

## 複屈折で偏光が変化する仕組みを理解する 3Dシミュレーションの開発

吉田 賢二<sup>1)</sup>・三野 弘文<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 千葉大学大学院総合国際学位プログラム      <sup>2)</sup> 千葉大学大学院国際学術研究院

### Development of 3D simulation to understand how birefringence changes polarization

YOSHIDA Kenji and MINO Hirofumi

#### 要旨

偏光板には様々な方向に振動している自然光を、振動方向が透過軸に平行な一方向の光に変換する性質がある。偏光板2枚を互いの透過軸が直交するように重ねると光が透過できなくなるが、偏光板の間にセロハンテープを挟むと一部の光が透過するようになり、透過した光は色づく。この透過した光の発色は偏光色と呼ばれ、セロハンテープの枚数や観察する角度等で色を制御できることから、身近にアートや科学作品に用いられている。発色は複屈折を有するセロハンテープによって光の偏光が波長に依存して変化することに起因する。本研究では、偏光色の仕組みの直観的な理解を目的として、光の波長やセロハンテープの枚数などの条件を設定し、セロハンテープを透過した光の偏光状態の変化を立体的な視点で観察することができる3Dシミュレーションを制作した。

#### キーワード

偏光板、偏光色、シミュレーション、スペクトル

## 1. 序論

偏光板には、様々な方向に振動している自然光を振動方向が透過軸に平行な一方向の光に変換する性質があり、偏光板2枚を互いの透過軸が直交するように重ねると光が透過できなくなる（図1）。しかし、この2枚の偏光板の間にセロハンテープを挟むと、一部の光が透過するようになり、透過した光は色づく（図2）。この透過した光の発色を偏光色という<sup>[1]</sup>。これは、セロハンテープが持つ複屈折（透過する光の振動方向によって屈折率が異なる性質）によって見られる現象である。この現象は図3に示すようにしばしばアートに用いられており<sup>[2]</sup>、理科教育の単元では偏光の性質を示す偏光アートとして科学館や教科書などで紹介されている<sup>[3]</sup>。

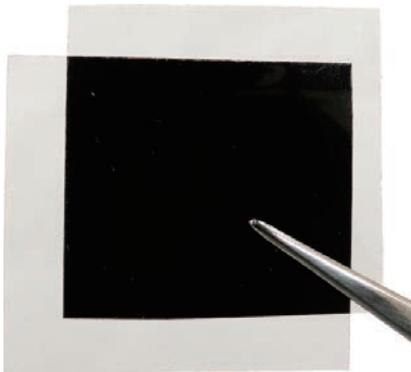


図1 直交ニコル配置

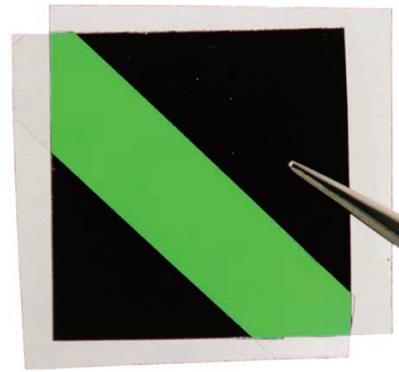


図2 セロハンテープを挟んだ図



図3 アート集団「ミラーボーラー」による偏光現象を活用したオブジェ<sup>[2]</sup>

偏光色の仕組みを説明している文献はいくつか存在し<sup>[1, 4]</sup>、セロハンテープの枚数、直線偏光板の透過軸に対して挟む角度、2枚目の偏光板の回転角度、透過してきた光を観

測する角度によって様々に変化する偏光色を予測するプログラム等も開発されている<sup>[5, 6]</sup>。セロハンテープによる偏光状態の変化については、図4のような立体図<sup>[5]</sup>や、図5のようにセロハンテープの透過前後の光を成分分解した図<sup>[7]</sup>を用いて説明されるが、いずれも直線偏光以外の偏光の初学者にとって理解が難しい。その理由は、図4のような立体図であれば、偏光状態の変化を直観的に捉えることができるが、波長ごと（色ごと）の偏光状態の違いを認識することが困難なためである。そして、図5のような成分分解をした図であれば、光路差を同じとして波長が長い場合と短い場合で位相差に違いが生まれ偏光が異なることを説明でき、波長ごと（色ごと）の偏光状態を認識することができるが、直観的な理解が困難なためである。

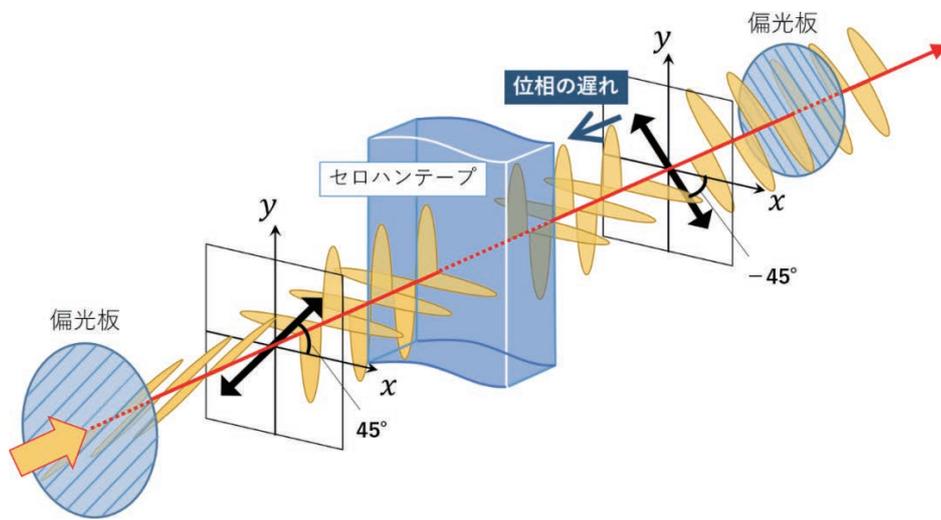


図4 2枚の偏光板の間にセロハンテープを挟んだ場合の偏光状態の変化<sup>[5]</sup>

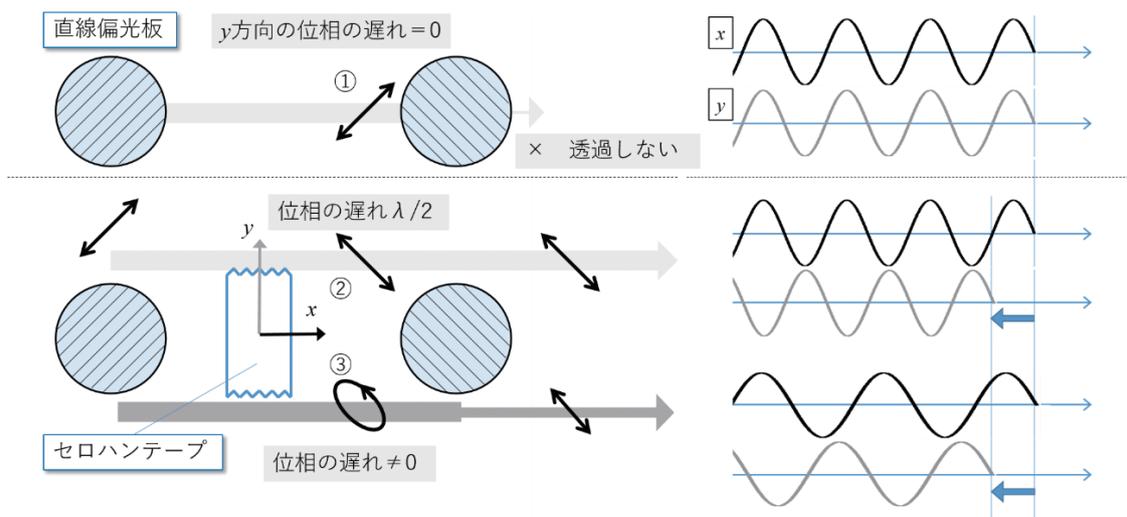


図5 セロハンテープを透過する前後における偏光の変化をx、y方向に進む波の合成で説明<sup>[7]</sup>

そこで本研究では、波長やセロハンテープの枚数を変えながら、セロハンテープによる偏光状態の変化を様々な角度から観察することができる3Dシミュレーションを制作することを目的とした。また、本研究で制作したシミュレーションにおいては、偏光板の重ね方は直交ニコル配置に限定し、セロハンテープを挟む角度は直線偏光板の透過軸に対して45°、光の入射角は0°（偏光板やセロハンテープの面に対して垂直入射）として、観察する角度（図6<sup>[5]</sup>）による色の変化やセロハンテープ、偏光板による光の吸収、反射による強度変化は考慮しないものとした。

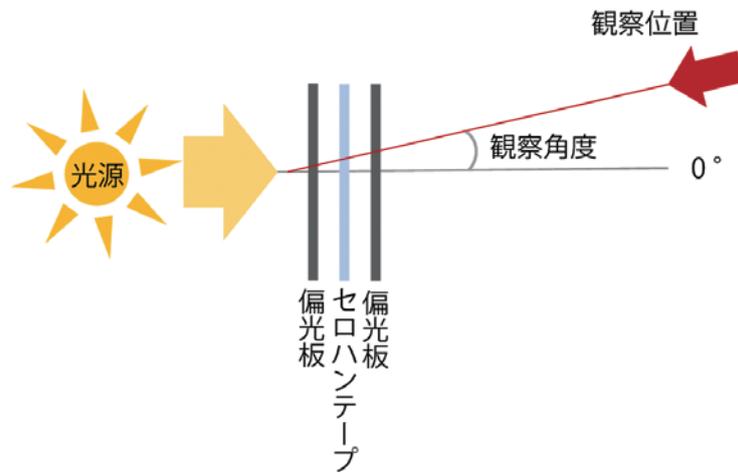


図6 観察する角度<sup>[5]</sup>

## 2. 理論<sup>[5, 6]</sup>

偏光色のスペクトルの算出には、ジョーンズ・マトリクス計算によって、変化した偏光状態を表すジョーンズ・ベクトルを導き、その変化後の偏光の光強度  $I$  を求めることが必要である<sup>[8]</sup>。以下、空間の基準となる軸は、セロハンテープの幅方向を  $x$  軸、長さ方向を  $y$  軸、光の波の進行方向を  $z$  軸として考える。

偏光状態の変化を、偏光板2枚を直交ニコル配置（図7）でセロハンテープを挟んだ際の偏光状態の変化に適用すると次で示すような数式で表すことができる。

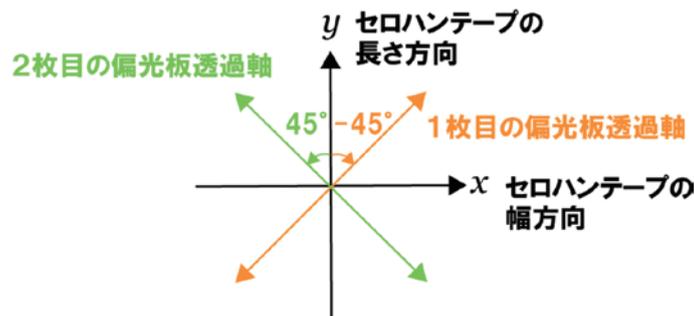


図7 セロハンテープの長さ方向を基準とした偏光板の回転角

I. 1枚目の偏光板を通り過ぎたときの偏光状態

図7に示す様に、1枚目の偏光板を透過した光の偏光状態は、透過軸がy軸から $-45^\circ$ 傾いていることから、回転行列 $R(-45^\circ)$ を用いて、

$$E_1 = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = R(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (1)$$

II. Iの偏光が、セロハンテープを通り過ぎたときの偏光状態

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\delta} \end{pmatrix} \quad \cdots (2)$$

III. IIの偏光が、2枚目の偏光板を通り過ぎたときの偏光状態

図7に示す様に、2枚目の偏光板を透過した光の偏光状態は、透過軸がy軸から $45^\circ$ 傾いていることから、

$$E_3 = \begin{pmatrix} \sin^2 45^\circ & -\sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ -\sin 45^\circ \cos 45^\circ & \cos^2 45^\circ \end{pmatrix} E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} E_2 \quad \cdots (3)$$

よって最終的な出射光の偏光状態は、

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - e^{-i\delta} \\ e^{-i\delta} - 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (4)$$

このとき、光強度 $I$ は電場成分の二乗で複素共役をかけることになり次のようになる。

$$I = \frac{1}{2} (1 - \cos\delta) \quad \cdots (5)$$

ここで、位相差 $\delta$ とは、基準からの時間差 $t$ を周期 $T$ で割って角度にしたものであるため、振動数を $f$ 、波長を $\lambda$ 、光の波の進む速さを $v$ 、光路差を $d$ とすると、次のように変換できる。

$$\delta = \frac{t}{T} 2\pi = ft \cdot 2\pi = \frac{v}{\lambda} t \cdot 2\pi = \frac{d}{\lambda} 2\pi \quad \cdots (6)$$

(5)、(6)式から、先ほど求めた光の強度は次のように表すことができる。

$$I = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{d}{\lambda} 2\pi \right) \quad \cdots (7)$$

セロハンテープ等の偏光素子で生じる位相差 $\delta$ は、波長 $\lambda$ と光路差 $d$ によって決まり、セロハンテープにおいて光路差 $d$ はセロハンテープの厚さと観測する角度によって決まる。そして、セロハンテープの枚数や偏光を観測する角度を確定することによって、光の強度 $I$ と波長 $\lambda$ の関係を知らることができ、観測される光の色を導き出すことができる。

つまり、2枚の偏光板で挟むセロハンテープの枚数・観測する角度を決めると、観測される光の色を計算によって求めることができる。スペクトルとは、光の波長を横軸にし、光強度の分布を表したグラフや写真のことで、先ほど導き出した数式(7)を波長 $\lambda$ ごと

に示し、グラフにするとスペクトルとなる。このスペクトルに光源のスペクトルを掛け合わせると実際に偏光色を測定した際に予測される透過光スペクトル  $I(\lambda)$  が導かれる。ここで、光の強度は振幅の二乗に比例することが知られているが、本シミュレーションにおいては、強度を1に規格化したベクトルを用いているため、それぞれの波長ごとの振幅  $A(\lambda)$  は、

$$A(\lambda) = \sqrt{I(\lambda)} \quad \dots (8)$$

とした。

本研究では、波長が380 nmから750 nmの範囲で、(7)によって求められる透過光スペクトル  $I(\lambda)$  及び(8)によって求められる  $A(\lambda)$  を用いてシミュレーションを制作し、波長ごとの光路差については、偏光色の予測プログラムのもの<sup>[5]</sup>を使用した。

### 3. シミュレーション

本章では、本研究で制作したシミュレーションの制作方法とその画面と搭載した機能について述べる。また、制作したシミュレーションのソースコードのダウンロード方法については付録1に記載する。

#### 3-1 制作方法

本研究では、主にp5.js<sup>[9]</sup>というビジュアル表現に特化したJavaScriptライブラリを用いてシミュレーションを制作した。その他にも、Bootstrap<sup>[10]</sup>という見た目を整えるためのフレームワーク、p5.dom.js<sup>[11]</sup>というp5.jsのDOM要素を使用するためのJavaScriptライブラリ、Chart.js<sup>[12]</sup>というグラフ等を描画するためのJavaScriptライブラリを使用した。詳しいシミュレーションの制作方法については、類似した方法で制作を行うことができるProcessingによる物理シミュレーション制作について書かれた論文<sup>[13]</sup>を参照されたい。

#### 3-2 画面と機能

制作したシミュレーションの画面と機能を図8及び表1に示す。既に言及したが、制作したシミュレーションにおいては、偏光板の重ね方は直交ニコル配置に限定し、セロハンテープを挟む角度は45°、光の入射角は0°とし、観察する角度による色の変化やセロハンテープ、偏光板による光の吸収、反射による強度変化は考慮しないものとした。また、実際は偏光板とセロハンの厚さに対して光の波長はとても小さいが、視認性を高めるために波長を大きく表現している。

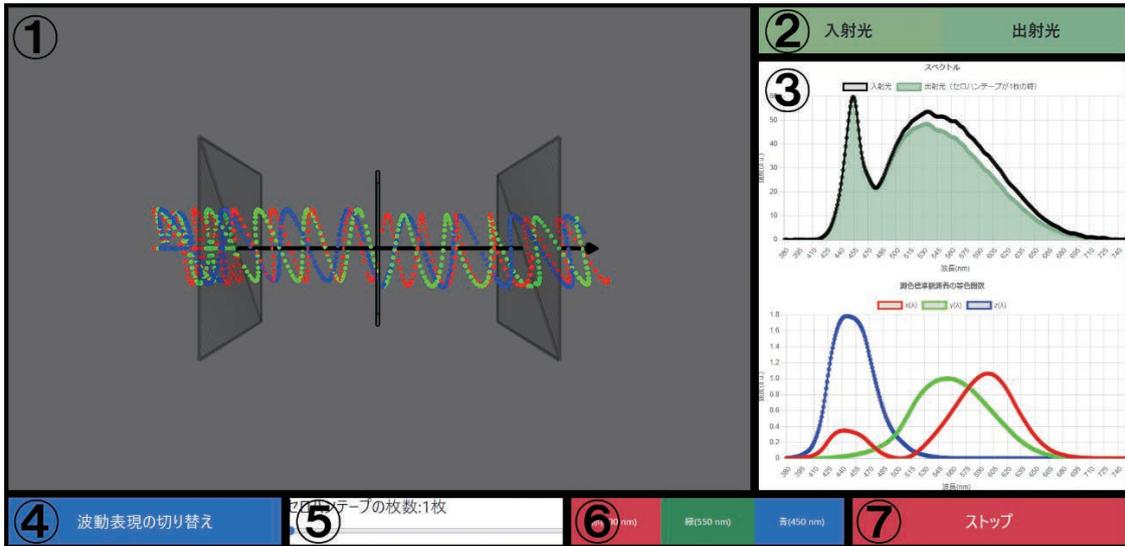


図8 シミュレーションの画面

表1 シミュレーションの機能

番号	機能
①	偏光状態が変化する様子を表示
②	入射光と出射光それぞれの色を表示
③	出射光の予測スペクトルと測色標準観測者の等色関数の表示
④	波動表現の切り替え
⑤	セロハンテープの枚数の切り替え
⑥	表示する波（波長の異なる光）の切り替え
⑦	スタート・ストップボタン

①では入射光がセロハンテープを透過する過程で偏光状態が変化するシミュレーションを表示する。変化の様子はドラッグ操作によりあらゆる角度からの視点で観察でき、 $x$ 軸と $y$ 軸方向から見た場合の光の波の進行の違いを明確にできる。その様子については⑥の説明に掲載し、光の波の進行方向を示す経過時間ごとの波の様子については付録2に掲載する。

②では入射光と挟むセロハンテープの枚数に応じて変化する出射光の色を表示する。出射光のRGB値については、偏光色の予測プログラム<sup>[5]</sup>を用いて算出し、本シミュレーションで表示しているスペクトルについては、偏光色の予測プログラム<sup>[5]</sup>で用いられている白色LEDの実測値を使用した。入射光の色が濁った緑色になっている理由は、本プログ

ラムが絶対強度を考慮せずに白色LEDのスペクトル形状を基にRGB値へ変換し、色を表現する方法を採用しているからである。この方法を用いた場合、白色といってもスペクトル形状によってはRGB値の数値に偏りが生じ、色づくことがある。通常見た目の白色を表現するには白色スペクトルの測定を行い、それを絶対強度も含めて白色の基準とする手続きが必要になる。

③では出射光について②と同様の方法で波長ごとの強度比を算出し出射光の色に応じて塗色が変化するグラフと、標準観測者によるXYZ表色系の等色関数のグラフを表示している。例えば、図9はセロハンテープが2枚の場合のシミュレーションの画面であるが、出射光（2枚の偏光板を透過した光）が入射光に対してどれだけ強度が変化したかを示している。図9の例では、赤と緑の強度は大きく、その一方で青の強度が小さくなっている。この結果と等色関数のグラフを照らし合わせてみると、出射光のスペクトルや出射光の色を予想することができる。

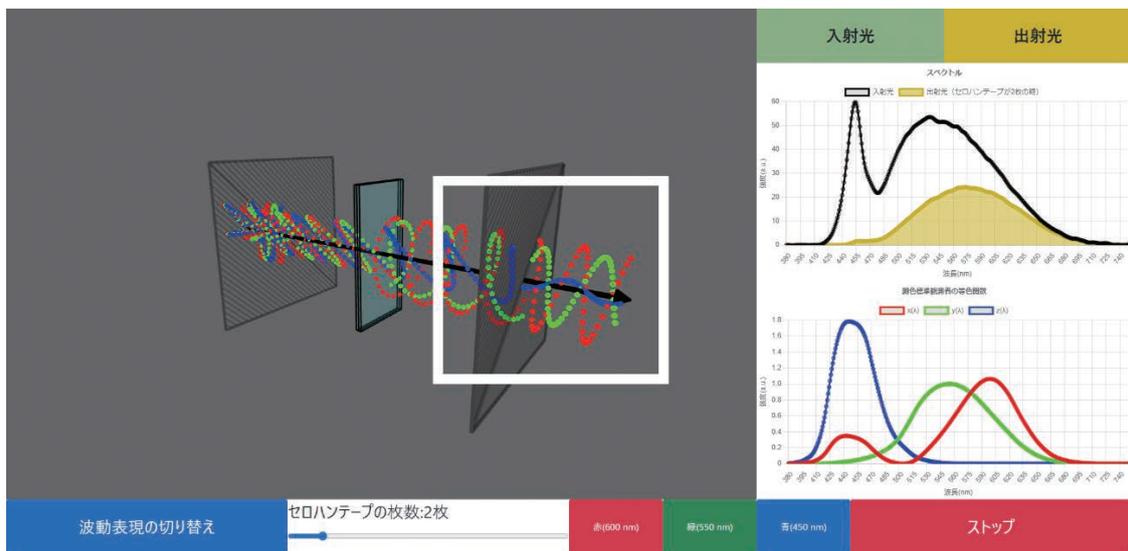


図9 セロハンテープが2枚の場合の出射光のRGBの強度比

④ではボタン操作によって波動の表現方法を切り替える。1つ目の表現方法は光の波の振幅を点として描画したもの（図10）、2つ目の表現方法は光の波の進行方向と振幅を線で結んで描画したものである（図11）。

⑤では挟むセロハンテープの枚数をスライダーで1枚～10枚の任意の枚数に変更する。⑤で選択したセロハンテープの枚数に応じて①、②、③の描画内容が変化する。例として、図12にセロハンテープが1枚の場合、図13にセロハンテープが2枚の場合のシミュレーション画面を示す。

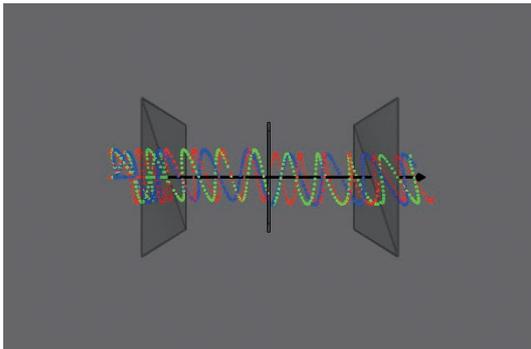


図10 波動の表現1 (光の波の振幅を点として描画)

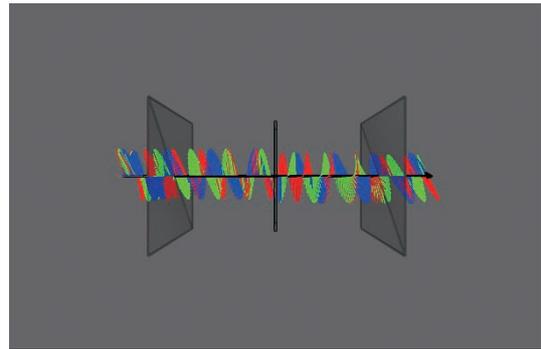


図11 波動の表現2 (光の波の進行方向と振幅を線で結んで描画)

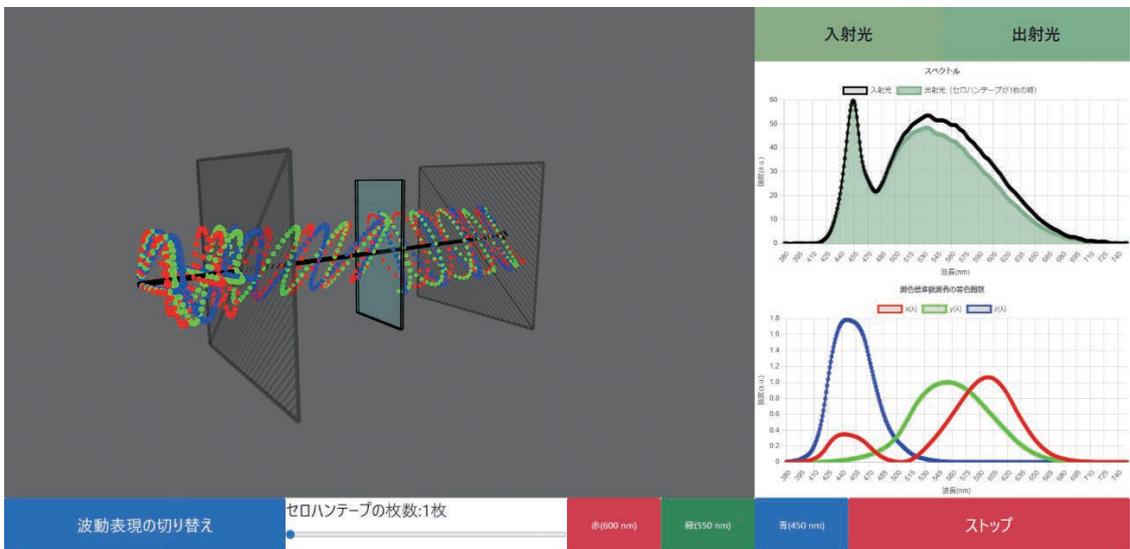


図12 セロハンテープが1枚の場合

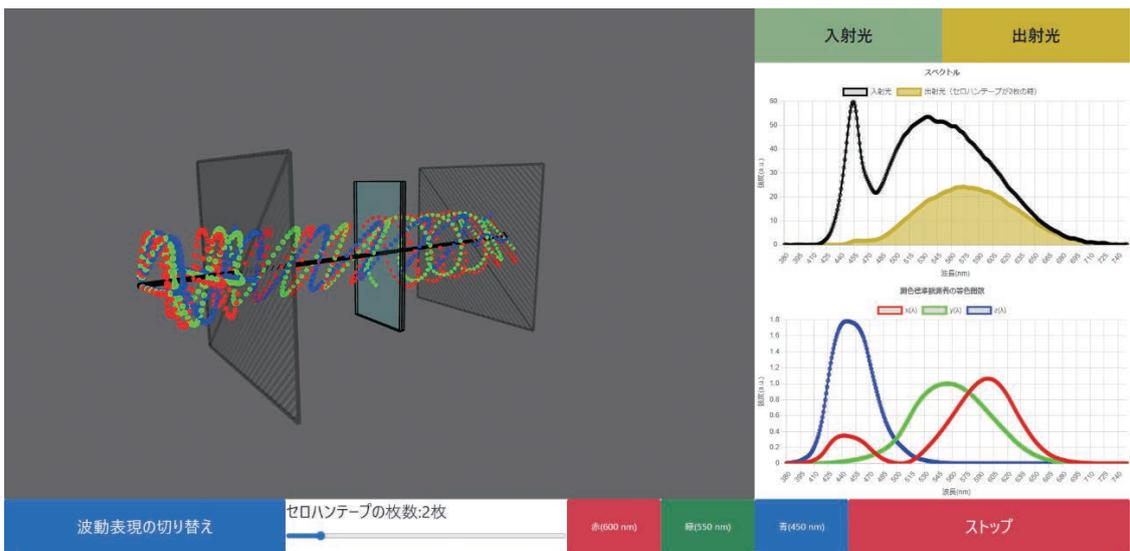


図13 セロハンテープが2枚の場合

⑥では表示する光の波を赤、緑、青でそれぞれ切り替える。それぞれの波長は赤が600 nm、緑が550 nm、青が450 nmとしている。表示する光の波を赤のみにして、図14にx軸の正方向から観察した場合の画面、図15にy軸の正方向から観察した場合の画面を示す。図14の中心にあるセロハンテープ付近に注目すると、セロハンテープを境に位相の遅れは確認できない。その一方で、図15の中心にあるセロハンテープ付近に注目すると、セロハンテープを境に位相の遅れが確認できる。これはセロハンテープの幅方向（x軸方向）よりセロハンテープの長さ方向（y軸方向）の方が屈折率が高いことを反映した結果である。実際の現象としては、y軸方向だけではなく、x軸方向についても光の波の進行に遅れは生じるが、本シミュレーションではy軸方向の遅れとx軸方向の遅れの相対値をy軸方向の遅れとして実装した。このことは実際にセロハンテープを透過した後の偏光の変化について述べる点においては影響がない。

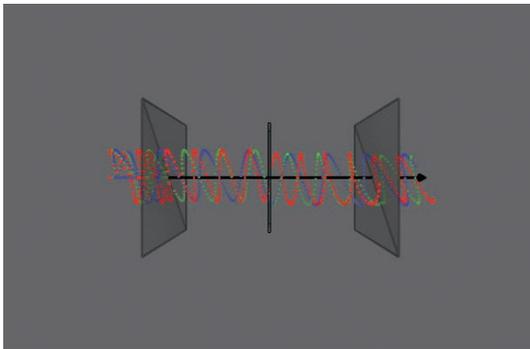


図14 x軸の正方向から観察した場合

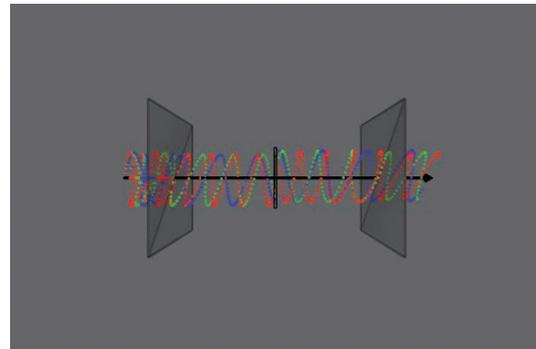


図15 y軸の正方向から観察した場合

⑦をクリックすることで、①の動き（シミュレーション）の一時停止・再生ができる。

本シミュレーションは、初等教育から高等教育の教育現場や科学館における偏光の初学者を対象とした利用を想定している。具体的には、セロハンテープと偏光板の実物を用意して現象を見せた後の解説などである。その他の使用上の工夫などについては使用者に委ねたい。

#### 4. まとめ

本研究では、p5.jsというビジュアル表現に特化したJavaScriptライブラリを用いて、セロハンテープによって偏光状態が変化する様子をあらゆる角度からの視点で観察することができる3Dシミュレーションを制作した。本シミュレーションは偏光を学習する場合の利用を想定しており、特にこれまで困難であった波長ごとの偏光の変化の違いや、成分ごとの強度の違いなどの理解の手助けになることが期待される。3Dシミュレーションの特徴である、ドラッグ操作によるあらゆる角度からの観察は、x軸とy軸の位相の遅れ方が異

なるという偏光の性質を理解する上で効果的であろう。また、波長ごとの光の波の表示やセロハンテープの枚数に応じてシミュレーションの表示が変化する機能により、日本の理科教育が持つ暗記偏重という課題<sup>[14]</sup>に対して、複数の要因を関連付けて考えることができる思考の醸成に繋がることが期待される。本文中ではセロハンテープが1枚と2枚の場合のシミュレーションの画面のみ掲載した。その他の枚数の結果や異なる視点で観察を行った際のシミュレーションの画面は付録3に掲載する。

本シミュレーションの課題として、シミュレーション内で扱える値の自由度の低さがある。その原因の一つとして、シミュレーション内で採用している数値（スペクトル等の値）が外部ソフト（Excel）で計算されていることが挙げられる。そのため今後の改良案として、計算を内部のプログラムに組み込むことで自由度を向上させたい。また、その他のパラメータ（偏光板の重ね方、セロハンテープを挟む角度、入射角、観察する角度等）についても、プログラムの簡略化を行い実装を試みたい。

## 謝辞

本研究はJSPS科研費 JP21K02945の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] 大津元一（監修）・田所利康（著）、2014、『イラストレイテッド 光の科学』、朝倉書店。
- [2] ファッションヘッドライン、「アークヒルズにミラーボールのクリスマスツリー出現、光の反射で広がる星屑や宇宙!」、<https://www.fashion-headline.com/article/5116>、(accessed 2022-11-04)。
- [3] 学研キッズネット、「工作 偏光板（へんこうばん）ステンドグラス」、[https://kids.gakken.co.jp/jiyuu/category/art/polarizer\\_stained\\_glass/](https://kids.gakken.co.jp/jiyuu/category/art/polarizer_stained_glass/)、(accessed 2022-11-04)。
- [4] 大津元一（監修）・田所利康（著）、2016、『イラストレイテッド 光の実験』、朝倉書店。
- [5] 坂本舞衣・三野弘文、2021、「セロハンテープの枚数で変化する偏光色の予測プログラムの開発」、『千葉大学国際教養学研究』 5、p.123-151、千葉大学国際教養学部。
- [6] 三野弘文・坂本舞衣、2022、「セロハンテープの枚数と角度で変化する偏光色スペクトルのシミュレーション」、『千葉大学国際教養学研究』 6、p.79-95、千葉大学国際教養学部。
- [7] 三野弘文・三好真央、2018、「偏光板とセロハンテープを用いた干渉色の仕組みと応用」、『千葉大学国際教養学研究』 2、p.69-79、千葉大学国際教養学部。
- [8] 大津元一、1994、『現代光科学〈1〉—光の物理的基礎』、p.10-19、朝倉書店。
- [9] Processing Foundation、「p5.js」、<https://p5js.org/>、(accessed 2022-11-04)。
- [10] Bootstrap team、「Bootstrap」、<https://getbootstrap.jp/>、(accessed 2022-11-04)。
- [11] GitHub Inc、「Processing/p5.js」、<https://github.com/processing/p5.js/blob/main/src/dom/dom.js>、(accessed 2022-11-04)。
- [12] 不明、「Chart.js」、<https://www.chartjs.org/>、(accessed 2022-11-04)。
- [13] 吉田賢二・三野弘文、2022、「Processingを用いた物理シミュレーション教材の制作—斜方投射を例にして—」、『千葉大学国際教養学研究』 6、p.185-207、千葉大学国際教養学部。

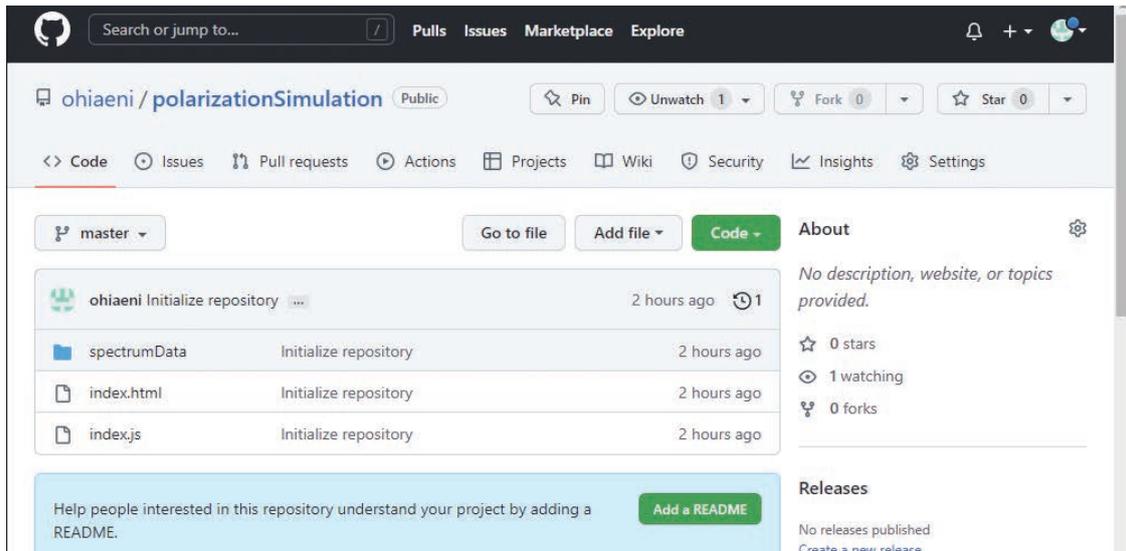
## 複屈折で偏光が変化する仕組みを理解する3Dシミュレーションの開発

- [14] 藤村宣之、2012、『数学的・科学的リテラシーの心理学—子どもの学力はどう高まるか』、p.37-54、株式会社有斐閣。

### 付録1（制作したシミュレーションのソースコードのダウンロード方法）

①. 次のリンクにアクセスする。

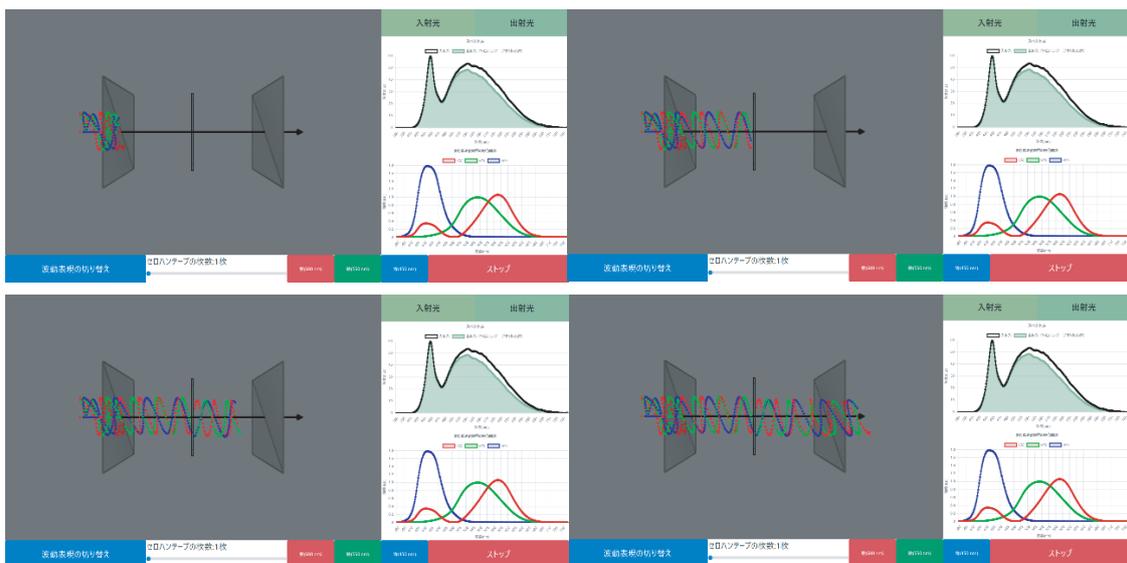
URL : <https://github.com/ohiaeni/polarizationSimulation>



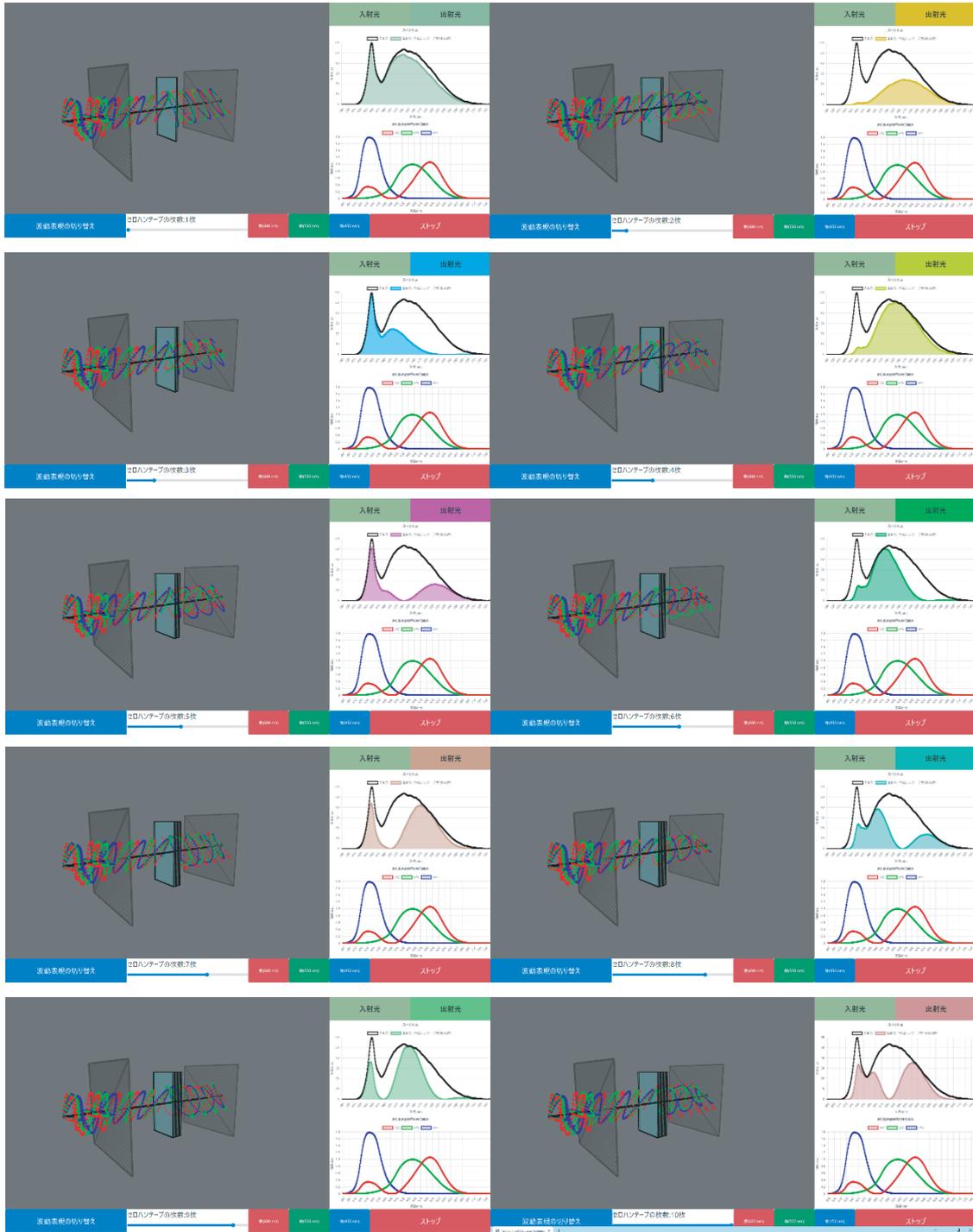
②. Codeというボタンをクリックして、Download ZIPを選択し、ZIPファイルをダウンロードする。

③. ZIPファイルを展開する。

### 付録2（経過時間ごとの光の波の様子）



付録3 (その他の枚数の場合やその他の角度から観察を行った際のシミュレーションの画面)  
 波の入射方向寄りから観察した、セロハンテープ1~10枚の場合のシミュレーションの画面



# 複屈折で偏光が変化する仕組みを理解する3Dシミュレーションの開発

波の出射方向から観察した、セロハンテープ1~10枚の場合のシミュレーションの画面

