波動入門

1999 年 1 月

目 次

参考書

- 寺沢 徳雄：物理テキストシリーズ 7 振動と波動（岩波書店）
- 恒藤 敏彦：物理入門コース 8 弾性体と流体（岩波書店）
- A.P. フレンチ：MIT 物理 振動・波動（培風館）

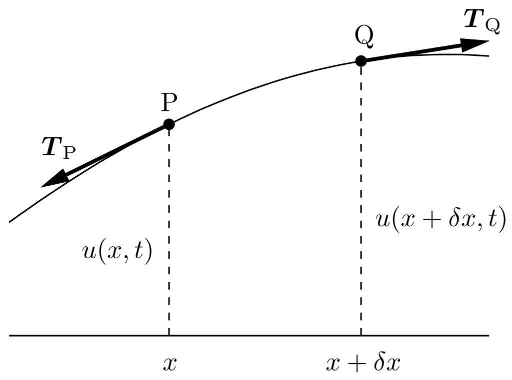
1　波動方程式

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

を弦の振動と棒を伝わる縦波を例にして導く。

弦の振動　単位長さあたりの質量が σ である一様な弦を張力 T で張る。弦の平衡位置を x 軸とし, 弦を x 軸に垂直な方向に振動 (**横波**) させる。振動している弦の平衡位置からの変位 u は位置 x と時間 t によるから $u = u(x,t)$ と表せる。ここで, x は弦の場所を指定する変数であり, 質点の位置のような時間の関数ではない。



弦の x と $x+\delta x$ の間の微小部分 PQ を質点と見なし, 運動方程式を求める。PQ に働く力 $\boldsymbol{F}$ は P における張力 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}}$ と Q における張力 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{Q}}$ の合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{Q}}$ である。$\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{T}_{\mathrm{Q}}$ は大きさは等しいが, 向きがわずかに違うので $\boldsymbol{F}$ は 0 にならない。位置 x における弦の接線と x 軸のなす角を $\theta(x)$ とすると, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}}$, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{Q}}$ の x 方向の成分と u 方向の成分は

$$(\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}})_x = -T\cos\theta(x)\,, \quad (\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}})_u = -T\sin\theta(x)$$
$$(\boldsymbol{T}_{\mathrm{Q}})_x = T\cos\theta(x+\delta x)\,, \quad (\boldsymbol{T}_{\mathrm{Q}})_u = T\sin\theta(x+\delta x)$$

であるから

$$F_x = T\Big(\cos\theta(x+\delta x) - \cos\theta(x)\Big) \approx 0$$
$$F_u = T\Big(\sin\theta(x+\delta x) - \sin\theta(x)\Big) \approx T\Big(\tan\theta(x+\delta x) - \tan\theta(x)\Big)$$

となる。ただし, 変位は小さく θ の 2 次以上が無視できるとし, $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \tan\theta$ で近似した。PQ に働く力の x 成分は無視できる。$\tan\theta$ は弦の接線の傾きであるから

$$\tan\theta(x) = u_x(x,t)\,, \quad \text{ただし} \;\; u_x(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

である。これから

$$\begin{aligned} F_u &= T\Big(u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)\Big) \\ &= T\,\delta x\,\frac{u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)}{\delta x} \xrightarrow{\delta x \to 0} T\,\delta x\frac{\partial u_x}{\partial x} = T\,\delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

となる。PQ の質量は $\sigma\,\delta x$ であり, u 方向の加速度は $\partial^2 u/\partial t^2$ であるから, 運動方程式は

$$\sigma\,\delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_u = T\,\delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

つまり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\ , \quad v = \sqrt{T/\sigma} \tag{1.2}$$

となる。

棒を伝わる縦波　長さ L, 断面積 S の棒の両端に力 F を加えたとき, 棒の長さが δL 変化したとする。δL は F と L に比例し S に逆比例するから, 比例定数を $1/E$ とすると

$$\delta L = \frac{1}{E}\frac{FL}{S}$$

と表せる。単位面積あたりの力 $f = F/S$ は

$$f = E\frac{\delta L}{L} \tag{1.3}$$

である。$f > 0$ のとき張力であり $f < 0$ のとき圧力になる。E を**ヤング率**という。f は棒の外部から加えた力であるが, 棒のある断面を考えると, その両側の部分が互いに及ぼし合う単位面積あたりの力 (**応力**) も f である。

棒の中を伝わる**縦波**を考える。棒の方向を x 軸にとり, 平衡状態で x のところにあった部分が $u(x,t)$ だけ変位したとする。変位は棒の各部分で異なり, また振動するから時間にも依存する。このような変位があるときに生じる応力を求める。長さ $L = h$ である x と $x + h$ の間の微小部分は $\delta L = u(x+h,t) - u(x,t)$ だけ長さが変化するから, x での応力 $f(x,t)$ は (1.3) より

$$f(x,t) = E\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \xrightarrow{h\to 0} E\frac{\partial u}{\partial x}$$

となる。

x と $x + \delta x$ の間の微小部分を考える。この部分に働く外力 F は x と $x + \delta x$ における応力 f の合力であるから, 棒の断面積を S とすると

$$F = S\Big(f(x+\delta x,t) - f(x,t)\Big) = S\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x = SE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\delta x$$

となる。棒の密度 (単位体積あたりの質量) を ρ とすると, 微小部分の質量は $\rho S\,\delta x$ であり, 加速度は $\partial^2 u/\partial t^2$ であるから, 運動方程式は

$$\rho S\,\delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\delta x$$

したがって, 再び

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\ , \quad v = \sqrt{E/\rho} \tag{1.4}$$

を得る。

次元　力学で現れる物理量は長さ (L), 質量 (M), 時間 (T) を組み合わせた単位で表せるが, この組み合わせを**次元** (**物理的次元**) という。速度の次元は LT^{-1} であり, 加速度は速度を時間で割ったものであるからその次元は LT^{-2} となる。力 = 質量 × 加速度 であるから力の次元は MLT^{-2} である。物理の数式や方程式の両辺は同じ次元でなければならない。この性質を利用して物理量の間の関係を推測したり, 解の妥当性を検討できる。これを**次元解析**という。

(1.2) の v の次元が速度の次元になることを示そう。σ は単位長さあたりの質量であるから次元は $\mathrm{ML^{-1}}$ であり, T は力であるから $\mathrm{MLT^{-2}}$ である。したがって, T/σ の次元は $\mathrm{MLT^{-2}/(ML^{-1}) = L^2T^{-2}}$ となるから, $v = \sqrt{T/\sigma}$ の次元は $\mathrm{LT^{-1}}$, つまり速度の次元である。(1.4) の v についても同様にして, 速度の次元になることを示せる。後で分かるが v は波の伝わる速さを表す。

問 1.1 ヤング率 E の次元を求めよ。また, $\sqrt{E/\rho}$ の次元が速度の次元に一致することを示せ。

2 ダランベールの解

波動方程式 (1.1) の重要な性質は, 解の**重ね合わせ** (superposition) が成り立つことである。すなわち, $u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ が解ならば, C_1 と C_2 を x, t に依らない任意定数とすると $C_1u_1(x,t)+C_2u_2(x,t)$ も解になる。

(1.1) の解は一般に次のように求められる。波動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)$$

となるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{または} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{2.1}$$

ならば (1.1) の解である。任意の関数 $f(x)$ に対して x を $x-vt$ で置き換えた $f(x-vt)$ を考える。$y = x - vt$ とすると

$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{df(y)}{dy} = f'(y)\ , \qquad \frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{df(y)}{dy} = -vf'(y)$$

であるから $f(x-vt)$ は (2.1) の最初の方程式を満たす。同様に $g(x+vt)$ は (2.1) の 2 番目の方程式を満たす。したがって, これらを重ね合わせた

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \tag{2.2}$$

も (1.1) の解であり, これを**ダランベールの解**という。

ダランベールの解は次のようにしても求まる。$\alpha = x - vt,\ \beta = x + vt$ とし, 2 つの独立な変数 x, t の代わりに α, β を独立な変数とする。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}$$

同様にして

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \beta} = -v\frac{\partial u}{\partial \alpha} + v\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right)$$

したがって

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0$$

つまり

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} = 0\,, \quad \text{ただし}\ \ u_\beta(\alpha,\beta) = \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$u_\beta(\alpha,\beta)$ は α を変化させても変わらないから $u_\beta(\alpha,\beta)$ は β だけの関数である。この関数を $a(\beta)$ とおくと

$$u_\beta(\alpha,\beta) = \frac{\partial u}{\partial \beta} = a(\beta)$$

ここで

$$g(\beta) = \int a(\beta)\,d\beta$$

とすると

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\Big(u - g(\beta)\Big) = 0$$

これから, $u - g(\beta)$ は α だけの関数である。これを $f(\alpha)$ とすると

$$u = f(\alpha) + g(\beta) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

となる。

(2.2) は (1.1) の一般解を表す。言い換えると, 任意の初期条件に対して, その条件を満たすように f と g を決めることができる。$t = 0$ での波形と各点での速度 $\partial u/\partial t$ がそれぞれ $q(x)$, $p(x)$ で与えられたとき, 初期条件は

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = q(x)\ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -vf'(x) + vg'(x) = p(x) \tag{2.3}$$

である。$P(x) = \displaystyle\int p(x)\,dx$ とおき, 第 2 式を積分すると $-vf(x) + vg(x) = P(x)$ である。これと第 1 式より

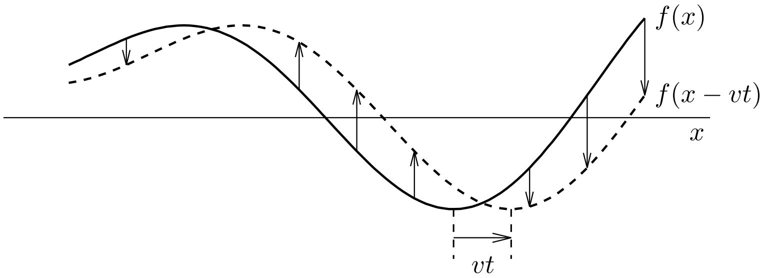
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(q(x) - \frac{1}{v}P(x)\right)\ , \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(q(x) + \frac{1}{v}P(x)\right) \tag{2.4}$$

したがって, (2.2) は任意の初期条件を満たすことができる。(2.4) を (2.2) に代入すると

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(q(x-vt) + q(x+vt)\Big) + \frac{1}{2v}\Big(P(x+vt) - P(x-vt)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(q(x-vt) + q(x+vt)\Big) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} p(y)\,dy \end{aligned} \tag{2.5}$$

が初期条件 (2.3) を満たす解である。これを**ストークスの公式**という。

ダランベールの解 (2.2) の物理的意味を考えよう。$f(x - vt)$ は $f(x)$ を x 軸の正方向に vt 平行移動したものである。移動量は単位時間あたり v だけ変化するから, $f(x - vt)$ は 波形 $f(x)$ が x 軸の正方向に速さ v で進む**進行波**を表す。一方, $g(x + vt)$ は波形 $g(x)$ が x 軸の負の方向に速さ v で進む進行波である。弦の各点は波の進行方向と垂直な u 方向に変位するだけであるが, この変位の結果, 弦全体としては波形が進行する。



正弦波　$f(x) = C\sin(kx+\alpha)$ とすると

$$f(x \pm vt) = C\sin(kx \pm kvt + \alpha) = C\sin(kx \pm \omega t + \alpha)\ , \quad \omega = kv$$

である。これを**正弦波**という。t を固定してある時刻で波をみると, u は x が $\lambda = 2\pi/k$ だけ変わるごとに同じ値をとるから λ は**波長** (wave length) を表す。k を**波数** (wave number) という ($2\pi/\lambda$ ではなく $1/\lambda$ を波数と定義する場合もある)。次に, x を固定して u を t の関数とみれば, t が $T = 2\pi/\omega = \lambda/v$ 変わるごとに同じ値になるから T は**周期** (period) である。**振動数** (frequency) は $\nu = 1/T = \omega/2\pi = v/\lambda$ となる。ω を**角振動数** (angular frequency) という。正弦波は波動方程式の最も基本的な解である。後で示すが, 任意の解は波数の異なる多くの正弦波の重ね合わせとして表せる。

無限に長い弦の振動　$t=0$ で弦が $q(x)$ で与えられる形をし, 弦の各点は静止しているとする。初期条件は $u(x,0) = q(x)$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = 0$ である。したがって (2.5) で $p(x)=0$ とおくと

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(q(x-vt) + q(x+vt)\Big)$$

を得る。$q(x)$ の半分の波形 $q(x)/2$ が速さ v で x 軸の正負両方向に進む。

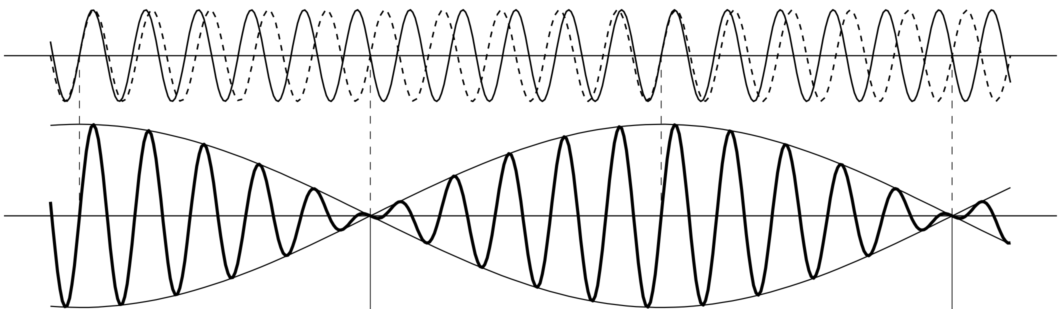
3　位相速度と群速度

正弦波

$$u(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\Big(k(x - v_{\rm p}t)\Big)\,, \qquad v_{\rm p}(k) = \frac{\omega(k)}{k}$$

を考える。波動方程式を満たす正弦波の場合 $\omega(k) = vk$ であるが, ここでは波動方程式の解に限定せず, 一般に ω は k の関数とする。したがって, 速度 $v_{\rm p}$ は波数 k, あるいは, 波長に依存してよい。

位相 $k(x - v_{\rm p}t)$ が一定値 θ_0 の部分は $x = v_{\rm p}t + \theta_0/k$ となり, 速さ $v_{\rm p}$ で進む。例えば, 波のある山に着目すると, この山は速度 $v_{\rm p}$ で移動する。このため, $v_{\rm p}$ を**位相速度** (phase velocity) という。



波数 k がわずかに違う 2 つの正弦波の重ね合わせ

$$u(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin\Big((k+\delta k)x - (\omega + \delta\omega)t\Big)$$

を考える。簡単のため振幅は等しいとする。上図に具体例を示す。この図では k がわずかに違う 2 つの正弦波を上部に, これらを重ね合わせた結果を下部に示す。

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を使うと

$$u(x,t) = a(x,t)\,\sin\Big((k+\delta k/2)x - (\omega+\delta\omega/2)t\Big) \tag{3.1}$$

ただし

$$a(x,t) = 2A\cos\frac{\delta k\,x - \delta\omega\,t}{2} = 2A\cos\frac{\delta k\,(x - v_g\,t)}{2}\,,\quad v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

となる。δk, $\delta\omega$ は微小量であるから, x, t が多少変化しても $a(x,t)$ は余り変わらない。したがって, (3.1) は $a(x,t)$ を振幅とする進行波

$$\sin\Big((k+\delta k/2)x - (\omega+\delta\omega/2)t\Big)$$

と見なせる。振幅 $a(x,t)$ の波長 $4\pi/\delta k$ 及び周期 $4\pi/\delta\omega$ は元のものに比べると非常に長く, 空間的・時間的にゆっくり変化し, 進行波の包絡線になる。この変化する振幅自体も進行波であり, 速度 v_g で進む。包絡線は複数の波を含んでいるので, v_g を**群速度** (group velocity) という。波動方程式の解のように $\omega\propto k$ の場合には $v_g = v_{\mathrm{p}}$ である。しかし, 一般には $v_g \neq v_{\mathrm{p}}$ であり, 太い実線で示した正弦波の進行速度と包絡線の速度は異なる。

以上では, 波数の近い 2 つの進行波の重ね合わせを考えたが, 一般には, ある波数の近傍の波をすべて重ね合わせた場合にも, 群速度は意味を持つ。例えば

$$u(x,t) = A\int_{-\infty}^{\infty}\!dk\,\exp\big(-\alpha^2(k-k_0)^2\big)\,\sin(kx - \omega(k)t\,)\,,\quad \alpha \gg 1 \tag{3.2}$$

である。α が非常に大きい場合, k が k_0 から離れるにつれて, 指数関数は急激に小さくなる。$e^{-\alpha^2(k-k_0)^2} = e^{-1}$ となるのは $|k-k_0| = 1/\alpha$ のときである。したがって, この波に含まれる主な波数の領域は, ほぼ $|k-k_0| < 1/\alpha$ という狭い領域である。そこで $k=k_0$ のまわりでテーラー展開して

$$\omega(k) \approx \omega_0 + v_0(k-k_0)\,,\quad \text{ただし}\ \ \omega_0 = \omega(k_0)\,,\ \ v_0 = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = v_g(k_0) \tag{3.3}$$

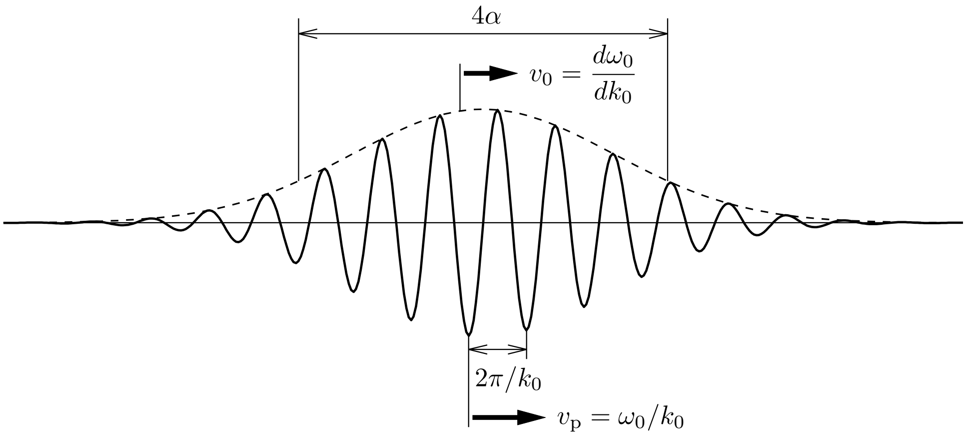
で近似し ($\omega\propto k$ の場合には近似ではない), $k' = k - k_0$ とおくと

$$\begin{aligned}
u(x,t) &\approx A\int_{-\infty}^{\infty}\!dk'\,\exp\big(-\alpha^2k'^2\big)\sin\Big(k_0x - \omega_0t + (x-v_0t)k'\Big)\\
&= A\int_{-\infty}^{\infty}\!dk'\,\exp\big(-\alpha^2k'^2\big)\,\Big[\cos\Big((x-v_0t)k'\Big)\,\sin(k_0x-\omega_0t)\\
&\qquad\qquad + \sin\Big((x-v_0t)k'\Big)\,\cos(k_0x-\omega_0t)\,\Big]\\
&= a(x,t)\,\sin(k_0x-\omega_0t)\,,\quad a(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}A\exp\big(-(x-v_0t)^2/4\alpha^2\big)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!dx\,e^{-\alpha^2x^2}\cos bx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,e^{-b^2/4\alpha^2}\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\!dx\,e^{-\alpha^2x^2}\sin bx = 0 \tag{3.5}$$

を用いた (**補足**参照)。



上図に具体例を示す。振幅 $a(x,t)$ は $|x - v_0 t| < 2\alpha$ の領域以外では急速に小さくなるから, この波は (3.1) のように無限に広がった波ではない。このように空間的に有限の広がりを持つ波を**波束** (wave packet) という。α は非常に大きいとしているから, 振幅 $a(x,t)$ は極めて緩やかに変化する。また, $a(x,t)$ は $x - v_0 t$ の関数であるから, 波束全体としては群速度 v_0 で移動する。$v_\mathrm{p} > v_0$ ならば, 正弦波は波束より速く移動するから, 波束の後端から現れた正弦波が, 振幅 $a(x,t)$ の変化をしながら先端で消えていく。波動現象を問題にするとき, 無限に続く正弦波ではなく, 有限の広がりを持つ波束を扱うことが多い。量子力学での局在した粒子の波動関数などがその例である。

α が小さい場合には, (3.2) は広範囲の正弦波を含み, 近似 (3.3) は成り立たない。このため, $u(x,t)$ は (3.4) のように中心となる正弦波と振幅 $a(x,t)$ のように分離できず, 群速度 $d\omega/dk$ は数学的には定義できても物理的に意味をもたない。

v_p が波数 k に依存する場合, **分散** (dispersion) があるという。また, ω と k, あるいは v_p と k の関係を**分散関係** (dispersion relation) という。本来, 分散は白色光をプリズムに通すといろいろな色の光に分かれる現象に使われた。物質中では光の速度 v_p は波長により異なるため, 屈折率 c/v_p は波長に依存する。(3.2) の場合にも, 正弦波の位相速度が k に依存すると, 個々の正弦波は異なった速度で進むから, 波束の形は時間とともに次第にくずれる。(3.4) では, 波束は波形 $e^{-x^2/4\alpha^2}$ を維持するが, これは (3.3) の近似を行ったためである。ただし, $\omega \propto k$ の場合, (3.3) は近似ではないから, (3.4) は正確な結果である。このとき

$$u(x,t) = f(x - v_0 t)\,, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} A \exp\left(-\, x^2/4\alpha^2\right) \sin(k_0 x)$$

となり, ダランベールの解の特別な場合になる。波動方程式 (1.1) で記述される波には分散はない。ダランベールの解 (2.2) から分かるように, 波形 $f(x)$, $g(x)$ はくずれない。

分散のある波としては, 量子力学の物質波がある。物質波 (波動関数) $\psi(x,t)$ は α を実数の定数として

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x,t) = 0 \tag{3.6}$$

という型の微分方程式を満たし, $\omega \propto k^2$ となる (次節参照)。時間については 1 階の微分方程式であるが, 係数に虚数単位 i があるため時間的に振動する。なお, 時間微分の係数が実数である方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x,t) = 0 \tag{3.7}$$

は熱伝導方程式であり, 時間的には振動しない。この場合, $\psi(x,t)$ は温度を表す。

4 変数分離法

4.1 波動方程式

ダランベールの解は 1 次元の問題を扱うには有効であるが, 2 次元, 3 次元の波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,y,t)=0\,,\quad \left(\boldsymbol{\nabla}^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,y,z,t)=0$$

になると使えない。ここでは応用範囲の広い**変数分離法**で 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{4.1}$$

の解を求める。(4.1) の解が x の関数と t の関数に別けられると仮定し

$$u(x,t)=X(x)\,T(t)$$

としてみる。この場合

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2X}{dx^2}\,T(t)\;,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)\,\frac{d^2T}{dt^2}$$

であるから, これらを (4.1) に代入して XT で割ると

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} \tag{4.2}$$

となる。この式の左辺は x だけの関数, 右辺は t だけの関数であるが, x と t は独立な変数であるから, (4.2) が任意の x, t で成り立つには両辺ともにある定数でなければならない。例えば, t を固定すると右辺はある値になるから, 左辺も x に依らず一定である。この定数を便宜上 $-k^2$ とすると

$$\frac{d^2X}{dx^2}=-\,k^2X\;,\quad \frac{d^2T}{dt^2}=-\,k^2v^2T$$

となる。単振動と同じ方程式であるから, 一般解は C_X, C_T, α, β を任意定数として

$$X(x)=C_X\sin(kx+\alpha)\;,\quad T(t)=C_T\sin(\omega t+\beta)\;,\quad \omega=kv$$

である。したがって $C=C_XC_T$ とすると

$$u(x,t)=C\sin(kx+\alpha)\sin(\omega t+\beta) \tag{4.3}$$

が波動方程式の 1 つの解になる。この解は

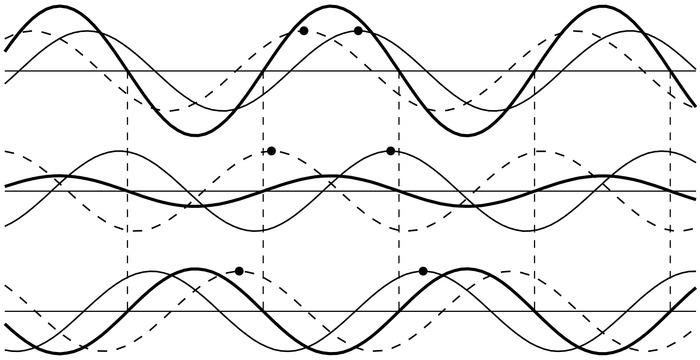
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big)$$

と $\omega=kv$ を使うと

$$u(x,t)=\frac{C}{2}\left[\cos\Big(k(x-vt)+\alpha-\beta\Big)-\cos\Big(k(x+vt)+\alpha+\beta\Big)\right] \tag{4.4}$$

となるから, ダランベールの解 $f(x-vt)+g(x+vt)$ の特別な場合になっている。

(4.3) は波形 $C\sin(kx+\alpha)$ が時間的に振幅 $\sin(\omega t+\beta)$ で振動する。これは進行波ではない。このような波を**定常波** (stationary wave) という。(4.4) から, この定常波は互いに反対方向に進む 2 つの進行波の重ね合わせである。下図で, 細い実線は x 軸正方向に進む進行波 $\cos(k(x-vt)+\alpha-\beta)$ を, 破線は x 軸負方向に進む進行波 $-\cos(k(x+vt)+\alpha-\beta)$ を表し, 太い実線がこれらを重ね合わせた結果である。$\sin(kx+\alpha)=0$ である点 x では時間に依らず常に $u=0$ である。これらの点を**節** (node) という。



4.2　シュレディンガー方程式

1 次元の自由粒子に対するシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.5}$$

を変数分離法で解く。

$$\psi(x,t) = f(t)\varphi(x)$$

とおくと

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \text{定数}$$

となる。この定数を $\hbar\omega$ とすると

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{2m\omega}{\hbar}\varphi(x)\,, \quad \frac{df(t)}{dt} = -\,i\omega\, f(t)$$

したがって

$$\varphi(x) = C\, e^{\pm ikx}\,, \quad f(t) = D\, e^{-i\omega t}\,, \qquad k = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \tag{4.6}$$

k が複素数になる場合, $\varphi(x)$ は $x\to\infty$ または $x\to-\infty$ のどちらかで発散する。これは量子力学的には無意味であるから, k が実数になる $\omega\ge 0$ だけを考える。(4.6) から

$$\psi(x,t) = A\exp\Big(i\,(\,kx - \omega(k)t\,)\Big)\,, \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{4.7}$$

となる。(4.6) では $e^{\pm ikx}$ ただし $k>0$ であるが, これは k を制限せずに e^{ikx} だけ考えればよい。なお, φ を $\sin kx, \cos kx$ で表してもよいが, 量子力学の場合, $\exp(\pm\, ikx)$ の方が便利なことが多い。(4.7) から位相速度と群速度は

$$v_{\rm p} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}\,, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = 2v_{\rm p} \ne v_{\rm p}$$

である。

(3.2) と同様に, (4.7) を重ね合わせた

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\exp\Big(i(kx-\omega(k)t)\Big)\,, \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{4.8}$$

も (4.5) の解である。$A(k) = C\exp(-\alpha^2(k-k_0)^2)$ の場合, (4.8) の積分は解析的に行える。指数部分は

$$
\begin{aligned}
&-\alpha^2(k-k_0)^2 + ikx - i\frac{\hbar t}{2m}k^2 \\
&= -\alpha^2 a\left[k - \frac{1}{a}\left(k_0 + \frac{ix}{2\alpha^2}\right)\right]^2 + \frac{1}{a(t)}\left(i\,(k_0x - \omega_0 t) - \frac{x^2}{4\alpha^2}\right), \quad a(t) = 1 + i\frac{\hbar t}{2m\alpha^2}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= C\exp\left[\frac{1}{a(t)}\left(i\,(k_0x-\omega_0 t) - \frac{x^2}{4\alpha^2}\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\exp\left[-\alpha^2 a\left(k - \frac{1}{a}\left(k_0 + \frac{ix}{2\alpha^2}\right)\right)^2\right] \\
&= C\exp\left[\frac{1}{a(t)}\left(i\,(k_0x-\omega_0 t) - \frac{x^2}{4\alpha^2}\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\alpha^2 a\, k^2}
\end{aligned}
$$

複素数 z (ただし $\mathrm{Re}(z) > 0$) のとき, 実数の場合と同様に

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-zk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}
$$

であるから

$$
\psi(x,t) = \frac{C}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{a(t)}}\,\exp\left[\frac{1}{a(t)}\left(i\,(k_0x-\omega_0 t) - \frac{x^2}{4\alpha^2}\right)\right]
$$

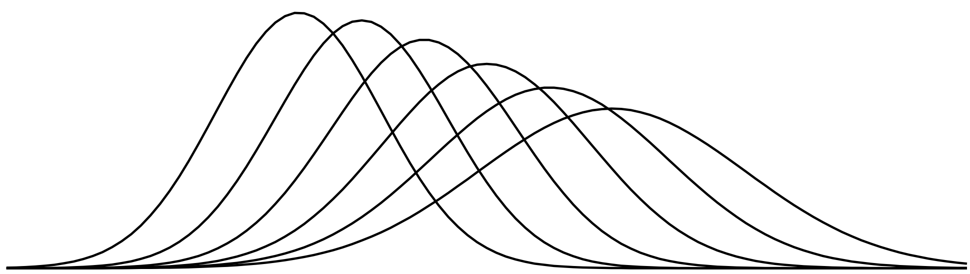
となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a(t)}\left(i\,(k_0x-\omega_0 t) - \frac{x^2}{4\alpha^2}\right) &= \frac{1}{|a|^2}\left(1 - i\frac{\hbar t}{2m\alpha^2}\right)\left(i\,(k_0x-\omega_0 t) - \frac{x^2}{4\alpha^2}\right) \\
&= -\frac{1}{4\alpha^2|a|^2}\left(x^2 - 2\frac{\hbar t}{m}\,(k_0x-\omega_0 t) + i\Big(\cdots\cdots\Big)\right) \\
&= -\frac{1}{4\alpha^2|a|^2}\left((x - v_0 t)^2 + i\Big(\cdots\cdots\Big)\right), \quad v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}
\end{aligned}
$$

ところで θ を実数とするとき $|e^{i\theta}| = 1$ であるから, 確率密度は

$$
|\psi(x,t)|^2 = \frac{C^2}{\alpha^2}\frac{\pi}{|a(t)|}\exp\left(-\frac{(x-v_0t)^2}{2\alpha^2|a(t)|^2}\right), \quad |a(t)|^2 = 1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\alpha^2}\right)^2
$$

となる。確率密度 $|\psi(x,t)|^2$ は群速度 v_0 で移動するが, 波束の幅は時間とともに $|a(t)|$ で広がり, 次第に崩れていく (分散)。



5　境界条件

現実の弦あるいは棒の長さは有限であるから, 端で何らかの**境界条件** (boundary condition) を満たす必要がある。長さ L の弦の両端 ($x=0,\ x=L$) が固定されている場合

$$u(0,t)=u(L,t)=0 \tag{5.1}$$

が境界条件になる。あるいは, 一端 $x=L$ を周期的に振動させる境界条件も考えられる。このように, 問題に応じて様々な境界条件を設定できるが, 以下では両端固定の境界条件 (5.1) について調べよう。

解 (4.3) が任意の時刻 t で (5.1) を満たすためには

$$\sin\alpha=0\,,\quad \sin(kL+\alpha)=\sin kL\,\cos\alpha+\cos kL\,\sin\alpha=0\ \ \textit{i.e.}\ \sin kL=0$$

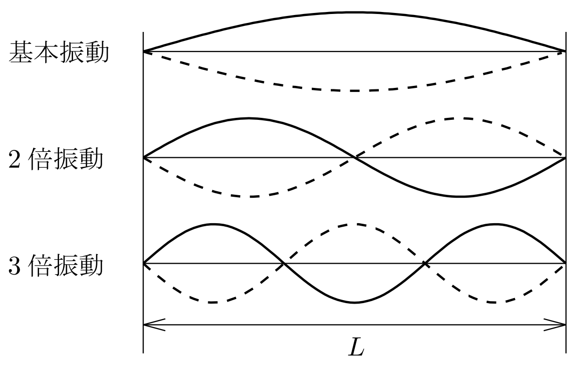
でなければならない。したがって, $m,\ n$ を整数として $\alpha=m\pi,\ kL=n\pi$ となる。これらを (4.3) に代入し $\sin(\theta+m\pi)=(-1)^m\sin\theta$ を使うと

$$u_n(x,t)=C_n\sin k_nx\,\sin(\omega_nt+\beta_n)\ ,\quad k_n=\frac{n\pi}{L}\ ,\quad \omega_n=k_nv=\frac{n\pi}{L}v \tag{5.2}$$

という一連の解が得られる。ただし C_n と β_n は任意定数である。n は任意の整数であるが, $n=0$ のとき $k_n=0$ より $u_n(x,t)=0$ となるから考える必要はない。負の整数 $-n$ ($n>0$) の場合, $k_{-n}=-k_n,\ \omega_{-n}=-\omega_n$ であるから, 任意定数 $C_{-n}\to C_n,\ -\beta_{-n}\to\beta_n$ と書き直せば, u_{-n} は u_n と同じになる。したがって, $n=1,2,3,\cdots$ に対する u_n を考えれば十分である。$a_n=C_n\sin\beta_n,\ b_n=C_n\cos\beta_n$ とすれば, (5.2) は

$$u_n(x,t)=\sin k_nx\,\Big(a_n\cos\omega_nt+b_n\sin\omega_nt\Big) \tag{5.3}$$

とも表せる。後の議論では, こちらの型の方が (5.2) よりも扱いやすい。(5.2) あるいは (5.3) のように, 与えられた境界条件を満たし一定の振動数の解 u_n を**固有関数** (eigenfunction) といい, ω_n を**固有振動数** (eigenfrequancy) という。u_n で表される振動は**固有振動モード** (eigenmode) と呼ばれる。$n=1$ のモードを**基本振動**, $n\geq 2$ のモードを**倍振動**という。



問 5.1　境界条件 $u(0,t)=0,\ u(L,t)=a_0\sin\omega_0t$ を満たす解 (4.3) を求めよ。節が $x=L$ に近い振動は, 振幅が大きくなることを示せ (共鳴)。

固有関数 (5.2) あるいは (5.3) を重ね合わせた関数も, 波動方程式 (4.1) 及び両端固定の境界条件 (5.1) を満たすから, 一般に

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_nx\,\Big(a_n\cos\omega_nt+b_n\sin\omega_nt\Big) \tag{5.4}$$

も解である。逆に, (4.1) 及び (5.1) を満たす任意の解は, すべて (5.4) のように表せる。

未定定数 a_n, b_n は初期条件を与えれば決まる。ここで積分

$$\int_0^L \sin k_m x \, \sin k_n x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx \tag{5.5}$$

を考えると, 整数 ℓ に対して

$$\int_0^L \cos\frac{\ell\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} L & \ell = 0 \text{ のとき} \\ \left[\dfrac{L}{\ell\pi}\sin\dfrac{\ell\pi x}{L}\right]_0^L = 0 & \ell \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから, 正の整数 m, n については $m+n\neq 0$ より (5.5) の右辺第 2 項の積分は 0 になり, 第 1 項の積分は $m-n=0$, すなわち $m=n$ の時だけ $L/2$ である。したがって

$$\int_0^L \sin k_m x \, \sin k_n x \, dx = \frac{L}{2}\,\delta_{mn}\ , \quad m, n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.6}$$

を得る。ただし δ_{mn} はクロネッカーのデルタ記号である。

初期条件を

$$u(x,0) = q(x)\ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = p(x)$$

とする。ただし, 境界条件から $q(0)=q(L)=0$, $p(0)=p(L)=0$ である。(5.4) より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left(-\omega_n a_n \sin\omega_n t + \omega_n b_n \cos\omega_n t\right)$$

であるから, 初期条件は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \sin k_n x = q(x)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \, \sin k_n x = p(x) \tag{5.7}$$

と書ける。第 1 式の両辺に $\sin k_m x$ を掛けて積分し (5.6) を使うと

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \sin k_n x \, \sin k_m x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2}\delta_{mn} = \frac{L}{2} a_m = \int_0^L q(x)\sin k_m x \, dx$$

となる。第 2 式についても同様にすると

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L q(x)\sin k_n x \, dx\ , \quad b_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L p(x)\sin k_n x \, dx \tag{5.8}$$

を得る。$q(x)$ と $p(x)$ は与えられた関数であるから, a_n と b_n はこの積分を実行すると求まる。

ストークスの公式　初期条件を満たす波動方程式の解はストークスの公式 (2.5) で与えられる。したがって, 係数 a_n, b_n が (5.8) である解 (5.4) は, ストークスの公式に一致するはずである。(5.7) より

$$q(x\pm vt) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \sin k_n(x\pm vt) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(\sin k_n x \cos\omega_n t \pm \cos k_n x \sin\omega_n t\Big)$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \sin k_n x \cos\omega_n t = \frac{1}{2}\Big(q(x-vt) + q(x+vt)\Big) \tag{5.9}$$

である。同様にして

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\sin k_n x \sin \omega_n t = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \,\sin k_n x \cos \omega_n t = \frac{1}{2}\Big(p(x-vt)+p(x+vt)\Big)$$

である。左辺の微分される級数が $t=0$ のとき 0 であることを考慮すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\sin k_n x \sin \omega_n t = \int_0^t \frac{1}{2}\Big(p(x-vt')+p(x+vt')\Big)dt'$$

となる。さらに, 右辺の第 1 項では $s=x-vt'$ とし, 第 2 項では $s=x+vt'$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\sin k_n x \sin \omega_n t = \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} p(s)\,ds \tag{5.10}$$

となる。(5.9) と (5.10) から (5.4) は, ストークスの公式 (2.5) に一致する。

6 フーリエ級数

これまでの議論は, 変数分離法で波動方程式の固有モードを求め, それらを重ね合わせることにより一般解を求めた。これは次の数学的定理の応用と見なせる。

定理 区間 $[0,L]$ で定義された $f(0)=f(L)=0$ を満たす任意の連続関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\sin\frac{n\pi x}{L}\ , \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{6.1}$$

と展開できる。これを $f(x)$ に対する**フーリエ正弦級数**という。

(5.7) と (5.8) の関係は, この定理に他ならない。

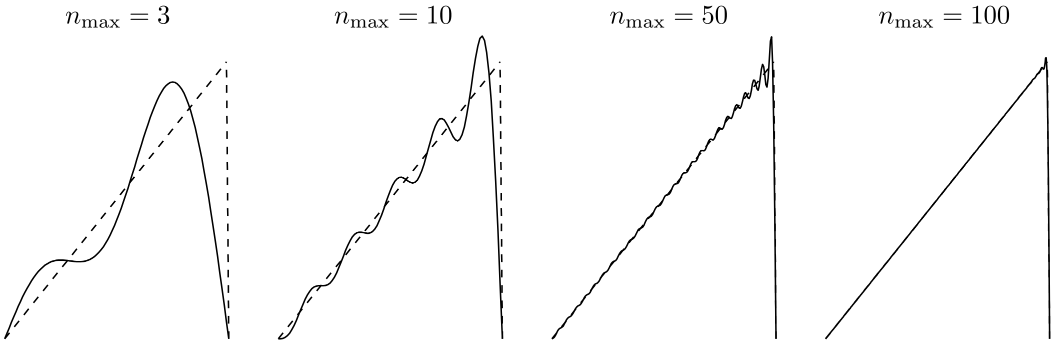
(6.1) の展開例として, $0<a<1$ のとき

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{aL}\ , & 0\le x\le aL \\ \dfrac{L-x}{L-aL}\ , & aL\le x\le L \end{cases} \tag{6.2}$$

を考えてみる。これは 3 点 $(0,0)$, $(aL,1)$, $(L,0)$ を直線で結ぶ関数である。$y=x/L$ とすると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^{aL}\frac{x}{aL}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx+\frac{2}{L}\int_{aL}^{L}\frac{L-x}{L-aL}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{2}{a}\int_0^a y\sin(n\pi y)\,dy+\frac{2}{1-a}\int_a^1(1-y)\sin(n\pi y)\,dy \\ &= \frac{2}{a}\left[-\frac{y}{n\pi}\cos(n\pi y)+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi y)\right]_0^a+\frac{2}{1-a}\left[\frac{y-1}{n\pi}\cos(n\pi y)-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi y)\right]_a^1 \\ &= \frac{2\sin(n\pi a)}{n^2\pi^2a(1-a)} \end{aligned}$$

下図に $a=0.99$ のとき, $n=n_{\max}$ まで和をとった結果を示す。正弦曲線とはまるで違う関数でも, 確かに $\sin(n\pi x/L)$ の和として表せる。



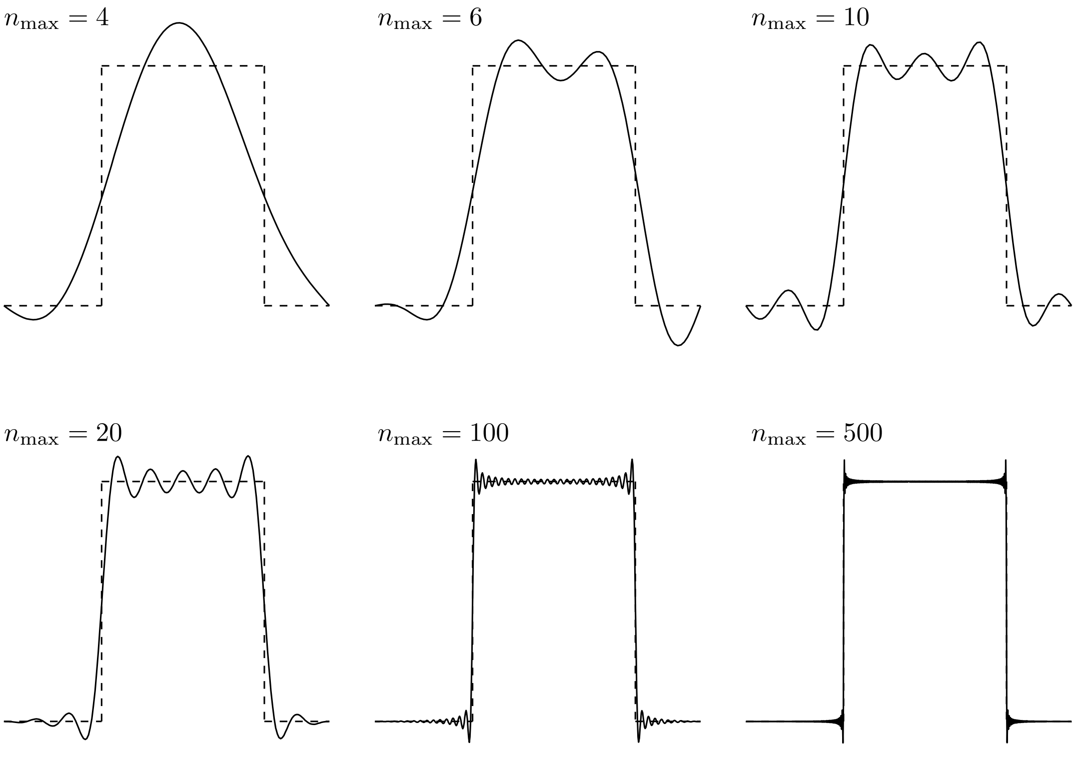
不連続点を持つ関数でも, 不連続点を除けばフーリエ級数は元の関数に収束する。$f(x)$ が $x = a$ で不連続であるとき, $d = f(a+0) - f(a-0)$ とすると, フーリエ級数の $x = a$ での値 y は

$$f(a-0) - \frac{\mathrm{si}\,\pi}{\pi} d \le y \le f(a+0) + \frac{\mathrm{si}\,\pi}{\pi} d\,, \quad \mathrm{si}\,\pi = -\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.2811\cdots$$

の間で不定である。これを**ギブス現象**という。ただし $\mathrm{si}\,x$ は積分正弦関数である。次の図は

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le x/L < 0.3\,, \quad 0.8 < x/L \le 1 \\ 1\,, & 0.3 < x/L < 0.8 \end{cases}$$

の結果である。



フーリエ級数 (6.1) を出発点にして, 両端固定の境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ を満たす波動方程式

の解 $u(x,t)$ を求めてみよう。(6.1) から

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\,\sin k_n x\ ,\quad q_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin k_n x\,dx\ ,\quad k_n=\frac{n\pi x}{L} \tag{6.3}$$

と展開できる。この場合, フーリエ係数 $q_n(t)$ は時間 t の関数になる。$u(x,t)$ は既に境界条件を満たしているから, 波動方程式を満たすように $q_n(t)$ を決めればよい。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\frac{d^2\sin k_n x}{dx^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\,k_n^2\sin k_n x\ ,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2 q_n}{dt^2}\sin k_n x$$

を波動方程式に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-k_n^2\,q_n(t)-\frac{1}{v^2}\frac{d^2q_n}{dt^2}\right)\sin k_n x=0$$

となる。両辺に $\sin k_m x$ を掛け積分し (5.6) を使うと

$$\frac{d^2q_n}{dt^2}+\omega_n^2\,q_n=0\ ,\quad \omega_n=k_n v \tag{6.4}$$

を得る。つまり $q_n(t)$ は単振動の運動方程式を満たさなければならない。この方程式の一般解は, a_n, b_n を任意定数とすると

$$q_n(t)=a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t$$

で与えられる。これを (6.3) の $u(x,t)$ に代入すると (5.4) を得る。(6.4) から, 両端固定の弦は振動数が固有振動数 ω_n の互いに独立な無限個の調和振動子の集まりと見なせる。

直交関数系　フーリエ級数はベクトルと対応させることができる。x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とすると, 単位ベクトルの長さは 1 であり, 互いに直交するから

$$\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_n=\delta_{mn}\ ,\quad m,n=1,2,3 \tag{6.5}$$

である。任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3\ ,\quad A_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{A} \tag{6.6}$$

と展開できる。フーリエ級数とベクトルの類似性を明確にするため

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\ ,\quad n=1,2,3,\cdots$$

とする。(5.6) は

$$\int_0^L\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx=\delta_{mn}$$

になり, これは (6.5) に対応する。フーリエ級数 (6.1) は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\,\phi_n(x)\ ,\quad f_n=\int_0^L\phi_n(x)\,f(x)\,dx$$

と表わせ, (6.6) を拡張したものである。したがって, 区間 $[0,L]$ で定義された $f(0)=f(L)=0$ を満たす関数は, $\phi_n(x)$ ($n=1,2,3,\cdots$) を単位ベクトルとする空間内のベクトルと考えてよい。この空間内のベクトル $f(x)$ と $g(x)$ の内積は

$$\int_0^L f(x)\,g(x)\,dx$$

で定義される。通常のベクトルの場合と同様に

$$\int_0^L f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

のとき $f(x)$ と $g(x)$ は**直交する**という。大きさが 1 の単位ベクトルに対応して

$$\int_0^L f(x)^2\,dx = 1$$

であるとき, $f(x)$ は**規格化**あるいは**正規化**されているという。関数系 $\phi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) はどの 2 つをとっても直交している。この様な関数系を**直交関数系**といい, 特に規格化されている直交関数系を**正規直交関数系**という。

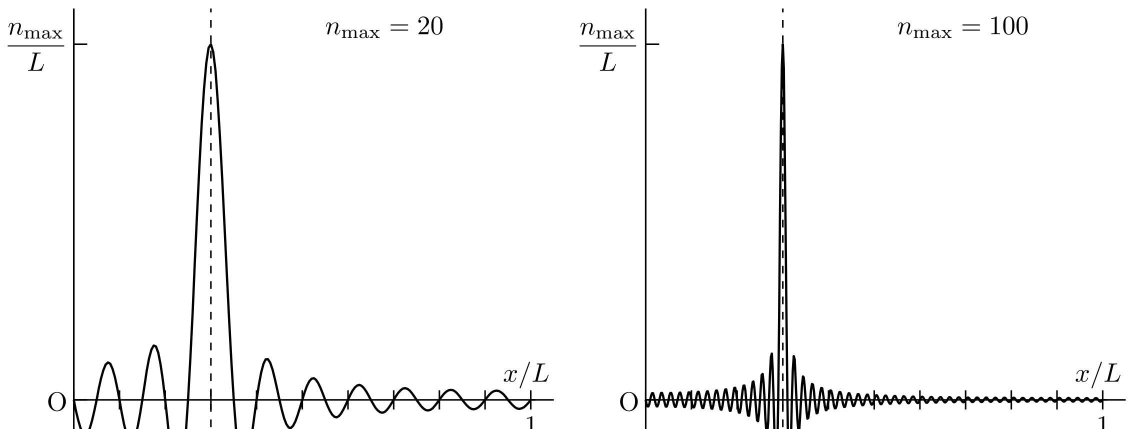
(6.1) において係数 a_n の式を $f(x)$ の展開式に代入すると

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(y)\,\sin\frac{n\pi y}{L}\,dy \right) \sin\frac{n\pi x}{L} = \int_0^L f(y)\,\delta(x, y)\,dy$$

ただし

$$\delta(x, y) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi y}{L}$$

となる。y を適当な値, 例えば $y = 0.3L$ に固定して, $n = n_{\rm max}$ まで和をとったときの $\delta(x, y)$ を下図に示す。$x = y$ で非常に大きな値 ($\approx n_{\rm max}/L$) になり, それ以外では 0 に近づく。和を無限大までとれば, $\delta(x, y)$ は $x = y$ で発散し, $x \neq y$ では 0 になることが予想できる。これは後で述べる**デルタ関数**の一例である。



フーリエ級数の一般論

定理 $f(x + 2L) = f(x)$ を満たす周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{6.7}$$

と展開でき, 係数は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ , \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{6.8}$$

で与えられる。

(6.1) では $f(x)$ は区間 $[0,L]$ でのみ定義されているが, これを区間 $[-L,L]$ で奇関数になるように拡張し, 更に周期 $2L$ の関数として $f(x)=f(x+2L)$ により全区間に拡張する。このようにすると, $f(x)\cos(n\pi x/L)$ は奇関数であるから, (6.8) の a_n は 0 になり, $f(x)\sin(n\pi x/L)$ は偶関数であるから

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\ , \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

となる。これは (6.1) にほかならない。$[0,L]$ で定義された関数を偶関数として拡張してもよい。この場合 $b_n=0$ になり cos だけで表わせるから**フーリエ余弦級数**という。区間 $[0,L]$ に関する限り, 正弦級数も余弦級数も同じ $f(x)$ の別表現である。数学的には奇関数として拡張するか偶関数として拡張するかは任意であるが, 物理的には境界条件などから自動的に決まる。

(6.7), (6.8) の表現は複素数の指数関数を使うと, もっと簡潔な表現にまとめることができる。$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ を用いて sin と cos を指数関数で表わすと

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\,e^{in\pi x/L}+c_{-n}\,e^{-\,in\pi x/L}\right)$$

ただし

$$c_{\pm n}=\frac{a_n\mp ib_n}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\mp i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{\mp\, in\pi x/L}\,dx$$

したがって, $n\ge 1$ の和の代わりに, すべての整数についての和をとれば

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}\ , \quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-\,in\pi x/L}\,dx \tag{6.9}$$

となる。

非周期的関数に対しては $L\to\infty$ とした極限を考えればよい。$k_n=n\pi/L,\ \Delta k=k_n-k_{n-1}=\pi/L$ とおくと, (6.9) は

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n)\,e^{ik_nx}\Delta k\ , \quad F(k_n)=\frac{c_n}{\Delta k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-\,ik_nx}\,dx$$

と書ける。ここで $L\to\infty$ とすると

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,e^{ikx}dk\ , \quad F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx \tag{6.10}$$

となる。$F(k)$ を $f(x)$ の**フーリエ変換**, $f(x)$ を $F(k)$ の**フーリエ逆変換**という。あるいは, より対称的にするため

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,e^{ikx}dk\ , \quad F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx$$

で定義することもある。

問 6.1 $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2L}}e^{in\pi x/L}$ は

$$\int_{-L}^{L}\varphi_m^*(x)\,\varphi_n(x)\,dx=\delta_{mn}\ , \quad m,n\ \text{は任意の整数}$$

を満たすことを示せ。複素関数の場合, 規格化と直交性は上の様に複素共役 $\varphi^*(x)$ との積で定義する。$\varphi_n(x)$ ($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$) は $[-L,L]$ で正規直交系をなす。

問 6.2 (6.2) を区間 $[-L, L]$ に偶関数として拡張したとき, フーリエ余弦級数で表わせ。

ディラックのデルタ関数 (6.10) において, $F(k)$ を $f(x)$ の積分に代入すると

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-x)\, f(y)\, dy \tag{6.11}$$

ただし

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\,ikx} \tag{6.12}$$

を**ディラックのデルタ関数** (の 1 つの表現) という。$x \neq 0$ のとき, これをそのまま積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\,ikx} = \frac{i}{x} \left[\, e^{-\,ikx} \,\right]_{k=-\infty}^{k=\infty}$$

となり不定である。(6.12) は

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\,ikx - \varepsilon|k|}\,, \qquad \text{ただし}\ \ \varepsilon > 0$$

の $\varepsilon \to +0$ における極限と考えるべきである。この積分を実行すると

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\exp(-\,ikx - \varepsilon k)}{-\,ix - \varepsilon} \right]_0^\infty + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\exp(-\,ikx + \varepsilon k)}{-\,ix + \varepsilon} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

となる。$e^{-\varepsilon|k|}$ のため $k = \pm\infty$ の寄与は 0 になる。$\varepsilon \to +0$ とすると

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\varepsilon} \to \infty\,, & x = 0 \\[2mm] \dfrac{\varepsilon}{\pi x^2} \to 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

である。また, 全空間で積分すると $\varepsilon > 0$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \Big(\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty) \Big) = 1$$

となる。このように, (6.12) は $x = 0$ 以外のいたるところで 0 であるが, 積分すると 1 になる非常に奇妙な “関数” である。これは普通の関数とは性質が異なるので, **超関数**と呼ばれる。

一般にデルタ関数は

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{6.13}$$

で定義される。このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-a) = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-a) = f(a)$$

が成り立つ。$x \neq a$ では $\delta(x-a) = 0$ であるから, $x \neq a$ での関数の値を $f(a)$ で置き換えても積分値は変わらない。この関係式は (6.11) に他ならない。デルタ関数は非常に特異な関数であるから, 単独では意味がない。性質のよい関数との積を積分して初めて意味を持つ。また, デルタ関数を含む積分は $-\infty$ から ∞ までする必要はなく, デルタ関数の発散点を含めばよい。デルタ関数は現代物理学, 特に量子力学を学ぶ上で重要である。

定義 (6.13) から, デルタ関数の基本的性質として

$$\begin{aligned} &\delta(x) = \delta(-x)\,, && x\,\delta(x) = 0 \\ &x\,\delta'(x) = -\,\delta(x)\,, && \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\,\delta(x) \\ &\delta(x^2 - c^2) = \frac{1}{2|c|}\Big(\delta(x-c) + \delta(x+c)\Big) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $c \neq 0$ である。これらの等式は, 両辺に任意の関数を掛け積分すると同じ結果を与えることを意味する。$\delta'(x)$ は $\delta(x)$ の形式的な 1 階導関数である。

上に示した基本的性質の最後の式を証明しよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x^2-c^2)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\delta(x^2-c^2)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,\delta(x^2-c^2)\,dx$$

$x<0$ のとき $x=-\sqrt{t}$, $x>0$ のとき $x=\sqrt{t}$ とする。ただし $t>0$ である。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x^2-c^2)\,dx &= -\,\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} \frac{f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\delta(t-c^2)\,dt + \frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\delta(t-c^2)\,dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c^2}}\left(f(-\sqrt{c^2}) + f(\sqrt{c^2})\right) \\ &= \frac{1}{2|c|}\Big(f(c) + f(-c)\Big) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{1}{2|c|}\Big(\delta(x-c)+\delta(x+c)\Big)\,dx \end{aligned}$$

7　波動のエネルギー

波動方程式を導いたときと同様に x と $x+\delta x$ の間の微小部分 PQ を考える。弦が変位 $u(x,t)$ で振動しているとき, PQ の長さ δl は

$$\delta l = \sqrt{\delta x^2 + \Big(u(x+\delta x,t) - u(x,t)\Big)^2} = \delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx \delta x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

である。ただし, 変化率 $\partial u/\partial x$ は十分小さいと仮定した。PQ は平衡状態での長さ δx に比べて $\delta l - \delta x$ だけ伸びるから, 張力 T が PQ になす仕事, すなわち PQ に蓄えられた位置エネルギー δW は

$$\delta W = T\,(\delta l - \delta x) = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \delta x$$

となる。弦の単位長さあたりの質量を σ とすると, PQ の質量は $\sigma\delta x$ であり, u 方向の速度は $\partial u/\partial t$ であるから, 運動エネルギー δT は

$$\delta T = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \delta x$$

となる。したがって, PQ の力学的エネルギー δE は

$$\delta E = \delta T + \delta W = \mathcal{E}(x,t)\,\delta x$$

ただし

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{7.1}$$

である。全エネルギー E は

$$E(t) = \int \mathcal{E}(x,t)\,dx$$

で与えられる。$\mathcal{E}$ は単位長さあたりのエネルギーを表すから**エネルギー密度**と呼ばれる。$v = \sqrt{T/\sigma}$ を使うと $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\sigma}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \tag{7.2}$$

と書ける。

両端固定の境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ 場合, 波動方程式の解は固有振動の重ね合わせとして表わせる:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\phi_n(x) \tag{7.3}$$

ただし, $\phi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) は正規直交関数系

$$\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_n x\ , \quad k_n = \frac{n\pi}{L}\ , \quad \int_0^L \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn} \tag{7.4}$$

であり, $q_n(t)$ は

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = 0\ , \quad \omega_n = v k_n \tag{7.5}$$

の一般解である。(7.3) より

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx &= \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_m \phi_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \sin\phi_n(x)\,dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_m \dot{q}_n \int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_m \dot{q}_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^2
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx &= \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} q_m k_m \sqrt{\frac{2}{L}}\cos k_m x \sum_{n=1}^{\infty} q_n k_m \sqrt{\frac{2}{L}}\cos k_n x\,dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} k_m q_m k_n q_n \frac{2}{L}\int_0^L \cos k_m x\ \cos k_n x\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 q_n^2
\end{aligned}$$

したがって, 全エネルギー E は

$$E = \int_0^L \frac{\sigma}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx = \frac{\sigma}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{q}_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\right) \tag{7.6}$$

となる。各々の項は調和振動のエネルギー $\dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega x^2)$ と同じ型をしている。したがって, 弦は互いに独立な調和振動子の集りと同等である。

波動方程式の解は

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

と表わせる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - vt) + g'(x + vt)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -vf'(x - vt) + vg'(x + vt)$$

であるから, (7.2) よりエネルギー密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,t) &= \frac{\sigma}{2}\left[v^2\Big(f'(x - vt) - g'(x + vt)\Big)^2 + v^2\Big(f'(x - vt) + g'(x + vt)\Big)^2\right] \\ &= \sigma v^2 \left(f'(x - vt)^2 + g'(x + vt)^2\right)\end{aligned}$$

となり, $x \pm vt$ の関数として表わせる。したがって, エネルギーも波とともに速さ v で移動する。弦はエネルギーを伝える媒質として振る舞う。

8 補足

8.1 積分 (3.5) の証明

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}\,,\quad (\ a>0\ )$$

の証明

$$\frac{\partial I}{\partial b}=-\int_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-ax^2}\sin bx\,dx=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,e^{-ax^2}}{dx}\sin bx\,dx$$

であるから, 部分積分を行うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial b}&=\frac{1}{2a}\Big[e^{-ax^2}\sin bx\Big]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\frac{d}{dx}\sin bx\,dx\\&=-\frac{b}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=-\frac{b}{2a}\,I(a,b)\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{dI}{I}=-\frac{b}{2a}\,db$$

これを積分すると

$$\log I(a,b)=-\frac{b^2}{4a}+C$$

となる。積分定数 C は b には依存しないが, a には依存してもよい。$b=0$ とすると $C=\log I(a,0)$ になるから

$$I(a,b)=I(a,0)\,e^{-b^2/4a} \tag{8.1}$$

積分 $I(a,0)$ を直接求めるより, この二乗を求める方が簡単である。

$$I(a,0)^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay^2}\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

極座標

$$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\qquad 0\le r<\infty\,,\ \ 0\le\theta\le 2\pi$$

を用いると $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ であるから

$$I(a,0)^2=\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\theta\,r\,e^{-ar^2}=2\pi\int_0^{\infty}dr\,r\,e^{-ar^2}=2\pi\frac{1}{2a}\Big[-e^{-ar^2}\Big]_0^{\infty}=\frac{\pi}{a}$$

したがって, $I(a,0)>0$ であるから

$$I(a,b)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}$$

となる。$\sin bx$ は x の奇関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\sin bx\,dx=0$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+ibx}\,dx=e^{-b^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-a\left(x-\frac{ib}{2a}\right)^2\right)dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}$$

これから, $y = -b/2a$ とおけば, 任意の実数 y に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となり, この積分は y によらない。

なお, 複素積分を用いれば, (8.1) はもっと簡単に求まる。