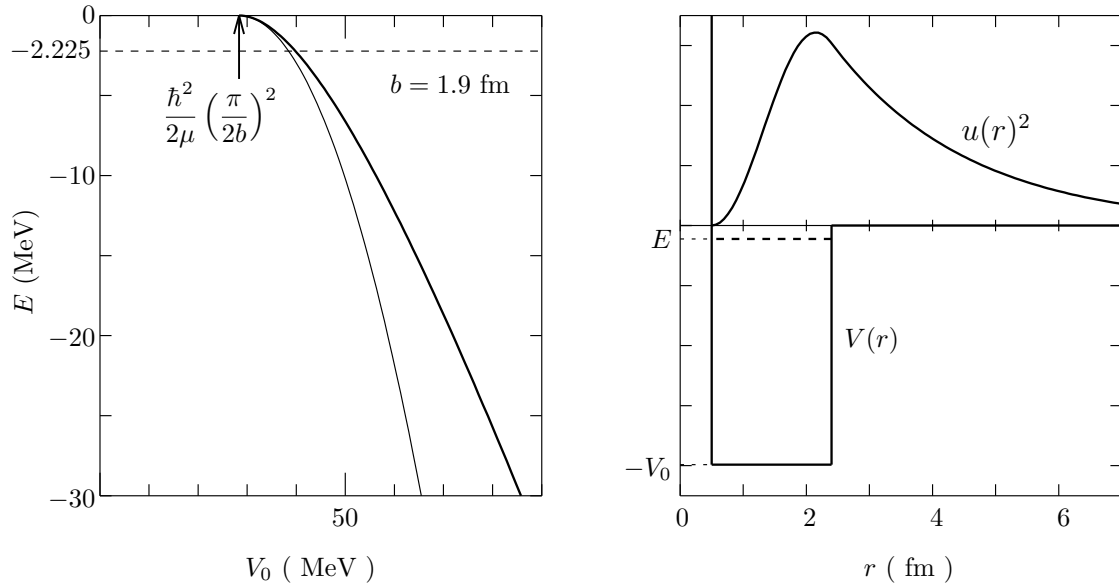
実験によると $E = -2.225 \text{ MeV}$ である。このデータだけでは, 3つのパラメータ b, c, V_0 全部は決められない。そこで b と c については, 核子-核子散乱の実験データから得られる値 $b \approx 1.9 \text{ fm}$, $c \approx 0.5 \text{ fm}$ を使うことにして, V_0 を求めよう。 $\mu c^2 = 939/2 \text{ MeV}$ とする。(5.18), (5.19) から V_0 と E の関係を数値的に求めると下の左図の太い曲線になる。細い曲線は近似解 (5.20) を表わす。数値計算の結果は $V_0 = 39.83 \text{ MeV}$ とすると $E = -2.225 \text{ MeV}$ になる。右図は規格化された束縛状態の波動関数の2乗 $u(r)^2$ を図示したものである。縦軸の単位は $u(r)^2$ に対しては 0.1 fm^{-1} , ポテンシャルに対しては 10 MeV である。結合エネルギーはポテンシャルの深さ ($\approx -40 \text{ MeV}$) に比べて非常に小さく, 重陽子はぎりぎり束縛している。核力の作用範囲 b が小さいために, ポテン



シャルが深くても強い束縛状態にはならない。 $r > b + c$ では中性子と陽子は核力の作用範囲外にあり、互いに自由に運動している。中性子と陽子がこの領域に存在する確率を計算すると

$$\int_{b+c}^{\infty} u(r)^2 dr = 0.656$$

になる。陽子と中性子が力を及ぼしあう確率は $1/3$ 程度である。



問 5.2 $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$ とすると, (5.7) で定義した S_{12} は

$$S_{12} = 2(3S_r^2 - \mathbf{S}^2), \quad S_r = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}}{r}$$

と表せることを示せ。 S_r は \mathbf{S} の \mathbf{r} 方向成分であり, その固有値は S_3 と同じである。 S_{12} の固有値を求めよ。

問 5.3 $K_0 \approx \pi/2$ での (5.18) の近似解をもとめ

$$E \approx -\frac{\mu b^2}{2\hbar^2} \left[V_0 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \right]^2 \quad (5.20)$$

となることを示せ。また, 右辺の次元が正しいことを確かめよ。

問 5.4 方程式 (5.18) から E を V_0 の関数として数値的に求めるプログラムを作成せよ。超越方程式の解を求める方法にはニュートン法, セカント法, 2分法などがある。

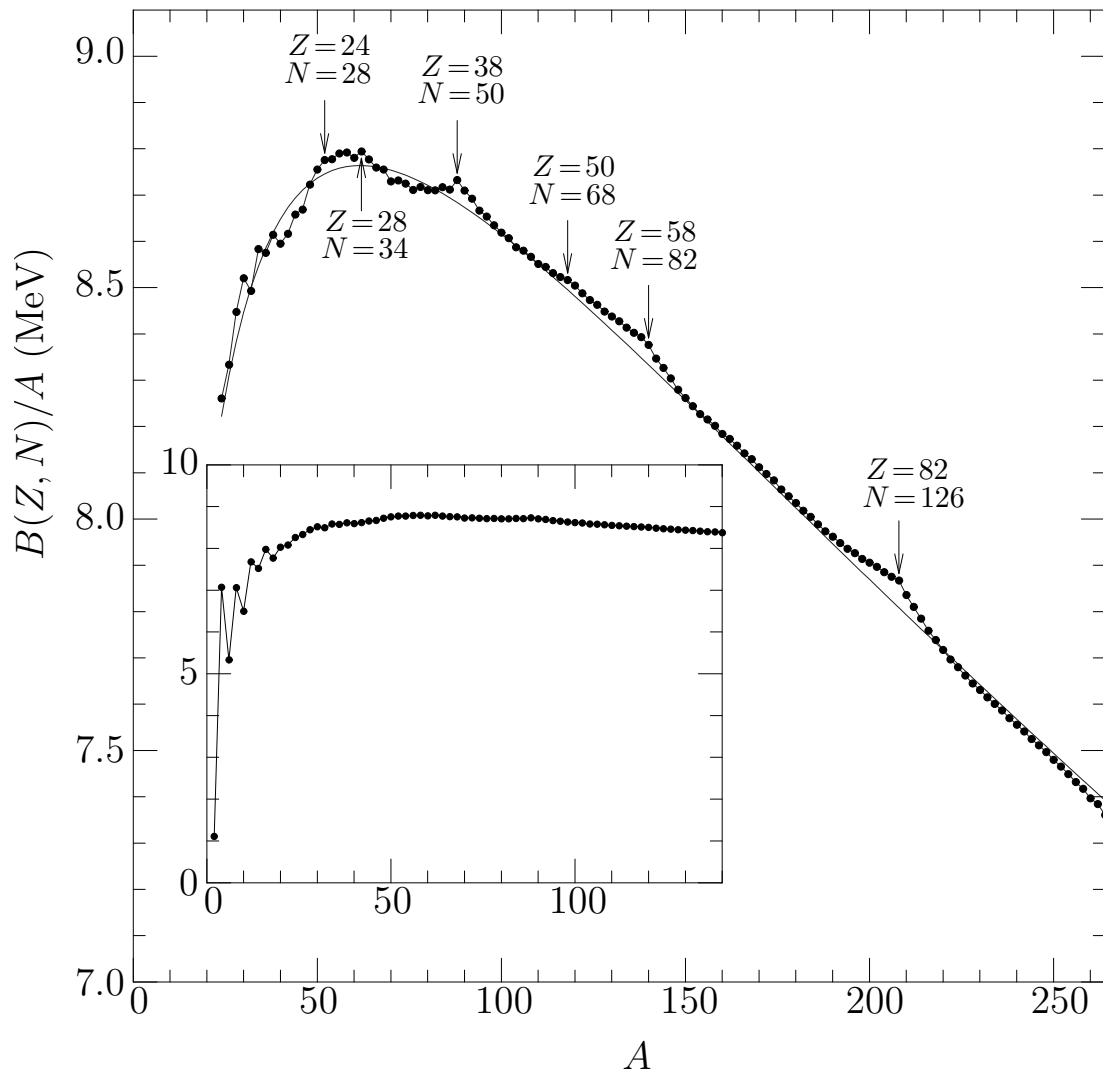
6 結合エネルギー

6.1 結合エネルギー

粒子が集まって束縛系を形成しているとき、これらの粒子をばらばらに引き離すのに必要な最小エネルギーを結合エネルギー (binding energy) という。陽子数 (原子番号) Z , 中性子数 N の原子核を考えよう。この原子核の質量を $M(Z, N)$, 陽子と中性子の質量をそれぞれ m_p, m_n とすると、原子核の結合エネルギー $B(Z, N)$ は

$$B(Z, N) = (Zm_p + Nm_n - M(Z, N))c^2 \quad (6.1)$$

で定義される。 $Mc^2 + B = Zm_pc^2 + Nm_nc^2$ であるから、原子核に B のエネルギーを与えると、原子核はばらばらな核子の集りになることができる。核子あたりの結合エネルギーの実験値を下に示す。* 質量数 $A = Z + N$ が偶数である原子核のアイソバー (isobar, A が同じで Z, N が異なる核種) のうち、結合エネルギーが最も大きなものを示した。なめらかな曲線はワイツゼッカー・ベータの質量公式 (6.4) による値である。



* データは http://www.dne.bnl.gov/nndcscr/masses/mass_rmd.mas95 による。

軽い原子核 ($A < 10$) を除くと、核子あたりの結合エネルギー $B(Z, N)/A$ は約 $8 \pm 0.5 \text{ MeV}$ とほぼ一定である。これを結合エネルギーの飽和性という。この飽和性は核力が短距離力であることを示している。核力の作用範囲が長距離ならば、核子は他のすべての核子と相互作用するから、荒く見積もると結合エネルギーは A 個の核子から 2 個を選ぶ組み合わせの数 ${}_A C_2 = A(A-1)/2 \approx A^2/2$ に比例する。したがって、“ $B/A \approx \text{一定}$ ” は個々の核子はその近傍の少数の核子とだけ相互作用をする、すなわち、核力が短距離力であることを意味する。結合エネルギーの飽和性は、核子密度が原子核によらずほぼ一定という密度の飽和性とならんで、原子核の特徴を表す重要な性質である。

原子核の質量が単なる核子の質量の和でないことから、核分裂あるいは核融合によりエネルギーを取り出せる。 $A = Z + N$ の原子核が $A_1 = Z_1 + N_1$ と $A_2 = Z_2 + N_2$ の原子核に分裂する場合を考える。ただし、 $Z = Z_1 + Z_2$ 、 $N = N_1 + N_2$ である。放出されるエネルギーを ΔE とすると

$$M(Z, N)c^2 = M(Z_1, N_1)c^2 + M(Z_2, N_2)c^2 + \Delta E$$

核子あたりの結合エネルギー $b = B(Z, N)/A$ 、 $b_1 = B(Z_1, N_1)/A_1$ 、 $b_2 = B(Z_2, N_2)/A_2$ で表すと

$$\Delta E = A_1 b_1 + A_2 b_2 - Ab = A_1 (b_1 - b) + A_2 (b_2 - b)$$

である。 B/A が単調減少の領域ならば $b_1 > b$ 、 $b_2 > b$ であるから $\Delta E > 0$ となり、核分裂によりエネルギーが取り出せる。 $A \approx 240$ の原子核が $A \approx 120$ の 2 個の原子核に分裂するとき、 $b \approx 7.5 \text{ MeV}$ 、 $b_1 \approx b_2 \approx 8.5 \text{ MeV}$ であるから $\Delta E \approx A \text{ MeV} \approx 240 \text{ MeV}$ になる。これは 1 化学反応で生じるエネルギー (数 eV) の 10^8 倍という莫大なエネルギーである。

B/A が平均的には単調増加である領域では、核分裂ではなく核融合によりエネルギーを放出する。ただし、原子核は正の電荷を持つから、クーロン力に逆らって 2 つの原子核を融合させなければならぬ。そのため、原子核を加速して衝突させる必要がある。

$A > 20$ では B/A は平均的には滑らかな変化をする。しかし、 Z または N が魔法数 (magic number)

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184$$

である原子核近傍では、結合エネルギーは滑らかな曲線から大きい方にずれ、これらの原子核が特に安定であることを表わしている。原子の場合

$$Z = 2 (\text{He}), 10 (\text{Ne}), 18 (\text{Ar}), 36 (\text{Kr}), 54 (\text{Xe}), 86 (\text{Rn})$$

である希ガス (不活性気体) では、電子は閉殻 (closed shell) をなし、その原子は化学的に安定である。原子核の魔法数の存在は、原子核にも殻構造 (shell structure) が存在することを示す。

6.2 質量公式

原子核の結合エネルギー $B(Z, N)$ は全体的には A の滑らかな関数である。原子核を電荷が一樣に分布した半径 $r_0 A^{1/3}$ の液滴とみなし、この関数の簡単な表現を求めよう。

まず、 $B(Z, N)/A$ は原子核に依らずほぼ一定であるから、最初の近似として $B(Z, N) = b_{\text{vol}} A$ である。原子核の体積は A に比例するから、この項を体積エネルギー (volume energy) という。ところで、原子核の表面付近にある核子は、核内部にある核子に比べて相互作用する相手の核子が少ないから、弱く束縛していると考えられる。表面にある核子について、 $b_V A$ は結合エネルギーを与

えすぎる。このため、表面にある核子数、つまり原子核の表面積に比例した補正を行う。表面積は $A^{2/3}$ に比例するから、表面効果を考慮して

$$B(Z, N) = b_{\text{vol}}A - b_{\text{surf}}A^{2/3}$$

とする。ここで加えた項を表面エネルギーという。

次の補正は陽子間に作用するクーロン斥力の効果である。電荷が一様に分布する半径 R の球のクーロンエネルギー（静電エネルギー）を求める。電荷密度 ρ が一定の半径 r の球を考える。これに無限遠方から電荷を運んできて半径を dr だけ大きくするのに要する仕事を dW とする。半径 r と $r + dr$ にはさまれた部分の体積は $4\pi r^2 dr$ であるから、電荷 $dq = 4\pi r^2 dr \rho$ を運ぶ必要がある。また、電荷が一様分布する半径 r の球の外側では、電荷 $Q_0(r) = \rho 4\pi r^3/3$ が球の中心にあるのと同じであるから、電荷 dq に働く力は、球の中心からの距離を r' とすると $k Q_0(r) dq/r'^2$ である。 k は単位系に依存する定数である。したがって、この力に逆らって $r' = r$ までになす仕事 dW は

$$dW = - \int_{\infty}^r dr' \frac{k Q_0(r) dq}{r'^2} = \frac{k Q_0(r) dq}{r} = \frac{16\pi^2 k}{3} \rho^2 r^4 dr$$

となる。これから、半径 R の球を作るのに要する全仕事 W は

$$W = \frac{16\pi^2 k}{3} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{16\pi^2 k}{15} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{k Q^2}{R}, \quad Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \quad (6.2)$$

Q は半径 R の球の全電荷である。原子核を全電荷 $Q = Ze$ 、半径 $R = r_0 A^{1/3}$ の球とすると、クーロンエネルギーは

$$\frac{3}{5} \frac{ke^2 Z^2}{R} = b_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \quad b_c = \frac{3}{5} \frac{ke^2}{r_0} = \frac{3}{5} \frac{\alpha \hbar c}{r_0}$$

になる。 $\alpha = ke^2/\hbar c$ は微細構造定数である。クーロンエネルギーは結合エネルギーを減少させ

$$B(Z, N) = b_{\text{vol}}A - b_{\text{surf}}A^{2/3} - b_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

となる。

陽子-中性子間に働く核力は、同種核子間に作用する場合より強い引力である。したがって、陽子と中性子が同数ある方が結合エネルギーは大きい。さらに、パウリの原理のため、核子の状態は他の核子の状態と違う必要があるから、同種核子が多くなるほど核子をエネルギーの高い状態に入れなければならない。この点からしても、陽子数と中性子数の差を小さくした方が原子核全体のエネルギーは低くなる。このため対称エネルギー（symmetry energy）と呼ばれる $(N - Z)^2$ に依存する項を付け加える：

$$B(Z, N) = b_{\text{vol}}A - b_{\text{surf}}A^{2/3} - b_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - b_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{2A}$$

$b_{\text{sym}} > 0$ ならば、差 $(N - Z)^2$ が小さい程、結合エネルギーは大きくなる。

実験的に求めた結合エネルギーを詳しく調べると、陽子数 Z または中性子数 N が偶数の原子核は奇数の場合より結合エネルギーが大きい。これは核力の対相互作用（pairing interaction）に原因がある。陽子-陽子あるいは中性子-中性子が角運動量 0 の対（pair）に組むと、他の場合より強い引力として働く。この対相互作用の効果は、平均的には $A = Z + N$ が奇数のとき $\Delta = 0$ として

$$\Delta(A) = \begin{cases} \delta(A), & Z = \text{偶数}, N = \text{偶数} \\ -\delta(A), & Z = \text{奇数}, N = \text{奇数} \end{cases}, \quad \text{ただし } \delta(A) = \frac{12}{\sqrt{A}} \text{ MeV} \quad (6.3)$$

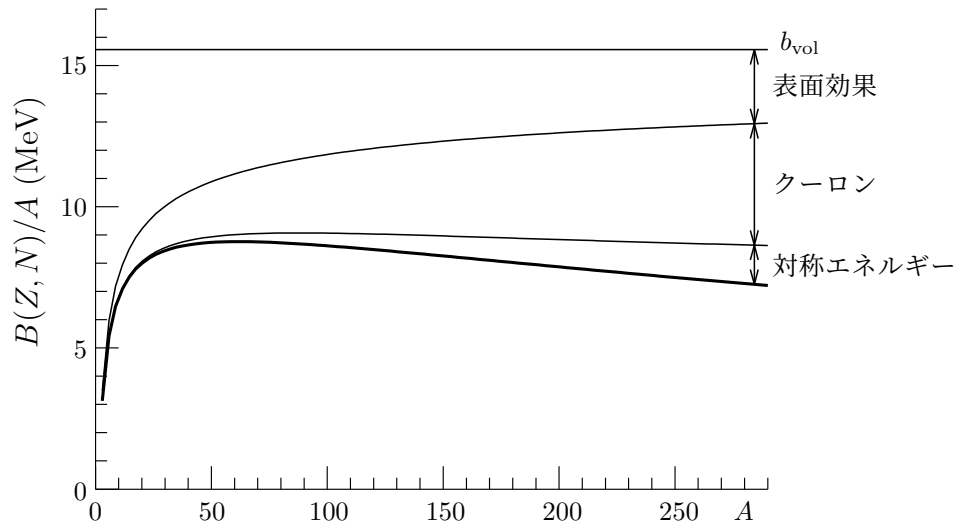
とすればよいことが分かっている。以上から

$$B(Z, N) = b_{\text{vol}}A - b_{\text{surf}}A^{2/3} - b_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - b_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{2A} + \Delta(A) \quad (6.4)$$

となる。これをワイツゼッカー・ベーテ (Weizsäcker-Bethe) の質量公式という。実験値を再現するように (6.4) のパラメータを決めると、例えば (単位は MeV)

$$b_{\text{vol}} = 15.56, \quad b_{\text{surf}} = 17.23, \quad b_{\text{sym}} = 46.57, \quad b_c = 0.697 \quad (r_0 = 1.24 \text{ fm}) \quad (6.5)$$

である。33ページの図で示した原子核について、(6.4) の各項の寄与を図示すると下図のようになる。図の太い曲線が33ページの図に示した滑らかな曲線である。対称エネルギーの効果は小さいように見えるが、実は対称エネルギーがあるために $Z \approx N$ の原子核が最も安定になり、結果的に小さくなる。

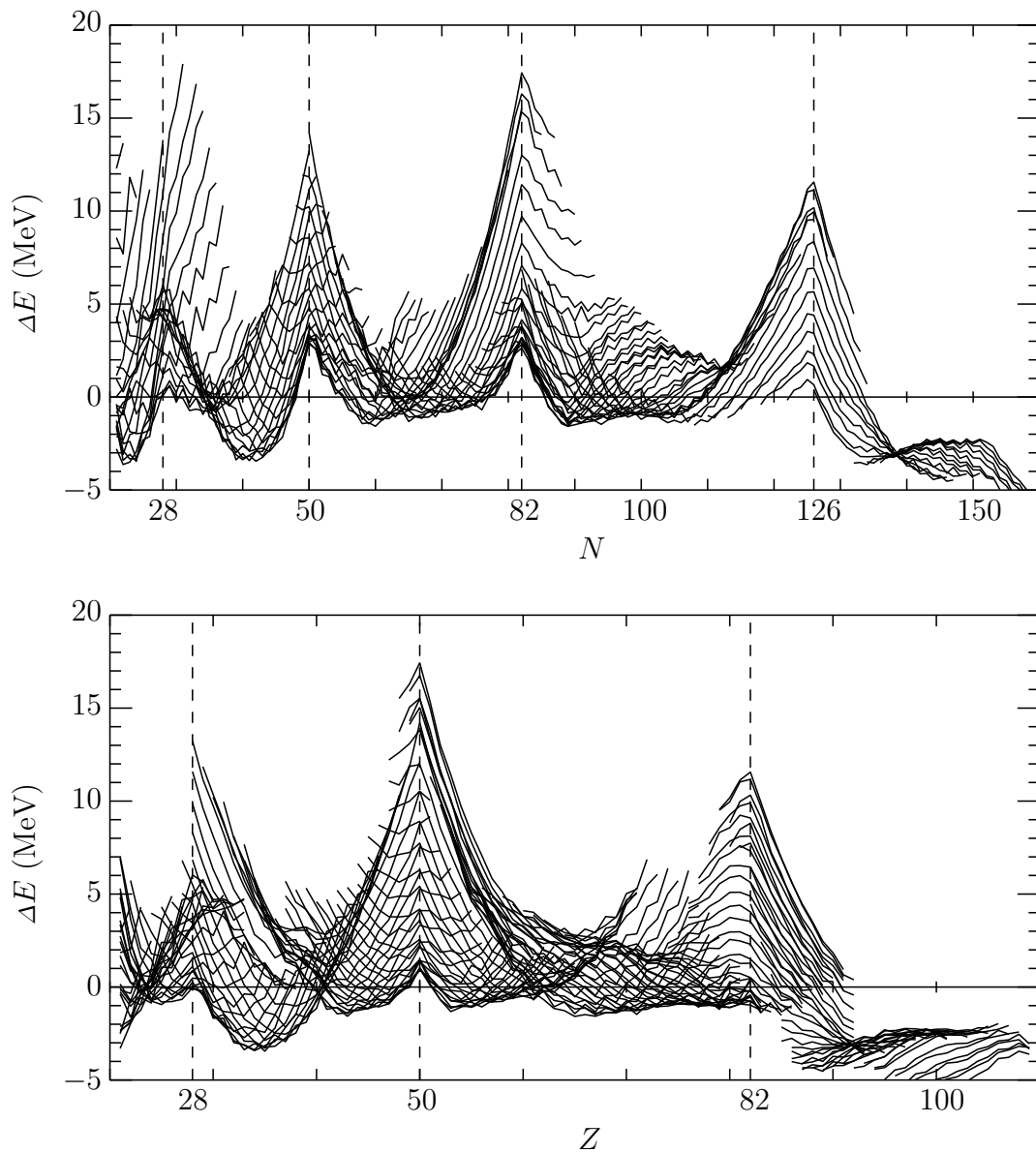


次の表に実験値との比較を示す。3列目は $\Delta E = B(\text{実験値}) - B((6.4))$ を示した。(6.4) は簡単な式であるが、実験値をかなり良い精度で再現することが分かる。

	実験値	(6.4)	ΔE
${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$	342.052	341.270	0.782
${}^{90}_{40}\text{Zr}_{50}$	783.894	780.966	2.928
${}^{162}_{66}\text{Dy}_{96}$	1324.109	1323.443	0.666
${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$	1636.446	1624.892	11.554
${}^{238}_{92}\text{U}_{146}$	1801.694	1805.306	-3.612

(単位は MeV)

${}^{90}\text{Zr}$, ${}^{208}\text{Pb}$ のような魔法数の原子核では、(6.4) の再現性は相対的によくない。下図は質量が実験的に測定されている $Z = 20$ から $Z = 100$ までの約 2400 種の原子核について、 Z を与えたとき ΔE を中性子数 N の関数として描いたものである。実験と理論値の差 ΔE は N の関数として特徴的な変化をし、多くの場合 N が魔法数のとき極大になるという規則性がある。 ΔE の Z 依存性についても同様である。この規則性は原子核にも殻構造が存在することを示す1つの実験的証拠である。



問 6.1 核子-核子間に働く重力 (引力)

$$-\frac{Gm^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad \frac{G}{\hbar c} = 6.71 \times 10^{-39} (c^2/\text{GeV})^2$$

の効果について考える。ただし、 m は核子の質量で陽子と中性子の質量差は無視する。必要なパラメータの値は (6.5) 及び $mc^2 = 939 \text{ MeV}$ を用いよ。

1. クーロンエネルギー (6.2) を導いたのと同様にして、結合エネルギーへの重力の寄与 E_G は

$$E_G = b_G A^{5/3}, \quad b_G = \frac{3}{5} \frac{Gm^2}{r_0}$$

で与えられることを示せ。

2. $A = 100$ のとき E_G は何 MeV か。

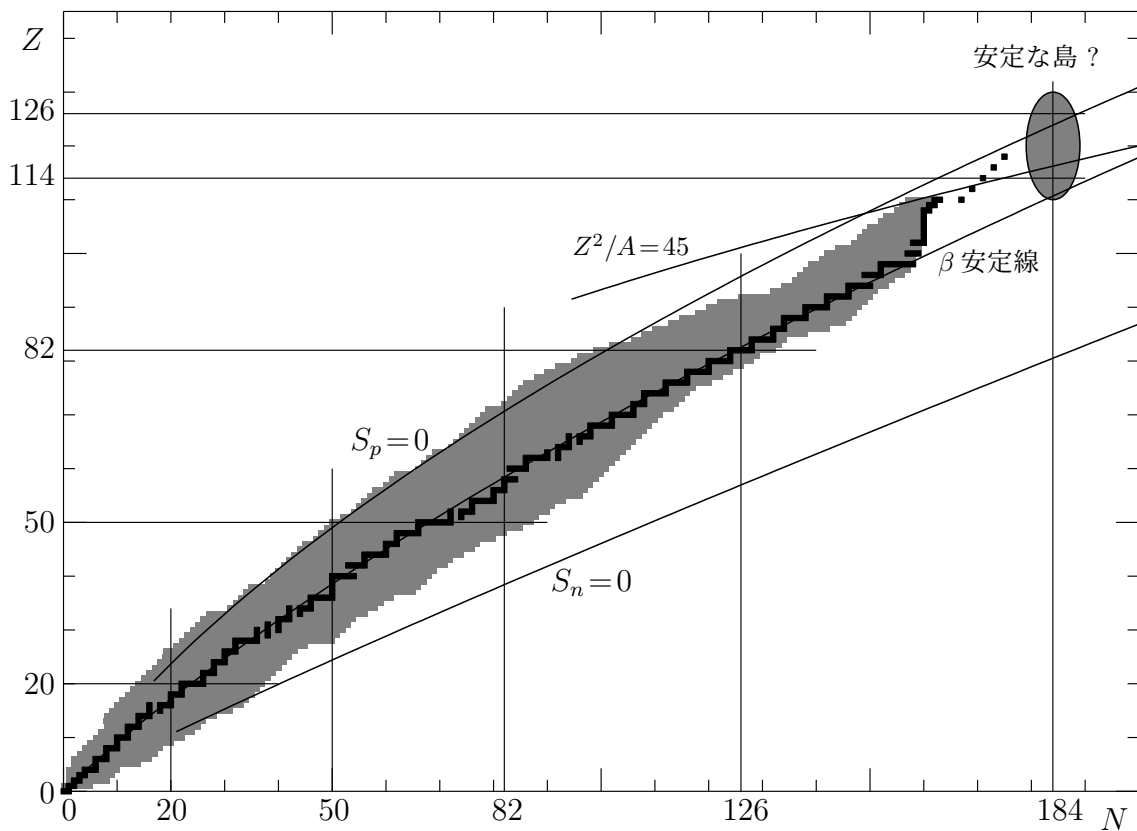
3. 中性子だけからなる原子核を考える ($Z = 0, A = N$)。このような原子核が存在するための条件は

$$B + E_G > 0 \quad (6.6)$$

である。 A が非常に大きいとして表面エネルギー b_{surf} と対相互作用 Δ を無視するとき, (6.6) の条件から $A > A_c$ になる。 A_c の式及び数値を求めよ。

4. $A = A_c$ の原子核の半径 R は何 km か, その質量は地球の質量 $5.98 \times 10^{24} \text{ kg} = 3.34 \times 10^{51} \text{ GeV}/c^2$ の何倍か。

6.3 原子核の存在領域



自然に存在する原子核は約 260 種であるが, 直ぐに他の原子核になってしまう不安定な原子核も含めると, 現在までに約 2900 種の原子核の存在が確認されている。これらの原子核の陽子数 Z と中性子数 N は図のような分布になる。ここで ■ は $A = N + Z$ を与えたとき最も結合エネルギーが大きい原子核を示す。 $Z < 20$ では $Z \approx N$ である原子核が最も安定である。しかし, Z が増加すると, 安定な原子核は $Z = N$ から離れて, $N > Z$ の方に分布する。核力だけが核子間に作用するならば, 陽子と中性子が同数である方が結合エネルギーは大きくなる。しかし, 陽子間のクーロン反発力が存在するため, 陽子数が大きい原子核では, 陽子を中性子で置き換えた方が, クーロン力の効果を減少させることができ, エネルギー的に有利になる。

現在までに確認されている最も重い原子核は $Z = 118, N = 175$ である。これは 99 年 5 月にアメリカの LBL (Lawrence Berkeley National Laboratory) において, 運動エネルギーが 449 MeV で

ある ^{86}Kr を ^{208}Pb に衝突させて得られた。*

$N = 184$, $Z = 114$ or 126 を中心とした領域では、陽子と中性子が閉殻構造をなし、安定な原子核が存在すると理論的には予想される。この原子核を**超重元素** (superheavy elements) という。この領域は、通常安定な原子核の領域から離れて安定な島 (island of stability) を形成する。実験的にこの安定な島の存在を確認する試みがなされており、上に述べたように、非常に近いところの原子核まで存在が確認されている。

原子核が存在する (Z, N) の範囲は、他の原子核に変化する崩壊モードに対する安定性で決まる。崩壊モードとしては、 β 崩壊、核子放出、 α 崩壊、自発的核分裂が考えられる。

β 崩壊 β 崩壊は弱い相互作用により起こる。原子核の β 崩壊には、 β^- 崩壊 ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$)、 β^+ 崩壊 ($p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$)、電子捕獲 ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$) の3つのモードがある。電子の質量を m_e とすると、ニュートリノの質量は0であるから(0でないとしても非常に小さい)、これらの崩壊過程がエネルギー的に可能になる条件は

$$\beta^\pm\text{崩壊 } M(Z, N) > M(Z \mp 1, N \pm 1) + m_e, \quad \text{電子捕獲 } M(Z, N) > M(Z - 1, N + 1) - m_e$$

である。(6.1) を使って上の条件を結合エネルギーで表わし

$$B(Z \pm 1, N \mp 1) \approx B(Z, N) \pm \left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_{A=\text{一定}}$$

で近似すると

$$\left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_{A=\text{一定}} + \Delta M c^2 > 0 \quad \text{または} \quad \left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_{A=\text{一定}} + \Delta M c^2 < 0$$

ならば β 崩壊する。ただし $\Delta M = M_n - M_p - m_e = 0.78 \text{ MeV}/c^2$ である。したがって、 β 崩壊に対して安定である条件は

$$\left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_{A=\text{一定}} + \Delta M c^2 = 0$$

となる。(6.4) を用いて具体的に計算すると

$$Z = \frac{1}{2} \frac{A}{1 + b_Z A^{2/3}} \left(1 + \frac{\Delta M c^2}{2b_{\text{sym}}} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{A}{1 + b_Z A^{2/3}}, \quad b_Z = \frac{b_c}{2b_{\text{sym}}} = 0.00748 \quad (6.7)$$

を得る。 $\Delta M c^2 / (2b_{\text{sym}}) = 0.0084$ は小さいから無視した。(6.7) で決まる $Z = Z(N)$ を数値的に求めた結果を (Z, N) の分布図に示す。この曲線は **β 安定線** (β -stability line) と呼ばれる。 β 安定線以外の原子核は、遅かれ早かれ β 崩壊して他の原子核になる。(6.7) では ΔM を無視したから、これは $\left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_{A=\text{一定}} = 0$ を満たす。したがって、 β 安定線は A が一定のもとで結合エネルギーが極大になる原子核を結ぶ線である。(6.7) は (Z, N) の分布図において ■ で示した実験結果をよく再現している。最も安定な原子核の分布は比 $b_Z = b_c / 2b_{\text{sym}}$ で決まる。クーロン斥力 (b_c) が強ければ b_Z は大きくなり、安定な原子核の分布は $Z = N$ から離れる。一方、対称エネルギー (b_{sym}) が強ければ b_Z が小さくなるため $Z = N$ に近づく。

核子放出 原子核から核子1つを分離するのに必要な最小限のエネルギーを**分離エネルギー** (separation energy) という。例えば、陽子の分離エネルギー $S_p(Z, N)$ は

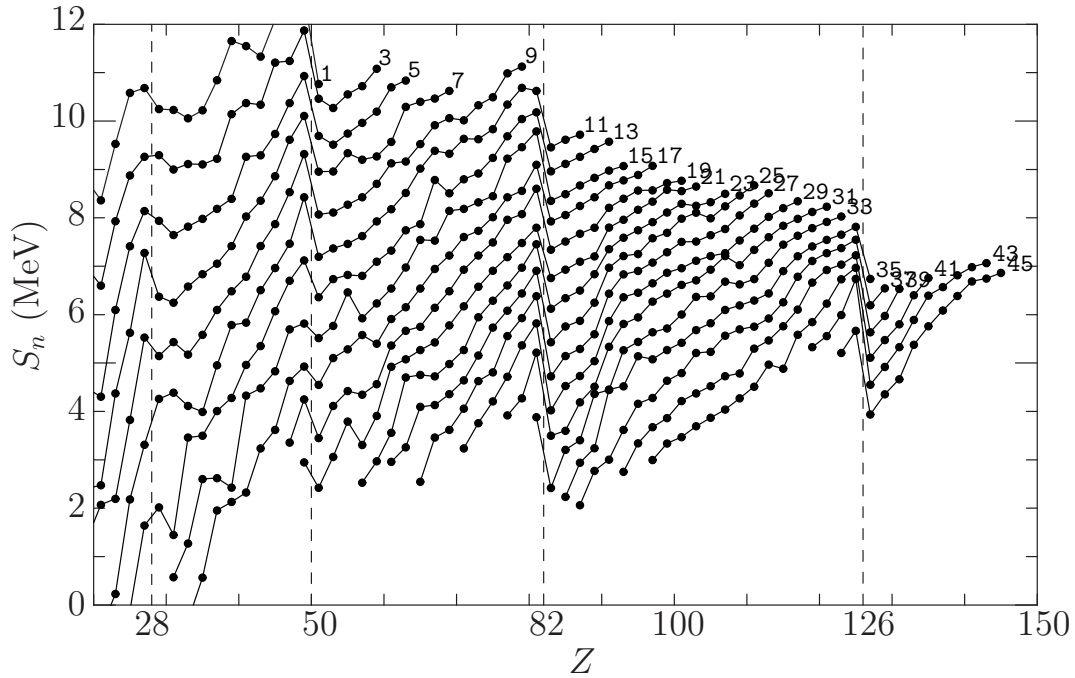
$$M(Z, N)c^2 + S_p(Z, N) = M(Z - 1, N)c^2 + m_p c^2$$

* <http://user88.lbl.gov/element118.html>

である。中性子についても同様である。分離エネルギーを結合エネルギーで表わすと

$$S_p(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N), \quad S_n(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N - 1)$$

となる。下図では中性子数と陽子数の差 $N - Z$ を $1, 3, \dots, 45$ と固定して、 S_n の実験値を N の関数として描いた。38ページの (Z, N) の分布図で、 $Z = N - k$ ($k = 1, 3, \dots$) の直線に沿って S_n をプロットしたことになる。対相互作用による変動を避けるため、 N が奇数で Z が偶数の原子核についてだけプロットした。 N が魔法数のところでは S_n は不連続的な変化をし、ここにも殻構造の影響が現れている。



さて、 $S < 0$ ならば核子はエネルギーを加えなくても分離してしまうから、そのような原子核は存在しない。したがって、原子核として存在しうる (Z, N) は

$$S_p(Z, N) \approx \left. \frac{\partial B}{\partial Z} \right|_{N=\text{一定}} = 0, \quad S_n(Z, N) \approx \left. \frac{\partial B}{\partial N} \right|_{Z=\text{一定}} = 0$$

で制限される。(6.4) を用いてこの条件を満たす $Z = Z(N)$ を求めると、 (Z, N) の分布図において $S_p = 0, S_n = 0$ で表わした曲線になる。これらの曲線は陽子ドリップ線 (proton drip line), 中性子ドリップ線と呼ばれる。

α 崩壊, 核分裂 重い原子核では α 崩壊と自発的核分裂に対する安定性で存在領域が制限される。 (Z, N) の原子核が (Z_1, N_1) と (Z_2, N_2) に崩壊するには

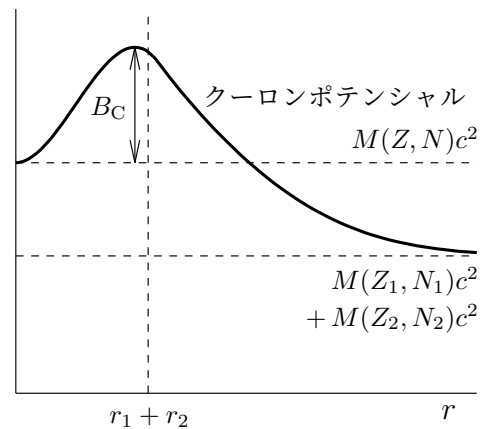
$$M(Z, N) > M(Z_1, N_1) + M(Z_2, N_2)$$

であれば、エネルギー的に可能になる。核分裂の場合 $Z_1 \approx Z_2 \approx Z/2, N_1 \approx N_2 \approx N/2$ であるから、上の条件は質量公式 (6.4) より

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{b_{\text{surf}}}{b_c} = 17.4 \quad (6.8)$$

になる。 β 安定な原子核の場合、(6.7) を使うと $A > 92.5$ を得る。 $A \approx 100$ 以上の原子核では、自発的な核分裂がエネルギー的には可能である。

ところで、 $M(Z_1, N_1)c^2 + M(Z_2, N_2)c^2$ は、崩壊した2つの原子核が無限に離れて静止しているときのエネルギーである。2つの原子核を近づけると、両者が接触するまでは斥力のクーロン力だけが働くから、ポテンシャルエネルギーは増加し、接触後は核力が働き元の原子核に戻る。これから類推すると、2つに崩壊するときのポテンシャルエネルギーは、概念的には図のようになる。横軸は崩壊した2つの原子核間の距離である。ここで重要なことは、一般にクーロン障壁 (Coulomb barrier) B_C が存在することである。 B_C が存在すると古典力学的には崩壊は起こらないが、量子力学的にはトンネル効果のため崩壊する。障壁を通過して崩壊する確率は、 B_C の増加とともに指数関数的に減少するから、半減期は非常に広い範囲に分布する。例えば、核分裂の場合、 ^{238}U は $Z^2/A = 35.6$ であり条件 (6.8) を十分に満たすが、半減期は 10^{16} 年である (宇宙の年齢 $\approx 10^{10}$ 年)。一方、 $^{261}_{107}\text{Ns}$ ($Z^2/A = 43.9$) の半減期は 2×10^{-3} 秒と短い。 α 崩壊と自発的核分裂に対する安定性は、エネルギー的に可能ということだけでは決められない。核分裂に対する安定性の目安として、 $Z^2/A = 45$ を38ページの (Z, N) の分布図に示す。



各種の崩壊様式を考慮した上で半減期が 10^{-3} 秒以上と予想される原子核は約 4800 種である。 β 崩壊は弱い相互作用により起こるため、 β 崩壊による半減期はごく短いものでも 1 秒程度である。したがって、 β 崩壊に対する安定性は考えなくてよい。 (Z, N) の分布図に示したように、現在までに約 2900 種が実験的に生成され、更に、生成するだけでなくその構造についても実験的に調べることが可能になっている。これまで、原子核物理の研究対象は、 β 安定線周辺の約 260 種に限られていたが、これが 10 倍以上に拡大した。現在注目されている領域の 1 つは、 β 安定線から遠く離れたドリップ線付近の原子核である。これらは通常の原子核に比べて陽子ないし中性子が過剰で、安定核では見られない性質を持つと期待される。例えば、 ^{11}Li や ^{14}Be などの中性子過剰の存在極限にある原子核では、中性子ハロー (neutron halo) と呼ばれる過剰な中性子の密度が異常に広がっている状態が発見された。

問 6.2 (6.7), (6.8) を導け。

6.4 フェルミガス模型

原子核を電荷が一様に分布した液滴とみなして質量公式 (6.4) を求めた。原子核は核子の多体系であるから、このような巨視的模型ではなく、核子多体系という微視的観点から質量公式を理解すべきである。そこで、最も簡単な微視的模型であるフェルミガス模型に基づいて考えてみよう。フェルミガス模型とは原子核を自由なフェルミオンの多体系として扱う模型である。

原子核中では核子-核子散乱は、散乱後の核子の状態が既に占有されている状態になる場合、パウリ原理のため禁止される。このため、核子が他の核子の影響を受けずに独立に運動する確率が高くなる。したがって、核力の効果のある平均ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ で置き換え、核子は他の核子の影響を受けずに独立に $U(\mathbf{r})$ 中を運動するという平均場近似 (mean field approximation) を導入できる。この近似の極端な場合がフェルミガス模型である。フェルミガス模型では $U(\mathbf{r}) = \text{一定}$ にと

る。これはエネルギーの基準を変えるだけであり、自由な核子の運動と同じになる。

(2.23) から核子数 $A \rightarrow \infty$ では $\rho(r) \rightarrow \rho_0 \approx 0.17 \text{ fm}^{-3}$ になり、密度は A にも r にも依らず一定になる。フェルミガス模型では核子の波動関数は平面波になるため、密度は A にも r にも依らない。これから、原子核表面の効果があまり重要にならない性質については、フェルミガス模型が定性的にはよい近似になると考えられる。なお、密度一定で無限に広がった仮想的な原子核を核物質 (nuclear matter) という。

自由なフェルミオンの多体系では、個々のフェルミオンのハミルトニアン h は

$$h = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

である。 h の固有状態と固有値は

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (6.9)$$

となる。(6.9) の波動関数は無限に広がっており、通常の規格化

$$\int d^3r |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |C_{\mathbf{k}}|^2 \int d^3r = |C_{\mathbf{k}}|^2 \times \infty = 1$$

はできない。そこで、人為的に 1 辺 L の有限の立方体を繰り返すものと考え、それぞれの壁のところで周期的境界条件を果たす。 L が十分大きければ、境界条件は粒子の運動にほとんど影響しないだろう。よく使われる周期的境界条件は

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L)$$

である。これから

$$\exp(ik_x L) = \exp(ik_y L) = \exp(ik_z L) = 1$$

したがって、 n_x, n_y, n_z を任意整数として

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (6.10)$$

となり \mathbf{k} は飛び飛びの値になるが、 $L \rightarrow \infty$ では連続的になる。規格化を 1 つの箱で行うことにすると $C_{\mathbf{k}} = 1/\sqrt{V}$ となる。ここで $V = L^3$ は箱の体積である。

スピン 1/2 のフェルミオンの 1 粒子状態は、空間運動の状態を表す (6.9) とスピン状態の積

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) |\pm\rangle, \quad |\pm\rangle = |s = \frac{1}{2} m_s = \pm \frac{1}{2}\rangle$$

である。 $|\pm\rangle$ はスピン s^2, s_3 の同時固有状態である。パウリの原理から、2 つのフェルミオンが同じ 1 粒子状態を占めることはできない。したがって、 N 粒子系の基底状態はエネルギー的に低い N 個の 1 粒子状態が占有された状態である。このとき、占有された状態のうち、最大の k を k_F で表す。 k_F をフェルミ波数という。占有された 1 粒子状態の数は粒子数に等しいから

$$N = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \sum_{m_s = \pm 1/2} 1 = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} 1$$

である。ただし、和は

$$k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = \frac{2\pi}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \leq k_F$$

の条件を満たす (n_x, n_y, n_z) について行う。この和を \mathbf{k} の積分で置き換える。 k_x は $\Delta k_x = 2\pi/L$ おきに等間隔に並んでいる。したがって

$$\sum_{n_x} F(k_x) = \frac{L}{2\pi} \sum_{k_x} \Delta k_x F(k_x) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{L}{2\pi} \int dk_x F(k_x)$$

である。 n_y, n_z についても同様であるから ($d^3k = dk_x dk_y dk_z$)

$$N = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int_{k < k_F} d^3k = \frac{V}{4\pi^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3 \quad (6.11)$$

運動エネルギーの和 E_{kin} は

$$E_{\text{kin}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_{k < k_F} d^3k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{V}{5\pi^2} \frac{\hbar^2 k_F^5}{2m} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} N \quad (6.12)$$

となる。

陽子数 Z , 中性子数 N の原子核を考える。陽子, 中性子のフェルミ波数を $k_F^{(p)}, k_F^{(n)}$ とする。原子核は半径 $r_0 A^{1/3}$, ($A = Z + N$) の球と見なせるから, 体積は

$$V = \frac{4\pi r_0^3}{3} A, \quad r_0 \approx 1.1 \text{ fm}$$

である。したがって (6.11) から

$$k_F^{(p)} = \left(3\pi^2 \frac{Z}{V} \right)^{1/3} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{Z}{A} \right)^{1/3} = k_F \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3}, \quad k_F^{(n)} = k_F \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3}$$

ただし

$$k_F = \frac{1}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 1.38 \text{ fm}^{-1}$$

である。

$Z = N = A/2$ の場合 $k_F^{(p)} = k_F^{(n)} = k_F$ になる。これに対応した速さ v_F は

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m} = \frac{\hbar c k_F}{mc^2} c \approx \frac{197 \times 1.38}{940} c = 0.29 c$$

となり, 原子核中の核子は光速の 1/10 程度で運動している。また, フェルミ運動エネルギー ε_F は

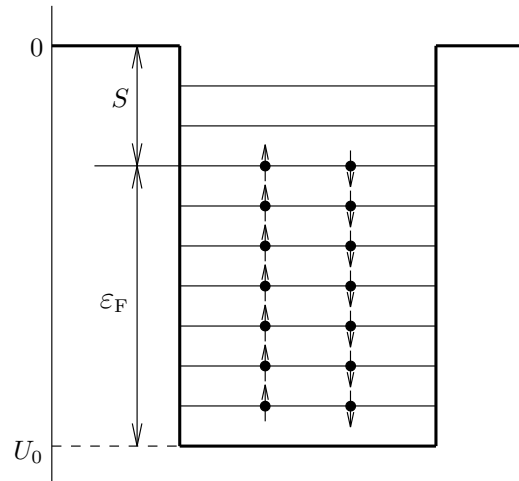
$$\varepsilon_F = \frac{(\hbar c k_F)^2}{2mc^2} = \frac{(197 \times 1.38)^2}{2 \times 940} = 39 \text{ MeV}$$

である。核子が一定のポテンシャル U_0 中を運動しているとすると, 核子のエネルギーは

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0 \leq \varepsilon_F + U_0$$

核子の分離エネルギー S は約 8 MeV であるから

$$U_0 = -(S + \varepsilon_F) \approx -47 \text{ MeV} \quad (6.13)$$



フェルミ面近傍の核子は、深さが約 -50 MeV のポテンシャル中を運動している。フェルミガス模型によるこの評価は、実際の原子核の性質を再現するように決めた一体ポテンシャルの深さとほぼ一致する。

(6.12) から、陽子数 Z , 中性子数 N の原子核の E_{kin} は

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^{(p)2}}{2m} Z + \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^{(n)2}}{2m} N = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left(\left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} Z + \left(\frac{2N}{A} \right)^{2/3} N \right)$$

ここで

$$x = \frac{Z - N}{A}$$

とすると $Z = (1+x)A/2$, $N = (1-x)A/2$ であるから

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \frac{A}{2} \left((1+x)^{5/3} + (1-x)^{5/3} \right)$$

$x \ll 1$ のとき

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots$$

であるから

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} \varepsilon_F A \left(1 + \frac{5}{9} x^2 + \dots \right) = \frac{3}{5} \varepsilon_F A + \frac{2}{3} \varepsilon_F \frac{(Z-N)^2}{2A} + \dots$$

となる。核子間相互作用 (核力) の寄与を

$$V_0 A + V_1 \frac{(Z-N)^2}{2A}$$

と仮定する。これは核力が短距離力であることを考慮して、核子 i, j 間の核力 $v(i, j)$ を

$$v(i, j) = (v_0 + v_1 \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j) \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

とし、 $\frac{1}{2} \sum_{ij} v(i, j)$ の基底状態における期待値から導ける。系全体のエネルギー E は

$$E = \left(V_0 + \frac{3}{5} \varepsilon_F \right) A + \left(V_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_F \right) \frac{(Z-N)^2}{2A} \quad (6.14)$$

となる。原子核の質量 M は核子の静止エネルギーを含めた系全体のエネルギーであるから、多体系のハミルトニアン固有値 E で表すと

$$Mc^2 = m_p c^2 Z + m_n c^2 N + E$$

である。結合エネルギー B は $B = -E$ となる。これに注意して (6.14) と (6.4) を比較すると

$$-b_{\text{vol}} = V_0 + \frac{3}{5} \varepsilon_F, \quad b_{\text{sym}} = V_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_F$$

$b_{\text{vol}} \approx 16$, $b_{\text{sym}} \approx 47$, $\varepsilon_F \approx 40 \text{ MeV}$ であるから $V_0 \approx -40$, $V_1 \approx 20 \text{ MeV}$ になる。体積エネルギーは核力の強い引力によってもたらされ、運動エネルギーの寄与はこれを弱める働きをする。一方、対称エネルギーは核力と運動エネルギーがほぼ同程度の寄与をする。

7 調和振動子

7.1 1次元調和振動子

1次元調和振動子のハミルトニアン h は

$$h = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad p = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (7.1)$$

である。このハミルトニアンの固有値と固有状態を代数的に求める。

$$a \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad (7.2)$$

とすると

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (7.3)$$

である。 x, p を a, a^\dagger で表わすと

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad (7.4)$$

これを h に代入すると

$$h = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (7.5)$$

になる。したがって、 $a^\dagger a$ の固有値、固有状態を求めればよい。以下の性質は交換関係 (7.3) だけで決まることに注意せよ。

固有値が n である $a^\dagger a$ の規格化された固有状態を $\varphi_n(x)$ で表わす:

$$a^\dagger a \varphi_n = n \varphi_n, \quad \langle n|n \rangle = \int dx \varphi_n^*(x) \varphi_n(x) = 1$$

交換関係 (7.3) より

$$(a^\dagger a) a^\dagger = a^\dagger (a^\dagger a + 1), \quad (a^\dagger a) a = a (a^\dagger a - 1)$$

となるから

$$(a^\dagger a) a^\dagger \varphi_n = (n+1) a^\dagger \varphi_n, \quad (a^\dagger a) a \varphi_n = (n-1) a \varphi_n$$

である。これは $a^\dagger \varphi_n$ が $a^\dagger a$ の固有値 $n+1$ に、 $a \varphi_n$ が固有値 $n-1$ に属する固有状態であることを示す。したがって C_\pm を定数として

$$a^\dagger \varphi_n = C_+ \varphi_{n+1}, \quad a \varphi_n = C_- \varphi_{n-1}$$

とおける。 $\varphi_{n+1}(x)$ も規格化されているから

$$|C_+|^2 \int dx \varphi_{n+1}^*(x) \varphi_{n+1}(x) = |C_+|^2 = \int dx (a^\dagger \varphi_n)^* a^\dagger \varphi_n$$

a^\dagger の定義から

$$(a^\dagger \varphi_n)^* = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(m\omega x \varphi_n^* - \hbar \frac{d\varphi_n^*}{dx} \right)$$

部分積分を行い、 $\varphi_n \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) を使おうと

$$\begin{aligned} \int dx (a^\dagger \varphi_n)^* a^\dagger \varphi_n &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \int dx \left(m\omega x \varphi_n^* - \hbar \frac{d\varphi_n^*}{dx} \right) a^\dagger \varphi_n \\ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}} [\varphi_n^* a^\dagger \varphi_n]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \int dx \varphi_n^* \left(m\omega x + \hbar \frac{d}{dx} \right) a^\dagger \varphi_n \\ &= \int dx \varphi_n^* a a^\dagger \varphi_n \end{aligned}$$

$a a^\dagger \varphi_n = (a^\dagger a + 1) \varphi_n = (n + 1) \varphi_n$ であるから

$$|C_+|^2 = n + 1$$

となる。同様にして

$$|C_-|^2 = \int dx \varphi_n^* a^\dagger a \varphi_n = n$$

これから n は負でない実数である。 $n = 0$ とすると $a \varphi_0 = 0$ であり、 φ_0 に a を何度作用しても 0 である。 $n > 0$ のとき固有ケットの列 $a \varphi_n, a^2 \varphi_n, a^3 \varphi_n, \dots$ を考えると、 $a^\dagger a$ の固有値は $n - 1, n - 2, n - 3, \dots$ になる。 n が整数でないとする、この列に現れる固有値は 0 にはないから、列は無限に続き、負の固有値も存在することになる。一方、 $n > 0$ が整数ならば、上の列の $n + 1$ 番目以降の固有状態は 0 になり、負の固有値は存在しない。したがって、 n は整数である。以上から、 C_\pm が正の実数になるよう位相を取れば

$$a^\dagger a \varphi_n = n \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (7.6)$$

$$a^\dagger \varphi_n = \sqrt{n + 1} \varphi_{n+1} \quad (7.7)$$

$$a \varphi_n = \sqrt{n} \varphi_{n-1}, \quad n \neq 0 \quad (7.8)$$

$$a \varphi_0 = 0 \quad (7.9)$$

である。以下に基本的性質を示す。

(7.5) から

$$h \varphi_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi_n \quad (7.10)$$

エネルギー固有値は等間隔になる。 x^2 の期待値は (7.4) より

$$\langle n | x^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger) | n \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.11)$$

である。

(7.7) を使うと

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger \varphi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} (a^\dagger)^2 \varphi_{n-2} = \dots = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \varphi_0 \quad (7.12)$$

と表せる。波動関数 $\varphi_n(x)$ を求めよう。無次元の変数 $q = \sqrt{m\omega/\hbar} x$ を導入すると

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right) \quad (7.13)$$

である。したがって、(7.9) から

$$\left(\frac{d}{dq} + q \right) \varphi_0 = 0 \quad \text{つまり} \quad \frac{d\varphi_0}{\varphi_0} = -q dq$$

これを積分すれば

$$\varphi_0(x) = N e^{-q^2/2}$$

規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi_0(x)|^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-q^2} = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} |N|^2 = 1$$

から, 規格化された波動関数として

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-q^2/2},$$

を得る。(7.12) より

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n e^{-q^2/2}$$

となる。任意の関数 $F(q)$ に対して

$$-e^{q^2/2} \frac{d}{dq} e^{-q^2/2} F(q) = \left(q - \frac{d}{dq}\right) F(q)$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned} \left(q - \frac{d}{dq}\right)^2 F(q) &= \left(-e^{q^2/2} \frac{d}{dq} e^{-q^2/2}\right)^2 F(q) \\ &= (-1)^2 e^{q^2/2} \frac{d}{dq} e^{-q^2/2} e^{q^2/2} \frac{d}{dq} e^{-q^2/2} F(q) \\ &= (-1)^2 e^{q^2/2} \frac{d^2}{dq^2} e^{-q^2/2} F(q) \end{aligned}$$

同様にして

$$\left(q - \frac{d}{dq}\right)^n F(q) = (-1)^n e^{q^2/2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2/2} F(q)$$

となる。したがって

$$\left(q - \frac{d}{dq}\right)^n e^{-q^2/2} = (-1)^n e^{q^2/2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2} = e^{-q^2/2} H_n(q)$$

ただし

$$H_n(q) = (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2} \quad (7.14)$$

はエルミート多項式である。これから

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-q^2/2} H_n(q) \quad (7.15)$$

を得る。エルミート多項式の最初の幾つかは

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

である。

パリティ 一般に, 波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ に対して

$$P\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$$

という作用をする演算子 P をパリティ演算子という。 P の固有値 η に属する固有状態を $\psi_\eta(\mathbf{r})$ とする:

$$P\psi_\eta(\mathbf{r}) = \eta\psi_\eta(\mathbf{r}) \quad \text{つまり} \quad \psi_\eta(-\mathbf{r}) = \eta\psi_\eta(\mathbf{r})$$

である。2番目の式の両辺に P を作用させると $\psi_\eta(\mathbf{r}) = \eta^2\psi_\eta(\mathbf{r})$ であるから $\eta = \pm 1$ になる。パリティの固有状態は

$$\psi(-\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}), \quad \text{または} \quad \psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$$

を満たす状態である。前者を正パリティ, 後者を負パリティの状態という。

エルミート多項式の性質 $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ から, 1次元調和振動子 h の固有状態 $\varphi_n(x)$ はパリティ演算子 P の固有状態でもある:

$$P\varphi_n(x) = (-1)^n \varphi_n(x) \quad (7.16)$$

問 7.1 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす演算子 a に対して

$$a\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

により定義されるコヒーレント状態 (coherent state) ψ_λ を考える。ここで λ は複素数である。

1. φ_n は完全系をなすから ψ_λ は

$$\psi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$$

と展開できる。係数 c_n を求めよ。ただし, c_0 は正の実数とし, $\langle \lambda | \lambda \rangle = 1$ である。この展開は

$$\psi_\lambda = \exp(-|\lambda|^2/2 + \lambda a^\dagger) \varphi_0$$

とまとめられることを示せ。

2. ψ_λ における x, x^2, p, p^2 の期待値を求め, ψ_λ が最小の不確定性関係を満たすことを示せ。
3. コヒーレント状態の波動関数 $\psi_\lambda(x)$ をコヒーレント状態の定義と (7.13) を用いて求めよ。
4. 次のことを証明せよ。

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\lambda \psi_\lambda(x) \psi_\lambda^*(y) = \delta(x-y), \quad \langle \lambda | \lambda' \rangle = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2 + |\lambda'|^2}{2} + \lambda^* \lambda'\right)$$

ただし $\lambda = re^{i\theta}$ とするとき

$$\int d^2\lambda = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

である。

7.2 3次元調和振動子

直交座標 3次元調和振動子のハミルトニアンは

$$h = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{r}^2 \quad (7.17)$$

である。 h は3つの独立な1次元調和振動子

$$h = h_1 + h_2 + h_3, \quad h_k = \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_k^2 \quad (k = 1, 2, 3)$$

に分解できるから, その固有値と固有状態は

$$h \varphi_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{r}) = \hbar\omega \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) \varphi_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{r}), \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$\varphi_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{r}) = \varphi_{n_1}(x) \varphi_{n_2}(y) \varphi_{n_3}(z)$$

で与えられる。ここで $\varphi_n(x)$ は 1 次元調和振動子の固有関数である。 \hbar の固有値は和 $N = n_1 + n_2 + n_3$ だけで決まるから、 N を与えたとき

$$\hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right), \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

に属する固有状態 $\varphi_{n_1 n_2 n_3}$ は、 $N = 0$ を除けば複数個あり縮退している。縮退度を d_N とすると、 d_N は N 個の \circ と 2 個の \bullet を

$$\underbrace{\circ \circ \cdots \circ \circ \bullet}_{n_1} \underbrace{\circ \circ \cdots \circ \circ \bullet}_{n_2} \underbrace{\circ \circ \cdots \circ \circ}_{n_3}$$

のように 1 列に並べる方法の数に等しいから

$$d_N = {}_{N+2}C_2 = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad (7.18)$$

である。

極座標 (3.2) の ε_{ijk} を使うと、ベクトル積は

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{kij} A_i B_j \quad (7.19)$$

と書ける。例えば $k = 3$ のとき

$$\sum_{ij} \varepsilon_{3ij} A_i B_j = \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{321} A_2 B_1$$

となる。123 \rightarrow 132 \rightarrow 312 \rightarrow 321 より 312 は 123 の偶置換、321 は奇置換であるから

$$\sum_{ij} \varepsilon_{3ij} A_i B_j = A_1 B_2 - A_2 B_1 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3$$

他の成分も同様である。

\mathbf{p}^2 を軌道角運動量 $\hbar\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の二乗 $(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ で表す。

$$\hbar^2 \ell^2 = \sum_k (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_k (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_k = \sum_k \sum_{mn} \varepsilon_{kmn} x_m p_n \sum_{m'n'} \varepsilon_{km'n'} x_{m'} p_{n'}$$

(3.4) から

$$\hbar^2 \ell^2 = \sum_{\substack{mn \\ m'n'}} (\delta_{mm'} \delta_{nn'} - \delta_{mn'} \delta_{nm'}) x_m p_n x_{m'} p_{n'} = \sum_{mn} (x_m p_n x_m p_n - x_m p_n x_n p_m)$$

となる。 $x_m p_n - p_n x_m = i\hbar \delta_{mn}$ より (下線部分を交換)

$$\begin{aligned} \sum_{mn} x_m \underline{p_n x_m} p_n &= \sum_{mn} x_m x_m p_n p_n - i\hbar \sum_m x_m p_m = \mathbf{r}^2 \mathbf{p}^2 - i\hbar \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \\ \sum_{mn} x_m p_n \underline{x_n p_m} &= i\hbar \sum_m x_m p_m + \sum_{mn} x_m p_m \underline{p_n x_n} \\ &= i\hbar \sum_m x_m p_m + \sum_{mn} x_m p_m (x_n p_n - i\hbar) \\ &= \sum_{mn} x_m p_m x_n p_n - 2i\hbar \sum_m x_m p_m = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 - 2i\hbar \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

であるから

$$\hbar^2 \ell^2 = \mathbf{r}^2 \mathbf{p}^2 + i\hbar \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$$

を得る。\$\partial x_k / \partial r = x_k / r\$ であるから

$$r \frac{\partial}{\partial r} = r \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$$

したがって

$$\hbar^2 \ell^2 = \mathbf{r}^2 \mathbf{p}^2 + \hbar^2 r \frac{\partial}{\partial r} + \hbar^2 r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{r}^2 \mathbf{p}^2 + \hbar^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$$

となる。

\$\mathbf{p}^2\$ を \$\ell\$ で表し \$h\$ に代入すると

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7.20)$$

このハミルトニアンは \$\ell\$ と交換するから, \$h, \ell^2, \ell_3\$ の同時固有状態 \$\psi(\mathbf{r})\$ が存在する。\$\ell^2, \ell_3\$ の固有関数は球面調和関数 \$Y_{\ell m}(\theta, \phi)\$ であるから \$\psi(\mathbf{r})\$ は

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (7.21)$$

とおける。

$$\ell^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

より固有値方程式 \$h\psi = E\psi\$ は \$R\$ についての方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) R(r) = E R(r)$$

になる。無次元の変数 \$q = \sqrt{m\omega/\hbar} r\$ を導入すると

$$\left(-\frac{1}{q} \frac{d^2}{dq^2} q + \frac{\ell(\ell+1)}{q^2} + q^2 \right) R = \frac{2E}{\hbar\omega} R \quad (7.22)$$

\$q\$ が小さいところで \$R \propto q^k\$ であるとして (7.22) に代入すると

$$\ell(\ell+1) - k(k+1) + q^4 = \frac{2E}{\hbar\omega} q^2$$

\$q \to 0\$ とすると \$-k(k+1) + \ell(\ell+1) = 0\$ となる。\$k = \ell, -(\ell+1)\$ であるが, \$R\$ が原点で発散しないためには \$k = \ell\$ である。そこで

$$R = q^\ell f(q)$$

とおき \$x = q^2\$ とすると, (7.22) は

$$\left(-x \frac{d^2}{dx^2} - \left(\ell + \frac{3}{2} \right) \frac{d}{dx} + \frac{x}{4} \right) f(x) = \frac{E}{2\hbar\omega} f(x) \quad (7.23)$$

となる。\$x \to \infty\$ では

$$\left(-x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x}{4} \right) f = 0$$

であるから, 無限遠方で 0 になる解は \$e^{-x/2}\$ のように振る舞う。したがって

$$f(x) = e^{-x/2} g(x)$$

とすると (7.23) は

$$x \frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\ell + \frac{3}{2} - x \right) \frac{dg}{dx} - \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar\omega} \right) g = 0 \quad (7.24)$$

になる。これは (A.1) で

$$a = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar\omega} \right), \quad b = \ell + \frac{3}{2}$$

とした合流型超幾何微分方程式であるから、この方程式の一般解は

$$g(x) = c_1 M(a, b, x) + c_2 x^{1-b} M(a-b+1, 2-b, x)$$

になる。第 2 項 $x^{1-b} = x^{-\ell-1/2}$ は $x=0$ で発散するから、 g はこの項を含んではならない。したがって

$$g(x) = c_1 M(a, \ell + 3/2, x), \quad a = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{3}{2} - \frac{E}{\hbar\omega} \right)$$

になる。(A.4) より a が 0 または負の整数でないならば、 $g(x)$ は $x \rightarrow \infty$ において e^x で発散する。したがって

$$a = -(n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

である。このとき $g(x)$ は $-a = n-1$ 次の多項式になる。 n が 1 から始まるようにしたのは単に習慣である。以上から、3次元調和振動子ポテンシャルの固有値と固有関数は

$$R(r) = N_{n\ell} r^\ell e^{-q^2/2} M(-n+1, \ell + 3/2, q^2), \quad q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r \quad (7.25)$$

$$E = \hbar\omega \left(\ell + 2(n-1) + \frac{3}{2} \right) \quad (7.26)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

となる。 $N_{n\ell}$ は規格化定数である。 $n-1$ は $R(r) = 0$ となる点の個数を与え ($r=0$ を含まない)、動径量子数 (radial quantum number) と呼ばれる。

(7.26) と $\hbar\omega(N+3/2)$ を比較すると、 N を与えたとき許される ℓ は

$$\ell = N - 2(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, [N/2] + 1$$

になる。 $[N/2]$ は $N/2$ を超えない最大の整数である。異なる ℓ の状態が縮退するが、これは調和振動子ポテンシャル (とクーロンポテンシャル) の特殊性である。 ℓ の状態は $2\ell+1$ 個あるから、固有値が $\hbar\omega(N+3/2)$ の縮退度は

$$\sum_{n=1}^{[N/2]+1} (2(N-2(n-1))+1) = ([N/2]+1)(2N+1-2[N/2]) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

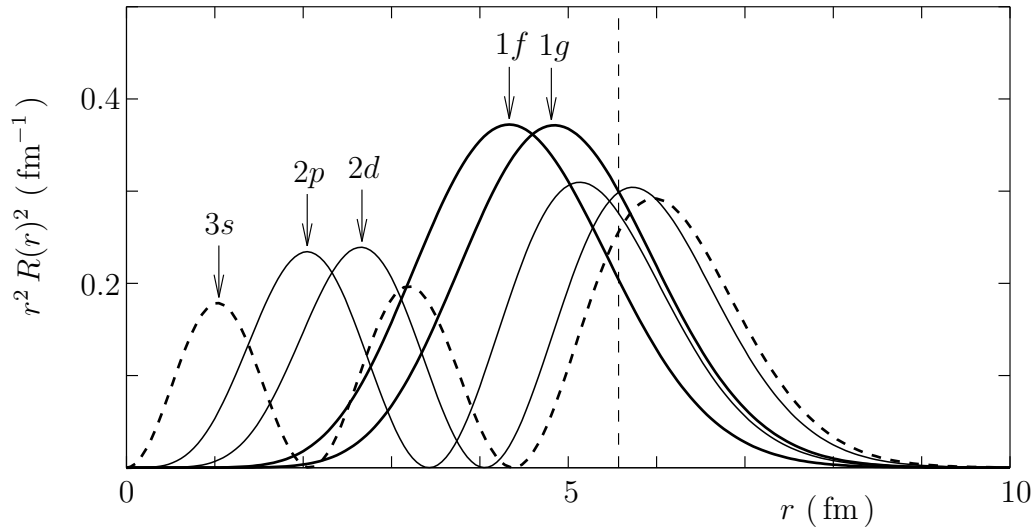
これは前に求めた (7.18) に他ならない。

調和振動子ポテンシャルの固有状態を $n\ell$ で指定する。ただし $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ に対して $s, p, d, f, g, h, i, \dots$ という分光的記号を使い、 $1s, 1p$ のように書く。 N が小さい場合

N	0	1	2	3	4	5
$n\ell$	1s	1p	1d, 2s	1f, 2p	1g, 2d, 3s	1h, 2f, 3p

である。下図に $N=3, 4$ の状態について $r^2 R(r)^2$ を示した。後で求めるように、原子核を調和振動子ポテンシャルで記述するとき、角振動数 ω は $\hbar\omega = 41/A^{1/3}$ MeV と評価できる。図では $A=100$

の値 $\hbar\omega = 8.8 \text{ MeV}$ を用いた。破線は核半径 $R = r_0 A^{1/3}$ を表わす。(7.20) の ℓ^2 の項は遠心力ポテンシャルであり斥力的に働く。軌道角運動量が大きいほどこの効果は大きい。このため、 ℓ が大きな $R(r)$ は外側に押し出される。



問 7.2 1次元のシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 (e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

を解き、固有関数 $\psi(x)$ とエネルギー固有値 E を求める。ただし、 V_0, a は正の定数である。
新しい変数

$$y = \frac{2\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} e^{-ax}, \quad k = \frac{\sqrt{-2mE}}{a\hbar}$$

を導入すると

$$\psi = e^{-y/2} y^k f(y)$$

とおけることを示せ。 $f(y)$ が合流型超幾何微分方程式を満たすこと、及び、 $y = 0$ と $y \rightarrow \infty$ での $f(y)$ に対する境界条件から、固有値を決定せよ。

8 平均場近似

原子中の多電子系を扱うのに有効な近似は、電子に働くポテンシャルが原子核によるものと他の電子がつくる平均ポテンシャルの和で与えられるとし、このポテンシャル中を一つ一つの電子が独立に運動しているとする平均場近似 (mean field approximation), あるいは、独立粒子模型 (independent particle model) である。この近似は、原子の周期律を電子の殻構造として説明する。原子核の魔法数の存在は、原子核にも殻構造があり、原子核中の核子の運動を平均場近似で記述できることを示唆する。

核子の多体系である原子核のハミルトニアンは、相互作用が2核子間に限られるならば

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{ij} v_{ij} \quad (8.1)$$

と表せる。ここで \mathbf{p}_i は核子 i の運動量、 v_{ij} は核子 i と j の相互作用を表わす。現実の問題では、 H の固有状態と固有値を正確に求めることは不可能である。そこで何らかの近似を行うわけだが、最も簡単な近似が平均場近似である。一体ポテンシャルを V すると

$$H = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_i \right) + \Delta H, \quad \Delta H = \frac{1}{2} \sum_{ij} v_{ij} - \sum_i V_i$$

であるが、適切な V を使えば2体相互作用は V に十分取り込めると考えて ΔH を無視し

$$H \approx \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_i \right) \quad (8.2)$$

で近似する。(8.1) のハミルトニアンでは v_{ij} を通して核子 i は他の核子 j の影響を受ける。しかし、(8.2) では異なる核子を結び付けるものはない。個々の核子は一体ポテンシャル中を独立に運動していることになる。フェルミガス模型でも述べたように、原子核中では核子-核子散乱は、散乱後の核子の状態が既に占有されている状態になる場合、パウリ原理のため禁止される。このため、核子が他の核子の影響を受けずに独立に運動する確率が高くなる。したがって、核力の効果のある平均ポテンシャル V で置き換える平均場近似を導入できる。

V はハートリー・フォックの方法などにより v_{ij} から導出することはできる。しかし、原子核の場合核力が複雑なため、適当なポテンシャルを仮定して原子核の性質が説明できるかどうか調べるといふ現象論的方法も用いられる。いずれにしても、平均場近似では、核子が1粒子ハミルトニアン $h = \mathbf{p}^2/2m + V$ のどの固有状態を粒子が占めるかを指定することにより原子核の状態を表わす。このとき、パウリ原理から、2つの核子が同じ1粒子状態を占めることはできない。したがって、原子核の基底状態はエネルギーの最も低い1粒子状態から順に核子を1つ1つ詰めた状態になる。

8.1 一体ポテンシャル

一体ポテンシャル V としてどのようなものを使ったらよいか、ここでは大まかに考察してみる。 V は、核子が他の $A-1$ 個の核子とする相互作用を平均化したものである。したがって、最も単純に考えれば、核子密度を $\rho(r)$ とすると

$$V(\mathbf{r}) \approx \int d^3r' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(r')$$

であろう。ここで $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は、2つの核子がそれぞれ \mathbf{r} と \mathbf{r}' にある場合に働く核力である。簡単のために v のスピン・アイソスピン依存性は考えない。核力は近距離力であるから $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx v_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ とすれば

$$V(r) \approx v_0 \rho(r) \quad (8.3)$$

になる。密度分布は原子核内部ではほぼ一定、核表面で急激に減少するから、 $V(r)$ は図に示したようなウッズ・サクソン型になる。これを数学的に扱いやすいポテンシャルで更に近似するならば、その1つの候補は調和振動子ポテンシャル

$$V(r) \approx V_{\text{HO}}(r) = V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (8.4)$$

である。図から分かるように、2つの定数 V_0 と ω を適当に取れば、原子核内部では調和振動子ポテンシャルと(8.3)は同じような振る舞いをする。これから考える束縛状態に対しては原子核外部でのポテンシャルの相違はそれ程重要ではない。そこで一体ハミルトニアンとして

$$h = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + V_0 \quad (8.5)$$

を採用する。ただし、後でウッズ・サクソン型ポテンシャルに近づけるため、軌道角運動量 ℓ^2 に比例する項を付け加える。

(8.5)に含まれるパラメータのうち、 V_0 はエネルギー固有値を全体にシフトさせるだけであるから、適宜適当に定める。一方、 ω はポテンシャル、したがって、密度の広がりを表す。 ω は実験的に知られた原子核の平均二乗半径を再現するように決める。 A 核子系の平均二乗半径 $\langle r^2 \rangle$ は

$$A \langle r^2 \rangle = \sum'_{n_1 n_2 n_3} \langle n_1 n_2 n_3 | r^2 | n_1 n_2 n_3 \rangle \quad (8.6)$$

で与えられる。ここで \sum' は核子が占めている状態について和を行うことを表す。(7.11) から $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の期待値は

$$\langle n_1 n_2 n_3 | r^2 | n_1 n_2 n_3 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(N + \frac{3}{2} \right) \equiv \langle r^2 \rangle_N$$

である。簡単のため陽子と中性子は共に $N = 0, 1, \dots, N_{\text{max}}$ まで詰まっているとすると

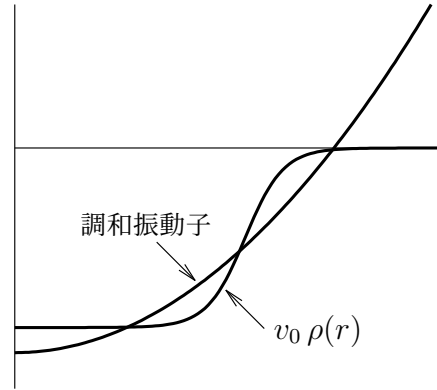
$$A \langle r^2 \rangle = 4 \sum_{N=0}^{N_{\text{max}}} d_N \langle r^2 \rangle_N = \frac{2\hbar}{m\omega} \sum_{N=0}^{N_{\text{max}}} (N+1)(N+2) \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

になる。ただし、 $d_N = (N+1)(N+2)/2$ は $N = n_1 + n_2 + n_3$ の状態の縮退度である。また、陽子と中性子それぞれが寄与するから2倍、更に、スピン状態 $|s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}\rangle$ の自由度があるから2倍した。

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

を使うと

$$A \langle r^2 \rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} \frac{1}{4} (N_{\text{max}} + 1)(N_{\text{max}} + 2)^2 (N_{\text{max}} + 3) \xrightarrow{N_{\text{max}} \gg 1} \frac{\hbar}{2m\omega} (N_{\text{max}} + 2)^4$$



を得る。これから $\hbar\omega$ は

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2Am\langle r^2 \rangle} (N_{\max} + 2)^4 \quad (8.7)$$

となる。核子が占めている 1 粒子状態の総数は核子数に等しいから

$$A = 4 \sum_{N=0}^{N_{\max}} d_N = \frac{2}{3} (N_{\max} + 1)(N_{\max} + 2)(N_{\max} + 3) \xrightarrow{N_{\max} \gg 1} \frac{2}{3} (N_{\max} + 2)^3$$

である。 N_{\max} を A で表わし (8.7) に代入すると

$$\hbar\omega = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{m\langle r^2 \rangle} A^{1/3} \quad (8.8)$$

となる。(8.6) で与えられる $A\langle r^2 \rangle$ を核子密度 $\rho(\mathbf{r})$ で表わすと

$$A\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 \rho(r)$$

である。 $\rho(r)$ として実験的に求められた (2.23) を使うと、問 2.5 の結果及び (2.28) から

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 \left(1 + \frac{7\pi^2 a^2}{3 R^2} + \dots \right) = \frac{3}{5} \left(1.12A^{1/3} \right)^2 \left(1 + 3.84A^{-2/3} + \dots \right)$$

になる。 $A \approx 100$ あたりの原子核に対して $3.84A^{-2/3}$ の効果を考慮すると数値的には

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{3}{5} \left(1.2A^{1/3} \right)^2$$

で近似できる。これを (8.8) に代入し、 $mc^2 = 940$ MeV, $\hbar c = 197.3$ MeV fm を使うと

$$\hbar\omega = \frac{41}{A^{1/3}} \text{ MeV} \quad (8.9)$$

を得る。 $A = 100, 200$ のとき、 $\hbar\omega$ の値はそれぞれ 8.8 MeV, 7.0 MeV になる。

調和振動子ポテンシャルに基づけば、魔法数は N_{\max} 殻まで完全に核子が詰まったときに起こると考えられる。このとき、陽子または中性子の個数は

$$2 \sum_{k=0}^{N_{\max}} d_k = \frac{1}{3} (N_{\max} + 1)(N_{\max} + 2)(N_{\max} + 3), \quad N_{\max} = 0, 1, 2, 3, \dots$$

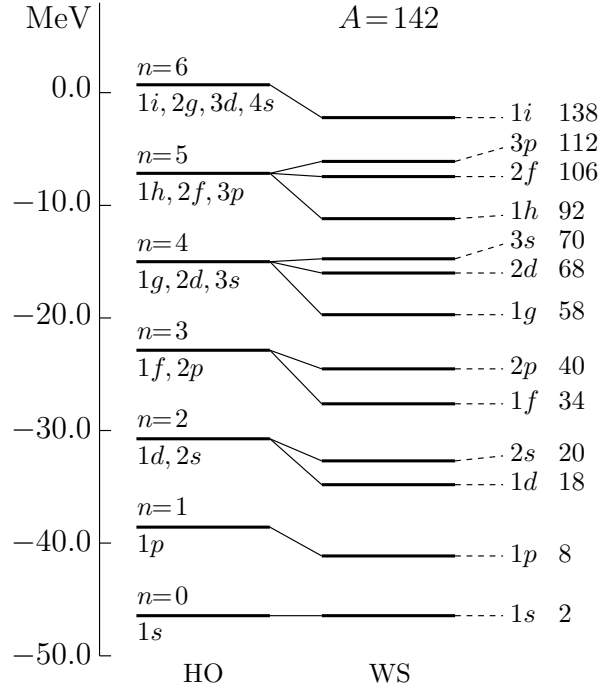
から 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, \dots になる。一方、実験によると魔法数は 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 である。 Z または N が 28 以上の魔法数は調和振動子ポテンシャルでは説明できない。

調和振動子ポテンシャルの場合、異なる ℓ の状態が縮退する。もしこの縮退が解けたらどうなるだろうか。そこで、調和振動子ポテンシャル $V_{\text{HO}}(r)$ の代わりに、ウッズ・サクソンポテンシャル

$$V_{\text{WS}}(r) = \frac{V_0}{1 + \exp((r - R)/a)}, \quad V_0 = -51 \text{ MeV}, \quad R = 1.25A^{1/3} \text{ fm}, \quad a = 0.65 \text{ fm} \quad (8.10)$$

を用いた数値計算結果を図に示す。各々の状態には量子数 $n\ell$ とその状態まで下から詰めたときの陽子または中性子の累計数も示した。 ℓ の縮退は完全に解ける。ただし、各々の状態は、スピン m_s と磁気量子数 m_ℓ について $2(2\ell + 1)$ 重に縮退している。HO は $\hbar\omega$ として (8.9) を使った調和振動子の固有値である。(8.4) の V_0 は $1s$ 状態の固有値がウッズ・サクソンと一致するように取った。図から分かるように、ウッズ・サクソンポテンシャルでも実験的な魔法数を再現することはできない。ポテンシャルのパラメータの値を変えて、例えば $1f$ 状態が $N = 2$ の状態に近づいたとすると、魔法数は 20 から 34 になる。しかし 28 にはならない。

ウッズ・サクソンの結果を見ると、同じ N から分離した状態では、大きい ℓ の状態ほどエネルギー固有値は下がる。核表面付近では $V_{WS}(r)$ は $V_{HO}(r)$ に比べてより引力的であるため、核表面での存在確率が高い状態ほどエネルギーは低くなる。52 ページの図から ℓ の大きな状態ほど核表面での存在確率が高い。



8.2 スピン軌道力

1949年, Mayer(メイヤー)と Jansen(イエンゼン)は独立に, 一体ポテンシャルが強いスピン軌道力 (spin-orbit force) を含むとすれば, 魔法数を説明できることを発見した。彼らが導入したポテンシャル $U(r)$ は

$$U(r) = V(r) + \lambda_{ls} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s} \quad (8.11)$$

である。右辺第1項 $V(r)$ は前節で扱った中心力ポテンシャル, 第2項目がスピン軌道力である。話を簡単にするため, $V(r) = V_{HO}(r)$ とすると, $(1/r)(\partial V/\partial r)$ は定数になるから

$$U(r) = V_{HO}(r) + a_{\ell} (\ell^2 - \langle \ell^2 \rangle_N) + a_{\ell s} \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s}$$

である。ただし, $V_{WS}(r)$ のエネルギー準位に近づけるため, ℓ^2 に比例する項を加えた。 $a_{\ell} < 0$ ならば ℓ の大きい状態のエネルギー固有値は下がる。定数

$$\langle \ell^2 \rangle_N = \frac{\sum_{\ell} \ell(\ell+1)(2\ell+1)}{\sum_{\ell} (2\ell+1)} = \frac{N(N+3)}{2} \quad (8.12)$$

は同じ N 殻の準位に関する ℓ^2 の平均値であるが, 殻間の平均的エネルギー差が ℓ^2 により変化しないように ℓ^2 から差し引いた。

$$h = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V_{HO}(r) + a_{\ell} (\ell^2 - \langle \ell^2 \rangle_N) + a_{\ell s} \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s} \quad (8.13)$$

の固有値を求める。全角運動量 $\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$ を使うと $2\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{j}^2 - \boldsymbol{\ell}^2 - \mathbf{s}^2$ であるから、 $\boldsymbol{\ell}^2$, \mathbf{s}^2 , \mathbf{j}^2 の同時固有状態ならば h の固有状態になる。したがって、 h の固有状態は

$$\psi_{\ell jm}(\mathbf{r}) = R_{\ell j}(r) \mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) \quad (8.14)$$

と書ける。 $\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi)$ は $\boldsymbol{\ell}$ と \mathbf{s} を合成した \mathbf{j} の固有状態であり、(3.30), (3.32) から

$$\mathcal{Y}_{\ell jm}(\theta, \phi) = \pm \sqrt{\frac{\ell \pm m + 1/2}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m-1/2}(\theta, \phi)|+\rangle + \sqrt{\frac{\ell \mp m + 1/2}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m+1/2}(\theta, \phi)|-\rangle \quad (8.15)$$

ただし $j = \ell \pm 1/2$ である。 $\mathcal{Y}_{\ell jm}$ は

$$\boldsymbol{\ell}^2 \mathcal{Y}_{\ell jm} = \ell(\ell + 1) \mathcal{Y}_{\ell jm}, \quad \mathbf{s}^2 \mathcal{Y}_{\ell jm} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \mathcal{Y}_{\ell jm}, \quad \mathbf{j}^2 \mathcal{Y}_{\ell jm} = j(j + 1) \mathcal{Y}_{\ell jm}$$

を満たすから

$$(a_\ell \boldsymbol{\ell}^2 + a_{\ell s} \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}) \psi_{\ell jm}(\mathbf{r}) = (a_\ell \ell(\ell + 1) + a_{\ell s} \Delta_{j\ell}) \psi_{\ell jm}(\mathbf{r})$$

ここで

$$\Delta_{j\ell} = \frac{1}{2} \left(j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - \frac{3}{4} \right) = \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\ell + 1}{2}, & j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (8.16)$$

である。これから $h \psi_{\ell jm}(\mathbf{r}) = E \psi_{\ell jm}(\mathbf{r})$ は

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_{\text{HO}}(r) \right) \psi_{\ell jm}(\mathbf{r}) = E' \psi_{\ell jm}(\mathbf{r}), \quad E' = E - a_\ell (\ell(\ell + 1) - \langle \boldsymbol{\ell}^2 \rangle_N) - a_{\ell s} \Delta_{j\ell}$$

となる。動径波動関数の満たす方程式は、調和振動子ポテンシャルだけの場合と同じになり、 $E' = \hbar\omega(\ell + 2(n - 1) + 3/2)$ である。したがって、 h の固有値は

$$E = \hbar\omega \left(\ell + 2(n - 1) + \frac{3}{2} \right) + a_\ell (\ell(\ell + 1) - \langle \boldsymbol{\ell}^2 \rangle_N) + a_{\ell s} \Delta_{j\ell} \quad (8.17)$$

で与えられる。

エネルギー固有値 (8.17) の様子を図に示す。ただし、 $A = 142$ で

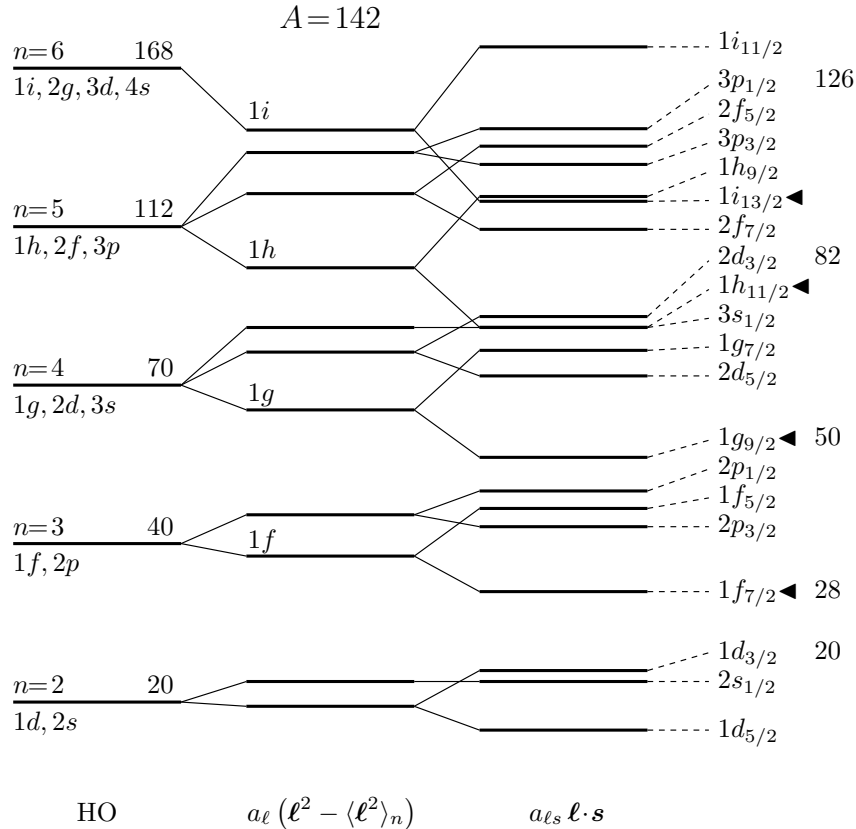
$$a_\ell = -0.026 \hbar\omega = -0.204 \text{ MeV}, \quad a_{\ell s} = -0.15 \hbar\omega = -1.18 \text{ MeV} \quad (8.18)$$

とした。各状態は j の値を下付きの添字で表わし、例えば $n = 1, \ell = 0, j = 1/2$ の状態は $1s_{1/2}$ のように書く。 $a_\ell \boldsymbol{\ell}^2$ のため、調和振動子ポテンシャルにおける ℓ の縮退は解け、エネルギー準位はウッズ・サクソンポテンシャルの準位と似たものになる。前にも述べたように、各状態は $2(2\ell + 1)$ 重に縮退している。さらに、スピン軌道力 $a_{\ell s} \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}$ を考慮すると、 $\ell \neq 0$ の状態は $j = \ell + 1/2$ と $j = \ell - 1/2$ に分離する。それぞれの縮退度は $2j + 1$ 、つまり、 $2\ell + 2, 2\ell$ である。 $a_{\ell s} < 0$ のとき、 $j = \ell + 1/2$ の状態は $a_{\ell s} \Delta_{j\ell} = a_{\ell s} \ell/2$ だけエネルギーが下がり、 $j = \ell - 1/2$ の状態は $-a_{\ell s} (\ell + 1)/2$ 上がる。この変化は ℓ が大きい状態ほど大きい。したがって、スピン軌道力が十分強くて $|a_{\ell s}| \ell/2 \sim \hbar\omega$ であるならば、 N 殻に属する最も大きな ℓ で $j = \ell + 1/2$ の状態 (図で ◀ を付けた状態) は、 $N - 1$ 殻の状態群に侵入する。これらの状態は $N - 1$ 殻の状態とはパリティが異なり、侵入軌道 (intruder orbit) あるいは特異パリティ軌道 (unique-parity orbit) とよばれる。 $j = \ell - 1/2$ 状態はスピン軌道力のためエネルギーは上がるが、これは $a_\ell \boldsymbol{\ell}^2$ で下がった分を打ち消すだけで、 $N + 1$ 殻に侵入することはない。

侵入軌道の存在は魔法数を変化させる。例えば、 $N = 4$ 殻に属する $1g_{9/2}$ 状態 ($l = 4$) は、 $N = 3$ 殻の状態とエネルギー的にはほぼ同じなる。 $N = 3$ 殻まで核子を詰めると陽子数または中性子数は 40 になる。一方、 $1g_{9/2}$ には $2(9/2) + 1 = 10$ 個の陽子または中性子が入る。したがって、スピン軌道力は魔法数を 40 から $40 + 10 = 50$ に変える。同様にして

$$N = 4 \text{ 殻 } 70 + (1h_{11/2} \text{ による } 12) = 82, \quad N = 5 \text{ 殻 } 112 + (1i_{13/2} \text{ による } 14) = 126$$

である。 $a_{\ell s} < 0$ であるスピン軌道力 $a_{\ell s} \ell \cdot s$ は実験的に知られた魔法数を見事に説明する。



図には示していないが、 $N = 6$ 殻は $N = 7$ 殻に属する $1j_{15/2}$ 状態と組になり、 $164 + 16 = 184$ が魔法数になる。したがって、 $Z = 126$, $N = 184$ という原子核は陽子と中性子の両方が魔法数であり、安定な原子核になると予想される。これが質量公式で述べた超重元素である。

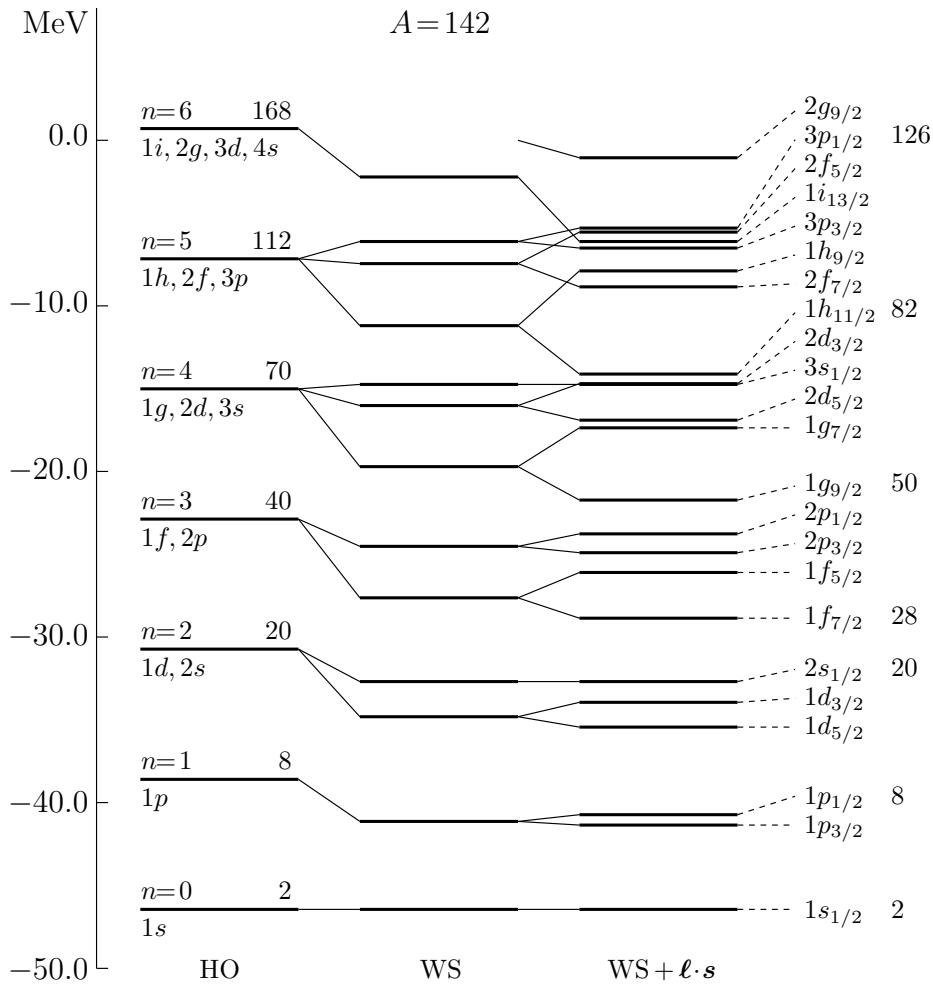
(8.11) の $U(r)$ としてウッズ・サクソンポテンシャルを用いた場合、ハミルトニアンは

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2mr^2} + V_{\text{WS}}(r) + \lambda_{\ell s} \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{WS}}}{\partial r} \ell \cdot s$$

である。 $\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_{n\ell j}(r)}{r} \mathcal{Y}_{\ell j m}(\theta, \phi)$ とすると、 $h\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$ から

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V_{\text{WS}}(r) + \lambda_{\ell s} \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{WS}}}{\partial r} \Delta_{j\ell} \right) u_{n\ell j}(r) = E u_{n\ell j}(r) \quad (8.19)$$

となる。 $\Delta_{j\ell}$ は (8.16) で与えられる。(8.19) を数値的に解いた結果は下図のようになる。パラメータの値は (8.10) 及び $\lambda_{\ell s} = -0.674 \text{ fm}^2$ を用いた。この場合にも、スピン軌道力のため魔法数が再現される。更に、この計算に陽子間に働くクーロン力を考慮すれば、実験との定量的比較が可能になる。



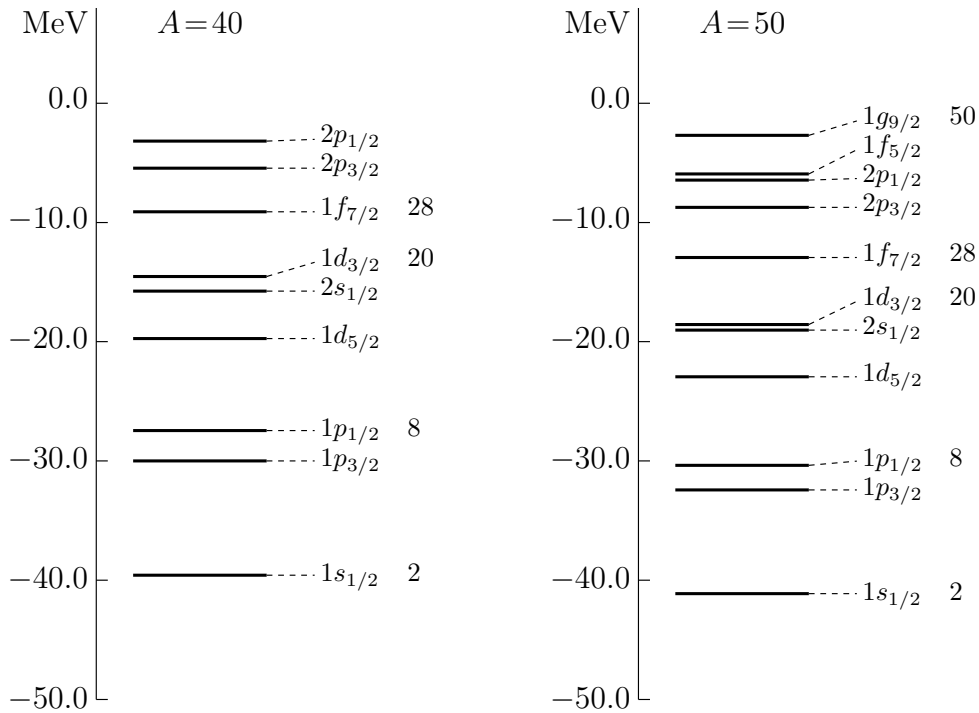
8.3 原子核のスピン

質量公式で示したように、対相互作用のため2個の同種核子は角運動量0の対になった方がエネルギー的に低くなる。その結果、陽子と中性子が共に偶数の原子核の基底状態のスピン(全角運動量) J は $J=0$ になる。 $A=Z+N$ が奇数の原子核の基底状態スピンは、対を組めなかった1つの核子の角運動量で与えられる。平均場近似で考えると、核子をエネルギーの低い1粒子状態から順に詰めていき、最後に残った核子の角運動量を j とすると、 $J=j$ になるはずである。例えば、 $Z=20$ であるCaの同位元素の実験値は

N	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
スピン	0	7/2	0	7/2	0	7/2	0	7/2	0	3/2	0

である。上で述べたように、 Z と N が偶数の場合スピンは0である。下図はウッズ・サクソンポテンシャル+スピン軌道力によるエネルギー準位である。 ^{41}Ca は21個の中性を持つ。21番目の中性子は図から分かるように $1f_{7/2}$ を占めるから ^{41}Ca のスピン J は $J=7/2$ であり実験と一致する。 $1f_{7/2}$ には $2j+1=8$ 個まで中性子が入ることができるから、 N が奇数の ^{41}Ca から ^{47}Ca までは $J=7/2$ である。 ^{49}Ca の29番目の中性子は、 $1f_{7/2}$ が既に満たされているため $2p_{3/2}$ に入

る。確かに ^{49}Ca の実験値は $J = 3/2$ である。このように、強いスピン軌道力を取り入れた平均場近似は、魔法数ばかりでなく原子核のスピンについても実験とよく一致する。



8.4 磁気モーメント

古典電磁気学によれば磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu_0}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

で定義される。ここで μ_0 は真空の透磁率、 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ は電流密度である。電荷 Q の点電荷の位置を $\mathbf{r}(t)$ とすると、この点電荷による磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = Q \dot{\mathbf{r}}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ より

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu_0 Q}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}(t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)) = \frac{\mu_0 Q}{2} \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mu_0 Q \hbar}{2m} \boldsymbol{\ell}$$

になる。ただし $\hbar \boldsymbol{\ell} = m \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ は軌道角運動量である。粒子がスピン \mathbf{s} を持つ場合、 \mathbf{s} からの寄与もある。電子の磁気モーメント演算子 $\boldsymbol{\mu}$ は、ボーア磁子 (Bohr magneton) $\mu_B = \mu_0 e \hbar / 2m_e$ を用いて

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu_B (g_\ell \boldsymbol{\ell} + g_s \mathbf{s}), \quad g_\ell = 1, \quad g_s = 2$$

となる。 $g_s = 2$ はディラック方程式から理論的に導かれる。核子の場合、核磁子 (nuclear magneton) $\mu_N = e \hbar / 2m_p c$ を単位として

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_N (g_\ell \boldsymbol{\ell} + g_s \mathbf{s}), \quad g_\ell = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad g_s = \begin{cases} 5.585 & \text{陽子の場合} \\ -3.826 & \text{中性子の場合} \end{cases} \quad (8.20)$$

である。 g_s の値は実験値である。

原子核全体の磁気モーメントは

$$\mu = \langle \alpha J M = J | \sum_{k=1}^A (\mu_3)_k | \alpha J M = J \rangle$$

で定義される。ここで、 $|\alpha J M\rangle$ はスピンの J である原子核の基底状態、 $(\mu_3)_k$ は核子 k の磁気モーメント演算子の z 成分である。2つの同種核子是对相互作用のため角運動量 0 に組む。角運動量 0 でのベクトル演算子の期待値は 0 であるから、対を組む 2 核子は磁気モーメントには寄与しない。したがって、陽子と中性子が共に偶数の原子核では、基底状態の磁気モーメントは 0 である。

核子数が奇数の原子核では、対を組まない核子の磁気モーメントだけを考えればよい。奇数核子の原子核の磁気モーメントは $m = j$ として

$$\mu = \int d^3r \psi_{\ell j m}^\dagger(\mathbf{r}) \mu_3 \psi_{\ell j m}(\mathbf{r})$$

で与えられる。ただし、 $\psi_{\ell j m}$ は (8.14) である。 μ_3 は r に依存しないから、 $R(r)$ についての積分は規格化定数 1 になるだけである。簡単のため $\mathcal{Y}_{\ell j m}(\theta, \phi)$ を $|j m\rangle$ と書くことにすると

$$\mu = \langle \ell j j | \mu_3 | \ell j j \rangle$$

となる。(8.15) から

$$|\ell j j\rangle = \sqrt{\frac{\ell \pm j + 1/2}{2\ell + 1}} |\ell j - 1/2\rangle |+\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell \mp j + 1/2}{2\ell + 1}} |\ell j + 1/2\rangle |-\rangle$$

である。ここでも簡単のため $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ を $|\ell m\rangle$ で表した。これから

$$\mu = \frac{\ell \pm j + 1/2}{2\ell + 1} \langle \ell j - 1/2 | \langle + | \mu_3 | \ell j - 1/2 \rangle | + \rangle + \frac{\ell \mp j + 1/2}{2\ell + 1} \langle \ell j + 1/2 | \langle - | \mu_3 | \ell j + 1/2 \rangle | - \rangle$$

$\ell_3 |\ell m\rangle = m |\ell m\rangle$, $s_3 |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm\rangle$ であるから

$$\mu_3 |\ell m\rangle |\pm\rangle = \mu_N \left(g_\ell m \pm \frac{1}{2} g_s \right) |\ell m\rangle |\pm\rangle$$

したがって

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\ell \pm j + 1/2}{2\ell + 1} \mu_N \left(g_\ell (j - 1/2) + \frac{1}{2} g_s \right) + \frac{\ell \mp j + 1/2}{2\ell + 1} \mu_N \left(g_\ell (j + 1/2) - \frac{1}{2} g_s \right) \\ &= \mu_N \frac{\ell + 1/2}{2\ell + 1} 2g_\ell j \pm \mu_N \frac{j}{2\ell + 1} (g_s - g_\ell) = \mu_N j \left(g_\ell \pm \frac{g_s - g_\ell}{2\ell + 1} \right), \quad j = \ell \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.21)$$

となる。この式で与えられる μ/μ_N をシュミット値 (Schmidt value) という。シュミット値と実験値 μ/μ_N を比較すると表のようになる。シュミット値は実験をかなりよく説明するが、定量的に理解するには単純な平均場近似では不十分である。

奇数 Z 核				奇数 N 核			
	ℓj	(8.21)	実験		ℓj	(8.21)	実験
$^{17}_9\text{F}$	$d_{5/2}$	4.79	4.72	$^{17}_8\text{O}$	$d_{5/2}$	-1.91	-1.89
$^{39}_{19}\text{K}$	$d_{3/2}$	0.12	0.39	$^{39}_{20}\text{Ca}$	$d_{3/2}$	1.15	1.02
$^{41}_{21}\text{Sc}$	$f_{7/2}$	5.79	5.42	$^{41}_{20}\text{Ca}$	$f_{7/2}$	-1.91	-1.59
$^{209}_{83}\text{Bi}$	$h_{9/2}$	2.62	4.08	$^{207}_{82}\text{Pb}$	$f_{5/2}$	1.37	0.79
				$^{209}_{82}\text{Pb}$	$g_{9/2}$	-1.91	-1.37

A 合流型超幾何微分方程式

微分方程式

$$\left(z \frac{d^2}{dz^2} + (b-z) \frac{d}{dz} - a \right) w(z) = 0 \quad (\text{A.1})$$

を合流型超幾何微分方程式という。ただし, a, b は任意の複素定数であるが, b は 0 または負の整数でないとする。この微分方程式の 1 つの解は

$$w(z) = c M(a, b, z)$$

で与えられる。ただし, c は任意定数, M は合流型超幾何関数 (confluent hypergeometric function)

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} \quad (\text{A.2})$$

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1$$

である。 $b \neq -n$ (n は正の整数) の場合, 一般解 w は

$$w = c_1 M(a, b, z) + c_2 z^{1-b} M(a-b+1, 2-b, z) \quad (\text{A.3})$$

で与えられる。

$|z| \rightarrow \infty$ での漸近形

$$\begin{aligned} M(a, b, z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{i\varepsilon\pi a} z^{-a} g(a, a-b+1, -z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} g(1-a, b-a, z) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ただし $\Gamma(z)$ はガンマ関数であり

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2 \\ -1, & -3\pi/2 < \arg z \leq -\pi/2 \end{cases}$$

$$g(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! z^n} = 1 + \frac{ab}{z} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2z^2} + \dots$$

n を負でない整数とする。(A.2) から $M(-n, b, z)$ は n 次の多項式になる。一方, $a \neq -n$ の場合, $M(a, b, z)$ は $|z| \rightarrow \infty$ で e^z のように振舞う。