

Summary

Intertemporal Cointegration Analysis and Predictability of Stock Indices

Takashi OGA

The aim of this study is to analyse leading and lagging characteristics in multivariate time series of asset prices using the Intertemporal Cointegration Model constructed by Oga (2021) and to construct an investment strategy utilizing the leading index. Using the multivariate time series of the Tokyo Stock Price Index (TOPIX) and the Tokyo Stock Index by industry (TOPIX33), we clarified the leading and lagging characteristics between the paired two series. As a result, a large number of set of series following intertemporal cointegrations is found; this indicates the existence of pairs of a stock price index series that has the property of co-varying with lead-lags in the long-term trend of stock index fluctuations. We constructed an investment strategy using a set of time series with intertemporal cointegration relationship and conducted a two-year simulation. Specifically, when the backward moving average of the optimal forecast given by the model changes to upward trend, we consider a simple investment strategy of “buying” the lagging index, and “selling” when it changes to downward trend. As a result, it was shown that a stable profit can be obtained by using our investment strategy that uses this leading and lagging property. Although It is difficult to obtain a positive excess return from prior information due to market efficiency, the predictability of asset prices

Summary

was demonstrated by using the intertemporal cointegration model of Oga (2021).

論 説

株価指数の時差共和分分析と予測可能性*

大 鋸 崇[†]

概要

本研究の目的は、Oga (2021) により構築されたIntertemporal Cointegration Model (時差共和分モデル) を用いて、資産価格の多変量時系列における、先行性・遅行性を明らかにすると共に、先行指数を用いた投資戦略を構築することである。具体的には東証株価指数及び東証業種別株価指数 (33業種) の対数株価時系列の多変量時系列を用い、組となる二系列間の先行性・遅行性を明らかにした。結果として、多数の時差共和分に従う系列の組が発見され、これは、株価指数の変動における長期的トレンドにおいて、時差を持ちながら共変動をする性質のある系列の存在を示すものである。さらに、本研究では、時差共和分関係にある時系列の組を用いた投資戦略を構築し2年間にわたる運用シミュレーションを行った。具体的には、時差共和分モデルによる最適予測の後方移動平均が上昇トレンドに変化した場合に遅行指数を「買い」、下落トレンドに変化した場合に「売り」という簡便な投資戦略を考え運用を行った。結果として、この先行性・遅行性を用いた投資戦略により、安定的

*本研究は公益財団法人石井記念証券研究振興財団令和3年度研究助成金により支援を受けている。

[†]千葉大学社会科学研究院, ohga@faculty.chinba-u.jp

な収益を得られることが示された。以上のことから、通常では市場の効率性により事前情報から正の超過収益を獲得することは難しいとされるが、Oga (2021) の時差共和分モデルを用いることにより、資産価格の予測可能性が示された。

JEL classification: C22, C32, E32, G14, G17.

Keywords: 単位根, 共和分, リードラグ, 市場の効率性, 移動平均.

1 はじめに

市場の効率性を仮定し、株価は酔歩過程に従うと仮定する古典的なファイナンスの世界では、株価やその収益率の予測は不可能もしくは無意味とされてきた。そのような中、Zackhauser and Niederhoffer (1983), Herbst, McCormack and West (1987) では、高頻度データを用いて先物および現物間に統計的に有意な交差自己相関の存在が示されている。また、Lo and MacKinlay (1990), Kanas and Kouretas (2004)¹⁾の高頻度データを用いた分析では規模別のポートフォリオ間においても非ゼロの交差自己相関の存在が示されている。交差自己相関を用いた高頻度データによる研究は、多変量の自己相関行列を推定し検定しているに過ぎず、Kanas and Kouretas (2004) のように変数間の共和分関係を意識し時系列分析を行っているものは少数である。資産価格の時系列は通常単体では単位根系列であり、自身の収益率の過去の値に予測力はないとされる一方で、上記の研究から、資産価格は他の資産価格の過去の情報によって予測が改善されることが明らかであり、詳細に調査をする必要があると考えられる。そこで、本研究ではOga (2021) のIntertempo-

1) この研究では、誤差修正モデル (ECM) をAutoregressive Distributed Lag (ADL) モデルに落とし込み標本外予測を行っており、誤差修正項すなわち変数間の共和分関係を明示的に導入することで、誤差修正項を考慮しない場合よりも予測が改善されることが示されている。

ral Cointegration Model (時差共和分モデル) を用いて株価指数間のリードラグ関係を分析し、予測可能性について分析を行った。

Oga (2021) の時差共和分モデルは、Engle and Granger (1987) モデル (EGモデル) を拡張したモデルである。EGモデルにおいては、一組の単位根系列間の回帰を考え、その残差系列が定常性を満たせば、説明変数と被説明変数の間に共和分関係が存在し、それらの変数間に長期的な均衡関係にあるとされる。これに対し、時差共和分モデルにおいては、説明変数と被説明変数間に時差 (リードラグ) が存在することを許容する。すなわち、説明変数を先行指数、被説明変数を遅行指数として回帰を行い、その残差系列が定常であり、且つ、モデル選択により異なる時差を持つモデルの中から正の時差があるモデルが選択された場合、これら二系列間に時差共和分関係があるとされる。また、Oga (2021) ではモンテカルロシミュレーションにより、自由度修正済み決定係数を用いたモデル選択により時差、すなわち、遅行指数に対し先行指数が何期先行しているかを正確に同定できることを示した。

そこで本研究では、第一段階として、2018年および2019年の二ケ年について、東証株価指数 (TOPIX) および東証株価指数33業種の計34系列の終値日次データを分析対象とし、これらの系列の組の中で時差共和分関係にある組が存在するのか、存在するならば時差は何期となるかを明らかにした。34系列から2系列を取り出す全ての組み合わせ1122組の内、2018年については20組、2019年については70組について時差共和分関係があることが示された。また、時差のないEGモデルに従うとされた組は、2018年には463組、2019年には568組あることが示された。この結果から、多くの株価指数が時差の有無に関わらず、長期的均衡を保ちながら、時には時差を持って変動していることが示された。また、2018年はアベノミクス始まって以来初めての長期的な株価下落期である一方、2019年はその回復期となる株価上昇期となっている。これらを鑑みると、

外性的なショックによる暴落時を例外とし、通常の株値の下落期には指数同士の連動性が下がり、むしろ、株値の上昇期にこそ指数同士の連動が高まっていると結論づけることができる。また、株値の上昇期と下落期では、時差共和分に従う組が変化し、株値指数における時差共和分関係に頑健性がないことが示された。

本研究では以上の結果を踏まえ、第二段階として運用シミュレーションを行うことにより指数の予測可能性について分析を行った。組となる二系列が時差共和分関係にあるということは、先行指数が上昇トレンドに入った場合、時差を持って遅行指数が上昇トレンドに入る可能性が高いということである。そこで、先行指数の情報を含む時差共和分モデルの最適予測を計算し、この系列の後方移動平均を指標として上昇トレンドおよび下落トレンドを識別することとした。具体的には、この移動平均の変動が負から正に変わった場合に上昇トレンドに変化したと考え遅行指数を買い、その後、正から負に変わった場合にその上昇トレンドが終了したと考え手仕舞いをするという運用ルールを提案し、検証を行った。移動平均の日数については、同定されたリードラグの次数の二倍に1を加えたものとした。このようにすることにより、投資対象となる遅行指数の中央移動平均の代理変数となる。

この運用シミュレーションを、実証研究により選択された時差共和分関係にある時系列の組に適用し、投資収益の分布を調べた。この運用シミュレーションを、in-sample（標本内予測）とout-of-sample（標本外予測）の2種類に分けて進めた。これは、まず、in-sample分析において、パラメーターや時差がデータと適合している状態で運用シミュレーションが実行された際に、どの程度運用ルールが機能するかを確認する必要があるためである。その後、実際に運用する場合と同じように、モデル推定を行なった時点以降のデータを用いて運用を行うout-of-sampleによる分析を行なって再度パフォーマンス評価を行なった。比較対象として、

売買を行う運行指数の後方移動平均と、投資対象となった運行指数を年初から年末まで買い持ちした場合の年次収益率として採用した。

この運用シミュレーションから得られた結果は以下の通りである。まずin-sampleの結果より、価格下落期である2018年において、収益は比較対象二種に比較し有意に高いものとなり、平均的には正の収益を得るという結果を得たが、有意に0を超えるほどの大きな値とはならなかった。一方、価格上昇期の2019年においては、買い持ちの収益には及ばないものの、後方移動平均を用いたものとは有意な乖離があり、0からも有意に乖離する良好なパフォーマンスを示した。また、投資された指数の内、9割近くの指数が正の収益を上げ、その最大値は約30%であった。out-of-sampleの結果においては、平均的には有意な正の収益を上げることが難しいことが示された。これは、上述したように、時差共和分関係が時間とともに変化し、2018年に選択された指数が2019年には全く選択されないという、時差共和分関係の継続性が全くなかったためであると考えられる。そのような中、選択された時差が小さい指数に関してのみ安定的な正の収益を上げる可能性が示された。

本研究を通じて、証券市場にも時差共和分関係が見いだせることが示され、また、時差共和分モデルを用いた運用シミュレーションからは本研究で提案した時差共和分を用いた運用ルールにより超過収益が得られることが示された。株価同士の時間を通じた連動性は高頻度データの中でしか見出されてこなかったが、本研究における結果は、日次データ分析においても時間を通じた株価同士の連動性を見いだすものであり、市場の効率性により株価は予測できないという常識を覆すものである。

本論文の構成は、以下の通りである。第二節ではOga (2021) の概要について解説する。第三節では、株価指数間の時差共和分関係について実証分析を行い、その結果を記述する。第四節では、運用シミュレーションの投資戦略についての解説とその運用結果について記述する。第

五節では、まとめと今後の課題について述べる。

2 時差共和分モデル

本節ではOga (2021) の時差共和分モデルの統計的性質および推定・同定についてOga (2021) から抜粋して解説を行う。本節の内容は、Oga (2021) で既出のものであり詳細は当該論文を参照されたい。

共和分は、Engle and Granger (1987) によって提唱された概念であり、長期均衡下における単位根過程に従う一組の時系列についての分析の基本的な枠組を与える。最も基本的なEGモデルは、 $\{x_t\}$ および $\{y_t\}$ をI(1)過程に従う一対の時系列だとした時に、以下のような単回帰モデル、

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t, \quad (1)$$

で表現される。ここで、誤差項 ϵ_t が定常である場合、これらの時系列は共和分であると言われる。

EGモデルによる共和分分析は非常に単純である。(1)式を最小二乗法により推定し、得られた残差について単位根検定を行う。もし、この検定により残差系列が単位根を持つという帰無仮説を棄却し、定常であることが示されたならば、これらの $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ は共和分関係にあると言われる。これが、EGモデルによる共和分分析の概要である。

2.1 時差共和分モデルとその統計的性質

Oga (2021) の時差共和分モデルは、説明変数である $\{x_t\}$ と被説明変数である $\{y_t\}$ の間に時差（リードラグ）が存在することを考える。この状況を表現するために、(1)式の説明変数 x_t に代わって s 期過去の変数 x_{t-s} を導入する。(1)式はこれにより書き換えられ、

$$y_t = \alpha_s + \beta_s x_{t-s} + \epsilon_{s,t}, \quad (2)$$

と表される。ただし、 s は正の整数であり、 $\{x_t\}$ が $\{y_t\}$ に対して何期先行しているかを表している。

ここで、 $\{x_t\}$ が単純なランダムウォーク過程に従うとすると(2)式は、

$$x_t = x_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\eta^2), \quad (3)$$

$$y_t = \alpha_s + \beta_s x_{t-s} + \epsilon_{s,t}, \quad \epsilon_{s,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_{\epsilon_s}^2), \quad (4)$$

の様に書き換えられる。ここで、それぞれの誤差項 η_t と $\epsilon_{s,t}$ は互いに統計的独立であることを仮定する。(3)式および(4)式で定式化された時差共和分モデルにおいて、未知パラメータは、 α_s 、 β_s および $\sigma_{\epsilon_s}^2$ であり、推定が必要とされる。加えて、真の時差 s も未知であるので、何らかの方法で同定する必要がある。

真の s が既知の場合のOLS推定量 $\hat{\beta}_s$ は、

$$\hat{\beta}_s = \frac{\sum_{t=1}^n (x_{t-s} - \bar{x}_s)(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (x_{t-s} - \bar{x}_s)^2} \quad (5)$$

である。ここで、 \bar{x}_s と \bar{y} はそれぞれの変数の標本平均、

$$\bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{t-s}, \quad (6)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t, \quad (7)$$

を表している。(4)式を(5)式に代入し整理すると、

$$\hat{\beta}_s = \beta_s + \frac{\sum_{t=1}^n (x_{t-s} - \bar{x}_s)(\epsilon_{s,t} - \bar{\epsilon}_s)}{\sum_{t=1}^n (x_{t-s} - \bar{x}_s)^2}, \quad (8)$$

となる。ただし、

$$\bar{\epsilon}_s = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_{s,t}, \quad (9)$$

である。(8)式の右辺第一項における β_s は真のパラメータであり、第二項は小標本バイアスである。このバイアス項は、リードラグを考慮しないEGモデルと類似しているが、 x_t と $\epsilon_{s,t}$ の間に時差 s があるという点で異なっている。しかし、 x_{t-s} と $\epsilon_{s,t}$ は統計的独立であり、 $x_{-s} = 0$ と仮定することが不自然でないならば、リードラグを考慮していない元のEGモデル

ルと統計的性質は同等となる。よって、時差共和分モデルにおいても最小二乗推定量 $\hat{\beta}_s$ は真のパラメーター β_s に対して超一貫性 (*Super Consistency*) を持つ。

次に、真の時差 s が未知であり、候補となる $r=0, 1, 2, \dots, R$ の中から x_{t-r} を y_t に回帰することを通じて s を同定することを考える。回帰式は、

$$y_t = \alpha_r + \beta_r x_{t-r} + \epsilon_{r,t}, \quad (10)$$

となり、 β_r のOLS推定量は、

$$\hat{\beta}_r = \frac{\sum_{t=1}^n (x_{t-r} - \bar{x}_r) (y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (x_{t-r} - \bar{x}_r)^2}, \quad (11)$$

となる。先程と同様、(4)式を(11)式に代入すると、

$$\hat{\beta}_r = \beta_s \frac{\sum_{t=1}^n (x_{t-r} - \bar{x}_r) (x_{t-s} - \bar{x}_s)}{\sum_{t=1}^n (x_{t-r} - \bar{x}_r)^2} + \frac{\sum_{t=1}^n (x_{t-r} - \bar{x}_r) (\epsilon_{s,t} - \bar{\epsilon}_r)}{\sum_{t=1}^n (x_{t-r} - \bar{x}_r)^2}, \quad (12)$$

となる。ただし、

$$\bar{x}_r = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{t-r},$$

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_{r,t},$$

である。(12)式の右辺第一項は、真の β_s と x_{t-r} を x_{t-s} に回帰した際の回帰係数の積になっている。右辺第二項は、(8)式同様、小標本バイアスであり、超一貫性を持つ一方で、右辺第一項に関しては、 $r \neq s$ の場合、重大なバイアス要因²⁾となる。

以上のように、真の時差 s が既知であるならば時差共和分モデルはEGモデルと同様、好ましい統計的性質を持つ。一方、真の s とは異なる r を時差として回帰を行った場合、重大なバイアスを持つが³⁾、このバイアス

2) $\hat{\beta}_r$ の経験分布については、Oga (2021), p. 38, Fig. 2を参照のこと。

が正しい時差の選択において助けとなることがOga (2021) のモンテカルロシミュレーションによって示されている。

2.2 EGモデルと時差共和分モデルの関係

以下では、EGモデルと時差共和分モデルの関係について論じる。ここで、真のモデルをリードラグを考慮しない $s=0$ となるとすると、モデルは、

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \epsilon_{0,t}, \quad (13)$$

のように表される。無論これはEGモデルに他ならない。このように、真のモデルがEGモデルであったとしても、被説明変数 y_t と時差を持つ説明変数 x_{t-1} , x_{t-2} , x_{t-3} , …間の時差共和分関係は保たれる。

例えば、(3)式の $x_t = x_{t-1} + \eta_t$ を(13)式に代入すると、

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_{t-1} + \beta_0 \eta_t + \epsilon_{0,t}, \quad (14)$$

となる。ここで、 η_t と $\epsilon_{0,t}$ は統計的独立で、かつ、定常系列であるから、その線形結合 $\beta_0 \eta_t + \epsilon_{0,t}$ も定常系列となる。ここで、この線型結合を $W_{1,t} = \beta_0 \eta_t + \epsilon_{0,t}$ のように定義し、(14)式に代入すると、

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_{t-1} + W_{1,t}, \quad (15)$$

となり、これは時差 $s=1$ の時差共和分モデルとなる。ここで、 $W_{1,t}$ は誤差項であると解釈すると、その分布は同一で独立な正規分布に従い、期待値と分散は、それぞれ、0および $\beta_0^2 \sigma_\eta^2 + \sigma_{\epsilon_0}^2$ となる。(13)式における誤差項 $\epsilon_{0,t}$ の分散は $\sigma_{\epsilon_0}^2$ であり、これは、(15)式の誤差項 $W_{1,t}$ の分散よりも明らかに小さい。もし、 β_0 の値が比較的大きいならば、この分散の差 $\beta_0^2 \sigma_\eta^2$ はモデル選択基準に反映され、(13)式を正しいモデルとして選択すると考えられる。この(15)式の場合、誤差項 $W_{1,t}$ の自己相関は0となり、共和分性を検定するための誤差項に対する単位根検定は自己相関によって歪められることなく、問題なく機能すると考えられる。

次に、より一般的に、 $x_t = x_{t-l} + \eta_{t-l+1} + \dots + \eta_{t-1} + \eta_t$ となる場合を考

える。(13)式に代入すると、

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_{t-l} + \beta_0 \eta_{t-l+1} + \cdots + \beta_0 \eta_{t-l} + \beta_0 \eta_t + \epsilon_{0,t}, \quad (16)$$

$$= \alpha_0 + \beta_0 x_{t-l} + W_{l,t}, \quad (17)$$

が得られる。ここで、誤差項は、 $W_{l,t} = \beta_0 \eta_{t-l+1} + \cdots + \beta_0 \eta_{t-l} + \beta_0 \eta_t + \epsilon_{0,t}$ となり、平均0、分散 $l\beta_0^2\sigma_\eta^2 + \sigma_{\epsilon_0}^2$ の正規分布に従う。先程と同様、 $W_{l,t}$ は定常系列の線形結合であることから定常性を満たす。このことから、通常のEGモデルは正の時差 l のついて、 x_{t-l} と時差共和分関係にあるとすることができる。

ここで、 l は真のモデル（ここではリードラグを考慮しない通常のEGモデル）からの乖離を表している。 l が大きくなるにつれ、誤差項 $W_{l,t}$ の分散は比例的に増大する。この性質が、係数パラメータのバイアスと相まり、適切な時差の同定の助けとなる。

次に誤差項間、 $W_{l,t}$ と $W_{l,t+i}$ の自己相関について考える。上述した $l=1$ の場合においては、自己相関が0、すなわち、自己共分散 $cov(W_{l,t}, W_{l,t-i})$ が $i > 0$ について全て0となることは既に述べた。しかしながら、 $l > 1$ の場合について自己共分散は、

$$cov(W_{l,t}, W_{l,t-i}) = \begin{cases} 0, & \text{for } l \leq 1 \text{ and all } i, \\ (l-i)\beta_0^2\sigma_\eta^2, & \text{for } l > 1 \text{ and } 0 < i < l, \\ 0, & \text{for } l > 1 \text{ and } l \leq i. \end{cases} \quad (18)$$

となり、(18)式のように非ゼロとなる部分が存在し、 $i=l$ となるところで切断されている。

次に、真のモデルが $s=1$ となるような時差共和分モデルについて考える、

$$y_t = \alpha_1 + \beta_1 x_{t-1} + \epsilon_{1,t}, \quad (19)$$

となる。ここで $l=-1$ とすることによって説明変数と被説明変数の時差をなくすことができ、(13)式と似た形式を作ることができる。これより、

$$y_t = \alpha_1 + \beta_1 x_t - \beta_1 \eta_t + \epsilon_{1,t}, \quad (20)$$

となる。ここで、 $W_{-1,t} = -\beta_1 \eta_t + \epsilon_{1,t}$ とすると、EGモデルを真のモデルとする場合と同様な理由で $W_{-1,t}$ も定常性を持つ。これより、もし、 y_t と x_{t-1} が時差共和分関係にあるならば、同時に、 y_t と x_t も共和分関係にあるということができる。

真のラグが $s (> 0)$ となる一般的な場合についても、誤差項 $W_{l,t}$ は $l = -s, -s+1, \dots, 0, 1, 2, \dots$ について一貫して定常性を保つ。また、平均は0、分散は $l\beta_0^2\sigma_\eta^2 + \sigma_{\epsilon_0}^2$ となることから、もし、 $\beta_0^2\sigma_\eta^2$ が比較的大きな値を取ることができれば、逐次的な回帰を用いて真の時差 s をモデル選択基準を用いて同定することは難しいものではない。

ここで自己共分散は、

$$\text{cov}(W_{l,t}, W_{l,t-i}) = \begin{cases} 0, & \text{for } |l| \leq 1 \text{ and all } i, \\ (|l|-i)\beta_0^2\sigma_\eta^2, & \text{for } |l| > 1 \text{ and } 0 < i < |l|, \\ 0, & \text{for } |l| > 1 \text{ and } |l| \leq i. \end{cases} \quad (21)$$

となり、真のモデルがEGモデルの場合と同様、コレログラムは切断されている。この $s > 0$ の場合には、 $|l| > 1$ において自己共分散は切断されていることが(21)式に示されている。

自己相関が存在する場合の単位根検定は通常Augmented Dickey-Fuller (ADF) 検定やPhillips-Perron (PP) 検定が用いられるが、上述したような自己相関関数が切断されているような場合においては検定力が歪められている可能性がある。そのためOga (2021), Sec. 3.3, p. 45では、モンテカルロシミュレーションを行い検出力を確認している。この結果から、標本数 n が少ない場合、 σ_η に比較し σ_ϵ が小さい場合、そして、真の時差からの乖離 l が大きい場合に、誤差項系列が単位根であるという帰無仮説を正しく棄却しにくくなることが示された。

ここで、(14)式 (EGモデル) と(19)式 (時差共和分モデル) の定式化を比較すると、時差共和分モデルはEGモデルに $\beta_0 \eta_t = 0$ という制約を掛けたモデルとなっている。この両方のモデルをネストするようなモデルは、

$$y_t = \alpha + \beta x_{t-1} - \gamma \eta_t + \epsilon_t, \quad (22)$$

で与えられる。ここで、 $\gamma = \beta$ であるならば、(22)式はEGモデルとなり、 $\gamma = 0$ であるならば時差共和分モデルとなる。このことからわかることは、適切な時差 s を同定する問題は、ノンネスト（非入れ子型）のモデル選択が必要だということである。Oga（2021）では、決定係数、自由度修正済み決定係数、 AIC 、 SIC の4基準を取り上げ、モンテカルロシミュレーションの結果より自由度修正済み決定係数を用いるのが最善であるとされている。

2.3 時差の同定

以下では、実際に候補となる $r=0, 1, 2, \dots, R$ の中から適切な \hat{s} を同定する方法を概観する。まず、分析に用いるデータの標本サイズを N とする。これより、データセットは、

$$\mathbf{x}_1^N = (x_1, x_2, \dots, x_N)', \quad (23)$$

$$\mathbf{y}_1^N = (y_1, y_2, \dots, y_N)', \quad (24)$$

となる。このデータから、異なる候補 r に基づく $R + 1$ 個の回帰結果を元に真の時差 s の推定値 \hat{s} を選択する。

候補となるラグの次数 r を考慮し、(10)式の回帰式を行列形式に書き換えると、

$$\mathbf{y}_r^N = \alpha_r + \beta_r \mathbf{x}_1^{N-r} + \epsilon_r^N, \quad (25)$$

ここで、

$$\mathbf{y}_r^N = (y_r, y_{r+1}, \dots, y_N)', \quad (26)$$

$$\mathbf{x}_1^{N-r} = (x_1, x_2, \dots, x_{N-r})', \quad (27)$$

$$\epsilon_r^N = (\epsilon_r, \epsilon_{r+1}, \dots, \epsilon_N)', \quad (28)$$

となるが、時差の分だけデータをずらす必要があるため、推定に用いる標本サイズは $n = N - r$ となり、候補として用いられる r によって標本サイズが変動することになる。

Oga (2021) によって示された推定の手順は、以下の通りである。

- (1) 説明変数 x_{R-r}^N について単位根検定 (ADF検定) を行う。もし、検定結果が単位根を示唆するものであったら次のステップに進む。
- (2) 時差の候補を $r=0, 1, 2, \dots, R$ とし、それぞれの候補について(25)式を推定する。得られた決定係数が最大となるような r を \hat{s} とする。
- (3) $r=\hat{s}$ の場合の残差系列について単位根検定を行う。もし、単位根であるという帰無仮説を棄却し、残差系列が定常であると示唆されたならば、その系列の組は時差共和分関係にあるとする。

本研究では、以上のようなOga (2021) の時差共和分モデルを用いてTOPIXおよび業種別TOPIXの日次データを用いて、株価指数間に時差共和分関係があるかどうかを確認した上で、先行指数の情報を用いて投資シミュレーションを行った。

3 時差共和分モデルによる実証分析

本節では、最初にデータの説明と基本統計量について説明を行う。その後、推定に用いたモデル及び実証結果について解説を行う。

3.1 データと基本統計量

分析に使用したデータは、東証株価指数 (TOPIX) および業種別TOPIX33種の合わせて34系列の日次データ終値である。株価指数の一覧は表1に示した。分析期間は2018年および2019年の二ケ年とした。この期間は日本にCOVID-19が上陸する前の期間である。この期間についての価格推移は図1に示した。TOPIXについて、2018年はアベノミクス始まって以来の下落局面であり、概ね下落基調であるが、2019年の後半には上昇局面へと変化している。業種別指数についてはTOPIX同様、2018年は下落基調の指数が多くみられ、2019年は上昇局面となっている系列が多い。ただ、その底を打つタイミングはまちまちで、各指数、様々

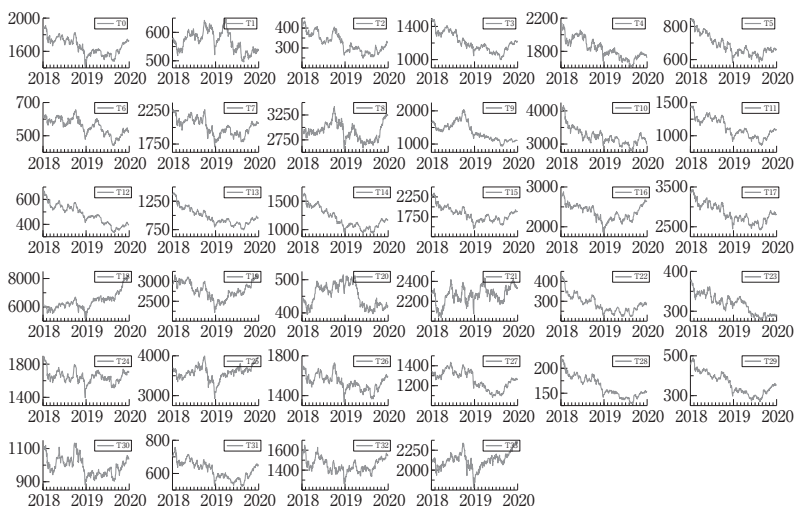
表 1 : 株価指数一覧

番号	名 称	番号	名 称
0	東証株価指数	17	輸送用機器
1	水産農林	18	精密機械
2	鉱業	19	その他製品
3	建設業	20	電気ガス業
4	食料品	21	陸運業
5	繊維製品	22	海運業
6	パルプ紙	23	空運業
7	化学	24	倉庫運輸関連
8	医薬品	25	情報通信業
9	石油石炭製品	26	卸売業
10	ゴム製品	27	小売業
11	ガラス土石製品	28	銀行業
12	鉄鋼	29	証券商品先物取引業
13	非鉄金属	30	保険業
14	金属製品	31	その他金融業
15	機械	32	不動産業
16	電気機器	33	サービス業

な変動をしている様が見て取れる。このことから本研究においては2018年を株価の下落局面、2019年を株価の上昇客面として捉え分析を進める。

基本統計量は表2に示した。上段には各指数の損益(%)および日次収益率の標準偏差(ボラティリティー)を年率に変換したもの、および、単位根検定のF値を示した。標本サイズは2018年、2019年についてそれぞれ、245、241である。表中の損益は2018年、2019年それぞれの年率対数収益率(%)を表している。図1から見て取れる結果同様、2018年のTOPIXは22.111%の下落、2019年は15.706%の上昇となっている。2018年に関しては、他の指標に関しても、大幅な価格の下落に見舞われた指標が多く、平均的には-23.717%、海運業に至っては-52.808%の大幅な下落となっている。2019年に関しては精密機械で43.372%の大幅

図1：価格推移



な上昇が見られ、平均的には11.289%の上昇となった。一方で損益が負となる指数も散見され、2018年の下落を取り戻すほどではない。

単位根検定については、Dickey and Fuller (1981)のAugmented Dickey-Fuller (ADF) 検定を用いた。全ての指数は、対数系列に変換した後単位根検定をした。棄却限界値はDickey and Fuller (1981), p. 1063のTABLE IVを用いた。標本サイズが2018年、2019年共に概ね250であることから、有意水準5%における棄却限界値は4.63となり、 F 値がこの値よりも大きければ帰無仮説を棄却し、単位根の存在が否定される。検定結果は、2019年の情報通信業 (25) において F 値が6.500となり、単位根系列ではないという検定結果が得られたが、その他の指数に関しては全て単位根系列であった。定常系列が一つ検出されたが、通常対数証券価格は単位根過程に従うので、ここでは情報通信業 (25) を除外することなく分析に用いた。

表 2 : 基本統計量

番号	指数名称	損益 (%)		標準偏差 (%)		F 値	
		2018	2019	2018	2019	2018	2019
0	TOPIX	-22.111	15.706	17.434	12.637	1.323	2.022
1	水産農林	-4.229	-2.499	18.168	17.706	1.492	0.754
2	鉱業	-40.904	16.236	29.798	30.048	1.203	1.629
3	建設業	-27.484	8.999	19.867	14.704	1.846	0.725
4	食料品	-18.549	-1.179	17.457	12.905	2.497	1.474
5	繊維製品	-29.509	7.224	18.403	17.476	1.592	3.717
6	パルプ紙	-19.852	5.290	22.695	20.338	1.444	0.912
7	化学	-20.112	14.707	20.986	15.455	1.758	2.537
8	医薬品	-9.364	19.649	21.193	17.170	1.622	1.028
9	石油石炭製品	-27.374	-14.154	34.961	28.001	0.638	1.852
10	ゴム製品	-26.334	-0.933	20.310	16.605	2.708	1.996
11	ガラス土石製品	-38.636	13.154	22.912	19.149	1.417	1.227
12	鉄鋼	-39.865	-7.287	21.993	20.012	2.062	0.557
13	非鉄金属	-47.045	14.879	23.774	20.011	2.091	1.419
14	金属製品	-45.441	15.938	21.812	19.198	1.949	1.336
15	機械	-37.986	23.491	23.638	19.145	1.449	3.501
16	電気機器	-32.099	33.163	21.885	17.448	1.110	3.284
17	輸送用機器	-25.065	9.387	19.631	15.753	1.390	1.928
18	精密機械	-7.542	43.372	22.719	17.378	3.150	4.489
19	その他製品	-21.507	29.636	22.432	18.714	0.885	2.875
20	電気ガス業	9.080	-15.515	20.049	17.252	1.504	1.324
21	陸運業	-2.435	4.063	17.693	13.710	2.974	2.490
22	海運業	-52.808	20.448	25.563	23.530	2.281	1.440
23	空運業	-16.151	-8.407	17.803	12.865	3.400	0.808
24	倉庫運輸関連	-21.692	12.107	19.792	15.317	3.967	3.577
25	情報通信業	-17.444	24.694	21.047	12.516	0.920	6.500
26	卸売業	-15.34	11.207	19.549	14.534	2.637	1.854
27	小売業	-9.881	3.390	16.548	12.488	2.328	0.439
28	銀行業	-35.618	3.546	19.354	14.947	1.625	0.976
29	証券商品先物取引業	-37.104	11.937	20.712	21.456	1.240	0.556
30	保険業	-16.89	13.753	20.308	15.225	2.262	2.435
31	その他金融業	-22.877	15.597	20.764	15.458	1.166	0.795
32	不動産業	-14.119	18.513	19.552	14.490	1.719	4.248
33	サービス業	-12.09	23.712	21.160	13.615	1.974	4.998
平均		-23.717	11.289	21.234	17.272	N/A	
標準偏差		13.905	12.889	3.544	4.077	N/A	
最小値		-52.808	-15.515	16.548	12.488	N/A	
最大値		9.080	43.372	34.961	30.048	N/A	
標準サイズ		245	241	245	241	245	241

3.2 推定モデル

分析に使用したモデルは、Oga (2021)の4節で用いられたのと同様、時差共和分モデルにタイムトレンド項を導入したモデルである。回帰式は、

$$y_t = \alpha_{0,r} + \alpha_{1,r}t + \beta_r x_{t-r} + \epsilon_{r,t}, \quad (29)$$

として定式化される。ここで、説明変数 x_{t-r} は先行指数を表し、被説明変数 y_t が運行指数となる。

真の時差 s を同定するために用いる候補 r は $r=0, 1, 2, \dots, 11$ とし、最大10営業日³⁾までの時差を考慮することとした。これは概ね二週間となり、日次データの分析としては十分だと考えられる。

(29)式のモデルを行列形式で書き換えると、

$$y_R^N = \alpha_{0,r} + \alpha_{1,r}t + \beta_r x_{R-r}^{N-r} + \epsilon_R^N, \quad (30)$$

となる。ここで、それぞれの変数は、

$$y_R^N = (y_R, y_{R+1}, \dots, y_N)',$$

$$t = (1, 2, \dots, N-R)',$$

$$x_{R-r}^{N-r} = (x_{R-r}, x_{R-r+1}, \dots, x_{N-r})',$$

$$\epsilon_R^N = (\epsilon_R, \epsilon_{R+1}, \dots, \epsilon_N)',$$

となる。この時、時差の分だけデータをずらす必要があるため、推定に用いる標本サイズ⁴⁾は $n=N-R$ となる。

ここで、各候補 $r=0, 1, 2, \dots, 11$ について(30)式のOLS推定を行う。そして、各 r についての回帰において求められた自由度修正済み決定係

- 3) 実際の分析において、もし、選択された時差 $\hat{s}=11$ となった場合、自由度修正済み決定係数の最大値を与える s が11よりも大きい可能性があり、自由度修正済み決定係数の最大化が適切に行われていない可能性がある。そのため、 $r=11$ まで推定を行い、 $\hat{s}=11$ となった場合にはその結果は採用しないこととした。
- 4) (29)式では、より多くのデータを推定に用いるため、フルサンプル(23式、24式)から、それぞれの候補 r 毎にデータを作成していた。そのため、異なる候補 r について、それぞれの推定における標本サイズは異なっている。本研究では、各推定における標本サイズを揃えて推定を行った。

数が最大値を取る時差 \hat{s} を求める。この $r = \hat{s}$ で与えられる残差系列について、Phillips and Ouliaris (1990) に基づき共和分検定を行い、帰無仮説を棄却し、残差が定常であると示唆された場合、その組を時差共和分関係にあるとした。また、先行指数と遅行指数の組み合わせは、 $(34 \times 33) = 1122$ となり、これらすべての組についてすべて推定を行なった。

3.3 実証結果

同定された時差 \hat{s} について、2018年の結果を表3に、2019年の結果を表4にそれぞれ示した。表中の数値が時差共和分関係にある指数の組における時差 \hat{s} を表している。例えば、表3において先行指数 x_1 、遅行指数 y_{10} の欄に数値4が見られるが、これは、水産農林(1)を意味する x_1 がゴム製品(10)である y_{10} に対して4期先行しているということになる。 \hat{s} の値は、0から11であり、候補 r と対応している。また、 $\hat{s} = 0$ の場合には、時差を持たないEGモデルに従うことを表している。×印は、EGモデルおよび時差共和分のどちらの関係も見出せなかった組である。また、表の対角上の“-”は同一指数の組となるので分析対象とはならないことを表している。

表5は、表3および表4を時差毎にまとめたものである。上段は2018年の結果を、下段は2019年の結果をまとめた。選択された組の欄の項目については、[先行指数, 遅行指数] = [x_k , y_l] のように表記している。ここで、サブスクリプト k および l は表1の指数を表す番号と対応している。2018年については、 $\hat{s} = 1$ が7組、 $\hat{s} = 4$ が3組、 $\hat{s} = 6$ が1組、 $\hat{s} = 7$ が6組、 $\hat{s} = 8$ が2組、 $\hat{s} = 10$ が1組となり、全体で20組が時差共和分関係にあると同定された。また、EGモデルとして同定された⁵⁾ものは463組となり、通常の時差を持たない共和分関係にある組の方が格段に多い。残りのモデルは、いかなる共和分関係もないか、時差共和分の時差が想定している候補の最大時差11以上かのどちらかである。2019年の結果よ

り、 $\hat{s} = 1$ が3組、 $\hat{s} = 2$ が7組、 $\hat{s} = 3$ が4組、 $\hat{s} = 4$ が9組、 $\hat{s} = 5$ が4組、 $\hat{s} = 6$ が12組、 $\hat{s} = 7$ が3組、 $\hat{s} = 8$ が4組、 $\hat{s} = 9$ が10組、 $\hat{s} = 10$ が14組となった。2019年全体では70組となり、2018年の同定された組数よりも格段に多い。また、EGモデルであると同定された組は、568組となっており、これも2018年よりも多い。2018年はアベノミクス以降最大の下落局面であり、2019年はその回復局面であることを考えると、株価の下落局面よりも上昇局面の方が各指数の共和分性が高まっていることが窺える。

ここで、各年について、どのような業種が先行指数、遅行指数として選択されたかを見ていこう。集計結果については、表6に度数分布表を、図2にヒストグラムをまとめてみた。ヒストグラムについては、上から順に、2018年先行指数 (2018 Leading Series)、2018年遅行指数 (2018 Lagging Series)、2019年先行指数 (2019 Leading Series)、2019年遅行指数 (2019 Lagging Series) となっている。

2018年の先行指数として選択された系列については、石油石炭製品 (9) が4組に含まれ、最も多い。2組に含まれた系列は鉱業 (2)、空運業 (23) となっている。また、1組のみに含まれたものは12系列となった。最も多かった石油石炭製品 (9) の組については、表5より、

-
- 5) 検定の結果、 $[x_k, y_l]$ 組は時差共和分であることが示唆され、 $[x_l, y_k]$ についてはEGモデルに従うとの矛盾するような結果が得られた場合があった。その場合は、EGモデルが端点解であるとして時差共和分モデルに従うとした。これは、 $[x_k, y_l]$ のモデルにおいては、モデルのフィットが $r \in \{0, 1, \dots, R\}$ となる $r = \hat{s}$ で最大化され、 $[x_l, y_k]$ のモデルにおいては、 $r \in \{0, 1, \dots, R\}$ の中から $r = 0$ が選ばれていることから、両モデルの $r = 0$ におけるフィットが同等であるとするならば、 $[x_k, y_l]$ のモデルにおける $r = \hat{s}$ の方がフィットが高いはずだという類推による。実際には、説明変数と被説明変数がモデルによって入れ替わっていることから、話は単純ではない。実際にEGモデルにおいては、説明変数と被説明変数を入れ替えると共和分関係の有無が変わってしまうこともよく知られていることから、この問題はより深い議論が必要な点である。

表3：同定された時差 δ （2018年）
先行指数（説明変数）

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
y_0	—	0	×	×	×	×	0	×	×	0	11	0	×	×	×	×	0
y_1	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
y_2	×	×	—	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×	0	×
y_3	×	×	×	—	0	×	×	×	×	×	11	×	×	×	×	×	×
y_4	×	0	×	0	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
y_5	0	0	0	0	0	—	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
y_6	0	×	0	×	×	×	—	×	0	0	×	×	0	0	×	0	0
y_7	×	×	×	×	×	×	×	—	×	0	11	0	×	×	0	×	0
y_8	×	×	×	×	×	×	0	×	—	0	×	×	×	×	×	×	×
y_9	×	×	×	×	×	×	×	×	0	—	×	×	×	×	×	×	0
y_{10}	0	4	7	0	0	0	11	8	11	0	—	7	0	×	1	×	0
y_{11}	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	—	×	×	×	×	0
y_{12}	×	×	×	×	×	×	0	×	×	1	×	×	—	0	×	0	×
y_{13}	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0	×	0	0	—	0	0	0
y_{14}	0	0	×	×	×	×	0	0	×	0	11	0	×	×	—	×	×
y_{15}	0	0	0	×	×	×	0	×	0	0	×	0	0	0	×	—	×
y_{16}	0	0	×	×	×	×	0	0	0	0	11	0	0	×	×	×	—
y_{17}	0	0	0	×	0	×	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
y_{18}	0	0	×	×	×	×	0	0	×	0	11	0	0	0	0	×	0
y_{19}	0	0	0	×	×	×	0	×	×	0	11	×	0	0	0	0	0
y_{20}	×	0	×	0	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	0	×	×
y_{21}	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	0	×	×	×	×	×
y_{22}	0	×	0	×	×	×	0	×	0	1	×	×	0	0	×	0	×
y_{23}	11	0	6	0	0	0	11	11	11	11	×	11	11	11	×	11	11
y_{24}	0	0	0	×	×	0	0	×	0	0	×	0	0	0	0	0	0
y_{25}	×	×	×	×	×	×	×	0	×	0	×	0	×	×	×	×	0
y_{26}	×	0	0	×	×	×	0	×	×	0	×	0	0	0	0	0	×
y_{27}	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
y_{28}	×	0	0	×	×	×	0	×	0	1	×	×	0	0	×	0	×
y_{29}	×	0	0	×	×	×	0	×	0	×	×	×	×	×	×	0	×
y_{30}	0	0	0	×	×	×	0	×	0	1	×	0	0	0	×	0	×
y_{31}	0	0	0	×	×	×	0	×	0	0	×	0	×	×	0	0	×
y_{32}	×	0	×	0	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
y_{33}	0	×	×	×	×	×	0	0	×	0	11	0	×	×	×	×	0

遅行指数
(被説明変数)

表3：同定された時差 $\hat{\delta}$ (2018年) *Continue*
 先行指数 (説明変数)

	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	X26	X27	X28	X29	X30	X31	X32	X33
y ₀	0	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	0	×	×	0
y ₁	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	×	0	0	0	×	×
y ₂	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	×	×	×	×
y ₃	×	×	×	0	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	×
y ₄	×	×	×	0	0	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	0	×
y ₅	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0	0
y ₆	×	0	0	×	×	0	×	×	0	×	×	0	0	0	×	×	0
y ₇	0	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0
y ₈	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×
y ₉	×	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0
y ₁₀	0	7	1	0	0	0	7	×	7	0	0	7	10	4	4	0	8
y ₁₁	0	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	0
y ₁₂	×	0	×	×	×	0	×	×	×	×	×	0	0	0	×	×	×
y ₁₃	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y ₁₄	0	0	0	0	×	0	×	×	0	0	0	×	×	0	0	0	0
y ₁₅	0	0	0	×	×	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0
y ₁₆	0	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	0	×	0	×	×	0
y ₁₇	—	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0
y ₁₈	0	—	×	×	×	0	×	×	0	0	×	0	×	0	0	×	0
y ₁₉	×	0	—	×	×	0	×	0	×	0	0	0	0	0	0	×	×
y ₂₀	×	×	×	—	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	0	0	×
y ₂₁	0	0	×	0	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	×
y ₂₂	0	0	0	×	×	—	×	0	0	0	0	0	×	0	×	×	0
y ₂₃	11	11	0	0	×	11	—	×	11	11	0	11	11	11	×	0	11
y ₂₄	0	0	0	0	×	0	×	—	0	0	0	0	0	0	0	×	0
y ₂₅	×	0	×	×	×	×	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	0
y ₂₆	×	0	0	×	×	0	×	0	0	—	0	0	0	0	0	×	0
y ₂₇	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	—	×	×	0	0	×	×
y ₂₈	×	0	0	×	×	0	×	0	0	0	×	—	0	0	×	×	×
y ₂₉	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×	0	—	0	×	×	×
y ₃₀	×	0	0	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	—	0	×	0
y ₃₁	×	0	0	0	×	×	×	×	×	0	0	×	0	0	—	×	0
y ₃₂	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	—	×
y ₃₃	0	0	×	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	×	×	×	—

遅行指数 (被説明変数)

表 4：同定された時差 δ (2019年)
先行指数 (説明変数)

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
y_0	—	0	0	0	0	×	0	0	×	0	×	0	×	0	×	×	0
y_1	0	—	2	3	×	×	0	0	9	2	6	2	0	3	3	×	0
y_2	0	0	—	0	0	×	×	0	0	×	3	0	0	0	0	×	0
y_3	0	×	×	—	0	0	×	0	×	0	×	0	×	×	0	×	0
y_4	0	0	0	0	—	0	0	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0
y_5	0	0	0	0	0	—	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y_6	0	0	×	8	×	×	—	0	11	0	×	×	0	0	×	0	0
y_7	0	0	0	0	0	0	0	—	×	0	0	0	0	0	0	0	0
y_8	×	×	0	×	×	×	×	×	—	×	×	0	×	×	×	×	×
y_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—	0	0	0	0	0	0	0
y_{10}	×	×	×	×	0	0	×	0	×	0	—	×	×	×	×	×	×
y_{11}	0	×	0	0	0	×	×	×	0	0	×	—	×	0	×	×	0
y_{12}	×	×	0	9	×	×	0	×	11	×	×	×	—	×	×	0	0
y_{13}	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0	×	0	×	—	0	0	0
y_{14}	×	×	0	0	0	×	×	×	0	0	×	×	×	0	—	×	0
y_{15}	×	×	×	×	0	0	0	0	×	0	×	0	0	0	×	—	0
y_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	—
y_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	×	0	0	0	0
y_{18}	0	0	0	9	0	×	0	0	0	0	×	0	0	0	9	×	0
y_{19}	0	0	0	11	0	0	0	0	9	0	4	0	0	2	0	0	0
y_{20}	×	×	0	0	×	0	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
y_{21}	×	0	×	0	0	×	0	0	0	0	0	0	×	0	0	×	0
y_{22}	0	×	0	0	×	0	0	0	×	0	×	0	×	0	0	0	0
y_{23}	×	×	0	0	×	0	×	×	0	×	×	×	×	×	0	×	×
y_{24}	0	0	0	11	0	×	0	0	10	0	×	0	0	0	0	0	0
y_{25}	11	0	4	11	11	11	11	11	11	0	11	11	11	11	11	11	11
y_{26}	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	×	0	0	0	×	×	0
y_{27}	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	0	×	×
y_{28}	0	0	0	0	0	×	×	0	0	0	×	0	×	0	0	×	0
y_{29}	0	×	0	0	0	0	×	0	0	×	×	0	×	×	0	×	0
y_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
y_{31}	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	×	0	0	0	0	×	0
y_{32}	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	×	0	0	×	0
y_{33}	6	0	4	11	11	6	4	6	11	5	11	6	6	6	11	6	6

遅行指数 (被説明変数)

表4：同定された時差 $\hat{\delta}$ (2019年) *Continue*
 先行指数 (説明変数)

	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	X26	X27	X28	X29	X30	X31	X32	X33
y ₀	0	0	×	×	×	×	×	0	×	0	×	0	0	×	0	10	×
y ₁	2	0	×	5	2	×	4	0	×	0	6	0	8	×	4	10	×
y ₂	0	0	×	0	×	0	1	×	×	0	0	0	0	0	0	×	×
y ₃	×	0	×	×	0	×	0	×	×	×	×	0	0	×	0	0	×
y ₄	0	0	×	×	0	0	×	0	×	0	×	0	0	×	0	0	×
y ₅	0	0	×	10	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0	10	×
y ₆	×	0	×	×	11	×	5	0	×	0	11	×	×	×	0	11	0
y ₇	0	0	×	11	0	0	×	0	×	0	0	0	0	×	0	11	×
y ₈	0	0	×	×	×	×	0	×	×	×	9	0	6	×	0	×	×
y ₉	0	0	0	0	0	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0
y ₁₀	×	×	×	5	0	×	×	×	×	×	0	×	×	×	×	10	×
y ₁₁	0	0	×	11	×	×	×	0	×	0	11	0	×	×	0	10	×
y ₁₂	×	0	×	×	11	×	×	0	×	0	×	×	×	×	×	11	0
y ₁₃	0	0	×	×	2	0	0	0	×	0	×	0	0	×	0	10	×
y ₁₄	0	0	×	10	0	0	0	×	×	×	0	0	0	×	0	10	×
y ₁₅	0	0	×	11	11	×	×	0	×	×	×	×	×	0	0	11	×
y ₁₆	0	0	×	11	11	0	1	0	×	0	0	0	0	0	0	11	×
y ₁₇	—	0	×	4	0	0	0	0	×	0	×	0	0	×	0	10	×
y ₁₈	0	—	×	11	1	×	8	0	×	0	11	0	9	×	0	10	×
y ₁₉	0	0	—	11	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0
y ₂₀	×	0	×	—	×	×	0	×	×	×	0	×	0	×	×	0	×
y ₂₁	0	0	×	×	—	×	×	×	×	0	0	0	0	×	0	0	×
y ₂₂	0	0	×	11	0	—	0	0	×	0	0	×	×	0	0	10	×
y ₂₃	0	0	×	0	×	×	—	×	×	×	0	0	0	×	0	×	×
y ₂₄	0	0	0	11	×	0	9	—	×	0	11	0	9	0	0	11	0
y ₂₅	11	×	0	7	0	8	11	0	—	6	11	11	11	0	11	11	0
y ₂₆	0	0	×	×	×	×	×	0	×	—	×	0	0	0	0	×	×
y ₂₇	×	0	×	0	×	×	0	×	×	×	—	0	0	×	×	×	×
y ₂₈	0	0	×	×	×	×	0	0	×	0	×	—	0	×	0	4	×
y ₂₉	0	0	×	0	×	×	0	×	×	0	0	0	—	×	0	0	×
y ₃₀	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—	0	10	0
y ₃₁	0	0	×	×	×	×	0	0	×	0	×	0	0	×	—	0	×
y ₃₂	0	0	×	0	0	×	0	×	×	0	0	0	0	×	0	—	×
y ₃₃	11	9	0	11	0	7	11	0	0	4	11	11	11	0	11	11	—

遅行指数 (被説明変数)

表 5：時差共和分の組

2018	$\hat{s} = 1$	$\hat{s} = 2$	$\hat{s} = 3$	$\hat{s} = 4$	$\hat{s} = 5$	$\hat{s} = 6$	$\hat{s} = 7$	$\hat{s} = 8$	$\hat{s} = 9$	$\hat{s} = 10$
組数	7	0	0	3	0	1	6	2	0	1
組	[x ₉ , y ₁₂] [x ₉ , y ₂₂] [x ₉ , y ₂₈] [x ₉ , y ₃₀] [x ₁₄ , y ₁₀] [x ₁₉ , y ₁₀] [x ₂₃ , y ₁₃]			[x ₁ , y ₁₀] [x ₃₀ , y ₁₀] [x ₃₁ , y ₁₀]		[x ₂ , y ₂₃]	[x ₂ , y ₁₀] [x ₁₁ , y ₁₀] [x ₁₈ , y ₁₀] [x ₂₃ , y ₁₀] [x ₂₅ , y ₁₀] [x ₂₈ , y ₁₀]	[x ₇ , y ₁₀] [x ₃₃ , y ₁₀]		[x ₂₉ , y ₁₀]
2019	$\hat{s} = 1$	$\hat{s} = 2$	$\hat{s} = 3$	$\hat{s} = 4$	$\hat{s} = 5$	$\hat{s} = 6$	$\hat{s} = 7$	$\hat{s} = 8$	$\hat{s} = 9$	$\hat{s} = 10$
組数	3	7	4	9	4	12	3	4	10	14
組	[x ₂₁ , y ₁₈] [x ₂₃ , y ₂] [x ₂₃ , y ₁₈]	[x ₂ , y ₁] [x ₉ , y ₁] [x ₁₁ , y ₁] [x ₁₃ , y ₁₉] [x ₁₇ , y ₁] [x ₂₁ , y ₁] [x ₂₁ , y ₁₃]	[x ₃ , y ₁] [x ₁₀ , y ₂] [x ₁₃ , y ₁] [x ₁₄ , y ₁] [x ₁₄ , y ₁] [x ₁₇ , y ₁] [x ₂₁ , y ₁] [x ₂₁ , y ₁₃]	[x ₂ , y ₂₅] [x ₂ , y ₃₃] [x ₆ , y ₃₃] [x ₁₀ , y ₁₉] [x ₂₀ , y ₁₇] [x ₂₃ , y ₁] [x ₂₆ , y ₃₃] [x ₃₁ , y ₁] [x ₃₂ , y ₂₈]	[x ₉ , y ₃₃] [x ₂₀ , y ₁] [x ₂₀ , y ₁₀] [x ₂₃ , y ₆] [x ₂₃ , y ₃₃] [x ₂₆ , y ₃₃] [x ₃₁ , y ₃₃] [x ₃₂ , y ₃₃]	[x ₀ , y ₃₃] [x ₂₀ , y ₂₅] [x ₂₂ , y ₃₃] [x ₇ , y ₃₃] [x ₁₀ , y ₁] [x ₁₁ , y ₃₃] [x ₁₂ , y ₃₃] [x ₁₃ , y ₃₃] [x ₁₅ , y ₃₃] [x ₁₆ , y ₃₃] [x ₂₆ , y ₂₅] [x ₂₇ , y ₁] [x ₂₉ , y ₈]	[x ₂₀ , y ₂₅] [x ₂₂ , y ₃₃] [x ₂₉ , y ₁₉] [x ₁₀ , y ₁] [x ₁₁ , y ₃₃] [x ₁₂ , y ₃₃] [x ₁₃ , y ₃₃] [x ₁₅ , y ₃₃] [x ₁₆ , y ₃₃] [x ₂₆ , y ₂₅] [x ₂₇ , y ₁] [x ₂₉ , y ₈]	[x ₃ , y ₆] [x ₂₃ , y ₂₅] [x ₂₃ , y ₁₈] [x ₂₉ , y ₁] [x ₂₉ , y ₁] [x ₂₉ , y ₁₈] [x ₂₉ , y ₁₈] [x ₂₉ , y ₂₄] [x ₂₉ , y ₂₄]	[x ₃ , y ₁₂] [x ₃ , y ₁₈] [x ₈ , y ₁] [x ₈ , y ₁₉] [x ₁₄ , y ₁₈] [x ₁₈ , y ₃₃] [x ₂₃ , y ₂₄] [x ₂₇ , y ₈] [x ₂₉ , y ₁₈] [x ₂₉ , y ₂₄]	[x ₈ , y ₂₄] [x ₂₀ , y ₆] [x ₂₀ , y ₁₄] [x ₃₂ , y ₁₀] [x ₃₂ , y ₁] [x ₃₂ , y ₆] [x ₃₂ , y ₁₀] [x ₃₂ , y ₁₀] [x ₃₂ , y ₁₁] [x ₃₂ , y ₁₃] [x ₃₂ , y ₁₄] [x ₃₂ , y ₁₇] [x ₃₂ , y ₁₈] [x ₃₂ , y ₂₂] [x ₃₂ , y ₃₀]

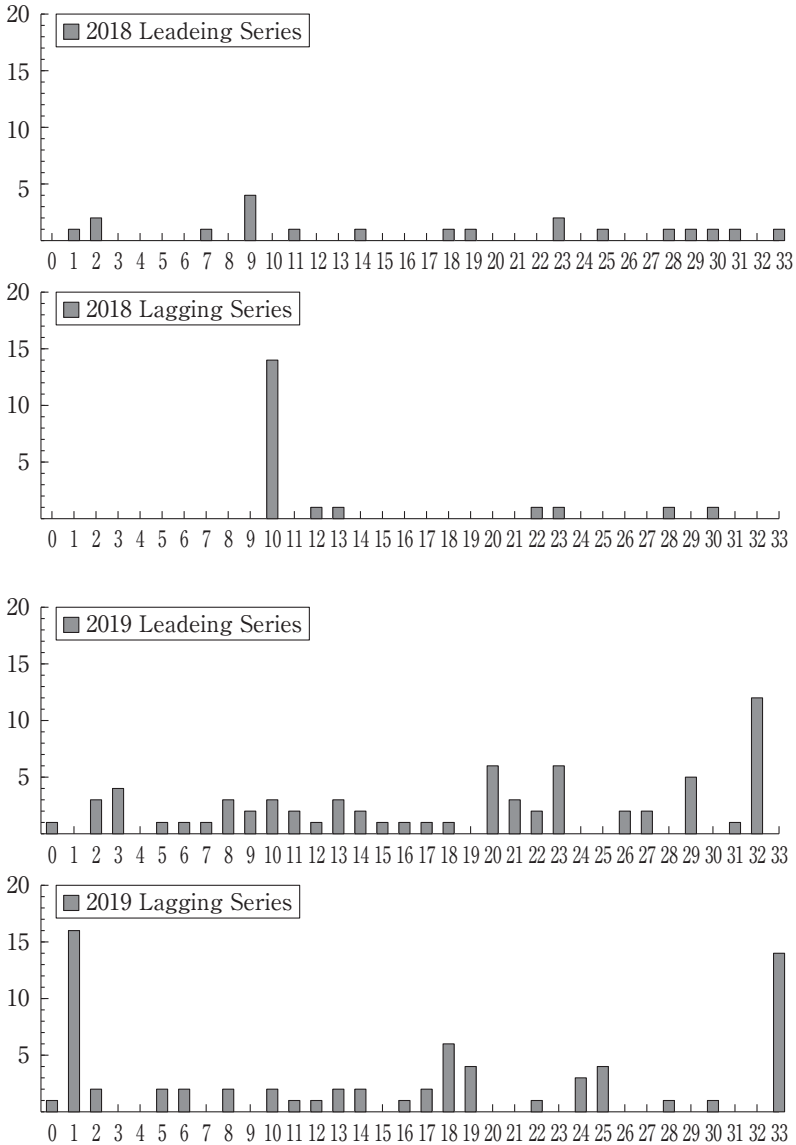
運行指数は鉄鋼（12）、海運業（22）、銀網業（28）、保険業（30）となり、その時差は共に1である。ここで2018年の状況を鑑みると、WTI先物価格が年初1月2日の1バレル当たり60.37ドルから10月3日の同76.41ドルまで上昇し、これをピークに下落に転じ、11月下旬以降は50ドル付近まで下落するという大きな変動に見舞われている。石油石炭製品（9）は、この原油価格の変動にいち早く反応し、牽引されていた可能性が高いと考えられる。

2018年の運行指数については、ゴム製品（10）が最も多く選択され、

表6：選択された先行指数・遅行指数の度数分布表

番号	指数名称	2018年		2019年	
		先行指数	遅行指数	先行指数	遅行指数
0	TOPIX	0	0	1	1
1	水産農林	1	0	0	16
2	鉱業	2	0	3	2
3	建設業	0	0	4	0
4	食料品	0	0	0	0
5	繊維製品	0	0	1	2
6	パルプ紙	0	0	1	2
7	化学	1	0	1	0
8	医薬品	0	0	3	2
9	石油石炭製品	4	0	2	0
10	ゴム製品	0	14	3	2
11	ガラス土石製品	1	0	2	1
12	鉄鋼	0	1	1	1
13	非鉄金属	0	1	3	2
14	金属製品	1	0	2	2
15	機械	0	0	1	0
16	電気機器	0	0	1	1
17	輸送用機器	0	0	1	2
18	精密機械	1	0	1	6
19	その他製品	1	0	0	4
20	電気ガス業	0	0	6	0
21	陸運業	0	0	3	0
22	海運業	0	1	2	1
23	空運業	2	1	6	0
24	倉庫運輸関連	0	0	0	3
25	情報通信業	1	0	0	4
26	卸売業	0	0	2	0
27	小売業	0	0	2	0
28	銀行業	1	1	0	1
29	証券商品先物取引業	1	0	5	0
30	保険業	1	1	0	1
31	その他金融業	1	0	1	0
32	不動産業	0	0	12	0
33	サービス業	1	0	0	14

図2：選択された先行指数・遅行指数のヒストグラム



14組に含まれた。また、その他に時差共和分であるとされた遅行指数は、1組のみに含まれた鉄鋼(12)、非鉄金属(13)、海運業(22)、空運業(23)、銀行業(28)、保険業(30)である。最も多く選択されたゴム製品(10)に先行する系列としては、表5より、時差1が2系列(金属製品(14)、その他製品(19))、時差3が3系列(水産農林(1)、保険業(30)、その他金融業(31))、時差7が6系列(鉱業(2)、ガラス土石製品(11)、精密機械(18)、空運業(23)、情報通信業(25)、銀行業(28))、時差8が2系列(化学(7)、サービス業(33))、時差10が1系列(証券商品先物取引業(29))となった。

2019年の先行指数として選択された系列については、不動産業(32)が12組に含まれと最も多い。次に多かった系列が、6組に含まれた電気ガス業(20)および空運業(23)である。以下、5組に含まれた系列が証券商品先物取引業(29)、4組に含まれた建設業(3)、3組に含まれた鉱業(2)、医薬品(8)、ゴム製品(10)、非鉄金属(13)、陸運業(21)、2組に含まれた石油石炭製品(9)、海運業(22)、卸売業(26)、小売業(27)となっている。また、1組のものは10系列となった。最も多かった不動産業(32)の組については、遅行指数は時差10が最も多く11組(TOPIX(0)、水産農林(1)、繊維製品(5)、ゴム製品(10)、ガラス土石製品(11)、非鉄金属(13)、金属製品(14)、輸送用機器(17)、精密機械(18)、海運業(22)、保険業(30))となった。また、時差4が1組(銀行業(28))となった。

2019年の遅行指数として選択された系列については、水産農林(1)が14組に含まれと最も多い。次に多かった系列が、12組に含まれた不動産業(32)である。それに続き、以下、6組に含まれた系列が精密機械(18)、4組に含まれたその他製品(19)および情報通信(25)、3組に含まれた倉庫運輸関連(24)、2組に含まれた鉱業(2)、繊維製品(6)、パルプ紙(7)、医薬品(8)、ゴム製品(10)、非鉄金属(13)、金属製

品 (14), 輸送用機器 (17) となっている。また, 1組のものは7系列となった。最も多かった水産農林 (1) の組については時差2が最も多く, 先行指数は5組 (鉱業 (2), 石油石炭製品 (9), ガラス土石製品 (11), 輸送用機器 (17), 陸運業 (21)) となった。また, 次点として時差3が3組 (建設業 (3), 非鉄金属 (13), 金属製品 (14)) である。続いて, 2組に時差4 (空運業 (23), その他金融業 (31)) および時差6 (ゴム製品 (10), 小売業 (27)), 1組のものとして時差5 (電気ガス業 (20)), 時差8 (証券商品先物取引業 (29)), 時差9 (医薬品 (8)), 時差10 (不動産業 (32)) となった。

以上の結果から, 2018年, 2019年それぞれについて, 先行指数として選択されやすいもの, 遅行指数として選択されやすいものがあることが示された。一方で, その度数分布については年により全く変わってしまっている。また, 先行性, 遅行性を決定づける原因については, 石油石炭製品 (9) の先行性については思い当たるものの, それ以外の指数については法則性等は見いだせなかった。

ここで, 2018年の先行指数, 遅行指数の双方に選択された, 空運業 (23) および銀行業 (28) について見てみる。表3より, 空運業 (23) は鉱業 (2) に6期遅行し, また, ゴム製品 (10) と非鉄金属 (13) はそれぞれ空運業 (23) に1期遅行していることがわかる。ここで, 一番先行している鉱業 (2) とゴム製品 (10) および非鉄金属 (13) は7期の時差があることが推測される。再び表3より, [鉱業 (2), ゴム製品 (10)] および [鉱業 (2), 非鉄金属 (13)] の時差を確認すると, [鉱業 (2), ゴム製品 (10)] については7期の時差が確認できる一方, [鉱業 (2), 非鉄金属 (13)] は時差0のEGモデルが支持されている。また, 銀行業 (28) についてみると石油石炭製品 (9) に1期遅行し, ゴム製品 (19) に6期先行している。ここから期待される [石油石炭製品 (9), ゴム製品 (19)] の時差は7期となるが, 表3より, 選択された

モデルは時差0のEGモデルとなった。このことから、 $[x_a, y_b]$ および $[x_b, y_c]$ の組にそれぞれ正の時差が時差共和分モデルで観測されたとしても、必ずしも $[x_a, y_c]$ の組が時差共和分となるわけではないことがわかる。

2019年の先行指数、遅行指数双方に選択された業種は14業種となり2018年に比較し多い。ここでは、鉱業(2)について見てみる。鉱業(2)はゴム製品(10)に3期、空運業(23)に1期遅行している。また、情報通信業(25)に4期、サービス業(33)に同じく4期、水産農林(1)に1期先行している。ここで、[ゴム製品(10)、情報通信業(25)]について期待される時差は7期であるが、表4より11期となっている。同様に、[ゴム製品(10)、サービス業(33)]について期待される時差は7期であるが、表4では11期となっている。これらはどちらも分析対象外である。[空運業(23)、情報通信業(25)]および[空運業(23)、サービス業(33)]についても同様の結果である。[ゴム製品(10)、水産農林(1)]については、期待される時差は5期であるが、表4より時差は6期となっている。同様に、[空運業(23)、水産農林(1)]については、期待される時差は3期であるが、表4より4期であると示されている。これらの結果は、2018年の[鉱業(2)、ゴム製品(10)]のケースほど正確ではないが、誤差の範囲であると言って差し支えないであろう。これらのことから、直接的な組の推定結果を組み合わせると時差共和分関係を類推した場合、整合性を持つような推定結果を得られる場合もあるが、一般的には難しいとと考える方が良いと考えられる。

まとめると、推定結果から業種間で時差共和分関係にあると示唆された組が多数観測され、価格上昇期の方がその組の数は多い。また、図2および表6より、先行指数、遅行指数になりやすい業種があるがその傾向は年によって変化している。実際に2018年、2019年の二カ年を通じて安定的に時差共和分関係にあった系列の組はない。これらのことから、株価指数における先行性・遅行性は安定的なものではなく、時間を追っ

て変化していくものだと考えられる。

4 運用シミュレーション

本節では、運用シミュレーションを実行するための運用ルールを策定するとともに、前節で推定された時差共和分関係の推定結果に基づき運用シミュレーションを行い、時差共和分モデルが投資に利するモデルであるか、その推定結果が超過収益を獲得できるような情報を持つのかについて検証を行う。

4.1 運用ルール

二つの系列の組が時差共和分モデルに従う場合、ある程度の期間その時差共和分性が維持されると考えられる。そのため、先行指数の価格が上昇期に入ったならば、時差共和分の時差だけ遅れて運行指数が上昇期に入ると考えられる。投資格言で「頭と尻尾はくれてやれ」と言われるように、最安値で買って最高値で売ることとはできないとされる。しかし、先行指数の情報を使うことが可能であるならば、運行指数の最高値、最安値を事前に知ることができ、頭と尻尾を食べることができる可能性がある。

本研究では先行指数のトレンドを捉える指数として、後方移動平均 (Backward Moving Average : BMA) を用いることを考える。ここで q は過去に遡って平均を取るラグの期数を表している。 t 期の資産価格を y_t とすると、

$$\text{BMA}_t^{(q)}(y_t) = \frac{1}{q} \sum_{i=t-q+1}^t y_i, \quad (31)$$

と表され、通常は現時点の価格 y_t から $q-1$ 期まで遡った y_{t-q+1} までの q 期の標本について平均を取ったものとして定義される。

移動平均線は、テクニカル分析でよく用いられる中心的な指標であり、

株価の上昇トレンドや下落トレンドを捉えることができる簡便で、直感的にわかりやすい指標である。統計学的には簡便な平滑化法の一種であると捉えられる。また、移動平均の期数 q を調節することにより、短期のトレンドから長期のトレンドまで簡単に捉えることができ、様々な投資手法が提案されている。一方で、移動平均を単体で投資のシグナルとして使用した場合には、安定的な正の超過収益を得ることは難しいとされる。例えば、長い上昇トレンドを捉える、すなわち、上昇トレンドの始点となる最安値で買いを入れ、そのトレンドの終点である最高値までの長期間保有し手仕舞いすることができれば大きな利益につながるのには目に見えている。しかし、移動平均を用いて長いトレンドを捉えるためにはそれなりに大きな値の q を設定しなければならない。例えば1ヶ月単位のトレンドを捉えるために25日移動平均を使用することを考えたでしょう。元となる資産価格が底を打ち上昇に転じた時に、移動平均線が下落から上昇に転じるまでに移動平均期間の概ね半分の期間、時間が過ぎてしまっていることになる。これは、最高値時も同様であり、移動平均線が上昇期の終わりを告げる頃には、上昇トレンドは疾の昔に終わっている。よって、単純に移動平均単体を用いたトレンド判別による投資では、実際の資産価格の最高値・最安値を付けた日時からシグナル発生まで遅れが出るため、安定的な正の超過収益を得ることはできない。

ここで、投資対象となる運行指数 y_k が s 、 y_k と時差共和分関係がある先行指数 x_t に対して s 期先行している場合を考える。 s の同定が適切になされたならば、この投資家は、 y_t だけに注目している他の投資家よりも、トレンドの転換点を s 期だけ早く知ることができる。また、先行指数の移動平均線は、運行指数の移動平均線よりも s 期だけ先行することが予想されることから、先行指数の移動平均は、投資対象となる運行指数の移動平均の予測値となり、トレンドの転換点をより早く知ることができるだろう。

トレンドの転換点を後方移動平均のように遅れることなく知る方法として、中央移動平均 (Centered Moving Average : CMA) がある。これは、現時点 t を中心として移動平均を取るものであり、

$$\text{CMA}_t^{(q)}(y_t) = \frac{1}{q} \sum_{i=t-\frac{q-1}{2}}^{t+\frac{q-1}{2}} y_i, \quad (32)$$

となる。ただし、 q は奇数とする。もし、中央移動平均を用いることができるならば、トレンドの変換点を識別する際に後方移動平均のような遅れは生じない。しかし、中央移動平均を計算する際には、現時点 t に対して $\frac{q-1}{2}$ 期先までの未来の情報が必要となる。よって、利用可能なデータを用いて事後的にトレンドの変化点を識別するならば、中央移動平均を用いることによって、トレンドの変換点を遅れなく識別することができる。一方、現時点 t で、投資判断をする必要がある場合には未来の情報を利用できないことから、後方移動平均を用いざるを得ないのでトレンドの転換点の識別が遅れてしまうのである。

この問題を時差共和分モデルは解決する。投資対象となる運行指数と時差共和分関係のある先行指数が見つかるならば、その適切な q による先行指数の後方移動平均は、運行指数の中央移動平均の代理変数になりうる。具体的には、

$$q = 2 \times \hat{s} + 1, \quad (33)$$

とすることを提案する。先行指数の後方移動平均は、

$$\text{BMA}_t^{(q)}(x_t) = \frac{1}{2\hat{s} + 1} \sum_{j=t-2\hat{s}}^t x_j, \quad (34)$$

である。ここで、中央移動平均を表す(32式)に(33式)を代入し、 s を \hat{s} に置き換えると共に、(2)式の時差共和分モデルを代入すると、

$$\text{CMA}_t^{(q)}(y_t) = \frac{1}{2\hat{s} + 1} \sum_{i=t-\frac{(2\hat{s}+1)-1}{2}}^{t+\frac{(2\hat{s}+1)-1}{2}} \alpha + \beta x_{i-\hat{s}} + \epsilon_i, \quad (35)$$

となる。これを整理すると、

$$\begin{aligned} \text{CMA}_t^{(q)}(y_t) &= \frac{1}{2\hat{s} + 1} \sum_{i=t-\hat{s}}^{t+\hat{s}} \alpha + \beta x_{i-\hat{s}} + \epsilon_i, \\ &= \alpha + \beta \frac{\sum_{i=t-\hat{s}}^{t+\hat{s}} x_{i-\hat{s}}}{2\hat{s} + 1} + \frac{\sum_{i=t-\hat{s}}^{t+\hat{s}} \epsilon_i}{2\hat{s} + 1}, \end{aligned} \quad (36)$$

となる。ここで、(36)式の右辺第二項の分子を展開すると、

$$\sum_{i=t-\hat{s}}^{t+\hat{s}} x_{i-\hat{s}} = x_{t-2\hat{s}} + x_{t-2\hat{s}+1} + \dots + x_t, \quad (37)$$

であることから、右辺第二項は、(34)式の先行指数 x_t の後方移動平均に他ならない。また、(36)式右辺第三項の無条件期待値は0であるので、 $q = 2\hat{s} + 1$ とした場合、運行指数の中央移動平均の無条件期待値は、

$$E(\text{CMA}_t^{(q)}(y_t)) = \alpha + \beta \text{BMA}_t^{(q)}(x_t), \quad (38)$$

となり、先行指数の後方移動平均の線形関数で表現することができる。

また、 $\hat{y}_t = \alpha + \beta x_{t-\hat{s}}$ であると考え、(38)式は、

$$E(\text{CMA}_t^{(q)}(y_t)) = \text{BMA}_t^{(q)}(\hat{y}_t), \quad (39)$$

と書き換えられる。

以上より、運用のルールは以下のように定める。

- ・時差 \hat{s} となる時差共和分関係にある組 $[x_t, y_k]$ の運行指数 y_k を投資対象とする。
- ・ y_t の最適予測 \hat{y}_t の $q = 2\hat{s} + 1$ 期後方移動平均 $\zeta_t = \text{BMA}_t^{(q)}(\hat{y}_t)$ を計算し、その階差 $\Delta\zeta_t$ が $\Delta\zeta_t \leq 0$ から $\Delta\zeta_t > 0$ に変わった場合、トレンドが上昇トレンドに変わったと判断し、 y_t を購入する。
- ・ y_t の購入後、 $\Delta\zeta_t > 0$ から $\Delta\zeta_t \leq 0$ に変わった場合、上昇トレンドが終了したと判断し、手仕舞いする。

\hat{y}_t の計算については、 \hat{s} の同定に使用した(29)式に推定値を代入した、

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_{0, \hat{s}} + \hat{\alpha}_{1, \hat{s}} t + \hat{\beta}_{\hat{s}} x_{t-\hat{s}}, \quad (40)$$

を用いた。

4.2 運用シミュレーション結果 (in-sample)

上記の運用ルールに従い、2018年および2019年のそれぞれについて運用シミュレーションを行った。まずin-sampleでの分析を行い、2018年のデータには2018年の推定結果、2019年のデータには2019年の推定結果を用いて運用シミュレーションを行なった。in-sampleでの分析を行うことにより、モデルや時差が正しく推定された状態でのパフォーマンス評価が可能となる。

シミュレーションの結果は表7にまとめた。表7上段が2018年の結果、下段が2019年の結果である。本研究で提案した投資ルールに基づく結果はBMA (\hat{y}_t)の欄に示した。この結果は、各年の時差共和分の組(2018年は20組、2019年は70組)について上記の運用ルールに則り、運用シミュレーションを行い、それぞれの組の一年間の運用結果(対数収益率(%))について統計量を求めたものである。また、比較対象として、時差共和分として選択された投資対象となる運行指数の後方移動平均⁶⁾を用いて運用を行ったもの(BMA (y_t))と、同指数を期初に購入し期末に手仕舞いをした場合の損益(年次収益率)についての統計量も示した。また、表8にはBMA (\hat{y}_t)と各比較対象との平均値の差の検定の結果を示した。

2018年の結果について、我々が提案した運用方法を用いたBMA (\hat{y}_t)による標本平均が-2.106%となり負の値となっている。これは、時差共和分関係にある20組のそれぞれの運行指数に投資した場合の損益の平

6) 移動平均のラグ q はBMA (\hat{y}_t)と同じく、 $q = 2\hat{s} + 1$ を用いてた。

表7：運用シミュレーション結果

	BMA (\hat{y}_t)	BMA (y_t)	年次収益率
2018年			
標本平均	-2.106	-4.963	-28.853
標準誤差	1.605	1.552	1.914
標準偏差	7.178	6.939	8.559
最小値	-20.717	-14.250	-52.808
最大値	10.240	5.126	-16.151
$P(R > 0)$	0.350	0.450	0.000
2019年			
標本平均	10.339	1.822	15.338
標準誤差	1.015	0.934	1.688
標準偏差	8.494	7.813	14.123
最小値	-5.587	-15.702	-7.287
最大値	30.488	19.762	43.372
$P(R > 0)$	0.871	0.543	0.729

表8：運用結果の差の検定

	対BMA (y_t)	対年次収益率
2018年		
標本平均	2.857	26.747
標準誤差	2.040	2.107
t値	1.401	12.693
自由度	19	19
棄却限界値	2.093	2.093
2019年		
標本平均	8.517	-5.000
標準誤差	1.356	1.636
t値	6.282	-3.055
自由度	69	69
棄却限界値	1.995	1.995

均値であり、平均的には収益が負の値となることを示している。しかし、標準誤差との兼ね合いでみると、平均が0であるという帰無仮説は受容され、標本平均が負の値ではあるが、有意水準10%であっても有意な結果ではない。一方、後方移動平均を用いたBMA (y_t) の標本平均は-4.963%であり、これは、有意水準1%で有意に負の値となっている。表8の平均値の差の検定結果をみると、対BMA (y_t) のt値は1.401となっており、これは有意水準5%の棄却限界値2.093を超えるものではない。これより、2018年については、本研究で推奨する方法は、BMA (y_t) と比較し、平均値は高い値を取ってはいるものの、有意な差ではないと言える。次に、年次収益率について、平均は2018年が大幅な下落局面であったことを反映し、-28.853%となった。これは、有意水準1%でも有意に負となる値である。また、平均値の差については、BMA (\hat{y}_t) との差が26.747%となり、大幅にBMA (\hat{y}_t) を下回っている。検定結果についても、有意水準1%で有意に平均が低いことが示された。

$P(R > 0)$ はそれぞれの組の損益が正であった確率を示している。BMA (\hat{y}_t)、BMA (y_t)、年次収益率についてそれぞれ、0.350、0.450、0.000となった。このことから、2018年においては損益が正となる確率はBMA (y_t) が高い。また、年次収益率については0.000であるが、これは、投資対象となった指数全ての損益が負であったことを示している。

以上より、2018年については、我々の提案するBMA (\hat{y}_t) を用いた運用方法は、平均値こそ負の値を取ったが、仮説検定では有意に0から乖離することはないことが示された。そして、同指数を買い持ちした場合に比較し、有意に高い収益を上げたことが示された。また、他の二つの方法と比較した場合、価格下落期であるにも拘らず、負であるとは言え、平均的な損益は最も高い値を取り、価格の下落リスクを軽減していることが窺える結果となった。

2019年の結果について、BMA (\hat{y}_t) の標本平均は10.339となり、価

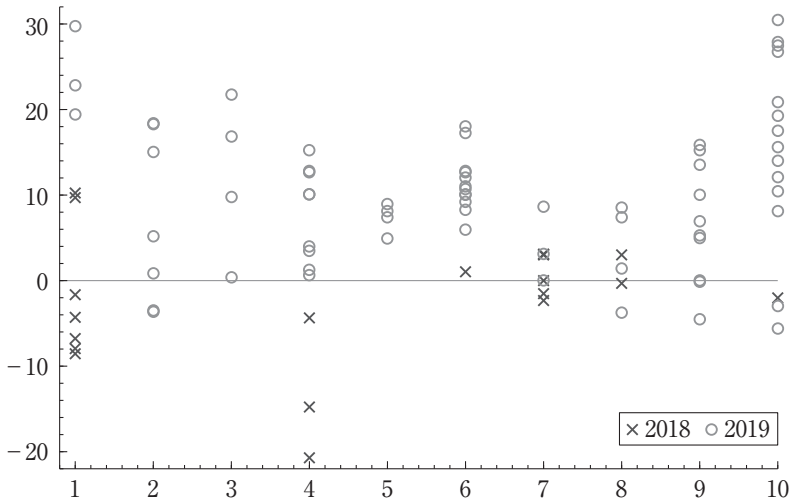
格下落期であった2018年に比較すると損益は大きく改善した。この値は、有意水準1%で有意に正となる値である。また、BMA (y_t) の平均値は1.822%となり、2018年の値と比較すると改善はしているが、有意水準10%で棄却できる水準に過ぎず、BMA (\hat{y}_t) の平均値と比較すると見劣りのする結果である。表8の平均値の差の検定結果より、対BMA (y_t) ではt値が6.282となり、有意水準1%で有意にBMA (\hat{y}_t) の方がパフォーマンスが高い。買い持ちした場合の平均収益率は15.338%となり、これも有意水準1%で有意に正である。これは他の二つの移動平均を用いた方法と比較しても高い値である。平均値の差の検定の結果からも、有意水準1%で年次収益率の平均値が有意に高いことが示された。このように、2019年については、買い持ち戦略のパフォーマンスが最も高い結果となった。

$P(R > 0)$ については、BMA (\hat{y}_t) において0.871と他の運用方法に比較し最も高い値となっている。これは、運用をおこなった全70組の内、61組において損益が正となったということである。平均的には最もパフォーマンスが高かった買い持ちについても、価格上昇期であることも相まって0.729と高い値であるが、BMA (\hat{y}_t) には及ばない。後方移動平均のBMA (y_t) については、0.543となり、これは、2018年の値である0.450と比較しても大差ない結果となった。

以上より、2019年の価格上昇期においてBMA (\hat{y}_t) の運用実績は、買い持ちの年次収益率には及ばないものの有意に正となり、また、BMA (y_t) と比較しても有意に高い収益を上げている。また、損益が正となる確率は、他の二つの方法よりも高い。このことから、価格上昇期においても下方リスクを抑えながらも高いパフォーマンスを示し良好な結果であると言える。

次に、同定された δ 毎の運用シミュレーションの結果について見ていく。図3には、運用が行われた全ての組についての損益をプロットした

図3：時差 \hat{s} 別運用実績



ものである。また、表9には各 \hat{s} 毎の統計量を示した。図3より、2018年については、 $\hat{s} = 4$ の時を除き、どの \hat{s} についても概ね0の近傍に散布し、それほど散らばりも大きくない。 $\hat{s} = 1$ については標本が7組であるが、その内2個が正の値、残りの4組が負となり、平均も -1.326% となっている。また、 $\hat{s} = 3$ については標本3組全て負値を取っている。 $\hat{s} = 8$ は標本は2組であり片方が負、片方が正の値となっているが平均値は辛うじて正となっている。このように2018年については、標本となる運用された組が20組ほどであり、傾向を掴むのは難しい。

2019年については、選択された70組中負となった組が9組のみであるため、ほとんどの指数の損益が0以上のエリアに散布している。また、平均についても、 $\hat{s} = 1$ では 24.007% となり、高い値を示している。最大値を取るのは、 $\hat{s} = 10$ の時であり、その値は 30.488% となっている。一方、 $\hat{s} = 10$ では、平均は 15.851% となっているがレンジも広く損益が負となるものも見られた。逆に、 $\hat{s} = 4, 5, 6, 7$ ではレンジが狭く損

表9：時差 \hat{s} 毎の運用シミュレーション結果

	組数	標本平均	最小値	最大値
2018年				
$\hat{s} = 1$	7	-1.326	-8.554	10.240
$\hat{s} = 4$	3	-13.285	-20.717	-4.363
$\hat{s} = 6$	1	1.036	1.036	1.036
$\hat{s} = 7$	6	0.886	-2.327	3.082
$\hat{s} = 8$	2	1.343	-0.325	3.011
$\hat{s} = 10$	1	-2.020	-2.020	-2.020
2019年				
$\hat{s} = 1$	3	24.007	19.425	29.759
$\hat{s} = 2$	7	7.236	-3.641	18.384
$\hat{s} = 3$	4	12.188	0.373	21.745
$\hat{s} = 4$	9	7.814	0.642	15.259
$\hat{s} = 5$	4	7.352	4.946	8.935
$\hat{s} = 6$	12	11.508	5.959	18.047
$\hat{s} = 7$	3	3.911	0.000	8.623
$\hat{s} = 8$	4	3.405	-3.763	8.552
$\hat{s} = 9$	10	6.721	-4.524	15.868
$\hat{s} = 10$	14	15.851	-5.587	30.488

益が負になる組が見られなかった。平均はそれぞれ、7.814%、7.352%、11.508%、3.911%となっており、 $\hat{s} = 6$ は10%を超えているが、その他は一桁であり、それほど高い値ではない。2019年については以上のように、 \hat{s} が1や10の近傍では比較的大きな正の損益が発生し、中心近くの $\hat{s} = 5$ 付近では、損益についてはそれほど大きな値は出現しないが、ブレの少ない安定した運用結果が得られた。

ここまでの運用シミュレーションの結果についてまとめると、

- ・株価の下落局面においては、平均的には大きな負の損益を被ることなく0の近傍に収まり、同指数を買い持ちするよりは高い収益率が

得られる,

- ・ 株価の上昇局面においては、指数の買い持ちには及ばないが、安定的に正の収益を望むことができ、相応に高い収益が望める、
- ・ 選択された時差 δ により、平均の差だけでなくレンジにも差がある可能性はある、

ことが示された。

4.3 運用シミュレーション結果 (out-of-sample)

前節で行われた運用シミュレーションは、in-sampleの分析であり、2018年（2019年）の年初から年末までのデータを使って各回帰係数や時差を推定し、2018年（2019年）中の投資の意思決定を行っていることとなる。これは、実際の投資への応用を考える上では現実的ではない。そこで、out-of-sampleの運用シミュレーションを以下では行う。

運用の手順としては、まず、2018年のデータを用いて時差 δ の同定および各回帰係数の推定を行う。その後、運用ルールに従い、2019年のデータを用いて運用シミュレーションを行った。また、比較対象として、in-sampleの時と同様、遅行指数として選択された指数の後方移動平均と同指数の買い持ちによる年次収益率の結果も求めた。この際、2018年に時差共和分関係があるとして選択された組と同じ組を用いているため、表7、表8の2019年の結果とは異なる。表10にはシミュレーション結果の統計量を示した。また、表11には、比較対象との平均値の差の検定についての統計量を示した。

標本平均については本研究で提唱する運用ルールを用いたBMA (\hat{y}_t) が1.865%となったが、これは有意に0から乖離する値ではない。後方移動平均を用いたBMA (y_t) については-1.184%となり若干低い値である。表11の対BMA (y_t) のt値は1.576であることから、この差は有意ではない。また、買い持ちの年次収益率については標本平均は1.194と

表10：運用シミュレーション結果 (*Out of sample*)

	BMA (\hat{y}_t)	BMA (y_t)	年次収益率
標本平均	1.865	-1.184	1.194
標準誤差	1.826	1.657	1.540
標準偏差	8.168	7.409	6.887
最小値	-10.406	-14.736	-8.407
最大値	26.192	16.028	20.448
$P(R > 0)$	0.400	0.250	0.200

表11：運用結果の差の検定 (*Out of sample*)

	対BMA (y_t)	対年次収益率
標本平均	3.050	0.672
標準誤差	1.935	1.651
t値	1.576	0.407
自由度	19	19
棄却限界値	2.093	2.093

なっており、価格上昇期としては低い値となっており、これも有意に0から乖離する値ではない。また、平均値の差の検定についても、対BMA (y_t)と同様、有意な差があるわけではない。このように、BMA (\hat{y}_t)についてin-sampleの結果と比較すると、out-of-sampleの結果はかなり見劣りするものとなっている。これは、2018年に選択された時差共和分の組が、2019年には選択されていないことから全体的にこのような結果になったと考えられる。選択された組の中で正の収益を上げた組の確率 $P(R > 0)$ については、0.400と比較対象に比較すると高いが、in-sampleの結果と比較すると平均値と同様見劣りのするものである。

表12には、時差 \hat{s} 毎の統計量がまとめられている。この結果から、 $\hat{s} = 1$ の場合、標本平均が8.808%となり、in-sampleの場合に匹敵する収益を上げている。それ以外の時差については、0に近い値もしくは負値と

一方、 $\hat{s} = 1$ については、損益が負となった組は7組中1組だけであり、比較的高い収益を上げることができている。これより、2018年に選択された先行指数と運行指数の組は、2019年の時差共和分検定では否定されたものの、 $\hat{s} = 1$ についてはある程度の期間、時差共和分関係が残っていたのではないかと推察される。

以上より、out-of-sampleの分析結果から、

- ・時差共和分性は時間と共に変化し、年単位の安定性はない、
- ・時差 $\hat{s} = 1$ に関しては時差共和分性がある程度の期間継続している可能性がある、

ということが出来る。これらのことから、本研究で提案した運用ルールはin-sampleではよく機能しているが、out-of-sampleの分析では時差共和分関係の安定性に問題があり、先行指数、運行指数の関係が時間とともに崩れてしまうことから、期待されるほどの収益が上げられていないと考えられる。

5 結論と今後の課題

本研究では、Oga (2021) の時差共和分モデルを株式市場に応用し、株価指数間に時差共和分関係があるのか、また、その情報を用いて運用を行なった場合、超過収益を稼得することができるかについて分析を行なった。指数間の時差共和分分析については、価格下落期と価格上昇期を比較した場合、価格上昇期の方が時差共和分関係にあるとされた指数の組が多く、価格上昇期にこそ指数同士の連動性が高くなることが示された。これは、時差のないEGモデルとして選択される組も価格上昇期に増加することからも支持される。株式市場においては、暴落時に株式同士の連動性が高くなることが知られているが、株価の上昇期に連動性が高まるという発見は本研究の一つの貢献であろう。

運用シミュレーションの結果から、in-sampleの分析では、指数同士

の連動性が高くなる上昇期において、本研究で提案する時差共和分モデルの最適予測の後方移動平均を用いた運用ルールは上手く働き、有意に正の収益を上げることが示された。一方、価格の下落期においては、収益は有意に正となるほど高くはないものの、ベンチマークと比較すると高く比較的风险を抑えた投資手法であると考えられる。時差共和分関係にある指数の組は、分析対象年の2018年と2019年で一つも共通するものがなく、株式市場における時差共和分性について時間を通じた頑健性はないと考えられる。そのような中、out-of-sampleの分析では、時差が短い組については収益を上げることができる可能性を見出した。

今回の分析では選択された組が2018年については特に少なく、時差別に集計した場合などに標本が少なく十分な分析ができなかったと考えられる。これより、個別銘柄株式を用いた大規模な分析が望まれる。また、今回の分析では2018年および2019年についての二ケ年を分析期間としたが、証券市場は刻々と変化しておりさらに長い期間での分析も必要であろう。

また、運用シミュレーションについては、時差共和分関係に頑健性がないことが示唆されるため、年単位の分析では不十分である。in-sampleの運用シミュレーションの結果から、時差共和分モデルを用いた運用方法は、時差の同定と銘柄の選択が適切にできれば有用であることが示されたことから、より短い期間での逐次推定を用いた方法などを用いることにより、out-of-sampleの運用においてもより高い収益の望める方法が見いだせると考えられる。

参考文献

- Dickey, D.A., & Fuller, W.A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49 (4), 1057-1072.
- Engle, R.F., & Granger, C.W.J. (1987). Co-integration and error correction: Representation,

- estimation, and testing. *Econometrica*, 55 (2), 251-276.
- Herbst, A.F., McCormack, J.P., & West, E.N. (1987). Investigation of a lead-lag relationship between spot stock indices and their futures contracts, *Journal of Futures Markets*, 7 (4), 373-381.
- Kanas, A., & Kouretas, G.P. (2004). A cointegration approach to the leadlag effect among size-sorted equity portfolios, *International Review of Economics and Finance*, 14, 181-201.
- Lo, A.W., & Mackinlay, A.C. (1990). When are contrarian profits due to stock market over-reaction ? , *Review of Financial Studies*, 3 (2), 175-205.
- Oga, T. (2021). Intertemporal Cointegration Model: A New Approach to the Lead—Lag Relationship Between Cointegrated Time Series, *Journal of Business Cycle Research*, 17, 27-53.
- Phillips, P.C.B., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic properties of residual based tests for cointegration, *Econometrica*, 58 (1), 165-193.
- Zeckhauser, R. & Niederhoffer, V. (1983). The Performance of Market Index Futures Contracts. *Financial Analysts Journal*, 39 (1), 59-65.

(2023年 2月15日受理)