

# 2次元流体シミュレーションによる 密度差振動子の非線形ダイナミクス解析

2023年1月

千葉大学大学院融合理工学府

竹田 なな



(千葉大学審査学位論文)

2次元流体シミュレーションによる  
密度差振動子の非線形ダイナミクス解析

2023年1月

千葉大学大学院融合理工学府

竹田 なな



# 概要

自然界にはエネルギーの注入と散逸により持続的な振動を示す例が多数ある。振動の変位が従う非線形方程式や、振動の位相のみに関する位相方程式の解析により振動子系のダイナミクスが理解されてきた一方で、非平衡構造として現れる振動状態がどのような基準から選択されるのかは非自明である。そこで、単一振動子系について非平衡構造が生じる転移点近傍での挙動や、結合振動子系で現れる同期モードについて系の物理的特徴を解析し、非平衡構造の選択基準となる因子を明らかにする。

本研究では流れの振動現象が発生するモデルとして密度差振動子系を採用し、その分岐現象と同期現象について実験および2次元流体シミュレーションを用いた解析を行った。密度差振動子は、二重容器の内容器に高密度流体、外容器に低密度流体が入っており、内容器の底の細孔を通る流れの向きが交互に替わる振動現象を示す。まず、単一系における二流体の密度差をパラメータとした分岐現象を調べた。実験と数値計算の結果から系は超臨界ホップ分岐を介して定常状態から振動状態へ転移することが示された。溶質の輸送の観点から、この転移は定常状態における拡散と振動状態における対流の輸送効率が競合する現象として解釈された。次に、共通の外容器内に複数の内容器を含む弱結合系における同期現象を調べた。自発的に現れる同期モードは、位相縮約理論に基づいた安定性解析により安定であることが示された。また、安定な同期モードで外容器水位の最小変化率を得た。

上記の結果を踏まえ、密度差振動子の非平衡構造を決める因子として溶質の輸送効率や水位の最小変化率について、その物理的意義や普遍性を考察した。



# 目次

第 I 部	序論	vii
第 1 章	非線形振動	1
1.1	線形振動と非線形振動 . . . . .	1
1.2	分岐現象 . . . . .	1
1.2.1	サドルノード分岐 . . . . .	2
1.2.2	トランスクリティカル分岐 . . . . .	3
1.2.3	超臨界ピッチフォーク分岐 . . . . .	4
1.2.4	亜臨界ピッチフォーク分岐 . . . . .	4
1.2.5	超臨界ホップ分岐 . . . . .	5
1.2.6	無限周期分岐 . . . . .	6
1.2.7	スケーリング則 . . . . .	7
1.3	外力応答 . . . . .	7
1.4	同期現象 . . . . .	8
第 2 章	流体系における振動現象	11
2.1	主要な例 . . . . .	11
2.2	密度差振動子系 . . . . .	11
2.2.1	振動メカニズム . . . . .	12
2.2.2	分岐現象 . . . . .	14
2.2.3	同期現象 . . . . .	14
第 3 章	目的と構成	15
第 II 部	単一の密度差振動子における分岐現象	17
第 4 章	実験	19
4.1	実験手法 . . . . .	19
4.2	実験結果 . . . . .	20
4.3	議論 . . . . .	23
4.4	結論 . . . . .	26

第 5 章	2次元流体シミュレーション	27
5.1	支配方程式	27
5.1.1	オイラー的記述	27
5.1.2	質量保存	28
5.1.3	運動量保存	29
5.1.4	濃度の移流・拡散現象	30
5.2	数値計算方法	31
5.2.1	MAC 法	31
5.2.2	密度が変化する場合	32
5.2.3	ブジネスク近似	32
5.2.4	近似方法による数値計算結果の比較	32
5.2.5	2成分化・離散化	33
5.2.6	境界の取り扱い	36
5.2.7	2次元の密度差振動子モデル	37
5.3	数値計算結果	38
5.4	議論	41
5.5	結論	43
第 III 部	複数の密度差振動子の結合系における同期現象	45
第 6 章	等しい密度差振動子の結合系	47
6.1	結合系モデルへの拡張	47
6.2	数値計算結果	49
6.2.1	同期現象	49
6.2.2	位相ダイナミクス	49
6.2.3	線形安定性解析	59
6.3	議論	61
6.4	結論	62
第 7 章	異なる自然角振動数をもつ密度差振動子の結合系	65
7.1	2個の結合系モデル	65
7.2	数値計算結果	66
7.2.1	1:1 同期	66
7.2.2	$m:n$ 同期	68
7.2.3	結合強度依存性	69
7.3	結論	70

---

第 IV 部 結論	71
第 8 章 総括	73
第 9 章 課題と今後の展望	75
参考文献	79
付録 A レイリー数の導出	81
付録 B その他の数値計算方法	83
B.1 モデル (i) : 圧力のポアソン方程式 (5.34) を用いた場合 . . . . .	83
B.2 モデル (iii) : ブジネスク近似を用いた場合 . . . . .	85
付録 C 反復法	87
C.1 ヤコビ法 . . . . .	88
C.2 ガウス・ザイデル法 . . . . .	89
C.3 SOR 法 . . . . .	89
付録 D 移流拡散方程式の数値安定性	91
付録 E $\Gamma(\phi)$ のフーリエ成分 $a_k, b_k$ を用いた固有値 $\lambda$	93
付録 F 非平衡構造の選択に関する基準の検討	95
付録 G 結合系における流体相互作用の効果	99



# 第 I 部

## 序論



# 第 1 章

## 非線形振動

自然界には非線形振動を示す現象が多数あり、それらに共通する理論的記述が行われている。ここでは文献 [1, 2] を参考にして、非線形振動の中でもリミットサイクル振動に焦点を当て、その特徴について述べる。

### 1.1 線形振動と非線形振動

エネルギーの注入と散逸を伴う非平衡系では、安定な空間・時間不均一構造が自発的に発生する。例えば、うろこ雲やいわし雲などの雲の周期構造は、熱せられた地表の水蒸気が上昇し、上空で冷やされて発生した熱対流構造であり、熱エネルギーの流入出を伴っている。平衡系が熱力学による平衡条件により定められるのに対し、非平衡構造がどのようなメカニズムで現れるかを説明する統一的な枠組みはない。そこで、本研究では非平衡構造の中でも自然界に多様な例をもつ振動現象に着目し、非平衡構造を決定するメカニズムを考える。

初期条件に依存し、系のエネルギーが保存する線形振動 (単振動) に対して、エネルギーの出入りを伴い、非線形方程式に従う系で生じる、初期条件に依存しない振動は非線形振動と呼ばれる。線形振動と非線形振動の位相空間での軌道を図 1.1 に示す。非線形振動の中でも、解の軌道が時間無限大の極限でエネルギーの注入と散逸のバランスする閉軌道 (リミットサイクル) に収束し、周期的な変化を示す振動はリミットサイクル振動と呼ばれる。リミットサイクル振動は系に固有の安定な振動であり、摂動を受けても再び元の軌道に収束する性質をもつ。リミットサイクル振動の例としては、メトロノームの振動や BZ (Belousov-Zhabotinsky) 反応、体内における心臓の拍動や概日リズムなど様々なものがあり、共通する振動メカニズムに着目して数理的に理解されている。以下ではリミットサイクル振動に関して、分岐現象と同期現象の数理モデルを導入する。

### 1.2 分岐現象

パラメータが変わる際に系のふるまいが定性的に変わることを分岐といい、このパラメータを分岐パラメータという。分岐パラメータに対する系のふるまいの定性的な変化は、分岐構造としてその発生メカニズムを分類できる。分岐構造を調べることで、系の安定な状態や、その切り替わりを数理的なアプローチから理解できる。分岐構造にはいくつかの代表的な種類が知られている。以下では、各分岐構造を示す系が従う典型的な微分方程式  $dx/dt = f(x)$  に対して、ポテンシャル表示と分岐図を

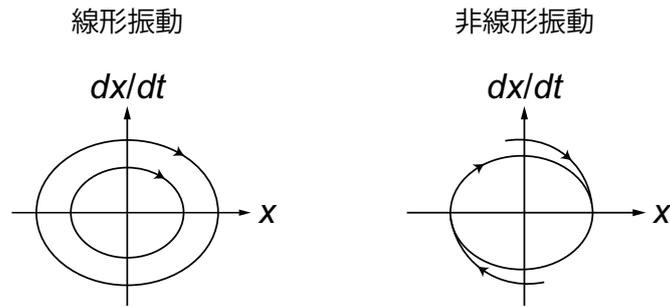


図 1.1 線形振動と非線形振動。 $x$  は振動の変位で、時間  $t$  の関数である。

示す。質量  $m$  の質点の位置座標を  $x$  として、抵抗係数  $k$  の速度に比例する減衰力および外力  $f(x)$  の下でのニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} + f(x) \quad (1.1)$$

を考える。左辺の項を 0 とする、つまり慣性力が減衰力と  $f(x)$  に比べて十分小さく無視できるとすると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{k} \quad (1.2)$$

となる。ここで、 $k = 1$  と仮定する。 $f(x)$  が保存力であれば、ポテンシャル  $U$  を用いて  $f(x) = -\frac{dU}{dx}$  と書き換えられるので、固定点  $dx/dt = 0$  における系の安定性は、ポテンシャル中の質点の安定性から調べることができる。

### 1.2.1 サドルノード分岐

典型的な 1 次元系として

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \quad (1.3)$$

を考える。ここで  $\mu$  は分岐パラメータである。 $dx/dt = 0$  となる点は固定点と呼ばれ、式 (1.3) より

$$0 = \mu - x^2$$

$$\therefore x = \begin{cases} \pm\sqrt{\mu} & (\mu > 0) \\ 0 & (\mu \leq 0) \end{cases} \quad (1.4)$$

である。次に、この固定点が分岐パラメータ  $\mu$  に対して安定となるか、不安定となるかを調べる。ポテンシャル  $U$  を導入し、 $dx/dt = -dU/dx$  として式 (1.3) を変形すると

$$-\frac{dU}{dx} = \mu - x^2$$

$$\therefore U = -\mu x + \frac{1}{3}x^3 + C \quad (1.5)$$

となる。ここで  $C$  は積分定数である。 $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu > 0$  のそれぞれの場合で  $x$  に対して  $U$  を描いたグラフを図 1.2(a) に示す。ただし、 $C = 0$  とした。 $\mu < 0$  で固定点は存在せず、 $\mu > 0$  で

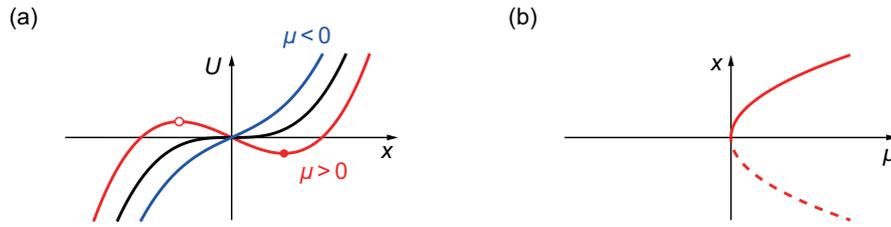


図 1.2 サドルノード分岐。(a) ポテンシャル。●は安定固定点、○は不安定固定点をそれぞれ示す。(b) 分岐図。実線は安定解、破線は不安定解をそれぞれ示す。

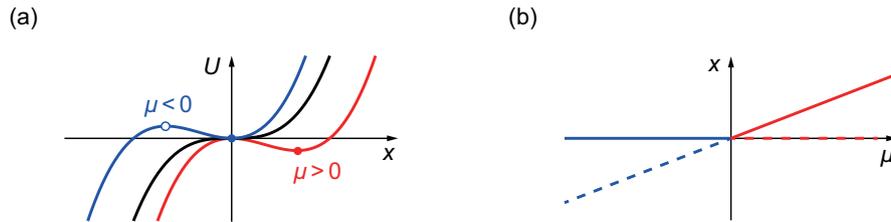


図 1.3 トランスクリティカル分岐。(a) ポテンシャル。(b) 分岐図。

$x = \sqrt{\mu}$  が安定固定点、 $x = -\sqrt{\mu}$  が不安定固定点となる。この結果を分岐パラメータ  $\mu$  に対する  $x$  として描いた分岐図を図 1.2(b) に示す。この分岐の特徴は、分岐パラメータ  $\mu$  を大きくしていくと、分岐点  $\mu = 0$  で一对の安定固定点と不安定固定点が現れることである。

## 1.2.2 トランスクリティカル分岐

典型的な 1 次元系として

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \quad (1.6)$$

を考える。固定点は式 (1.6) で  $dx/dt = 0$  とすることで

$$\begin{aligned} 0 &= \mu x - x^2 \\ \therefore x &= 0, \mu \end{aligned} \quad (1.7)$$

である。 $dx/dt = -dU/dx$  として式 (1.6) を変形すると

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= \mu x - x^2 \\ \therefore U &= -\frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C \end{aligned} \quad (1.8)$$

となる。 $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu > 0$  のそれぞれの場合で  $x$  に対して  $U$  を描いたグラフを図 1.3(a) に示す。ただし、 $C = 0$  とした。 $\mu < 0$  で  $x = \mu$  が不安定固定点、 $x = 0$  が安定固定点となり、 $\mu > 0$  で  $x = 0$  が不安定固定点、 $x = \mu$  が安定固定点となる。この結果を分岐パラメータ  $\mu$  に対する  $x$  として描いた分岐図を図 1.3(b) に示す。この分岐の特徴は、分岐パラメータ  $\mu$  を大きくしていくと、分岐点  $\mu = 0$  で二つの固定点の安定性が入れ替わることである。

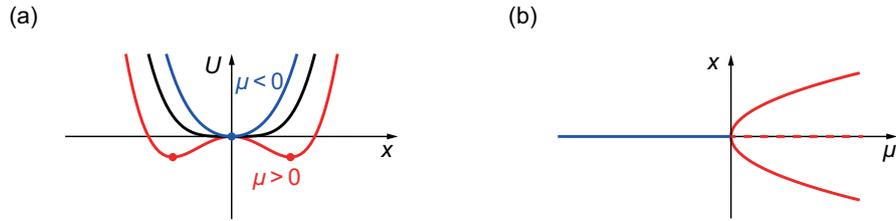


図 1.4 超臨界ピッチフォーク分岐。(a) ポテンシャル。(b) 分岐図。

### 1.2.3 超臨界ピッチフォーク分岐

典型的な 1 次元系として

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \quad (1.9)$$

を考える。固定点は式 (1.9) で  $dx/dt = 0$  とすることで

$$0 = \mu x - x^3$$

$$\therefore x = \begin{cases} 0, \pm\sqrt{\mu} & (\mu > 0) \\ 0 & (\mu \leq 0) \end{cases} \quad (1.10)$$

である。 $dx/dt = -dU/dx$  として式 (1.9) を変形すると

$$-\frac{dU}{dx} = \mu x - x^3$$

$$\therefore U = -\frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C \quad (1.11)$$

となる。 $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu > 0$  のそれぞれの場合で  $x$  に対して  $U$  を描いたグラフを図 1.4(a) に示す。ただし、 $C = 0$  とした。 $\mu < 0$  で  $x = 0$  が安定固定点となり、 $\mu > 0$  で  $x = 0$  が不安定固定点、 $x = \pm\sqrt{\mu}$  が安定固定点となる。この結果を分岐パラメータ  $\mu$  に対する  $x$  として描いた分岐図を図 1.4(b) に示す。この分岐の特徴は、分岐パラメータ  $\mu$  を大きくしていくと、分岐点  $\mu = 0$  でそれまでの安定点が不安定となり、その両側に新しい安定固定点が対称的に現れることである。

### 1.2.4 亜臨界ピッチフォーク分岐

典型的な 1 次元系として

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3 \quad (1.12)$$

を考える。固定点は式 (1.12) で  $dx/dt = 0$  とすることで

$$0 = \mu x + x^3$$

$$\therefore x = \begin{cases} 0, \pm\sqrt{-\mu} & (\mu < 0) \\ 0 & (\mu \geq 0) \end{cases} \quad (1.13)$$

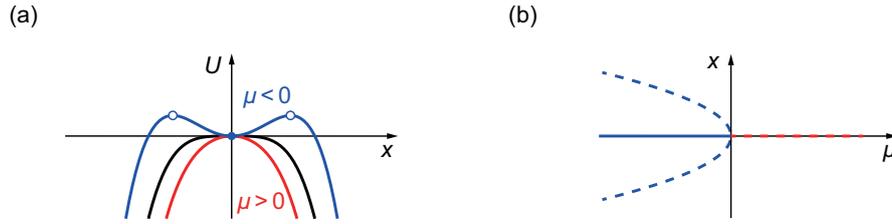


図 1.5 超臨界ピッチフォーク分岐。(a) ポテンシャル。(b) 分岐図。

である。  $dx/dt = -dU/dx$  として式 (1.12) を変形すると

$$-\frac{dU}{dx} = \mu x + x^3$$

$$\therefore U = -\frac{1}{2}\mu x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C \quad (1.14)$$

となる。  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu > 0$  のそれぞれの場合で  $x$  に対して  $U$  を描いたグラフを図 1.5(a) に示す。ただし、  $C = 0$  とした。  $\mu < 0$  で  $x = 0$  が安定固定点、  $x = \pm\sqrt{-\mu}$  が不安定固定点となり、  $\mu > 0$  で  $x = 0$  が不安定固定点となる。この結果を分岐パラメータ  $\mu$  に対する  $x$  として描いた分岐図を図 1.5(b) に示す。この分岐の特徴は、超臨界ピッチフォーク分岐とは対照的で、分岐パラメータ  $\mu$  を大きくしていくと、それまでの安定点が分岐点を越えたところで不安定となり、解の軌道を無限大へ向かわせる性質をもつことである。

現実の物理系では、この不安定性を安定化する項を式 (1.12) に加えた

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3 - x^5 \quad (1.15)$$

のような分岐構造が標準的である。この場合、図 1.5(b) で  $\mu < 0$  における不安定固定点の枝が折れ曲がって安定な枝となるため、  $\mu > 0$  における不安定性がおさえられる。また、分岐パラメータ  $\mu$  に対する系の状態変化が可逆でなくなる履歴現象が生じる。

### 1.2.5 超臨界ホップ分岐

$x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  における典型的な 2 次元系として

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^3 \quad (1.16)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - br^2 \quad (1.17)$$

を考える。  $\omega$ ,  $b$  は定数とする。ここで、式 (1.16) は式 (1.9) と同じ形をしていることから、振幅  $r (\geq 0)$  の固定点は

$$r = \begin{cases} 0, \sqrt{\mu} & (\mu > 0) \\ 0 & (\mu \leq 0) \end{cases} \quad (1.18)$$

となる。  $\mu > 0$  で現れる振動の周期  $T$  は、式 (1.17) に  $r = \sqrt{\mu}$  を代入して

$$T = \int_t^{t+T} dt' = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d\theta/dt} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - b\mu} = \frac{2\pi}{\omega - b\mu} \quad (1.19)$$

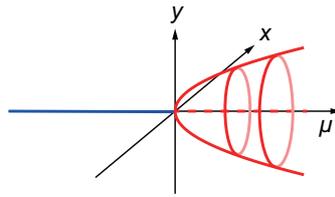


図 1.6 超臨界ホップ分岐の分岐図。

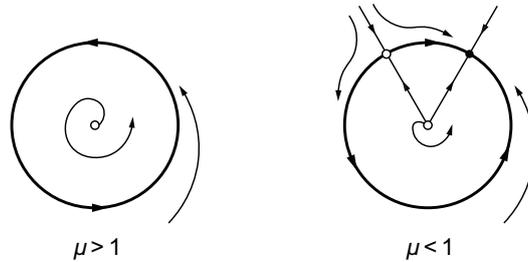


図 1.7 無限周期分岐の模式図。

となる。分岐パラメータ  $\mu$  に対する  $x, y$  を描いた分岐図を図 1.6 に示す。この分岐の特徴は、分岐パラメータ  $\mu$  を大きくしていくと、分岐点において安定な状態が定常状態から振動状態に連続的に切り替わることである。

### 1.2.6 無限周期分岐

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  における典型的な 2 次元系として

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \quad (1.20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu - \sin \theta \quad (1.21)$$

を考える。ここで、分岐パラメータは  $\mu \geq 0$  とする。式 (1.20) は、式 (1.9) で  $\mu = 1$  としたものと同じ形であるから、振動の振幅について  $r = 0$  は不安定固定点、 $r = 1$  は安定固定点となる。一方、式 (1.21) は、式 (1.3) の場合と同様に考えることができる。固定点は式 (1.21) で  $d\theta/dt = 0$  としたときの  $\sin \theta = \mu$  を満たす  $\theta = \theta_1, \theta_2$  ( $\theta_1 \leq \theta_2$  とする) である。ここで、 $\theta_1$  は安定固定点、 $\theta_2$  は不安定固定点である。つまり、 $\theta$  は分岐パラメータ  $\mu$  に対して  $\mu = 1$  でサドルノード分岐する。振動の周期  $T$  は式 (1.21) より

$$T = \int_t^{t+T} dt' = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d\theta/dt} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mu - \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu + 1}} \frac{1}{\sqrt{\mu - 1}} \quad (1.22)$$

となる。分岐パラメータ  $\mu$  に対する振動の模式図を図 1.7 に示す。この分岐の特徴は、分岐パラメータ  $\mu$  を小さくしていくと、分岐点  $\mu = \mu_c$  において振動の周期が  $(\mu - \mu_c)^{-1/2}$  のスケーリングで発散することである。

表 1.1 リミットサイクル振動が生じる分岐構造とそのスケーリング則 [1]。

	振幅	周期
超臨界ホップ分岐	$O(\mu^{1/2})$	$O(1)$
周期軌道のサドルノード分岐	$O(1)$	$O(1)$
無限周期分岐	$O(1)$	$O(\mu^{-1/2})$
ホモクリニック分岐	$O(1)$	$O(\ln \mu)$

### 1.2.7 スケーリング則

2次元系でリミットサイクル振動を生じる典型的な分岐構造は、超臨界ホップ分岐、無限周期分岐の他に周期軌道のサドルノード分岐、ホモクリニック分岐がある。これらの分岐構造について、分岐点近傍におけるリミットサイクル振動の振幅と周期のスケーリングをまとめたものを表 1.1 に示す。スケーリングから分岐構造を特定できれば、系のダイナミクスの理解に役立つ。

## 1.3 外力応答

リミットサイクル振動は一定の周期をもつ周期運動であるから、この周期に対応する位相  $\phi$  ( $0 \leq \phi < 2\pi$ ) を定義できる。リミットサイクル軌道上にある系に対して摂動を与えると、系の状態はリミットサイクルの軌道から外れるが、十分に時間が経つと再びリミットサイクル軌道に戻る。このとき、摂動を与えていない状態と比べて位相差が生じている。摂動を与えていない状態の位相を  $\phi$ 、摂動を与えた状態の位相を  $\phi'$  とすると、位相シフト  $\Delta\phi$  は

$$\Delta\phi = \phi' - \phi \quad (1.23)$$

となる。ここで、 $\Delta\phi > 0$  ならば位相は進み、 $\Delta\phi < 0$  ならば位相は遅れたことを意味する。各位相  $\phi$  で等しい摂動を与えると、位相シフト  $\Delta\phi$  は  $\phi$  の関数となり、この  $\Delta\phi(\phi)$  を位相応答曲線という。

位相応答が実験的に調べられている例として体内リズムを紹介する [3, 4]。ほとんどの生物の体内時計は、日周期の 24 時間より少し長い (或いは短い) 周期をもつことが知られており、日周期に近いリズムという意味で概日リズムと呼ばれる。体内周期に対応する各位相で、光照射による摂動を与えたときの典型的な位相応答曲線を図 1.8 に示す。ここで、概日リズムに対応する昼と夜の時間帯をそれぞれ主観的昼、主観的夜という。位相シフトの正負から、主観的夜の早い時間に光を浴びると位相は遅れ、主観的夜の遅い時間に光を浴びると位相は進む、という二相性をもつことがわかる。よって、日周期に同調して活動するヒトの場合、朝に太陽光を浴びると位相を進めることができ、日周期に即した活動リズムを維持できると考えられる。このようにリミットサイクル振動を位相で記述し、外力に対する応答を位相応答曲線として調べると系のふるまいが定性的にわかりやすい。

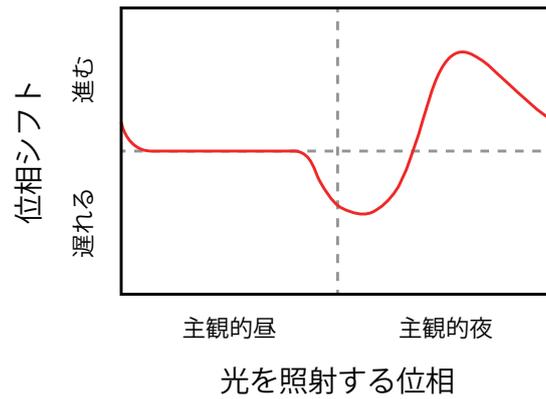


図 1.8 光照射に対する概日リズムの典型的な位相応答曲線 [3, 4]。概日リズムに対応する昼と夜の時間帯をそれぞれ主観的昼、主観的夜という。

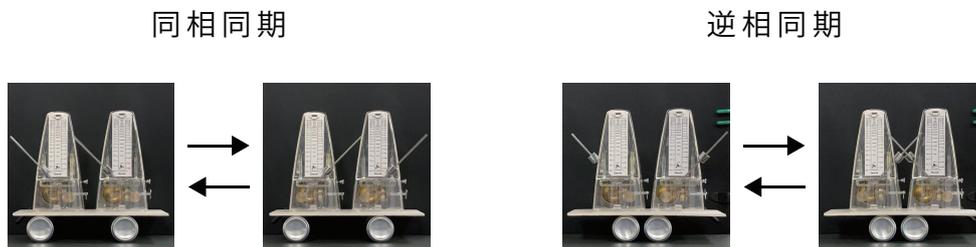


図 1.9 動く台上の 2 個のメトロノームによる同期。アルミ缶の位置やメトロノームのおもりの位置を変えると、同相同期や逆相同期が観察される。

## 1.4 同期現象

固有周期が近い二つ以上のリミットサイクル振動子間で相互作用がはたらくとき、振動のタイミングを揃える同期現象が起こることがある。例えば、図 1.9 のようにおもりの位置を揃えた固有周期の近い 2 個のメトロノームを動く台上に置いた系では、十分な時間が経つと針の方向が同じ向き (或いは反対向き) に揃う現象がみられる。他にも、自然界では蛍の集団がタイミングを揃えて明滅する現象が有名である [5]。

ここでは結合振動子系の簡単なモデルとして

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + K_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.24)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + K_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (1.25)$$

を考える。ここで  $\theta_1, \theta_2$  は各振動子の位相、 $\omega_1, \omega_2$  は各振動子の自然角振動数、 $K_1, K_2$  は結合定数である。このような相互作用する結合振動子系のダイナミクスは、振動子間の位相差  $\phi = \theta_1 - \theta_2$  を調べることで理解できる。位相差の時間微分は式 (1.24),(1.25) より

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \\ &= \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2) \sin \phi \end{aligned} \quad (1.26)$$

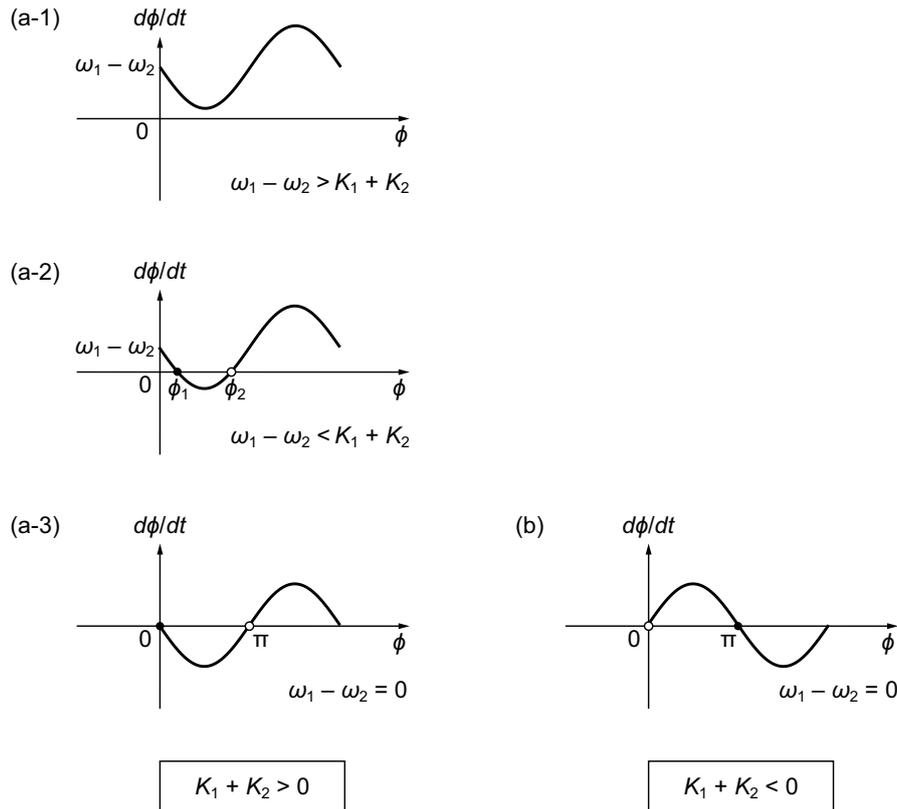


図 1.10 相互作用する 2 個の振動子の同期解。(a)  $K_1 + K_2 > 0$ , (b)  $K_1 + K_2 < 0$ 。(a-1)  $\omega_1 - \omega_2 > K_1 + K_2$  の場合。固定点は存在しない。(a-2)  $\omega_1 - \omega_2 < K_1 + K_2$  の場合。 $\phi = \phi_1$  は安定固定点、 $\phi = \phi_2$  は不安定固定点。(a-3)  $\omega_1 - \omega_2 = 0$  の場合。 $\phi = 0$  は安定固定点であり、同相同期に対応する。 $\phi = \pi$  は不安定固定点であり、逆相同期に対応する。(b)  $\omega_1 - \omega_2 = 0$  の場合。 $\phi = 0$  は不安定固定点、 $\phi = \pi$  は安定固定点。●は安定固定点、○は不安定固定点をそれぞれ示す。

となる。 $d\phi/dt = 0$  のとき、つまり 2 個の振動子が一定の位相差を保って振動するとき、式 (1.26) より位相差は  $\sin \phi = (\omega_1 - \omega_2)/(K_1 + K_2)$  を満たす  $\phi$  ( $\phi_1, \phi_2$  ( $\phi_1 < \phi_2$ ) とする) である。位相差  $\phi$  に対して、その時間微分  $d\phi/dt$  を描いたグラフを図 1.10 に示す。 $K_1 + K_2 > 0$  のとき、図 1.10(a-1) に示す  $\omega_1 - \omega_2 > K_1 + K_2$  の場合は、 $d\phi/dt = 0$  となる解は存在しないため同期は起こらない。図 1.10(a-2) に示す  $0 < \omega_1 - \omega_2 < K_1 + K_2$  の場合は、 $d\phi/dt > 0$  で  $\phi$  は増加し、 $d\phi/dt < 0$  で  $\phi$  は減少するため  $\phi = \phi_1$  が安定な固定点となる。よって 2 個の振動子は位相差  $\phi_1$  で同期し、そのときの振動数は  $\omega = d\theta_1/dt = d\theta_2/dt = \omega_2 + K_2 \sin \phi_1$  である。等しい振動子の結合系では  $\omega_1 - \omega_2 = 0$  であり、図 1.10(a-3) に示すように  $\phi = 0$  が安定、 $\phi = \pi$  が不安定な固定点となる。位相差  $\phi = 0$  の同期は同相同期、 $\phi = \pi$  での同期は逆相同期と呼ばれる。一方、図 1.10(b) に示す  $K_1 + K_2 < 0$  の場合は、 $\omega_1 - \omega_2 = 0$  で  $\phi = 0$  が不安定、 $\phi = \pi$  が安定な固定点となる。

上記のふるまいから、振動子間の自然角振動数が近く、結合強度が強い程、同期が起こりやすいといえる。また、パラメータ  $\omega_1 - \omega_2$  を小さくしていくと、 $\omega_1 - \omega_2 = K_1 + K_2$  で一対の安定固定点と不安定固定点が現れるふるまいは、サドルノード分岐に相当する。



## 第2章

# 流体系における振動現象

非平衡構造として現れる振動状態がどのような基準から選択されるのかは非自明である。本研究では、リミットサイクル振動を示す具体的な系について物理的な特徴を解析し、非平衡構造を決めるメカニズムを考える。ここでは、流体系における振動現象について扱う。

### 2.1 主要な例

まず、これまで盛んに研究されている系として、熱対流系を取り上げる [6]。重力下で、温度の高い流体が温度の低い流体の下にあるとき、熱膨張により下にある流体の密度が低くなり浮力が生じる。浮力が小さければ高温層から低温層への熱伝導が起こり、浮力が大きくなると対流が起こる。このときの流れのダイナミクスは無次元パラメータであるレイリー数  $Ra = g\beta\Delta TL^3/(\nu\alpha)$  によって支配される。ここで、 $g$  は重力加速度、 $\beta$  は熱膨張率、 $\Delta T$  は上下層の温度差、 $L$  は代表的な長さ、 $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は熱拡散率である。理想的な熱対流系であるレイリー・ベナール対流系では、レイリー数を分岐パラメータとして、流れの構造が熱伝導、定常対流、時間周期対流、準周期対流、乱流の間で遷移することが知られている。

次に、近年盛んに研究されている現象として、鞭毛・繊毛運動を取り上げる [7,8]。微生物や動物の器官が備えている鞭毛・繊毛は、流体中を運動する振動子として考えられる。例えば、前方に2本の鞭毛を備えるクラミドモナスは、通常平泳ぎのようなストロークで水中を遊泳することが知られており、2個の振動子が同相同期していると捉えられる。また、同相同期での遊泳中に、時折位相スリップが観察されている。クラミドモナスのある変異体は、同相と逆相を確率的に切り替えて遊泳することが報告されている。これらの鞭毛運動の同期が生じる結合機構として、細胞外部における流体相互作用や細胞内部における直接的な結合が提案されている。

### 2.2 密度差振動子系

密度差振動子はリミットサイクル振動を示す流体系の一つであり、1970年に Martin によって初めて報告された [9]。この系では、高密度流体が二重容器の内側に、低密度流体が外側に入れられ、内容物の底の細孔を通して流体が出入りできる。適当な条件下では、低密度流体の上に高密度流体が配置されていることによるレイリー・テイラー不安定性に起因して、低密度流体の上向きの流れと高密度流体の下向きの流れが細孔を通して交互に起こるリミットサイクル振動が見られる。また、共通

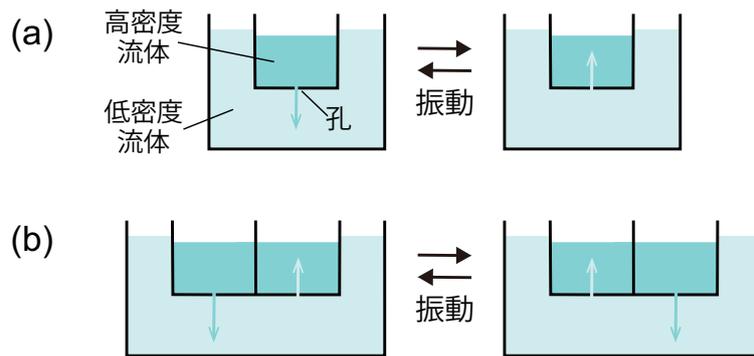


図 2.1 密度差振動子の模式図。(a) 単一の密度差振動子。細孔を通る流れの向きが周期的に切り替わる。(b) 密度差振動子の結合系。振動子間で逆向きの流れが生じる。

の外容器に複数の内容器が含まれる密度差振動子の結合系では同期現象がみられる。密度差振動子の単一系と結合系の模式図を図 2.1(a),(b) にそれぞれ示す。前述した熱対流系や微生物系と比べても、密度差振動子系は塩水と水などを用いたシンプルな実験のセットアップで再現・可視化でき、振動子として扱いやすいリミットサイクル振動子である。

## 2.2.1 振動メカニズム

密度差振動子は、軌道安定性や振動子間の同期などのリミットサイクル振動の典型的な特徴を示すことが報告されている [10, 11]。また、水位の時間変化の波形は緩和振動を示すことが知られている [11, 12]。この緩和振動は、図 2.2 に示すように、水位が二つの値に交互に漸近する振動で、指数関数の組み合わせで表すことができる。このモデルは、孔 (毛管) の内部の流れをハーゲン・ポアズイユ流とみなすことで理解できる。非圧縮粘性流体の場合、 $y$  軸方向に伸びた円管内を一方向に流れる定常流の流速は

$$v = -\frac{dp}{dy} \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \quad (2.1)$$

として厳密に求められる [13]。ここで、 $v$  は  $y$  軸方向の速度成分、 $p$  は流体の圧力、 $a$  は円管半径、 $r$  は  $y$  軸に垂直な極座標平面における原点からの距離、 $\mu$  は流体の粘性係数である。単位時間あたりに管を通過する流量  $Q$  は

$$Q = 2\pi \int_0^a v r dr = -\frac{dp}{dy} \frac{\pi a^4}{8\mu} \quad (2.2)$$

となる。密度差振動子において円管内の上向きの流れを考え、孔の内部の圧力勾配が

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\rho_{\text{high}}(h_{\text{in}} - d) - \rho_{\text{low}}h_{\text{out}}}{d} g \quad (2.3)$$

で与えられるとする。ここで、 $\rho_{\text{high}}$  は高密度流体の密度、 $\rho_{\text{low}}$  は低密度流体の密度、 $g$  は重力加速度、 $d$  は孔の長さ、 $h_{\text{in}}$  は内容器の水位、 $h_{\text{out}}$  は外容器の水位である。水位の原点は孔の最下点とし

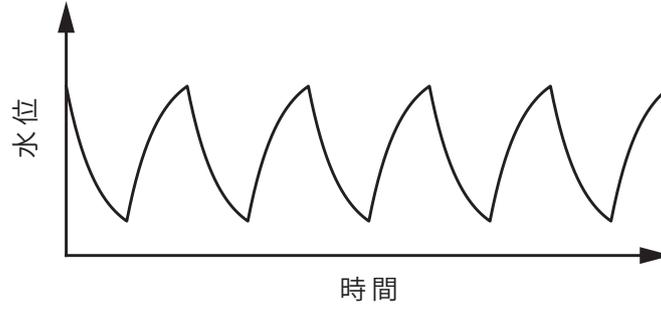


図 2.2 指数関数の組み合わせによる、密度差振動子における典型的な水位の時系列。

た。流量の保存を考えると、内容器の水位と外容器の水位には

$$S_{\text{in}} \frac{dh_{\text{in}}}{dt} = -S_{\text{out}} \frac{dh_{\text{out}}}{dt} \quad (2.4)$$

$$\therefore h_{\text{out}}(t) = -\frac{S_{\text{in}}}{S_{\text{out}}} h_{\text{in}}(t) + \frac{S_{\text{in}}}{S_{\text{out}}} h_{\text{in}}(0) + h_{\text{out}}(0) \quad (2.5)$$

の関係が成り立つ。ここで、 $S_{\text{in}}$  は内容器の断面積、 $S_{\text{out}}$  は外容器の断面積である。内容器水位の時間微分は  $dh_{\text{in}}/dt = Q/S_{\text{in}}$  として求められるから、式 (2.2),(2.3),(2.5) より

$$\frac{dh_{\text{in}}}{dt} = -\frac{\pi a^4 g}{8\mu d} \left\{ \left( \frac{\rho_{\text{high}}}{S_{\text{in}}} + \frac{\rho_{\text{low}}}{S_{\text{out}}} \right) h_{\text{in}} - \rho_{\text{high}} \frac{d}{S_{\text{in}}} - \rho_{\text{low}} \left( \frac{h_{\text{out}}(0)}{S_{\text{in}}} + \frac{h_{\text{in}}(0)}{S_{\text{out}}} \right) \right\} \quad (2.6)$$

が得られる。

$$\frac{dh_{\text{in}}}{dt} = -Ah_{\text{in}} + B \quad (2.7)$$

$$A = \frac{\pi a^4 g}{8\mu d} \left( \frac{\rho_{\text{high}}}{S_{\text{in}}} + \frac{\rho_{\text{low}}}{S_{\text{out}}} \right) \quad (2.8)$$

$$B = \frac{\pi a^4 g}{8\mu d} \left\{ \rho_{\text{high}} \frac{d}{S_{\text{in}}} + \rho_{\text{low}} \left( \frac{h_{\text{out}}(0)}{S_{\text{in}}} + \frac{h_{\text{in}}(0)}{S_{\text{out}}} \right) \right\} \quad (2.9)$$

として書き換えると、内容器水位は

$$h_{\text{in}} = Ce^{-At} + \frac{B}{A} \quad (2.10)$$

となり、時間に対して指数関数的に緩和することがわかる。ここで、 $C$  は任意の正の定数である。下向きの流れについても同様に考えると、式 (2.10) が求まるが、このとき  $C$  は任意の負の定数となる。

このような実験観察による密度差振動子の特徴を踏まえて、流れのダイナミクスの理論モデルを提案した研究がいくつかある。Steinbock 等は、2次元系における孔(毛管)を降下する高密度流体について定常状態を仮定し、流れが反転する際の高密度流体の臨界水位  $h_c$  について

$$h_c - h_1 = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{\rho_w}{\rho_s} \right) L, \quad h_1 = \frac{\rho_w}{\rho_s} H \quad (2.11)$$

という関係を導出した [12]。ここで、 $h_1$  は高密度流体の平衡水位、 $\rho_w$  は水の密度、 $\rho_s$  は塩水の密度、 $L$  は毛管(孔)の長さ、 $H$  は低密度流体の平衡水位で、外容器幅が内容器幅に比べて十分大きいとき

は一定とみなせる。水位の原点は毛管の最下点とした。つまり、臨界水位は流体の密度比と毛管の長さに依存する。Okamura と Yoshikawa は、自由境界をもつ密度差振動子に対して、volume of fluid (VOF) 法を用いて 3 次元の流体シミュレーションを行った [14]。この研究では、リミットサイクル振動に寄与する圧力勾配、粘性、重力等の重要な要素をシミュレーションから導き、これらの要素から成る振動が、水位を変数としたレイリー方程式に従うことを導いた。ここで、レイリー方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu \left( 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.12)$$

で表される常微分方程式であり、 $\mu > 0$  のときリミットサイクル振動することが知られている [15]。

## 2.2.2 分岐現象

Aoki は、流体方程式の縮約から得られた常微分方程式を用いて、密度勾配に相当する自己触媒パラメータを定義し、分岐構造を解析した [16]。その結果、リミットサイクル振動が生じるホップ分岐の質的なタイプが超臨界ピッチフォーク分岐と等価であることを示唆している。一方で、実験パラメータを変化させて分岐構造を調べた研究は行われておらず、密度差振動子の実際のダイナミクスを理解し、上記のような縮約の有効性を議論するためにも、実験観測や流体方程式に直接基づいた分岐解析を行う事が重要であると考えられる。

## 2.2.3 同期現象

密度差振動子の結合系では、結合強度や振動子間の自然角振動数の差に依存して様々な同期モードが報告されている [10, 11, 17–22]。振動子間の自然角振動数がほぼ等しい場合、つまり内容器サイズと高密度流体の密度が振動子間でほぼ等しい場合、2 結合系は逆相同期モード [10, 17, 19, 22]、3 結合系は 3 相同期モード (回転同期モードとも呼ばれる) [10, 17, 21, 22]、4 結合系は結合強度に依存していくつかの同期モード [21, 22] をそれぞれ示すことが実験観察により報告されている。また、いくつかの理論モデルがこれらの同期モードを再現した [10, 11, 17, 18, 22]。Horie 等は、指数関数の組み合わせモデルを用いて、弱結合における位相縮約理論に基づいた数理モデル

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + K \sum_{j \neq i} \Gamma(\phi_i - \phi_j) \quad (2.13)$$

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -(1/\pi) \{ x e^{-\alpha(\pi-x)} - (\pi-x) e^{\alpha x} \} & (0 \leq x < \pi) \\ (1/\pi) \{ (x-\pi) e^{-\alpha(2\pi-x)} - (2\pi-x) e^{\alpha(x-\pi)} \} & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases} \quad (2.14)$$

を導出した [22]。ここで、 $\phi_i$  は  $i$  番目の振動子の位相、 $\omega$  は自然角振動数、 $K$  は結合強度である。このモデルを用いた解析により、2 結合系では逆相モードが安定、3 結合系では  $\alpha$  がしきい値以下で 3 相モードが安定であることを示している。4 結合系では、数値計算結果より、 $\alpha$  が小さく  $K$  が大きいほど同期状態が現れる傾向が示されており、現れた同期モードは、2 個の同相振動子からなる組が二つあり、それらの位相差が  $\pi$  となるモードと、2 個の逆相振動子からなる組が二つあり、それらの位相差が一定 ( $0, \pi/2, \pi$  でない) となるモードの 2 種類である。前者の同期モードは実験で観察されているが、このモデルによってその安定性は示されていない。よって、結合系のダイナミクスを理解するためにも、流体方程式に直接基づいた解析が有効であると考えられる。

## 第3章

# 目的と構成

非平衡構造として現れる振動状態がどのような基準から選択されるのかは非自明である。本研究では、リミットサイクル振動を示す具体的な系について、分岐現象と同期現象を調べ、非平衡構造の選択基準となる因子を明らかにすることを目的とする。

第 II 部では、密度差振動子の二流体の密度差を分岐パラメータとした分岐構造を調べることで、非平衡構造が生じる転移点近傍での挙動を観察し、リミットサイクル振動が発生するメカニズムを理解する。まず、実験観察を行い、分岐構造を検討した。次に、実験観察が難しい領域について数値計算を行い、分岐構造を特定した。この際、パラメータをふってより多くの計算を行うために、計算コストの低い数値計算モデルを構築した。実験は 4 章で扱い、その内容は [23] の論文に基づく。数値計算は 5 章で扱い、その内容は [24] の論文に基づく。

第 III 部では、密度差振動子の位相応答や結合振動子系で現れる同期モードについて数値計算を用いて調べることで、系の物理的特徴を解析し、取りうる同期モードの中から実現するモードが選ばれる基準を検討する。まず、等しい振動子の 2,3,4 個の結合系について、取りうる同期モードの安定性解析と物理的特徴の比較を行った。次に、異なる自然角振動数をもつ 2 個の振動子の結合系について、自然角振動数の差をパラメータとした同期モードの変化を調べ、安定性解析を行った。等しい振動子の結合系は 6 章で扱い、その内容は [25] の論文に基づく。異なる自然角振動数をもつ振動子の結合系は 7 章で扱う。

第 IV 部では、本研究で達成したことと今後の課題をまとめた。また、第 II 部、第 III 部の結果を踏まえ、密度差振動子の非平衡構造を決める因子とその物理的意義や普遍性を考察した。



## 第II部

# 単一の密度差振動子における分岐現象



## 第4章

# 実験

本章では、密度差振動子の振動ダイナミクスを理解するために、二流体の密度差を分岐パラメータとして変化させたときの分岐構造を実験的に調べた [23]。

### 4.1 実験手法

アクリル板で作られた2重容器の内容器に高密度溶液としてNaCl水溶液を、外容器に低密度溶液として水を入れた。レーザ変位計を用いて外容器の水面高さ $h$ を測定することで振動を観測した。容器の表面にプラスチックシートを貼り、後方から光を当てることで、シート上に映る流れの像を観察した。寸法や実際の様子は図4.1に示した。ここで、NaCl水溶液の作成には富士フィルム和光純薬株式会社の塩化ナトリウム(191-01665)を用いた。レーザ変位計は株式会社キーエンスのLT-9010Mを用いた。光源には林時計工業株式会社のLEDルミネアース(LA-HDF158AS)を用いた。低密度溶液とNaCl水溶液の作製にはメルク株式会社のElix Essential UV 3による純粋を用いた。プラスチックシートは株式会社タミヤのプラペーパー0.1 mm厚を用いた。

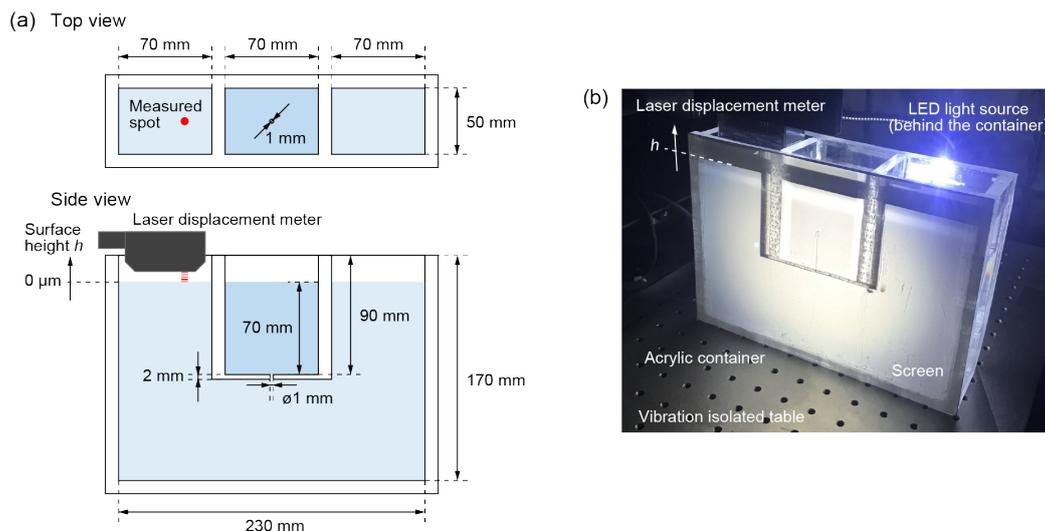


図 4.1 実験のセットアップ [23]。(a) アクリル板で作られた容器の寸法。レーザ変位計とその照射位置。(b) 水面高さ $h$ の測定と流れの観察の様子。

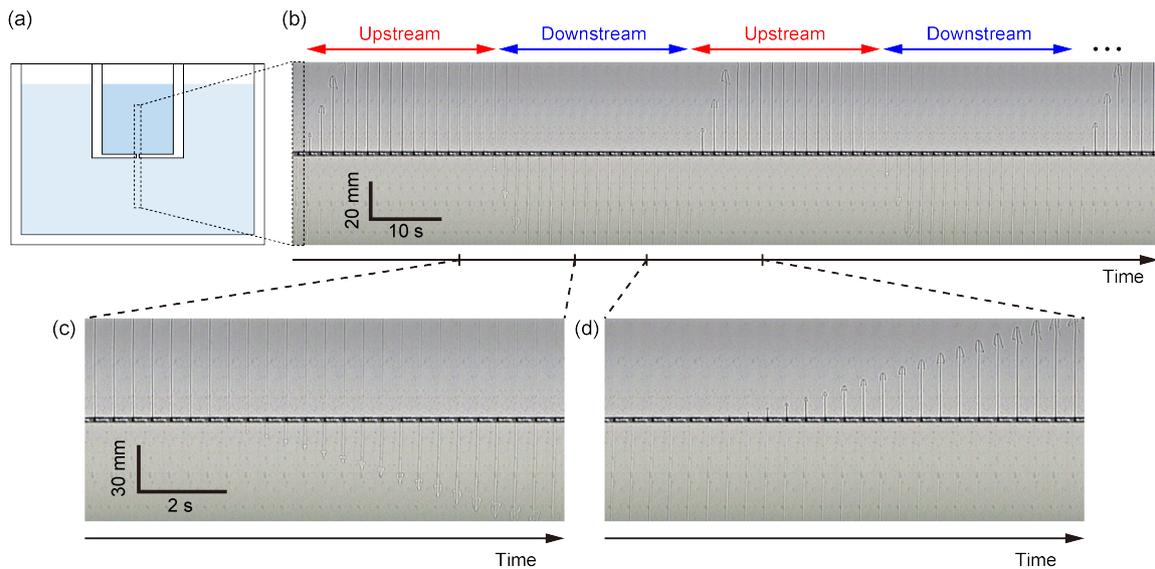


図 4.2 密度差振動子における流れが振動する様子のスナップショット [23]。NaCl 水溶液の濃度は  $c = 30 \text{ g/L}$ 。(a) 表示領域。(b) 流れが振動する様子。(c) 上向きの流れが下向きの流れに切り替わるときの詳細。(d) 下向きの流れが上向きの流れに切り替わるときの詳細。

初期状態のセットアップとして、内容器に 245 mL の NaCl 水溶液、外容器に 1400 mL の純水を入れることで、内外容器の水位を揃えた。このとき内容器底の孔は針で塞いだ。針を外してから 4000 s の間、水面高さを測定した。この内、実験データの解析に用いるのは 2000 s 以降とし、初期緩和時間を十分に考慮した。

## 4.2 実験結果

NaCl 水溶液の濃度が  $c = 30 \text{ g/L}$  のときに観察された振動流の様子を図 4.2 に示す。この条件では、振動は約 60 s の周期で上向きの流れと下向きの流れを交互に繰り返した (図 4.2(b))。流れの切り替わりの詳細では、矢印のような先端をした流れがもう一方の溶液にほとんど一定の速度で侵入していく様子が見られた (図 4.2(c,d))。

NaCl 水溶液の濃度が  $c = 0 \text{ g/L}$  における外容器の水面高さ  $h$  の時系列を図 4.3(a) に示す。 $h$  の測定データ (青線) では、水の蒸発により、 $h$  が時間経過とともに一定の割合で減少していく様子が見られたため、最小二乗法を用いてこの減少率を求め、測定データからその影響を引いた (グレー線)。この蒸発による影響は、振動に関わらずすべてのデータに対して見られたため、図 4.3(a) と同様の操作を他のすべての  $c$  に対しても同様に行った。振動流が生じた典型的なデータとして NaCl 水溶液の濃度が  $c = 30 \text{ g/L}$  における  $h$  の時系列を図 4.3(b) に示す。図 4.3(a,b) における  $h$  の減少率はそれぞれ  $-0.00746 \mu\text{m/s}$ ,  $-0.00772 \mu\text{m/s}$  でおおよそ一致しており、水の蒸発の割合にも対応している。これらの蒸発の影響を引いたデータに、0.003–0.019 Hz の範囲でバンドパスフィルターを適用し、よりスムーズなデータを得た (赤破線)。 $c = 0 \text{ g/L}$ , 1.5 g/L, 3 g/L, 10 g/L, 30 g/L における  $h$  の時系列と、対応する位相空間 ( $h, dh/dt$ ) における軌道をそれぞれ図 4.4 に示す。ここで、時系列は蒸発の影響を引いたもの (グレーの点線)、その移動平均をとったもの (黒線)、バンドパスフィルターを適

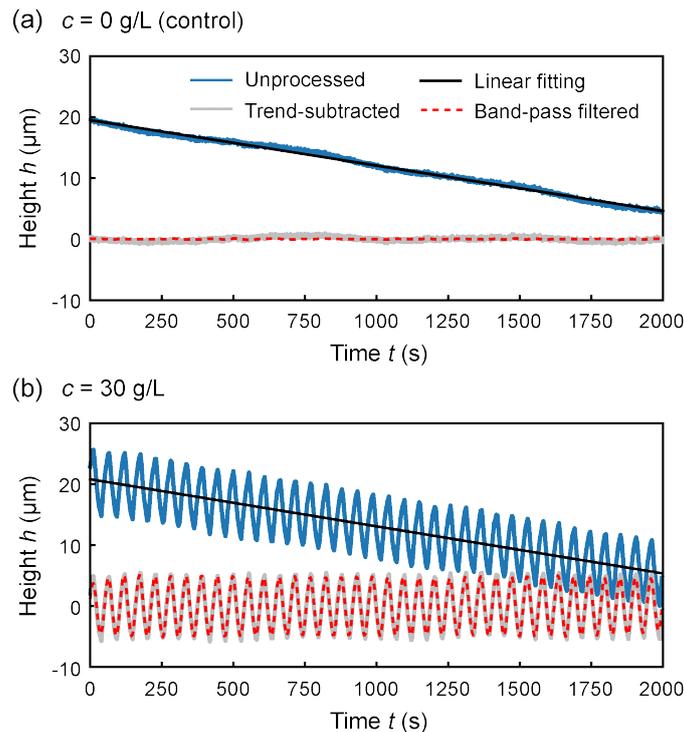


図 4.3 レーザ変位計で測定された水面高さの時系列 [23]。(a)  $c = 0 \text{ g/L}$ 。(b)  $c = 30 \text{ g/L}$ 。青線は測定データ、黒線は線形フィッティング、グレーの線は線形フィッティングで求めた傾きを引いたもの、赤破線はバンドパスフィルターでスムージングしたものである。

用したもの (赤破線) を同時に示している。相図上の軌道は、蒸発の影響を引き、移動平均をとったデータを用いて描いた。 $c = 0 \text{ g/L}$ において $h$ は定常状態であるのに対して、 $c \geq 1.5 \text{ g/L}$ では特徴的な振動がみられた。 $c$ が大きいほど、振動の振幅は大きくなり、周期は短くなった。それに加えて、波形は調和振動のような波形から緩和振動の波形に変化した。相図上の軌道について、 $c \geq 10 \text{ g/L}$ では緩和振動の特徴的な形がみられた。一方で、同じく振動をしている $c = 1.5 \text{ g/L}$ および $3.0 \text{ g/L}$ では、振動の周期より大きな時間スケールのゆらぎにより、明瞭な周期軌道は観察されなかった。しかし、バンドパスフィルターを適用したデータからは、測定可能な大きさの振動の振幅を得ることが出来た。

バンドパスフィルターを適用したデータを用いて、NaCl 水溶液の各濃度  $c$  に対して振幅と周期をプロットしたものを図 4.5 に示す。図 4.5(a) において、 $c$  を大きくしていくと、振幅  $h$  は臨界値  $c \sim 1 \text{ g/L}$  において定常状態から急速に増加し、その後は単調に増加した。挿入図における点線は、定常状態と振動状態のしきい値を示しており、その値は  $c = 0 \text{ g/L}$  における  $h$  の時系列の標準偏差から決めた。このしきい値を基準にすると、系は  $c \leq 1 \text{ g/L}$  で定常状態、 $c \geq 1.125 \text{ g/L}$  でリミットサイクル振動を示した。リミットサイクル振動を示す  $c$  ( $\geq 1.125 \text{ g/L}$ ) に対して振動の周期  $T$  をプロットしたものを図 4.5(b) に示す。 $c$  を大きくしていくと  $T$  は単調に減少し、 $T \simeq 50 \text{ s}$  に収束した。

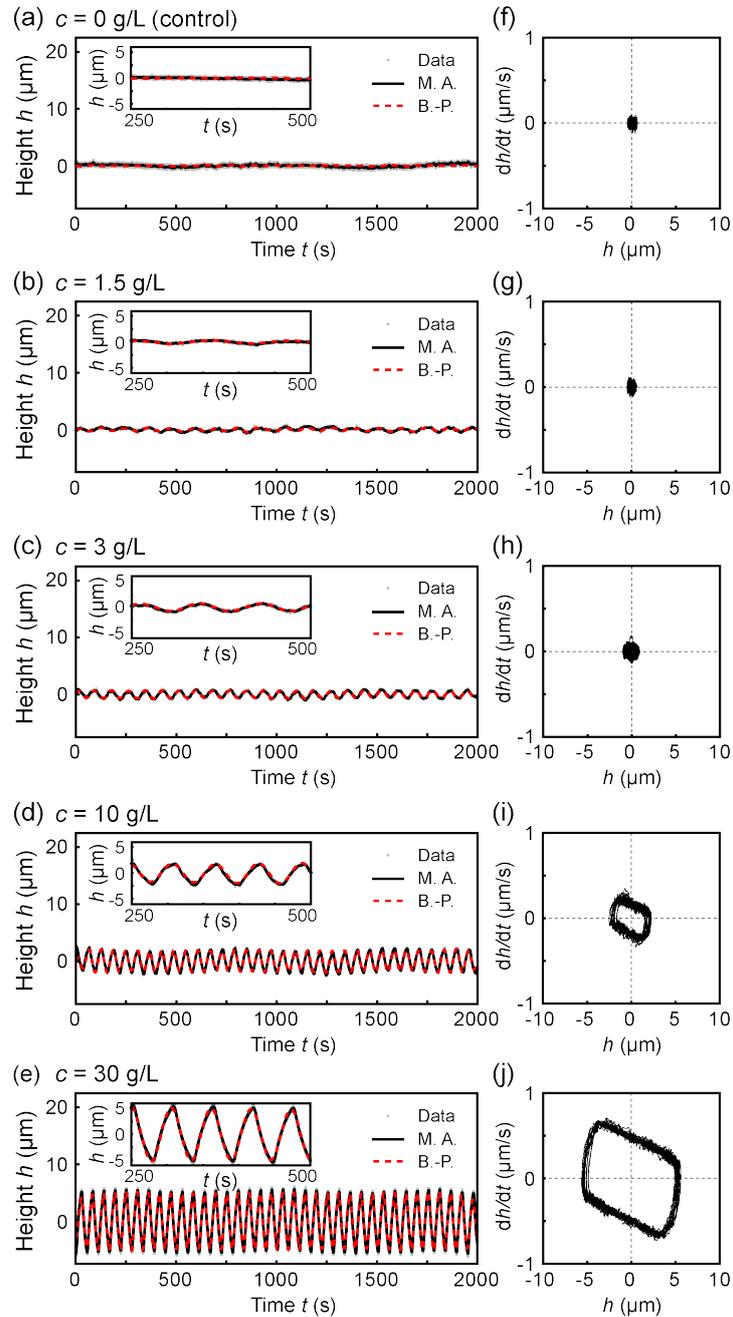


図 4.4 異なる NaCl 水溶液の濃度  $c$  における振動 [23]。(a)  $c = 0$  g/L。(b)  $c = 1.5$  g/L。(c)  $c = 3$  g/L。(d)  $c = 10$  g/L。(e)  $c = 30$  g/L。グレーの点は線形フィッティングで求めた傾きを引いたもの、黒線は前後  $\pm 64$  点で移動平均をとったもの、赤破線はバンドパスフィルターでスムージングしたものである。各挿入図は  $250 \text{ s} \leq t \leq 500 \text{ s}$  の範囲を拡大している。(f-j) は (a-e) の黒線のデータにそれぞれ対応する位相空間  $(h, dh/dt)$  における軌道である。

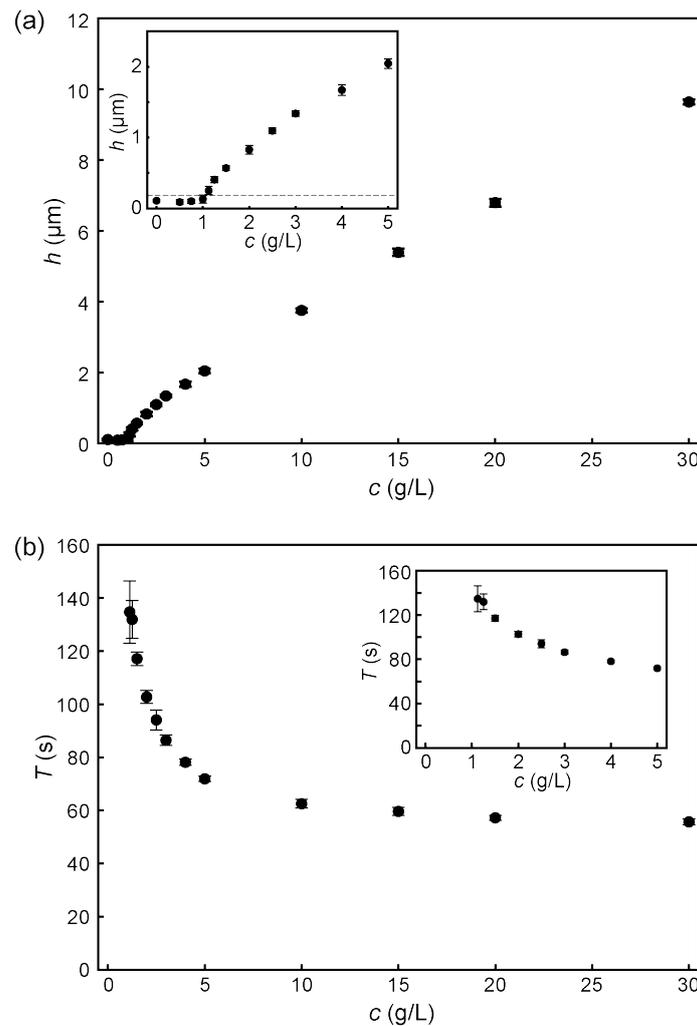


図 4.5 高密度流体として用いた NaCl 水溶液の様々な濃度に対する密度差振動子の振幅と周期 [23]。(a) 振幅。挿入図内の破線は定常状態と振動状態のしきい値を示す。(b) 周期。各挿入図は分岐点付近を拡大したものである。

## 4.3 議論

密度差振動子の振動は、低密度溶液の上に高密度溶液が配置されていることによる不安定性によって引き起こされる。よって、NaCl 水溶液の濃度  $c$  が大きいほど振動の駆動力は大きい。一方で流体の粘性は振動を阻害する抵抗力としてはたらく。したがって、 $c$  が小さくなると臨界値  $c_c$  で粘性による抵抗力が振動の駆動力に対して大きくなり、系は流れのない定常状態になると考えられる。

この臨界値  $c_c$  は輸送現象の観点から解釈することもできる。溶質の輸送は定常状態では拡散によって、振動状態では移流によって支配されるので、それらの比であるレイリー数  $Ra = (gL^3\Delta\rho/\rho)/(\nu D)$  が密度差  $\Delta\rho$  の臨界値を与えられとされる。ここで、 $g$  ( $\sim 10 \text{ m/s}^2$ ) は重力加速度、 $L$  ( $\sim 0.5 \text{ mm}$ ) は特徴的な長さとして孔の半径、 $\Delta\rho/\rho$  ( $\sim 10^{-2}$ ) は無次元化された密度差、 $\nu$  ( $\sim 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) は室温における水の動粘性係数、 $D$  ( $\sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ) は水における溶質の拡散係数である。このレ

イリー数の導出は付録 A で行った。もし、レイリーベナル不安定性の典型的な臨界レイリー数  $Ra$  ( $\sim 10^3$ ) をとると、臨界密度差  $\Delta\rho_c$ 、つまり溶液濃度の臨界値  $c_c$  は  $c_c \sim 10^0$  g/L と見積もられる。この値は、実験結果から得られた  $c_c \sim 1.0$  g/L とよく一致している。

次に、この定常状態から振動状態への移行について分岐構造の観点から議論する。1.2.5 項でみた超臨界ホップ分岐の特徴として、分岐点において安定な状態が定常状態から振動状態に連続的に切り替わることがあげられ、そのとき振幅は式 (1.18) より分岐パラメータの  $1/2$  乗で立ち上がる。つまり、今回の実験に置き換えると、超臨界ホップ分岐を仮定した場合、振幅は  $(c - c_c^H)^{1/2}$  のスケールで分岐点から立ち上がると考えられる。ここで  $c_c^H$  は超臨界ホップ分岐の場合の臨界濃度である。臨界濃度  $c_c^H$  を実験結果から見積もるために、 $c$  に対して振動の振幅の 2 乗値  $h^2$  をプロットし、線形フィッティングを行った。ここで、線形フィッティングには分岐点近傍の振動領域のデータ点を用いた。この分岐点近傍の領域は、以下で説明するようにパワースペクトルから判定して定義した。図 4.4 の  $c$  に対応するパワースペクトルを図 4.6 に示す。 $c > c_c$  では、0.003 – 0.019 Hz のバンドパスフィルターの範囲内に、リミットサイクル振動による明瞭なファーストピークがみられる。さらに  $c \geq 3$  g/L では、緩和振動の非線形な波形に由来する高周波のピークがみられる。よって、この高周波のピークが見られる領域は分岐点近傍から遠いと見なし、明瞭なファーストピークのみが見られる濃度領域を分岐点近傍と見なした。パワースペクトル  $P(f)$  は

$$h_f \equiv \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_m \exp \left[ -\frac{2\pi i m k}{N} \right] \quad (4.1)$$

$$\left( N = \frac{t_{\text{tot}}}{\Delta t}, m \equiv \frac{t}{\Delta t}, k \equiv f t_{\text{tot}} = 0, \dots, N-1 \right) \\ P(f) \equiv |h_f|^2 \quad (4.2)$$

として定義した。ここで、関数  $h_m$  の合計時間は  $t_{\text{tot}} = 2000$  s、標本化間隔は  $\Delta t = 1/(32.77 \text{ fps}) \approx 0.0305$  s、標本数は  $N = 2000 \text{ s} \times 32.77 \text{ fps} = 65540$  である。 $c$  に対して振動の振幅の 2 乗値  $h^2$  をプロットし、線形フィッティングを行ったものを図 4.7(a) に示す。このフィッティング直線と  $x$  軸との交点から、 $c_c^H = 1.03$  g/L と見積もられた。ここで、振動状態となる最も小さい濃度  $c = 1.125$  g/L は、ノイズレベルに近いので、フィッティングに用いなかった。 $(c - c_c^H)$  に対する  $h$  の両対数プロットを図 4.7(b) に示す。分岐点近傍のデータ点を用いた線形フィッティングの傾きが  $0.482 \approx 1/2$  となったので、振動の振幅は  $(c - c_c^H)^{1/2}$  のスケールで分岐点から立ち上がっているといえる。また、超臨界ホップ分岐では、振動の周期は式 (1.19) に示すように分岐点前後で有限の値をとる。図 4.5(b) において振動の周期は、分岐パラメータ  $c$  を小さくしていくと、分岐点近傍で増加した。このふるまいは、分岐点で周期が  $(c - c_c^I)^{-1/2}$  のスケールで発散する無限周期分岐の特徴と似ている。ここで  $c_c^I$  は無限周期分岐の場合の臨界濃度である。そこで、これらのスケールを確認するため、 $c - c_c^H$  に対して周期  $T$  を両対数プロットし、分岐点近傍のふるまいを確認したものを図 4.7(c) に示す。無限周期分岐であればこの傾きは  $-1/2$  となるが、実験結果ではより緩やかな傾きを示し、発散もしていないように見える。 $c = c_c^H$  に向かって有限の値に留まるようなふるまいは、むしろ超臨界ホップ分岐に一致するといえる。また、無限周期分岐を仮定して、 $c$  に対して  $T^{-2}$  をプロットし、その  $x$  軸交点から  $c_c^I$  を見積もったものを図 4.7(d) に示す。この見積もりは  $c_c^I = 4.87 \times 10^{-2}$  g/L を与え、図 4.5(a) の実験結果から推測できる  $c_c \approx 1.0$  g/L とは明らかに一致しなかった。

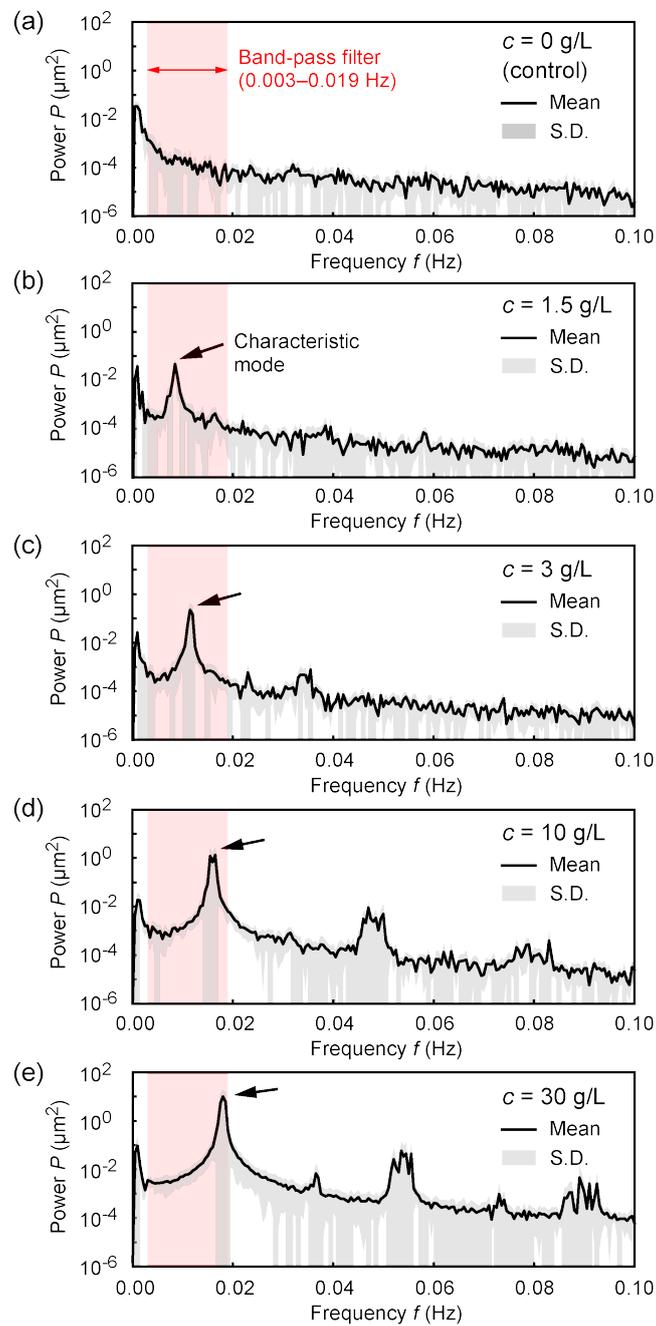


図 4.6 パワースペクトル [23]。(a)  $c = 0$  g/L, (b)  $c = 1.5$  g/L, (c)  $c = 3$  g/L, (d)  $c = 10$  g/L, (e)  $c = 30$  g/L。黒線は平均値、グレーの領域は平均値からの標準偏差、黒矢印はリミットサイクル振動の特徴的な周波数モードを指している。

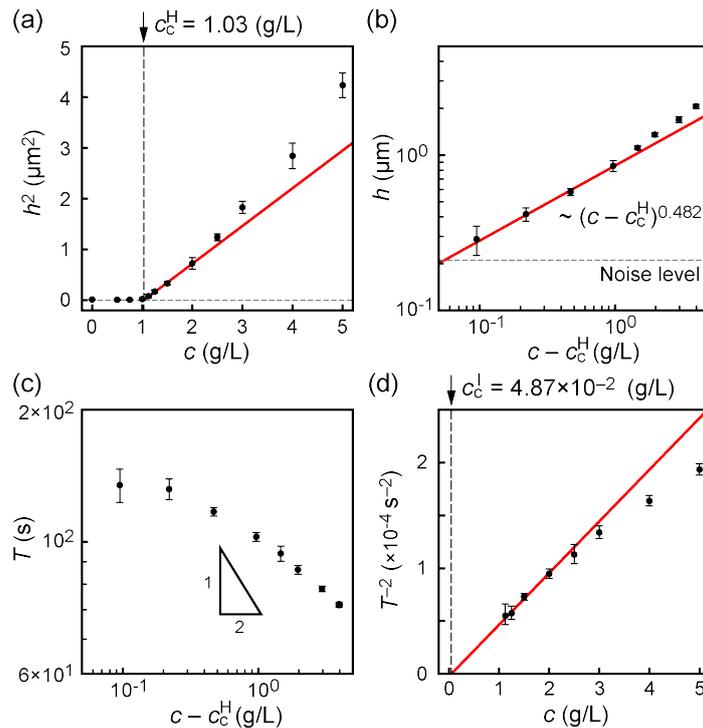


図 4.7 分岐点近傍のふるまい [23]。(a)  $c$  に対する  $h^2$  のプロットと分岐点近傍のデータ点 ( $1.25 \text{ g/L} \leq c \leq 2 \text{ g/L}$ ) による線形フィッティング。(b)  $(c - c_c^H)$  に対する  $h$  の両対数プロットと分岐点近傍のデータ点 ( $1.25 \text{ g/L} \leq c \leq 2 \text{ g/L}$ ) による線形フィッティング。(c)  $c - c_c^H$  に対する  $T$  の両対数プロット。図中のスロープは、その傾きが無限周期分岐のスケールリングである  $-1/2$  であり、比較のために載せた。(d)  $c$  に対する  $T^{-2}$  のプロットと分岐点近傍のデータ点 ( $1.25 \text{ g/L} \leq c \leq 2 \text{ g/L}$ ) による線形フィッティング。

## 4.4 結論

本章の実験では、NaCl 水溶液を高密度溶液とし、水を低密度溶液とした実験系を用い、外容器の水位の変化をレーザ変位計で測定することで、マイクロメートルスケールの振動を観測した。NaCl 水溶液の濃度  $c$  を分岐パラメータとして大きくしていくと、定常状態から振動状態へ切り替わった。様々な  $c$  に対して振動の振幅と周期をそれぞれプロットした分岐図を得た。この分岐構造を超臨界ホップ分岐と仮定して、振幅に対してスケールリングした結果は実験結果とよく一致した。よって、分岐構造は超臨界ホップ分岐であると示唆される。周期が分岐点近傍で有限の値に留まるようなふるまいも、超臨界ホップ分岐の特徴と一致した。しかし、実験ではノイズレベルに埋もれた分岐点近傍において、周期が発散するか有限の値をとるかは確認できなかった。また、長時間ゆらぎを除く目的でバンドパスフィルターをかけているので、周期が発散に相当する長周期のふるまいは取り出せていない。よって、実験結果のみからは、分岐構造の特定には至らなかった。そこで、分岐点近傍での系のふるまいを詳細に調べ分岐構造を特定するためには、様々な条件におけるダイナミクスを正確に定量化できる数値計算によるアプローチが有効であると考えた。

## 第5章

# 2次元流体シミュレーション

本章では、振動の振幅が小さい分岐点近傍について2次元流体シミュレーションによる詳細な解析を行い、分岐構造を特定する [24]。分岐構造を調べるために、パラメータを変化させてより多くの計算を行う必要があるため、気体・液体間の自由境界を直接扱う必要がなく、計算コストの低いモデルを構築した。

### 5.1 支配方程式

まず、文献 [13, 26] を参考にして、支配方程式となる連続の式、ナビエ・ストークス方程式、移流拡散方程式を導出する。

#### 5.1.1 オイラー的記述

準備としてオイラー的記述を導入する。これは、流れを表す物理量を  $x, y, z, t$  の関数として調べる方法である。流体粒子が時刻  $t$  に点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  にあり、流速は  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  とする。よって微小時間  $\Delta t$  の後には点  $\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t = (x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$  に来る。ある物理量  $F(x, y, z, t)$  について、その  $\Delta t$  時間内の変化  $\Delta F$  は

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}u\Delta t + \frac{\partial F}{\partial y}v\Delta t + \frac{\partial F}{\partial z}w\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + O((\Delta t)^2)\end{aligned}\quad (5.1)$$

となる。ここで、点  $(x, y, z, t)$  まわりのテーラー展開を用いた。  $F$  の時間変化の割合は

$$\begin{aligned}\frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \right) F\end{aligned}\quad (5.2)$$

となり、物理量  $F$  は任意であるから、これを取り除いて演算子で表すと

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\end{aligned}\quad (5.3)$$

と書ける。以下ではこの  $\frac{D}{Dt}$  で表されるラグランジュ微分を適宜用いる。

### 5.1.2 質量保存

3次元流体中に固定した閉曲面  $S$  をとり、その内部の領域  $V$  における流体の単位時間当たりの質量変化について考える。微小領域  $dV$  内の流体の質量は  $\rho dV$  であり、領域  $V$  全体に含まれる流体の質量は  $\iiint_V \rho dV$  である。よって、単位時間あたりでは  $\frac{d}{dt} (\iiint_V \rho dV)$  だけ質量が増加する。ここで、括弧内は空間積分の結果、時間  $t$  だけの関数になっているため、時間について偏微分ではなく常微分を用いた。一方、単位時間あたりに微小な面  $dS$  から領域外へ出ていく流体の体積は  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS$  であり、質量は  $(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS$  である。よって閉曲面  $S$  全体では単位時間あたりに  $\iint_S (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS$  だけ流体の質量が流出することになる。ここで  $\mathbf{n}$  は外向き法線ベクトルであり、模式図を図 5.1 に示した。閉曲面  $S$  内の領域  $V$  における単位時間当たりの流体の質量増加分と閉曲面  $S$  から単位時間あたりに流入する流体の質量は等しいから

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho dV \right) = - \iint_S (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS \quad (5.4)$$

が成り立つ。領域  $V$  は固定されていて時間変化しないので、左辺は

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho dV \right) = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (5.5)$$

と書き換えられる。ガウスの定理より右辺は

$$- \iint_S (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})dV \quad (5.6)$$

と書き換えられる。よって式 (5.4) は

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})dV \quad (5.7)$$

となり、これが任意の積分領域で成り立つには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.8)$$

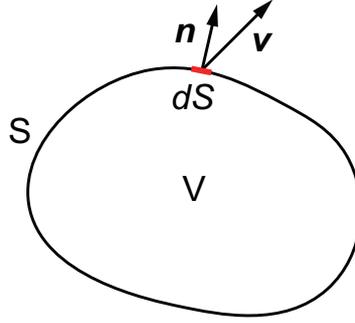
が満たされる必要がある。これを連続の式という。左辺を変形すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

となり、非圧縮流体では  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  であるから、連続の式 (5.8) は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.10)$$

として書き換えられる。

図 5.1 閉曲面  $S$  とその内部領域  $V$ 。

### 5.1.3 運動量保存

ここでは、3次元空間内の閉曲面  $S$  の内部領域  $V$  に含まれる流体の単位時間当たりの運動量変化について考える。領域  $V$  に含まれる運動量は  $\iiint_V \rho \mathbf{v} dV$  であり、単位時間あたりでは  $\frac{d}{dt} (\iiint_V \rho \mathbf{v} dV)$  だけ運動量が増加する。一方、流体に働く力は、微小領域  $dV$  にはたらく外力  $\rho \mathbf{K} dV$  と微小な面に働く応力  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$  である。ここで、 $\mathbf{P}$  は応力テンソルである。また、流体の移動に伴う運動量の変化として、微小面積  $dS$  を通って単位時間あたりに流入する流体の運動量  $-\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$  を考慮すると、領域  $V$  に含まれる流体の運動量保存は

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = \iiint_V \rho \mathbf{K} dV + \iint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS - \iint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (5.11)$$

として表せる。成分表示すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho K_i dV + \iint_S P_{ik} n_k dS - \iint_S \rho v_i v_k n_k dS \quad (5.12)$$

となる。ただし  $i = x, y, z$  であり、Einstein の規約を用いた。ガウスの定理より右辺の面積積分を体積積分に変換すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho K_i dV + \iiint_V \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} dV - \iiint_V \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} dV \quad (5.13)$$

となる。これが任意の積分領域で成り立つには

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho K_i + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) \quad (5.14)$$

が成り立つ必要がある。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) v_i + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (5.16)$$

であるから、式 (5.14) から式 (5.8) に  $v_i$  をかけたものを差し引くと

$$\frac{Dv_i}{Dt} = K_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \quad (5.17)$$

が得られる。ニュートン流体の応力テンソル  $P_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$  を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} &= -\delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\ &= -\delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_i \quad (\because \text{式 (5.10)}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

となり、式 (5.17) は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_i \quad (5.19)$$

として書き換えられる。外力として重力を考え  $\mathbf{K} = \mathbf{g}$  とし、成分表示からベクトル表示に書き換えると

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (5.20)$$

が得られる。これが非圧縮粘性流体の重力下でのナビエ・ストークス方程式である。

#### 5.1.4 濃度の移流・拡散現象

密度差振動子は低密度流体と高密度流体の 2 成分流体からなるため、流体に占める高密度流体の濃度が移流・拡散する現象がおきる。まず、低密度流体、高密度流体の密度をそれぞれ  $\rho_{\text{low}}$ ,  $\rho_{\text{high}}$  とした。規格化した濃度を  $c(\mathbf{r}, t)$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) として定義し、 $c = 0$  で低密度流体、 $c = 1$  で高密度流体にそれぞれ一致するものとした。これらを用いて密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{high}} + (\rho_{\text{low}} - \rho_{\text{high}})(1 - c(\mathbf{r}, t)) \quad (5.21)$$

として定義した。ここで、 $c$  は移流拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla c) = D \nabla^2 c \quad (5.22)$$

に従うとする。ただし、 $\nabla \cdot (c\mathbf{v}) = c\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla c)$  であるから、非圧縮条件の連続の式 (5.10) が成り立つとき

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) = D \nabla^2 c \quad (5.23)$$

として書き換えられる。ここで、 $D$  は拡散係数である。

密度の定義式 (5.21) より密度  $\rho$  が  $c$  に依存するため、移流拡散方程式 (5.23) が成り立つとき、質量保存則に拡散を考慮すると式 (5.8) は改めて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = D \nabla^2 \rho \quad (5.24)$$

と書ける。連続の式 (5.10) が成り立つとすると、拡散を考慮した非圧縮流体で  $\frac{D\rho}{Dt} = D \nabla^2 \rho$  が成り立っている。また、濃度が不均一な溶液の拡散過程では、溶質と溶媒の間で運動量は保存すると考えられるため、運動量保存則 (5.20) も同様に成り立つとする。

以上より、非圧縮条件の連続の式 (5.10)、ナビエ・ストークス方程式 (5.20)、移流拡散方程式 (5.23) を支配方程式として数値計算を行う。

## 5.2 数値計算方法

次に、流体の基礎方程式から圧力と速度を陽に計算できる MAC(marker and cell) 法 [27–30] を導入し、本研究で構築した密度差振動子の数値計算モデルを適用する。

### 5.2.1 MAC 法

まず、ナビエ・ストークス方程式 (5.20) の重力項と移流拡散方程式 (5.23) を考えず、 $\rho$  を定数とした場合

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.25)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.26)$$

について、非圧縮流体の数値計算法の一つである MAC(marker and cell) 法を導入する [29, 30]。

式 (5.26) の両辺の発散をとると

$$\rho \left[ \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\} \right] = -\nabla^2 p + \mu \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.27)$$

となる。式 (5.25) より  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  となるはずだが、式 (5.27) を離散化して解くとき離散化誤差が累積して  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  が大きくなることがあるため、今の段階では残しておく。この問題をクリアするために、まず式 (5.27) を  $t$  について離散化すると

$$\rho \left[ \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v})^{n+1} - (\nabla \cdot \mathbf{v})^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\} \right] = -\nabla^2 p + \mu \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{v})^n \quad (5.28)$$

となる。ここで  $n$  は時間ステップ、 $\Delta t$  は時間きざみである。 $(\nabla \cdot \mathbf{v})^{n+1} = 0$  とすれば

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\} + \rho \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v})^n}{\Delta t} + \mu \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{v})^n \quad (5.29)$$

となる。このように  $(\nabla \cdot \mathbf{v})^n \neq 0$  であっても  $(\nabla \cdot \mathbf{v})^{n+1} = 0$  となるように圧力を決めることで、時間進行による誤差累積に対して  $D$  を小さな値に留めることができる。また、 $\Delta t$  が十分小さいとき  $(\nabla \cdot \mathbf{v})/\Delta t$  に対して  $\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{v})$  は十分小さいので無視できる。以上より MAC 法では

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\} + \rho \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (5.30)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.31)$$

を基礎方程式に取り、式 (5.30) から圧力を決めて式 (5.31) に代入し、 $\mathbf{v}$  の時間発展を求める。本研究で MAC 法を採用する理由は、圧力が陽に求まるため、圧力の境界条件が与えられた問題に自然に適用できるためである。

### 5.2.2 密度が変化する場合

次に、ナビエ・ストークス方程式 (5.20) の重力項と移流拡散方程式 (5.23) を考慮する。密度を変数としてナビエ・ストークス方程式 (5.20) の両辺の発散をとると

$$\rho \left[ \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} \right] = -\nabla^2 p + \mu \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \rho \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{g} \right] \quad (5.32)$$

となる。右辺第 3 項にナビエ・ストークス方程式 (5.20) を代入すると

$$\rho \left[ \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} \right] = -\nabla^2 p + \mu \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}) \quad (5.33)$$

として書き換えられる。MAC 法と同様の手続きをとると

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} + \rho \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{\Delta t} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}) \quad (5.34)$$

が得られる。

### 5.2.3 ブジネスク近似

熱対流の数値計算では、温度変化による密度変化の影響が浮力のみに関与すると仮定するブジネスク近似を用いて、非圧縮流体の範囲で扱うことがある [6]。そこで、密度差振動子において濃度の移流・拡散による密度変化の影響が浮力のみに関与すると仮定して MAC 法を適用する。ナビエ・ストークス方程式 (5.20) の左辺の  $\rho$  を  $\rho_0$  (定数) としてブジネスク近似を適用すると

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (5.35)$$

となる。MAC 法を適用すると式 (5.35) から圧力のポアソン方程式

$$\nabla^2 p = -\rho_0 \nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} + \rho_0 \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{\Delta t} + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{g} \quad (5.36)$$

が得られる。ブジネスク近似は、密度変化が小さいときに有効であることが知られているが、密度変化が大きい場合は有効性が保証されない。

### 5.2.4 近似方法による数値計算結果の比較

数値計算方法の詳細に先んじて、上記で紹介した近似方法による数値計算結果を比較する。図 5.2 は、

- (i) 圧力のポアソン方程式として、式 (5.34) を用いた場合
- (ii) 式 (5.34) で密度の空間微分 (右辺第 3 項) を無視した近似 (実質、式 (5.30) で  $\rho$  を変数としたもの)
- (iii) ブジネスク近似

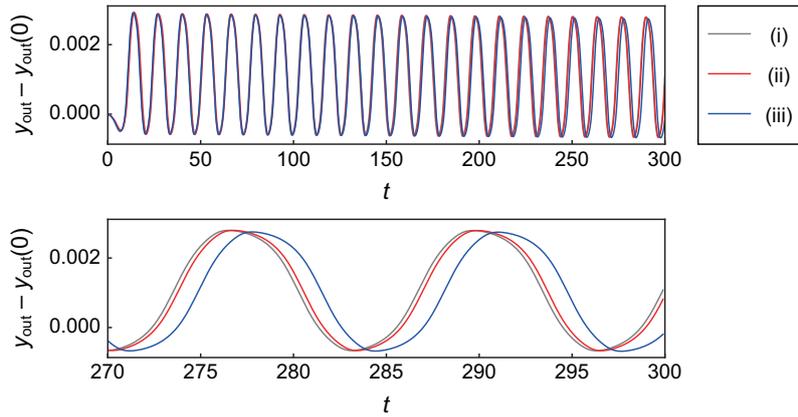


図 5.2 3 種の数値計算モデルによる密度差振動子の外容器水位  $y_{\text{out}}$  の時系列。(i) 圧力のポアソン方程式として、式 (5.34) を用いた場合。(ii) 式 (5.34) で密度の空間微分を無視した近似。(iii) ブジネスク近似。  $y_{\text{out}}(0)$  は初期値を表す。

のそれぞれの近似について、後述する 2 次元の密度差振動子モデルを用いて外容器水位の時系列を計算したものである (詳細なパラメータは 6 章の  $n = 1$  を参照)。(i) と (ii) の数値計算結果はほとんど差異がなかった。(ii) の近似では、圧力のポアソン方程式で陽に重力項が含まれないが、後述するように圧力の境界条件で重力が含まれるため、圧力に重力の効果が実効的に含まれる。一方、(i) と (iii) の数値計算結果は、(i) と (ii) に比べ、周期により大きな差異が生じている。このシミュレーションでは密度が  $1.0 \leq \rho \leq 1.2$  の範囲で変化しているため、ブジネスク近似で一部  $\rho$  を定数とした近似が影響していると考えられる。本研究では (ii) の近似による、式 (5.30) で  $\rho$  を時間と空間の変数としたものを用い、以下ではその数値計算方法の詳細をみる。(i) と (iii) の数値計算方法については付録 B で示す。

### 5.2.5 2 成分化・離散化

本研究では 2 次元でのシミュレーションを行うので、式 (5.20),(5.30) を 2 次元デカルト座標  $(x, y)$  の場合書き換える。ここで速度は  $\mathbf{v} = (u, v)$ 、重力加速度は  $\mathbf{g} = (0, -g)$  とする。

$$\nabla \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.37)$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.38)$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (\because \text{式 (5.10)}) \quad (5.39)$$

を考慮すれば式 (5.20),(5.30) は

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.40)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.42)$$

となる。

次に、図 5.3 に示すようなスタガード格子を用いて式 (5.40),(5.41),(5.42) を離散化する。この格子は、1 個の格子について連続の式を反映し、またナビエ・ストークス方程式における各方向の圧力勾配がその方向の速度を決める性質も反映する。よって、MAC 法ではレギュラー格子でなくこちらを用いるのが一般的である。ただし離散化するには、各方程式中で定義点は共通であるべきなので、例えば  $u$  に対する方程式中で  $v$  は周りの点の平均から  $v = (v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})/4$  として決める。この点に注意して離散化すると、 $u$  について

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{4} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ &= -\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} + \mu \left( \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$v$  について

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}}{\Delta t} + \frac{u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j} + u_{i+1,j}}{4} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ &= -\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} + \mu \left( \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} g \end{aligned} \quad (5.44)$$

$p$  について

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\ &= -\rho_{i,j} \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right)^2 \right] \\ & \quad - 2\rho_{i,j} \frac{(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1})/2 - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})/2}{2\Delta x} \frac{(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})/2 - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})/2}{2\Delta y} \\ & \quad + \frac{\rho_{i,j}}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

となる。ここで、時間微分にはオイラー陽解法を用い、また上添字の  $n$  は省略した。

圧力についてのポアソン方程式 (5.45) を解くための緩和法としてヤコビ法を用いた [27,28]。アルゴリズムの詳細は付録 C.1 に示した。式 (C.13) に基づいてヤコビ法を用いると、 $p_{i,j}$  の  $r$  番目の反

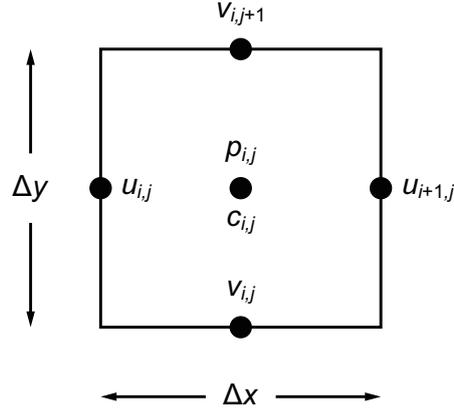


図 5.3 スタガード格子。

復ステップは、

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{r+1} &= \frac{1}{4} (p_{i+1,j}^r + p_{i-1,j}^r + p_{i,j+1}^r + p_{i,j-1}^r) \\
 &+ \frac{\rho_{i,j}}{4} [(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j+1} - v_{i,j})^2] \\
 &+ \frac{\rho_{i,j}}{32} [(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1}) - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})] [(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})] \\
 &- \frac{\rho_{i,j} \delta}{4\Delta t} [(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (v_{i,j+1} - v_{i,j})]
 \end{aligned} \quad (5.46)$$

となる。ここで、 $\Delta x = \Delta y = \delta$  とした。つまり 1 回の時間ステップ内で、与えられた速度と密度に対してこの反復ステップを繰り返すことで、圧力がポアソン方程式 (5.45) を満たすように緩和していく。そして、ポアソン方程式 (5.45) の残差がある値より小さくなったら、そのときの圧力を用いて速度の時間発展を求める。式 (5.43, 5.43) も同様に  $\Delta x = \Delta y = \delta$  として  $u_{i,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}$  について整理すると

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j} - \Delta t \left[ \frac{u_{i,j}}{2\delta} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{8\delta} (v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}) (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right] \\
 &+ \frac{2\Delta t}{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}} \left[ -\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\delta} + \frac{\mu}{\delta^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) \right] \quad (5.47) \\
 v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j} - \Delta t \left[ \frac{1}{8\delta} (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j} + u_{i+1,j}) (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{v_{i,j}}{2\delta} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right] \\
 &+ \frac{2\Delta t}{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}} \left[ -\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\delta} + \frac{\mu}{\delta^2} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) \right] \\
 &- \Delta t g
 \end{aligned} \quad (5.48)$$

となる。

移流拡散方程式 (5.23) を 2 次元デカルト座標  $(x, y)$  の場合にかき換えると

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial(cv)}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (5.49)$$

となる。スタガード格子を用いて離散化すると

$$\begin{aligned} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}}{\Delta t} = & -\frac{1}{\Delta x} \left( \frac{c_{i,j} + c_{i+1,j}}{2} u_{i+1,j} - \frac{c_{i,j} + c_{i-1,j}}{2} u_{i,j} \right) \\ & -\frac{1}{\Delta y} \left( \frac{c_{i,j} + c_{i,j+1}}{2} v_{i,j+1} - \frac{c_{i,j} + c_{i,j-1}}{2} v_{i,j} \right) \\ & + D \left( \frac{c_{i-1,j} - 2c_{i,j} + c_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{c_{i,j-1} - 2c_{i,j} + c_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

となる。 $\Delta x = \Delta y = \delta$  として  $c_{i,j}^{n+1}$  について整理すると

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{n+1} = & c_{i,j} - \frac{\Delta t}{\delta} \left( \frac{c_{i,j} + c_{i+1,j}}{2} u_{i+1,j} - \frac{c_{i,j} + c_{i-1,j}}{2} u_{i,j} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{\delta} \left( \frac{c_{i,j} + c_{i,j+1}}{2} v_{i,j+1} - \frac{c_{i,j} + c_{i,j-1}}{2} v_{i,j} \right) \\ & + \frac{D\Delta t}{\delta^2} (c_{i-1,j} + c_{i+1,j} + c_{i,j-1} + c_{i,j+1} - 4c_{i,j}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

となる。2次元の移流拡散方程式の数値安定性については付録 D で扱う。

## 5.2.6 境界の取り扱い

スタガード格子上で MAC 法を用いる場合の、壁面における境界条件について考える。壁面上では粘着条件より  $\boldsymbol{v} = 0$  が成り立つ。図 5.4(a) のような  $y$  軸方向の壁上では  $u = 0$  となり、式 (5.40) は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.52)$$

となる。図 5.4(a) において点 W での  $u$  を  $u_{W,j}$  とし、式 (5.52) の中心差分をとると

$$\begin{aligned} \frac{p_{W,j} - p_{W-1,j}}{\Delta x} = & \mu \frac{u_{W+1,j} - 2u_{W,j} + u_{W-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \therefore p_{W-1,j} = & p_{W,j} - \frac{\mu}{\Delta x} (u_{W+1,j} + u_{W-1,j}) \quad (\because u_{W,j} = 0) \end{aligned} \quad (5.53)$$

となり、壁の内部での仮想的な圧力  $p_{W-1,j}$  が求まる。図 5.4(b) のような  $x$  軸方向の壁上では  $v = 0$  となり、式 (5.41) は

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho g \quad (5.54)$$

となる。図 5.4(b) において点 W での  $v$  を  $v_{i,W}$  とし、式 (5.54) の中心差分をとると

$$\begin{aligned} \frac{p_{i,W} - p_{i,W-1}}{\Delta y} = & \mu \frac{v_{i,W+1} - 2v_{i,W} + v_{i,W-1}}{(\Delta y)^2} - \rho_{i,W} g \\ \therefore p_{i,W-1} = & p_{i,W} - \frac{\mu}{\Delta y} (v_{i,W+1} + v_{i,W-1}) + \rho_{i,W} g \Delta y \quad (\because v_{i,W} = 0) \end{aligned} \quad (5.55)$$

となり、壁の内部での仮想的な圧力  $p_{i,W-1}$  が求まる。ここで、点 W における  $\rho$  は定義されていないので、 $\rho_{i,W}$  として近似した。このようにして求めた壁の内部での仮想的な圧力を用いれば、境界における圧力は内部の圧力と同様に式 (5.46) から計算できる。式 (5.53),(5.55) では、壁の内部での

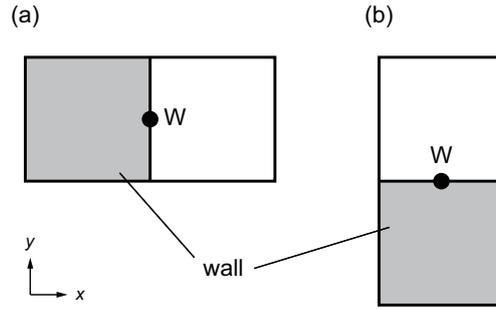


図 5.4 スタガード格子における壁の模式図。(a)  $y$  軸に平行な壁面。(b)  $x$  軸に平行な壁面。

仮想的な速度として  $u_{W-1,j}$ ,  $v_{i,W-1}$  がそれぞれ含まれている。これらを壁において法線方向の速度勾配が 0 となるように決める。点 W まわりのテーラー展開より

$$\begin{aligned}
 u_{W+1,j} &= u_{W,j} + \Delta x \left. \frac{\partial u_{x,j}}{\partial x} \right|_{x=W} + (\Delta x)^2 \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u_{x,j}}{\partial x^2} \right|_{x=W} + \dots \\
 u_{W-1,j} &= u_{W,j} - \Delta x \left. \frac{\partial u_{x,j}}{\partial x} \right|_{x=W} + (\Delta x)^2 \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u_{x,j}}{\partial x^2} \right|_{x=W} - \dots \\
 \therefore \left. \frac{\partial u_{x,j}}{\partial x} \right|_{x=W} &= \frac{u_{W+1,j} - u_{W-1,j}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

となるため、 $\left. \frac{\partial u_{x,j}}{\partial x} \right|_{x=W} = 0$  が成り立つには  $u_{W-1,j} = u_{W+1,j}$  とすればよい。同様にして、 $\left. \frac{\partial v_{i,y}}{\partial y} \right|_{y=W} = 0$  が成り立つには  $v_{i,W-1} = v_{i,W+1}$  とすればよいことがわかる。また、境界における圧力  $p_{W,j}$ ,  $p_{i,W}$  を式 (5.46) を用いて計算するとき、壁の内部での仮想的な速度として  $v_{W-1,j}$ ,  $u_{i,W-1}$  もそれぞれ必要となる。これらはそれぞれ  $v_{W-1,j} = -v_{W,j}$ ,  $u_{i,W-1} = -u_{i,W}$  として決めることで、点 W における  $v$ ,  $u$  を周りの 4 点による平均から 0 にとることができる。

### 5.2.7 2次元の密度差振動子モデル

密度差振動子の模式図を図 5.5 に示す。ここで、シミュレーションの計算領域は流体の内部にとり、点線で示した。直交座標の原点を孔の中心にとり、孔に相当する領域を  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$  として定義した。計算領域は  $-W \leq x \leq W$ ,  $-b - H_{\text{lower}} \leq y \leq b + H_{\text{upper}}$  として定義し、その中で内容物の底に相当する領域は  $-W \leq x < -a$ ,  $-b < y < b$ ,  $a < x \leq W$ ,  $-b < y < b$  であり、斜線で示した。内容物、外容器の水位をそれぞれ  $y_{\text{in}}$ ,  $y_{\text{out}}$  とすると、計算領域の上部、下部境界での圧力  $p_{\text{upper}}(t)$ ,  $p_{\text{lower}}(t)$  はそれぞれ

$$p_{\text{upper}}(t) = \rho_{\text{high}} g (y_{\text{in}}(t) - b - H_{\text{upper}}) \tag{5.57a}$$

$$p_{\text{lower}}(t) = \rho_{\text{low}} g (y_{\text{out}}(t) + b + H_{\text{lower}}) \tag{5.57b}$$

として考えられる。ここで、大気圧は 0 とした。単位時間あたりに孔を通過する流量  $Q(t)$  を

$$Q(t) = \int_{-a}^a v_y(x, b, t) dx \tag{5.58}$$

として計算すると、非圧縮な流体を扱っているので、水位の時間変化は  $Q$  を用いて、

$$\frac{dy_{\text{in}}}{dt} = \frac{Q}{d_{\text{in}}} \quad (5.59a)$$

$$\frac{dy_{\text{out}}}{dt} = -\frac{Q}{d_{\text{out}}} \quad (5.59b)$$

として得られる。ここで  $d_{\text{in}}$ ,  $d_{\text{out}}$  はそれぞれ内容器、外容器の幅である。このように計算領域を流体の内部にとり、水位の変化を計算領域の上下境界における圧力に反映することで、気体・液体間の自由境界を直接扱う必要のないシンプルなモデルを考えた。

内容器の底の表面における境界条件について、速度はノンスリップ条件  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 、密度はノイマン条件  $\nabla_{\perp} \rho = 0$ 、圧力は MAC 法に基づいて式 (5.53), (5.55) から計算した。ここで  $\nabla_{\perp}$  は法線方向の微分を表す。計算領域を囲う境界条件について、上下境界の圧力は式 (5.57a), (5.57b) に従い、左右境界の圧力、速度、密度はノイマン条件とした。

初期状態で二流体は静止しており ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ )、混ざり合っていないものとした。このときの濃度は  $c = 0$  ( $y < b$ ),  $c = 1$  ( $y \geq b$ ) である。低密度流体、高密度流体の  $t = 0$  における圧力  $p_{\text{low},0}(x, y)$ ,  $p_{\text{high},0}(x, y)$  はそれぞれ

$$p_{\text{low},0}(x, y) = \rho_{\text{low}} g (y_{\text{out}}(0) - y) \quad (5.60a)$$

$$p_{\text{high},0}(x, y) = \rho_{\text{high}} g (y_{\text{in}}(0) - y) \quad (5.60b)$$

とした。ここで  $y_{\text{out}}(0)$ ,  $y_{\text{in}}(0)$  はそれぞれ外容器、内容器の  $t = 0$  における水位である。 $y_{\text{in}}(0)$  は与えた  $y_{\text{out}}(0)$  に対して圧力が釣り合うように  $y_{\text{in}}(0) = b + (\rho_{\text{low}}/\rho_{\text{high}})(y_{\text{out}}(0) - b)$  として決めた。 $y_{\text{out}}(0)$  は、支配方程式 (5.59a), (5.59b) 中で微分形としてのみ含まれるため、その値は流体のふるまいに関係しない。以降のシミュレーション結果では、外容器の水位を

$$h(t) = y_{\text{out}}(t) - y_{\text{out}}(0) \quad (5.61)$$

と定義して用いる。

以上をまとめると、ナビエ・ストークス方程式 (5.20) と連続の式 (5.10) を解くために上述の MAC 法を用い、スタガード格子状において速度と圧力を陽に求めた [29, 30]。移流拡散方程式 (5.23) を解くために陽解法を用い、 $c$  の時間発展を求めた。ここで、時間ステップ  $\Delta t = 0.0002$ 、空間メッシュ  $\Delta x = \Delta y = 0.005$ 、計算領域を決めるパラメータ  $W = 0.4$ ,  $H_{\text{upper}} = H_{\text{lower}} = 0.55$  を用いた。流体のふるまいに関わるシミュレーションパラメータは以下のように設定した:  $\mu = 1/300$ ,  $D = 0.0001$ ,  $g = 10$ ,  $a = 0.03$ ,  $b = 0.05$ ,  $d_{\text{in}} = d_{\text{out}} = 4.8$ ,  $y_{\text{out}}(0) = 10.05$ 。また、 $\rho_{\text{low}} = 1$  として固定し、 $\rho_{\text{high}}$  を可変にすることで、密度差  $\Delta\rho (= \rho_{\text{high}} - \rho_{\text{low}})$  を分岐パラメータとして変化させ、分岐構造を調べた。

### 5.3 数値計算結果

$\Delta\rho = 0.2$  における密度場と速度場のスナップショットを図 5.6 に示す。(a) は典型的な流れの振動、(b) は下向きの流れの詳細、(c) は上向きの流れの詳細をそれぞれ表す密度場であり、(d,e) はそれぞれ (b,c) に対応する速度場である。1 周期中で、まず下向きの流れが起き ( $t = 43.5$ )、計算領域の下部境界を通過した ( $t = 46.5$ )。やがて下向きの流れは弱まっていき、上向きの流れに切り替わっ

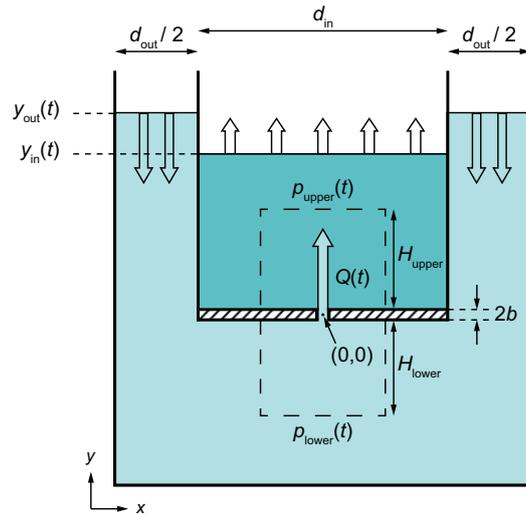


図 5.5 上向きの流れが起きているときの密度差振動子の模式図 [24]。点線内部は計算領域、斜線部は内容器の底をそれぞれ示す。 $p_{\text{upper}}(t)$ ,  $p_{\text{lower}}(t)$  はそれぞれ計算領域の上部、下部境界での圧力である。 $Q(t)$  は単位時間あたりに孔を通過する流量である。 $y_{\text{in}}(t)$ ,  $y_{\text{out}}(t)$  はそれぞれ内容器、外容器の水位である。

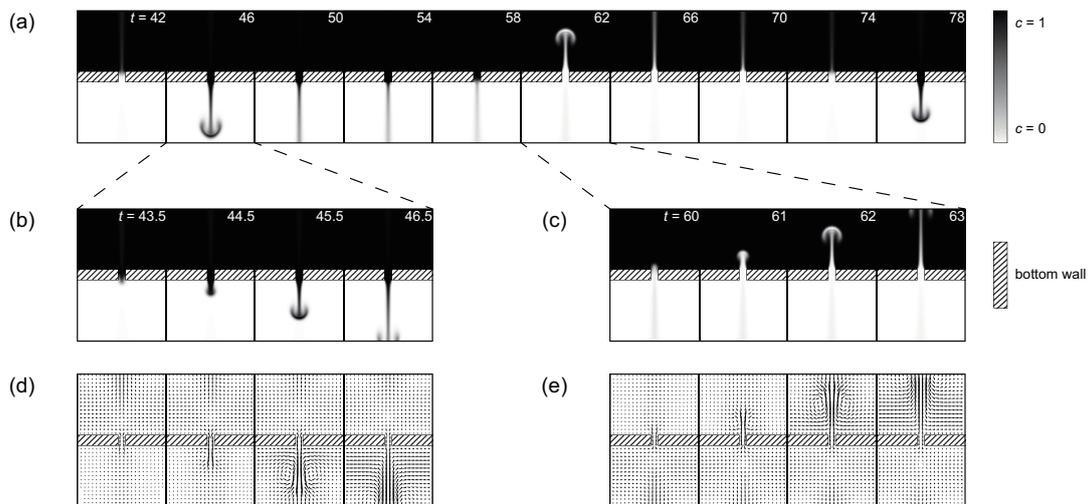


図 5.6  $\Delta\rho = 0.2$  における密度場 (a-c) と速度場 (d,e) のスナップショット [24]。(a) 流れが振動する様子。(b,d) 下向きの流れの詳細。(c,e) 上向きの流れの詳細。斜線部は内容器の底に相当する障壁である。

た ( $t = 60$ )。上向きの流れは成長し、計算領域の上部境界を通過した ( $t = 63$ )。やがて上向きの流れは弱まっていき、再び下向きの流れに切り替わった。このようにして、系は約 30 の周期で、上向きの流れと下向きの流れを交互に繰り返すリミットサイクル振動をした。

外容器の水位  $h$  の時間変化を図 5.7 に示す。(a-d) はそれぞれ (a)  $\Delta\rho = 0.2$ , (b)  $\Delta\rho = 0.1$ , (c)  $\Delta\rho = 0.05$ , (d)  $\Delta\rho = 0.025$  の場合に対応する。 $\Delta\rho$  を小さくすると、波形は緩和振動 (a) から調和振動のような波形 (c) へ変化した。それに伴い振動の振幅は小さくなり、周期は大きくなった。さらに  $\Delta\rho$  を小さくすると、振動は減衰振動 (d) となった。図 5.7(a-d) に対応する  $h$  と  $Q$  による位相空

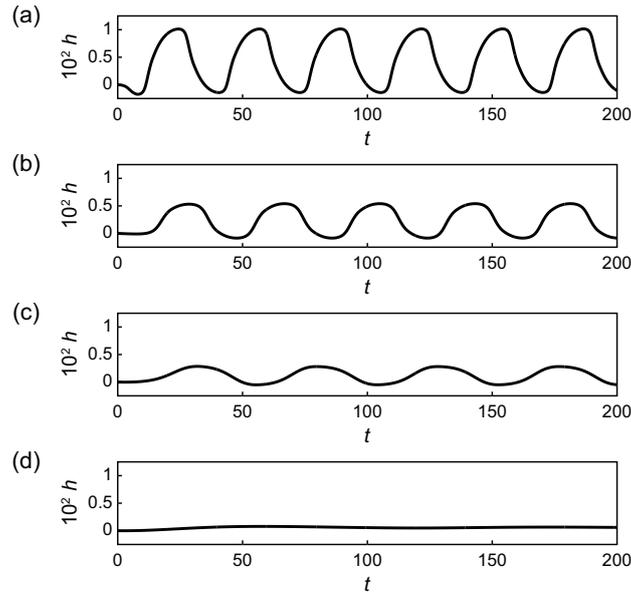


図 5.7 初期位置を 0 にとった外容器の水位  $h$  の時系列 [24]。(a)  $\Delta\rho = 0.2$ , (b)  $\Delta\rho = 0.1$ , (c)  $\Delta\rho = 0.05$ , (d)  $\Delta\rho = 0.025$ 。

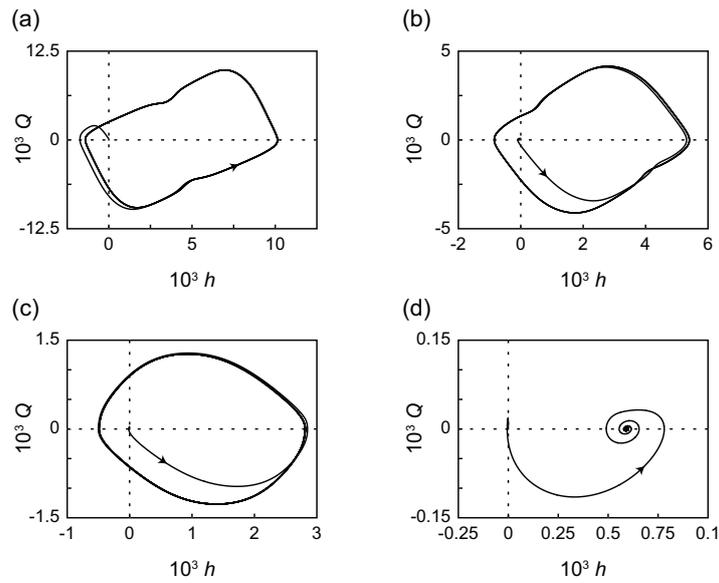


図 5.8 (a)  $\Delta\rho = 0.2$ , (b)  $\Delta\rho = 0.1$ , (c)  $\Delta\rho = 0.05$ , (d)  $\Delta\rho = 0.025$  における、 $h$  と  $Q$  による位相空間での軌道 ( $0 \leq t \leq 600$ ) [24]。

間での軌道を図 5.8(a-d) にそれぞれ示す。ここで、 $Q(= -d_{\text{out}}dh/dt)$  は単位時間あたりに孔を通過する流量である。(a-c) で相図上の軌道は、時間と共に閉軌道に収束していった。よって、このとき系はリミットサイクル振動をしていると考えられる。一方 (d) では、軌道は時間と共に固定点に収束していったため、減衰振動をしていると考えられる。図 5.7, 図 5.8 の結果から、 $\Delta\rho$  を分岐パラメータとして、系は安定状態から振動状態への分岐を示すことが明らかとなった。

様々な  $\Delta\rho$  における  $h$  の振動の振幅と周期を得るために、まず  $i$  番目に  $Q = 0$  となる瞬間を  $t_i$

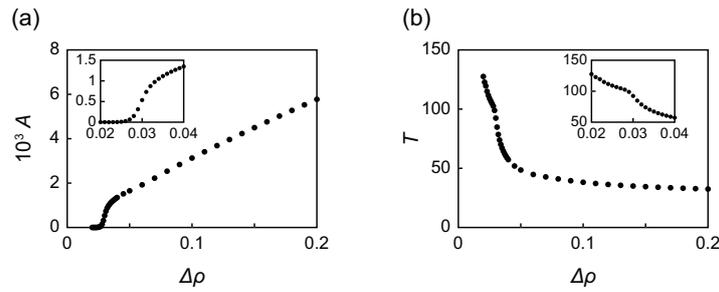


図 5.9  $\Delta\rho$  に対して  $h$  の振動の (a) 振幅  $A$ , (b) 周期  $T$  をそれぞれプロットした分岐図 [24]。各挿入図は  $\Delta\rho = 0.02$  から  $\Delta\rho = 0.04$  までの範囲を拡大している。

( $i = 1, 2, \dots$ ) として定義した。ここで、初期状態では  $Q = 0$  であるから、 $t_0$  は 0 とした。 $Q = 0$  となる瞬間は上向きの流れと下向きの流れが入れ替わる瞬間を意味する。そして、 $n$  番目の周期と振幅をそれぞれ  $T_n = t_{2n} - t_{2n-2}$  と  $A_n = [|h(t_{2n-1}) - h(t_{2n-2})| + |h(t_{2n-1}) - h(t_{2n})|] / 4$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) として定義した。これらを用いて、振幅  $A$  と周期  $T$  はそれぞれ  $A = (A_4 + A_5) / 2$ ,  $T = (T_4 + T_5) / 2$  として定義した。ここで  $n = 1, 2, 3$  における  $A_n$  と  $T_n$  は、初期値依存性を考慮して用いなかった。

以上より得られた  $0.02 \leq \Delta\rho \leq 0.2$  における  $h$  の振動の振幅  $A$  と周期  $T$  を図 5.9 に示す。図 5.7(d), 図 5.8(d) より、 $\Delta\rho = 0.025$  において系は減衰振動をするため、この図は分岐点前後の両方の  $\Delta\rho$  を反映している。図 5.9(a) において  $\Delta\rho$  を小さくしていくと、振幅は  $\Delta\rho \lesssim 0.03$  付近で 0 に向かって急速に減少した。よって、この付近に分岐点が存在すると考えられる。図 5.9(b) において  $\Delta\rho$  を小さくしていくと、周期は分岐点近傍で急速に大きくなっているが、有限の値に留まり発散はしなかった。つまり、分岐パラメータである  $\Delta\rho$  を大きくしていくと、有限の周期を持った安定状態から振動状態へ移り変わったので、この分岐構造は超臨界ホップ分岐と結論づけられる。

## 5.4 議論

分岐点近傍について詳細に議論する。図 5.9(a) において、振幅  $A$  は有限時間でのふるまいから見積もった。しかし分岐点近傍では一般的に、固定点或いはリミットサイクルに収束するまでには時間がかかる。よって  $A_4$  と  $A_5$  から求められた振幅  $A$  は、収束値 ( $\Delta\rho \geq \Delta\rho_c$  ならばリミットサイクルの振幅、 $\Delta\rho \leq \Delta\rho_c$  ならば 0) より大きな値を持つと考えられる。そこで、分岐点近傍での振幅と周期のふるまいを改めて調べ、分岐点における密度差の臨界値  $\Delta\rho_c$  を実際に見積もった。

分岐点近傍の  $\Delta\rho = 0.027, 0.028, 0.029, 0.03$  における、外容器の水位  $h$  の時間変化を図 5.10(a-d) に示す。収束に時間がかかるため、この有限時間の波形のみから系がリミットサイクル振動をしているか、減衰振動をしているかを判断することはできない。振動のタイプを決めるために、図 5.10(e) に示すような  $n$  番目の振幅  $A_n$  の時間発展を各  $\Delta\rho$  について調べた。リミットサイクル振動ならば  $A_n$  は 0 でない有限の値に収束していき、減衰振動ならば  $A_n$  は 0 に収束していく。また、図 5.10(f) に示すような  $n$  番目の振幅  $A_n$  の減衰率  $|A_n - A_{n+1}| / A_n$  も調べた。この減衰率は、リミットサイクル振動ならば 0 に収束し、減衰振動ならば以下の仮定の下で 0 でない有限の値に収束する。

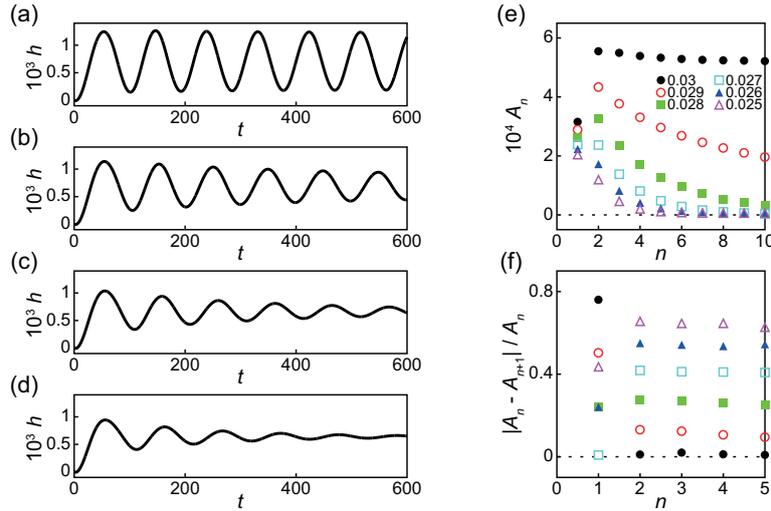


図 5.10 (a)  $\Delta\rho = 0.03$ , (b)  $\Delta\rho = 0.029$ , (c)  $\Delta\rho = 0.028$ , (d)  $\Delta\rho = 0.027$  における  $h$  の時系列 [24]。 (e)  $n$  に対する  $n$  番目の振幅  $A_n$ 。プロット点は  $\Delta\rho = 0.03$  (●; ブラック), 0.029 (○; レッド), 0.028 (■; グリーン), 0.027 (□; シアン), 0.026 (▲; ブルー), 0.025 (△; マゼンタ)。 (f)  $n$  に対する  $n$  番目の振幅  $A_n$  の減衰率  $|A_n - A_{n+1}|/A_n$ 。プロット点の種類と  $\Delta\rho$  の対応は (e) と同様。

$A(t) = A(0)e^{-\gamma t}$  で表されるような線形の減衰振動の振幅を想定すると、その減衰率は

$$\frac{|A_n - A_{n+1}|}{A_n} = \frac{|A(t) - A(t+T)|}{A(t)} = \frac{|A(0)e^{-\gamma t} - A(0)e^{-\gamma(t+T)}|}{A(0)e^{-\gamma t}} = 1 - e^{-\gamma T} \quad (5.62)$$

となる。周期  $T$  が一定の値を持つことから、減衰率は 0 から 1 の間の値に収束する。ここで  $\gamma$  は減衰係数である。よって図 5.10(e,f) より、系は  $\Delta\rho \geq 0.03$  でリミットサイクル振動、 $\Delta\rho \leq 0.027$  で減衰振動を示し、その間に分岐点が存在することがわかった。

超臨界ホップ分岐では、振動の振幅が  $(\Delta\rho - \Delta\rho_c)^{1/2}$  のスケーリングに従うことが知られている [1]。そこで図 5.11(a) では、 $\Delta\rho$  に対して振幅の 2 乗  $A^2$  をプロットし、分岐点に近いリミットサイクル振動の 3 点  $\Delta\rho = 0.03, 0.031, 0.032$  を用いて最小二乗法による線形フィッティングを行った。 $\Delta\rho \geq 0.033$  では、 $A^2$  は徐々にフィッティング直線から逸れていった。分岐点付近の線形な領域は、振幅  $A$  が  $(\Delta\rho - \Delta\rho_c)^{1/2}$  のスケーリングで 0 から立ち上がることを意味する。フィッティング直線と  $x$  軸との交点から、分岐点における密度差は  $\Delta\rho_c = 0.0288$  であると推定した。分岐点と周期との対応を、 $\Delta\rho - \Delta\rho_c$  に対する周期  $T$  として図 5.11(b) に示す。ここで、 $\Delta\rho_c$  は図 5.11(a) にて求めた値を用いた。周期の傾きが分岐点  $\Delta\rho = \Delta\rho_c$  で変化し、 $\Delta\rho \geq \Delta\rho_c$  と同様に  $\Delta\rho = \Delta\rho_c$  においても周期は有限の値となった。以上より、振幅の超臨界ホップ分岐におけるスケーリングから推定された分岐点において、周期が有限の値をもつことが確認できた。

最後に、分岐現象を輸送現象の観点から議論する。溶質の拡散と移流の比であるレイリー数  $Ra = (gL^3\Delta\rho/\rho)/(\nu D)$  について、レイリーベナル不安定性の典型的な臨界レイリー数  $Ra \sim 10^3$  を用いると  $\Delta\rho_c \sim 0.03$  が得られた。ここで、 $L$  は特徴的な長さ、 $\nu = \mu/\rho$  は動粘性係数であり、 $g = 10$ ,  $L \sim 0.1$  (細孔の高さ),  $\mu = 1/300$ ,  $D = 0.0001$  とした。見積られた臨界値  $\Delta\rho_c \sim 0.03$  は分岐のスケーリングから見積られた分岐点  $\Delta\rho_c = 0.0288$  とおおむね一致することから、定常状態と振

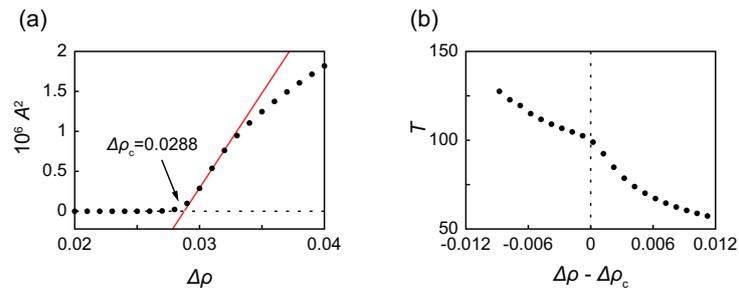


図 5.11 分岐点における密度差の臨界値  $\Delta\rho_c$  とその近傍での周期 [24]。(a)  $\Delta\rho$  に対する振幅の 2 乗  $A^2$  と、3 点  $\Delta\rho = 0.03, 0.031, 0.032$  を用いた線形フィッティング。(b)  $\Delta\rho - \Delta\rho_c$  に対する周期  $T$ 。

動状態間の転移現象が拡散と移流の輸送効率が競合して生じる現象であることが示唆された。

## 5.5 結論

本章の 2 次元流体シミュレーションでは、計算領域を流体の内部に取り、水位の時間変化を計算領域上下境界における圧力の時間変化として反映することで、シンプルなシミュレーションモデルを得た。シミュレーション結果から、二流体の密度差  $\Delta\rho$  を分岐パラメータとして大きくしていくと減衰振動からリミットサイクル振動に切り替わり、この分岐構造は超臨界ホップ分岐であることが特定できた。分岐点近傍における振幅のスケーリングから分岐点  $\Delta\rho_c$  を推測し、その前後で振動の周期は有限の値をとることを確認した。



## 第III部

# 複数の密度差振動子の結合系における同期現象



## 第6章

# 等しい密度差振動子の結合系

本章では、高密度流体の密度と内容器サイズが互いに等しい  $n$  個の密度差振動子の結合系を扱う [25]。特に  $n = 2, 3, 4$  について、2次元流体シミュレーションと位相縮約理論に基づいた解析から、すべての同期モードを検討する。最終的に、得られた同期モードとその安定性を対応付ける、モード選択パラメータを議論する。

### 6.1 結合系モデルへの拡張

5.2.7 項で述べた単一の密度差振動子のシミュレーションモデルを  $n$  結合系モデルに拡張する。図 6.1(a) は密度差振動子の結合系の模式図である。計算領域が  $n$  個の振動子それぞれに対して設定されており、 $i = 1, 2, \dots, n$  の番号が振られている。単一モデルからの変更点として、計算領域を内容器幅全体に取っており、各振動子の左右の境界条件を壁上の条件に変更する。計算は各計算領域で独立に行い、相互作用として計算領域下境界の圧力を共有する。図 6.1(b) は各計算領域の詳細である。以下、結合系のシミュレーションにおける  $i$  番目の計算領域について支配方程式と境界条件、初期条件、パラメータ設定を詳述する。まず、支配方程式としてナビエ・ストークス方程式

$$\rho^{(i)} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}^{(i)}}{\partial t} + (\mathbf{v}^{(i)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(i)} \right] = -\nabla p^{(i)} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}^{(i)} + \rho^{(i)} \mathbf{g}, \quad (6.1)$$

と非圧縮条件

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{(i)} = 0, \quad (6.2)$$

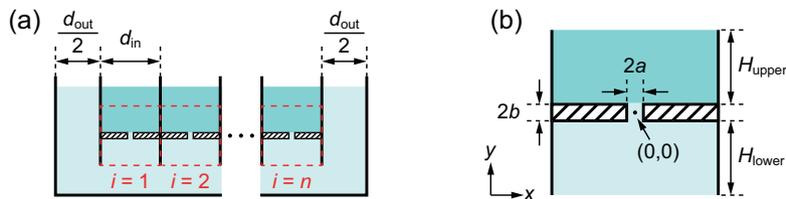


図 6.1 密度差振動子の結合系の 2次元モデル [25]。(a)  $n$  個の内容器からなる密度差振動子の結合系の模式図。赤の破線で囲った領域は計算領域を示す。(b) 計算領域の詳細。斜線部は内容器の底の壁を示す。

を適用する。ここで、 $\rho^{(i)} = \rho^{(i)}(x, y, t)$  は密度、 $\mathbf{v}^{(i)} = (v_x^{(i)}(x, y, t), v_y^{(i)}(x, y, t))$  は速度、 $p^{(i)} = p^{(i)}(x, y, t)$  は圧力、 $\mu$  は粘性係数、 $\mathbf{g} = (0, -g)$  は重力加速度である。規格化された濃度  $c^{(i)} = c^{(i)}(x, y, t)$  は移流拡散方程式

$$\frac{\partial c^{(i)}}{\partial t} + \nabla \cdot (c^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}) = D \nabla^2 c^{(i)}, \quad (6.3)$$

によって計算する。ここで、 $D$  は拡散係数である。密度  $\rho^{(i)}$  は濃度  $c^{(i)}$  に依存し

$$\rho^{(i)} = \rho_{\text{low}} + c^{(i)}(\rho_{\text{high}} - \rho_{\text{low}}), \quad (6.4)$$

として定義する。ここで、 $\rho_{\text{high}}, \rho_{\text{low}}$  はそれぞれ高密度流体と低密度流体の密度である。 $i$  番目の内容器の水位  $y_{\text{in}}^{(i)}(t)$  と共有の外容器の水位  $y_{\text{out}}(t)$  はそれぞれ  $i$  番目の計算領域の上境界の圧力  $p_{\text{upper}}^{(i)}(t)$  と下境界の圧力  $p_{\text{lower}}(t)$  と以下のように対応する。

$$p_{\text{upper}}^{(i)}(t) = \rho_{\text{high}} g (y_{\text{in}}^{(i)}(t) - b - H_{\text{upper}}), \quad (6.5a)$$

$$p_{\text{lower}}(t) = \rho_{\text{low}} g (y_{\text{out}}(t) + b + H_{\text{lower}}). \quad (6.5b)$$

ここで、 $p_{\text{lower}}(t)$  は  $n$  個全ての振動子で共通する。実際の系では内外容器における流体の密度は流れの振動に伴って変化するが、その変化は無視できるほど小さいため、本シミュレーションでは一定の密度  $\rho_{\text{high}}, \rho_{\text{low}}$  を式 (6.5a), (6.5b) でそれぞれ仮定する。水位の変化は、単位時間あたりに細孔を通過する流量  $Q^{(i)}(t)$  から

$$\frac{dy_{\text{in}}^{(i)}}{dt} = \frac{Q^{(i)}}{d_{\text{in}}}, \quad (6.6a)$$

$$\frac{dy_{\text{out}}}{dt} = -\frac{\sum_i Q^{(i)}}{d_{\text{out}}}, \quad (6.6b)$$

$$Q^{(i)}(t) = \int_{-a}^a v_y^{(i)}(x, b, t) dx, \quad (6.6c)$$

として得られる。

境界条件は以下のように設定する。壁上の境界で、速度はノンスリップ条件  $\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}$ 、濃度はノイマン条件  $\nabla_{\perp} c^{(i)} = 0$  に従う。ここで、 $\nabla_{\perp}$  は境界に対して垂直方向の空間微分を表す。流体中に設定した上下の境界で、 $\mathbf{v}^{(i)}, c^{(i)}$  はそれぞれノイマン条件  $\nabla_{\perp} \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}, \nabla_{\perp} c^{(i)} = 0$  に従い、圧力は式 (6.5a), (6.5b) に従う。

初期状態で、高密度流体と低密度流体は静止しており ( $\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}$ )、互いに混ざり合っていない ( $y < b$  で  $c^{(i)} = 0$ ,  $y \geq b$  で  $c^{(i)} = 1$ )。外容器流体の初期水位  $y_{\text{out}}(0) = y_{\text{out},0}$  は全てのシミュレーションで固定する。単一振動子 ( $n = 1$ ) における内容器流体の初期水位は、外容器流体による静水圧との釣り合いから  $y_{\text{in}}^{(1)}(0) = b + (\rho_{\text{low}}/\rho_{\text{high}})(y_{\text{out},0} - b)$  として設定する。結合振動子 ( $n \geq 2$ ) における各内容器流体の初期水位  $y_{\text{in}}^{(i)}(0)$  は、コントロールパラメータとして変化させる。

非圧縮条件のナビエ・ストークス方程式 (6.1), (6.2) を数値的に解くために、MAC 法を適用した [29, 30]。移流拡散方程式 (6.3) には陽解法を適用した。各計算領域を  $200 \times 240$  のメッシュに分割し、その空間メッシュサイズは  $\Delta x = \Delta y = 0.005$  とした。時間は時間ステップ  $\Delta t = 0.0002$  で発展させた。パラメータは以下のように設定した:  $a = 0.03$ ,  $b = 0.05$ ,  $d_{\text{in}} = 1$ ,  $d_{\text{out}} = 6$ ,  $g = 10$ ,  $\mu = 1/300$ ,  $D = 0.0001$ ,  $\rho_{\text{high}} = 1.2$ ,  $\rho_{\text{low}} = 1$ ,  $H_{\text{upper}} = H_{\text{lower}} = 0.55$ ,  $y_{\text{out},0} = 10.05$ 。

## 6.2 数値計算結果

### 6.2.1 同期現象

等しい自然角振動数と振動子間の等しい結合強度をもつ密度差振動子の結合系 ( $n = 2, 3, 4$ ) について流体シミュレーションを行った。

2 結合振動子 ( $n = 2$ ) のシミュレーションでは、まず各振動子で上向き流れと下向き流れが交互に発生し、数周期後に両振動子における流れの振動が同期を示した。一方の振動子で上向き流れが始まるとき、他方の振動子で下向き流れが始まる。 $y_{\text{in}}^{(1)}, y_{\text{in}}^{(2)}$  の時系列を図 6.2(a-1) に示す。同期を定量的に述べるために、2 個の振動子間の位相差を計算した。ここで、位相  $\phi$  ( $0 \leq \phi < 2\pi$ ) を時間に比例して定義する。 $\phi = 0$  は上向き流れが始まるときに対応し、 $\phi = 2\pi$  は次の上向き流れが始まるときに対応する [図 6.4(a) 参照]。2 個の振動子間の位相差を  $\Delta\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$  として表す。ここで、 $\phi_i$  は  $i$  番目の振動子の位相である。図 6.2(a-2) に示すように、位相差  $\Delta\phi_{12}$  は一定値  $\Delta\phi_{12} = \pi$ 、つまり逆相同期モードに収束した。

また、2 個の振動子に対して等しい初期条件を設定することで、実験では観察されていない同相同期モード ( $\Delta\phi_{12} = 0$ ) を実現した。初期条件の対称性は水位をパラメータとしてコントロールした: 逆相モードは  $y_{\text{in}}^{(1)}(0) \neq y_{\text{in}}^{(2)}(0)$  から現れ、同相モードは  $y_{\text{in}}^{(1)}(0) = y_{\text{in}}^{(2)}(0)$  から現れた。図 6.2(b) は同相モードにおける系のふるまいを示す。

図 6.2(c) に示すように、3 結合振動子 ( $n = 3$ ) は、 $2\pi/3$  ずつの等しい位相差をもつ 3 相同期モードに収束した。また、一部或いは全ての振動子に対して初期条件の対称性をコントロールし、図 6.2(d), 6.2(e) にそれぞれ示すように  $y_{\text{in}}^{(1)}(0) = y_{\text{in}}^{(2)}(0) \neq y_{\text{in}}^{(3)}(0)$  から部分同相モード、 $y_{\text{in}}^{(1)}(0) = y_{\text{in}}^{(2)}(0) = y_{\text{in}}^{(3)}(0)$  から完全同相モードを実現した。

図 6.2(f) に示すように、4 結合振動子 ( $n = 4$ ) は、2 組の同相振動子をもち、その位相差が  $\pi$  である 2-2 部分同相モードに収束した。逆相モード ( $n = 2$ )、3 相モード ( $n = 3$ ) と比べて、一定の位相差に収束するまでに長い時間がかかった。また、一部或いは全ての振動子に対して初期条件の対称性をコントロールし、2-2 部分同相モード [図 6.2(g), 6.2(h)]、3-1 部分同相モード [図 6.2(i)]、完全同相モード [図 6.2(j)] を実現した。ここで、3-1 部分同相モードは、3 個の同相振動子と、それらと異なる位相をもつ 1 つの振動子から構成される。

$n = 2, 3, 4$  の各同期モードの典型的な密度場を図 6.3 に示す。

### 6.2.2 位相ダイナミクス

同期モードの安定性を位相ダイナミクスの観点から解析した。まず、リミットサイクル振動の位相応答を測定するために、摂動に対する単一振動子 ( $n = 1$ ) の応答を調べた。図 6.4(a) に摂動がない場合の外容器水位  $y_{\text{out}}$  と対応する位相  $\phi$  を示す。外容器水位の摂動  $\Delta y_{\text{out}}$  を  $t = t_0$  で導入し、摂動を加えた  $y_{\text{out}}$  の時間発展を式 (6.6b) の代わりに

$$\frac{dy_{\text{out}}}{dt} = -\frac{Q^{(1)}}{d_{\text{out}}} + \Delta y_{\text{out}} \delta(t - t_0), \quad (6.7)$$

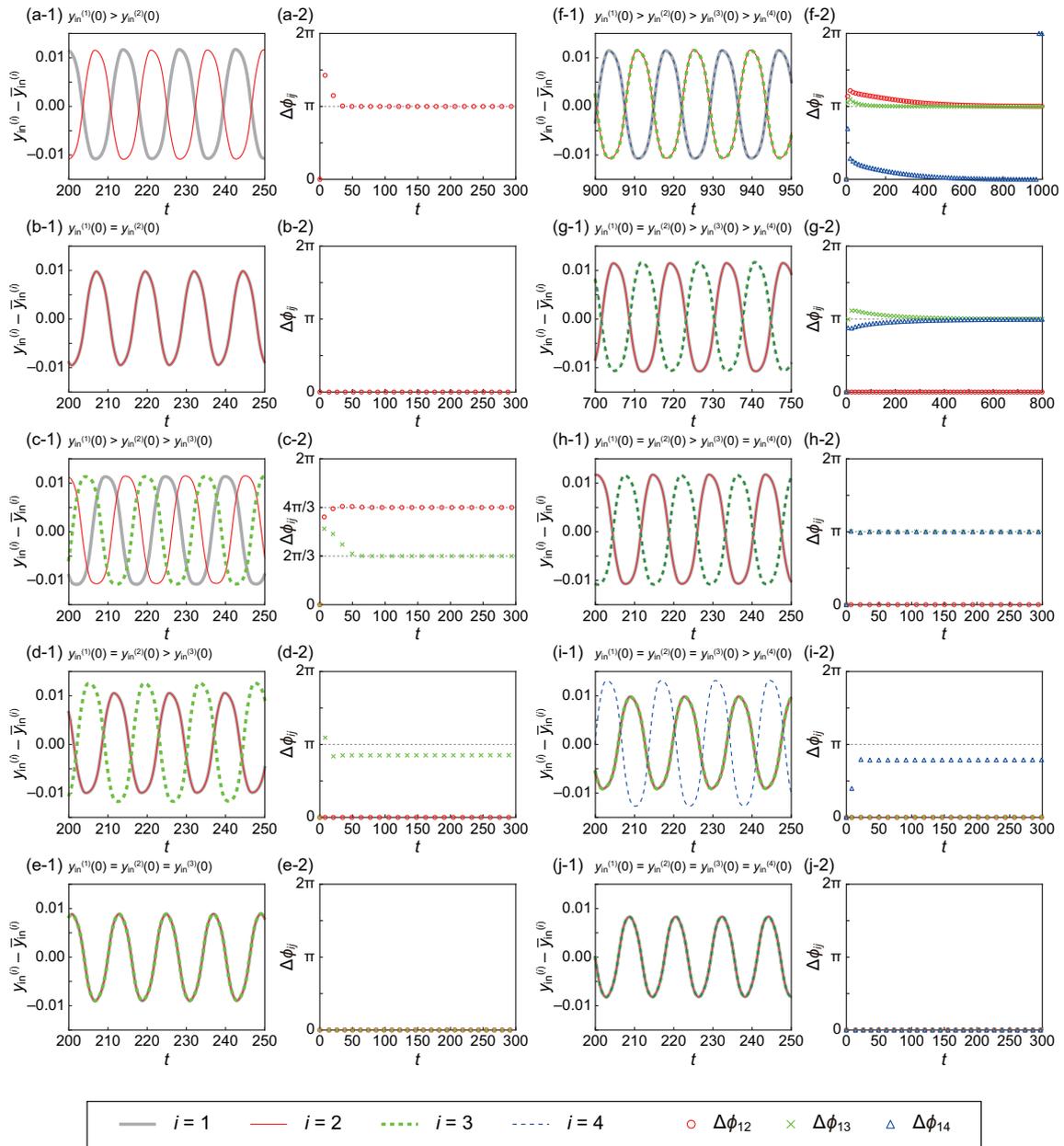


図 6.2 密度差振動子の結合系における同期 [25]。(a),(b)  $n = 2$ , (c)–(e)  $n = 3$ , (f)–(j)  $n = 4$ 。(a-1)–(j-1)  $y_{in}^{(i)} - \bar{y}_{in}^{(i)}$  の時系列。 $\bar{y}_{in}^{(i)}$  は  $y_{in}^{(i)}$  の時間平均である。グレーの太い実線、赤の細い実線、緑の太い破線、青の細い破線はそれぞれ  $i = 1, 2, 3, 4$  を表す。初期水位  $y_{in}^{(i)}(0)$  の対称性を各図の上部に示した。(a-2)–(j-2) 対応する位相差  $\Delta\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i$ 。赤い丸、緑のバツ、青の三角はそれぞれ  $\Delta\phi_{12}$ ,  $\Delta\phi_{13}$ ,  $\Delta\phi_{14}$  を示す。

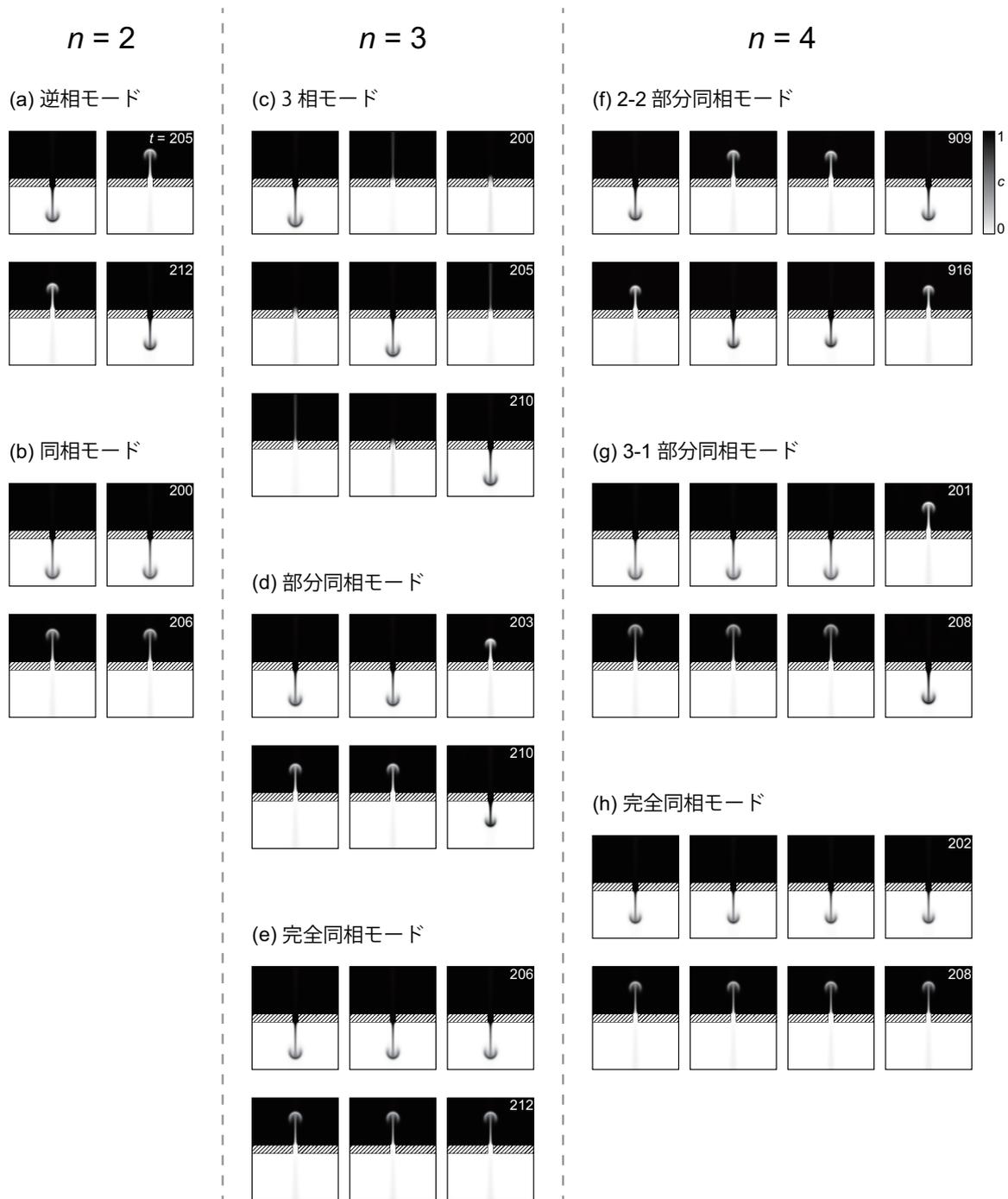


図 6.3 密度場のスナップショット。(a),(b)  $n=2$ , (c)-(e)  $n=3$ , (f)-(h)  $n=4$ 。各同期モードは図 6.2 のシミュレーション結果に対応し、2-2 部分同相モードは図 6.2(f)-(h) のシミュレーション結果の内、(f) の結果に対応する。

として与える。位相シフト  $\Delta\phi$  は、十分な時間経過後の摂動を与えた場合の位相  $\phi'$  から、摂動がない場合の位相  $\phi_0$  を差し引くことで

$$\Delta\phi = \phi' - \phi_0, \quad (6.8)$$

として定義する。シミュレーションでは十分な時間経過として、初期状態から 15 周期後に摂動を導入し、さらに 15 周期後に位相シフトを測定した。位相応答曲線  $\Delta\phi = \Delta\phi(\phi, \Delta y_{\text{out}})$  は、位相シフトを摂動を与えた位相  $\phi$  と摂動の振幅  $\Delta y_{\text{out}}$  の関数として表す。摂動が十分に小さいとき、位相応答曲線は摂動の振幅  $\Delta y_{\text{out}}$  に対して線形であることが仮定され、

$$\Delta\phi(\phi, \Delta y_{\text{out}}) = \Delta y_{\text{out}} Z(\phi), \quad (6.9)$$

として表せる。ここで、 $Z(\phi)$  は位相感受関数である。図 6.4(b) は摂動の振幅  $\Delta y_{\text{out}}$  に対してプロットした位相シフト  $\Delta\phi$  を示す。式 (6.9) が成り立つ線形領域は、 $\Delta y_{\text{out}} \sim 0.0002$  以下で確認できた。そこで、 $\Delta y_{\text{out}} = 0.0001$  の摂動振幅で図 6.4(c) に示す位相感受関数  $Z(\phi)$  を測定した。 $0 \lesssim \phi \lesssim \pi/3, 4\pi/3 \lesssim \phi \lesssim 2\pi$  において  $Z(\phi)$  は正であり、摂動がない場合と比較して位相が進んでいる。一方で、 $\pi/3 \lesssim \phi \lesssim 4\pi/3$  において  $Z(\phi)$  は負であり、摂動がない場合と比較して位相が遅れている。これらのふるまいは以下のように解釈できる。摂動により外容器水位が増加したことで、摂動がない場合と比べて  $Z(\phi) > 0$  では流れが早く切り替わり、 $Z(\phi) < 0$  では流れが長く続いた。 $Z(\phi)$  の符号の変化は、外容器水位の加速度  $d^2 y_{\text{out}}/dt^2 (= \omega df(\phi)/d\phi$  [図 6.4(d) 参照]) と関連すると考えられる。上向き流れが加速している或いは下向き流れが減速しているとき、摂動による外容器水位の増加は位相を進ませる。一方で、上向き流れが減速している或いは下向き流れが加速しているとき、摂動による外容器水位の増加は位相を遅らせる。

$n$  個の等しい振動子による弱結合系の位相ダイナミクスは、位相縮約理論に基づいて、小さい摂動下にある単一振動子の位相応答から解析できる [31]。他の振動子から受ける小さい摂動下にある  $i$  番目の振動子のダイナミクスは

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + Z(\phi_i) \sum_{j \neq i} f(\phi_j), \quad (6.10)$$

として記述される。ここで、 $\omega$  はリミットサイクル振動の自然角振動数、 $f(\phi_i) = -Q^{(1)}(\phi_i)/d_{\text{out}}$  は図 6.4(d) に示すような  $i$  番目の振動子による  $y_{\text{out}}$  への周期的な摂動である。 $Q^{(1)}$  の周期的な時系列は、 $n = 1$  のシミュレーションにおける初期状態から 15 周期後の時系列から得た。式 (6.10) の右辺第 2 項について、摂動が十分小さいとき、1 周期の間で振動子間の位相差がほとんど一定とみなし、1 周期に渡って時間平均を取ると

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z(\phi_i(t')) \sum_{j \neq i} f(\phi_j(t')) dt' \\ &= \omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\phi_i) \sum_{j \neq i} f(\phi_i + \Delta\phi_{ij}) d\phi_i \\ &= \omega + \sum_{j \neq i} \Gamma(\Delta\phi_{ij}), \end{aligned} \quad (6.11)$$

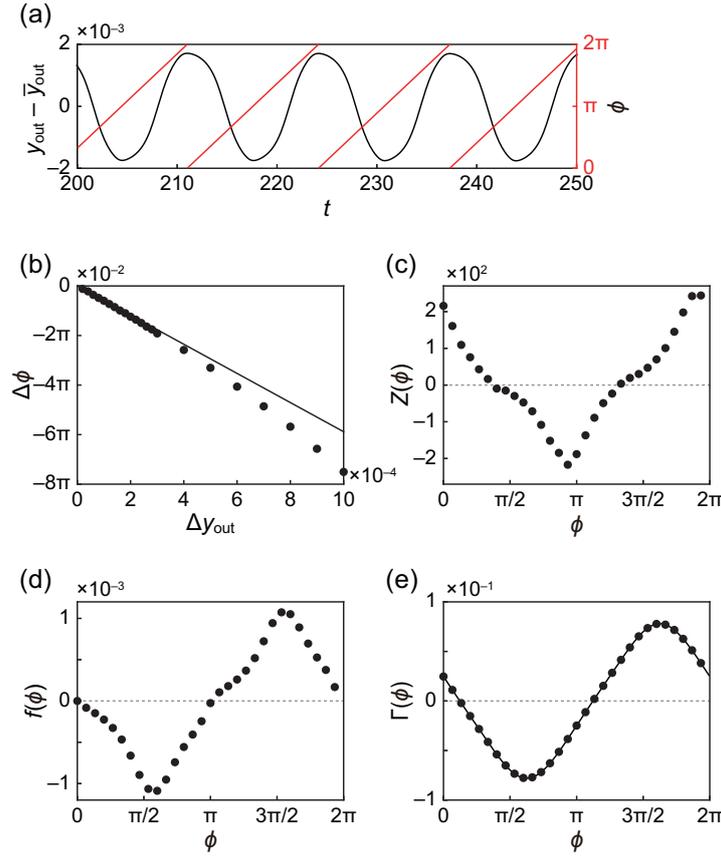


図 6.4 密度差振動子の位相記述 [25]。(a) 位相  $\phi$  の定義。黒線は、左軸に目盛りを取った  $y_{\text{out}} - \bar{y}_{\text{out}}$  の時系列を示す。ここで、 $\bar{y}_{\text{out}}$  は  $y_{\text{out}}$  の時間平均である。赤線は、右軸に目盛りを取った対応する位相  $\phi$  を示す。(b) 位相シフト  $\Delta\phi$  の摂動振幅  $\Delta y_{\text{out}}$  依存性。摂動は、1 周期の中で位相シフトが十分に大きい  $\phi = \pi$  で導入した。直線の傾きは、 $\Delta y_{\text{out}} \leq 0.0001$  の 5 点からフィッティングし決定した。(c)  $\Delta y_{\text{out}} = 0.0001$  の摂動から得られた位相感受関数  $Z(\phi)$ 。(d) 外容器水位への周期的な摂動  $f(\phi)$ 。(e) 位相結合関数  $\Gamma(\phi)$ 。プロット点は (c), (d) から計算した離散データを表す。実線は 6 次までのフーリエ級数によるフィッティングカーブを示す。

として近似される。ここで、 $\Gamma(\phi)$  は位相結合関数

$$\Gamma(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\theta) f(\phi + \theta) d\theta. \quad (6.12)$$

である。図 6.4(e) に、図 6.4(c), 6.4(d) にそれぞれ示した  $Z(\phi)$ ,  $f(\phi)$  から計算した位相結合関数  $\Gamma(\phi)$  を示す。ここで、フーリエ級数

$$\Gamma(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)), \quad (6.13)$$

を考える。ただし、 $a_k, b_k$  はそれぞれ  $\Gamma(\phi)$  のフーリエ余弦係数とフーリエ正弦係数である。図 6.4(e) の離散点から計算した係数  $a_k, b_k$  ( $k \leq 6$ ) を図 6.5 に示す。以下の  $\Gamma(\phi)$  を使う計算では、6 次まで展開したフーリエ級数を用いる。フーリエ級数で表した位相結合関数も図 6.4(e) に示しており、離散点によく一致している。

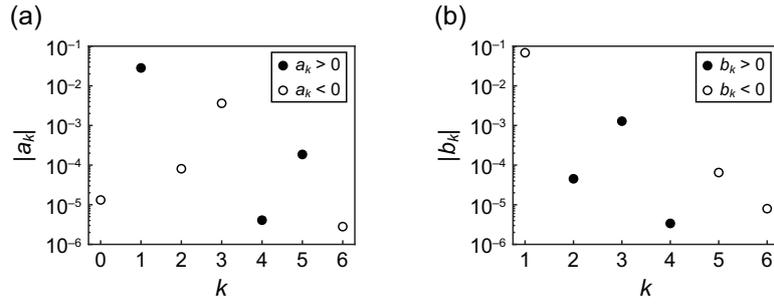


図 6.5 図 6.4(e) に示された  $\Gamma(\phi)$  のフーリエ成分 [25]。(a) フーリエ余弦係数  $a_k$ 。(b) フーリエ正弦係数  $b_k$ 。 $a_k, b_k$  の符号は、黒丸 (正) と白丸 (負) で表されている。

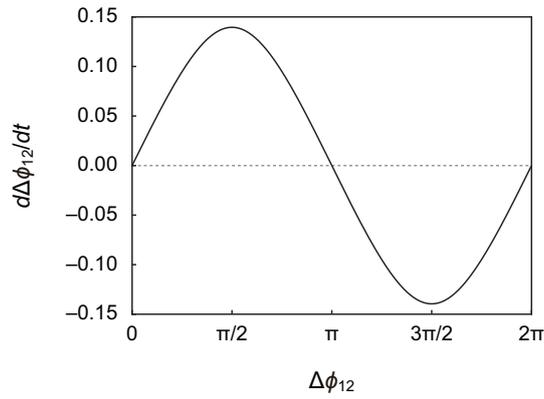


図 6.6 2 結合振動子についての  $(\Delta\phi_{12}, d\Delta\phi_{12}/dt)$  平面上の位相図 [25]。 $\Delta\phi_{12} = \pi$  に対応する逆相モードが安定、 $\Delta\phi_{12} = 0$  に対応する同相モードが不安定であることを示す。

2 結合振動子において、 $i = 1, 2$  の振動子の位相方程式は式 (6.11) よりそれぞれ

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{12}), \quad (6.14a)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{21}), \quad (6.14b)$$

である。式 (6.14b) から式 (6.14a) を引くと、位相差  $\Delta\phi_{12}$  のダイナミクスは

$$\frac{d\Delta\phi_{12}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}), \quad (6.15)$$

と記述される。 $\Delta\phi_{12}$  の時間微分が  $\Delta\phi_{12}$  の関数として表され、その位相図は図 6.6 のように得られる。 $d\Delta\phi_{12}/dt = 0$  が成り立つ固定点は  $\Delta\phi_{12} = 0, \pi$  である。微分  $d\Delta\phi_{12}/dt$  は  $0 < \Delta\phi_{12} < \pi$  で正、 $\pi < \Delta\phi_{12} < 2\pi$  で負である。それゆえ、 $\Delta\phi_{12} = \pi$  に対応する逆相モードは安定、 $\Delta\phi_{12} = 0$  に対応する同相モードは不安定である。

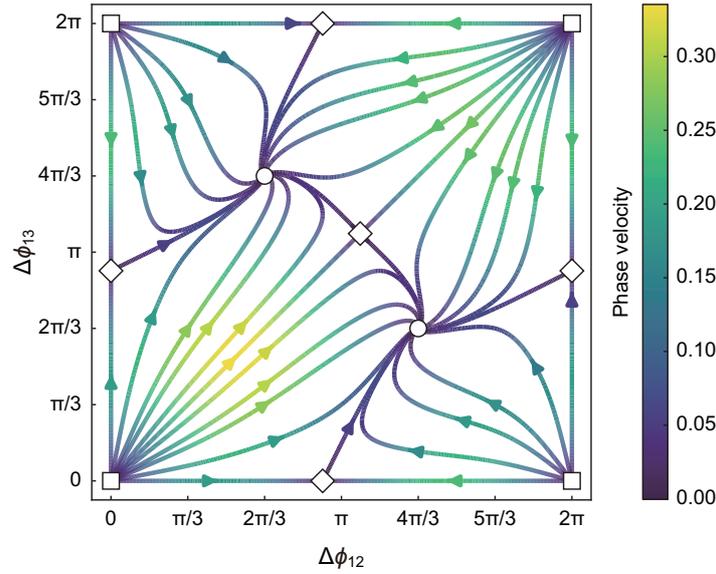


図 6.7 3 結合振動子についての  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13})$  平面上のベクトル場  $(d\Delta\phi_{12}/dt, d\Delta\phi_{13}/dt)$  [25]。不安定なスターノード (四角)、不安定なサドル (ダイヤ)、安定なスパイラル (丸) はそれぞれ完全同相、部分同相、3 相モードを表す。位相速度  $\sqrt{(d\Delta\phi_{12}/dt)^2 + (d\Delta\phi_{13}/dt)^2}$  はカラーコードで表す。

3 結合振動子において、 $i = 1, 2, 3$  の振動子の位相方程式は式 (6.11) よりそれぞれ

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{12}) + \Gamma(\Delta\phi_{13}), \quad (6.16a)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{21}) + \Gamma(\Delta\phi_{23}), \quad (6.16b)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{31}) + \Gamma(\Delta\phi_{32}), \quad (6.16c)$$

である。式 (6.16b) と式 (6.16c) から式 (6.16a) をそれぞれ引くと、位相差  $\Delta\phi_{12}$ ,  $\Delta\phi_{13}$  のダイナミクスは

$$\frac{d\Delta\phi_{12}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{12}) + \Gamma(\Delta\phi_{13} - \Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{13}), \quad (6.17a)$$

$$\frac{d\Delta\phi_{13}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{13}) + \Gamma(\Delta\phi_{12} - \Delta\phi_{13}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{13}), \quad (6.17b)$$

と記述される。位相差の安定性を、 $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13})$  平面上のベクトル場として図 6.7 に可視化する。 $d\Delta\phi_{12}/dt = d\Delta\phi_{13}/dt = 0$  を満たす以下の 3 つの同期モードがある: (i) 不安定なスターノード  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}) = (0, 0)$  に対応する完全同相モード (ii) 不安定なサドル  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}) = (\alpha, 0), (0, \alpha), (2\pi - \alpha, 2\pi - \alpha)$  に対応する部分同相モード (iii) 安定なスパイラル  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}) = (2\pi/3, 4\pi/3), (4\pi/3, 2\pi/3)$  に対応する 3 相モード。ここで、 $\alpha$  は  $\Gamma(\alpha) = 2\Gamma(-\alpha) - \Gamma(0)$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$  を満たす。

4 結合振動子において、 $i = 1, 2, 3, 4$  の振動子の位相方程式は式 (6.11) よりそれぞれ

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{12}) + \Gamma(\Delta\phi_{13}) + \Gamma(\Delta\phi_{14}), \quad (6.18a)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{21}) + \Gamma(\Delta\phi_{23}) + \Gamma(\Delta\phi_{24}), \quad (6.18b)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{31}) + \Gamma(\Delta\phi_{32}) + \Gamma(\Delta\phi_{34}), \quad (6.18c)$$

$$\frac{d\phi_4}{dt} = \omega + \Gamma(\Delta\phi_{41}) + \Gamma(\Delta\phi_{42}) + \Gamma(\Delta\phi_{43}), \quad (6.18d)$$

である。式 (6.18b), 式 (6.18c), 式 (6.18d) から式 (6.18a) をそれぞれ引くと、位相差  $\Delta\phi_{12}$ ,  $\Delta\phi_{13}$ ,  $\Delta\phi_{14}$  のダイナミクスは

$$\frac{d\Delta\phi_{12}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{12}) + \Gamma(\Delta\phi_{13} - \Delta\phi_{12}) + \Gamma(\Delta\phi_{14} - \Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{13}) - \Gamma(\Delta\phi_{14}), \quad (6.19a)$$

$$\frac{d\Delta\phi_{13}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{13}) + \Gamma(\Delta\phi_{12} - \Delta\phi_{13}) + \Gamma(\Delta\phi_{14} - \Delta\phi_{13}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{13}) - \Gamma(\Delta\phi_{14}), \quad (6.19b)$$

$$\frac{d\Delta\phi_{14}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{14}) + \Gamma(\Delta\phi_{12} - \Delta\phi_{14}) + \Gamma(\Delta\phi_{13} - \Delta\phi_{14}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{13}) - \Gamma(\Delta\phi_{14}). \quad (6.19c)$$

と記述される。 $d\Delta\phi_{12}/dt = d\Delta\phi_{13}/dt = d\Delta\phi_{14}/dt = 0$  を満たす以下の 4 つの同期モードがある: (i)  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (0, 0, 0)$  に対応する完全同相モード (ii)  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (\beta, 0, 0)$ ,  $(0, \beta, 0)$ ,  $(0, 0, \beta)$ ,  $(2\pi - \beta, 2\pi - \beta, 2\pi - \beta)$  に対応する 3-1 部分同相モード (iii)  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (0, \pi, \pi)$ ,  $(\pi, 0, \pi)$ ,  $(\pi, \pi, 0)$  に対応する 2-2 部分同相モード (iv)  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (\pi/2, \pi, 3\pi/2)$ ,  $(\pi/2, 3\pi/2, \pi)$ ,  $(\pi, \pi/2, 3\pi/2)$ ,  $(\pi, 3\pi/2, \pi/2)$ ,  $(3\pi/2, \pi/2, \pi)$ ,  $(3\pi/2, \pi, \pi/2)$  に対応する 4 相モード。ここで、 $\beta$  は  $\Gamma(\beta) = 3\Gamma(-\beta) - 2\Gamma(0)$ ,  $0 < \beta < 2\pi$  を満たす。位相差の 3 次元ダイナミクスを可視化する代わりに、位相差の任意の初期条件からの時間変化を調べた。式 (6.19a)–(6.19c) をオイラー法で離散化し、 $\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}$  の時間発展を時間ステップ  $\Delta t = 0.01$  で計算した。図 6.8(a) に示した数値計算結果は、系が 2-2 部分同相モードに収束することを示した。また、図 6.8(b) は初期状態近傍の拡大図である。図 6.8(c) に (b) と同じ時間範囲における位相差  $\Delta\phi_{13}$ ,  $\Delta\phi_{24}$  を示す。系が  $t \sim 10^4$  の時間スケールで 2-2 部分同相モードに収束したのに対し、逆相の 2 組が  $t \sim 10^1$  の時間スケールで急速に形成された。そこで、逆相の 2 組  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (\Delta\phi_{12}, \pi, \Delta\phi_{12} + \pi)$  の位相ダイナミクスを考える。式 (6.19a)–(6.19c) は

$$\frac{d\Delta\phi_{12}}{dt} = \Gamma(-\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}) + \Gamma(\pi - \Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{12} + \pi), \quad (6.20a)$$

$$\frac{d\Delta\phi_{13}}{dt} = \frac{d\Delta\phi_{24}}{dt} = 0, \quad (6.20b)$$

として書き替えられる。逆相の 2 組をもつ 4 結合振動子について、 $(\Delta\phi_{12}, d\Delta\phi_{12}/dt)$  平面上の位相図を図 6.8(d) に示す。 $d\Delta\phi_{12}/dt = 0$  が成り立つ固定点は  $\Delta\phi_{12} = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  である。微分  $d\Delta\phi_{12}/dt$  は  $\pi/2 < \Delta\phi_{12} < \pi, 3\pi/2 < \Delta\phi_{12} < 2\pi$  で正、 $0 < \Delta\phi_{12} < \pi/2, \pi < \Delta\phi_{12} < 3\pi/2$  で負である。それゆえ、 $\Delta\phi_{12} = 0, \pi$  に対応する 2-2 部分同相モードは安定、 $\Delta\phi_{12} = \pi/2, 3\pi/2$  に対応する 4 相モードは不安定である。

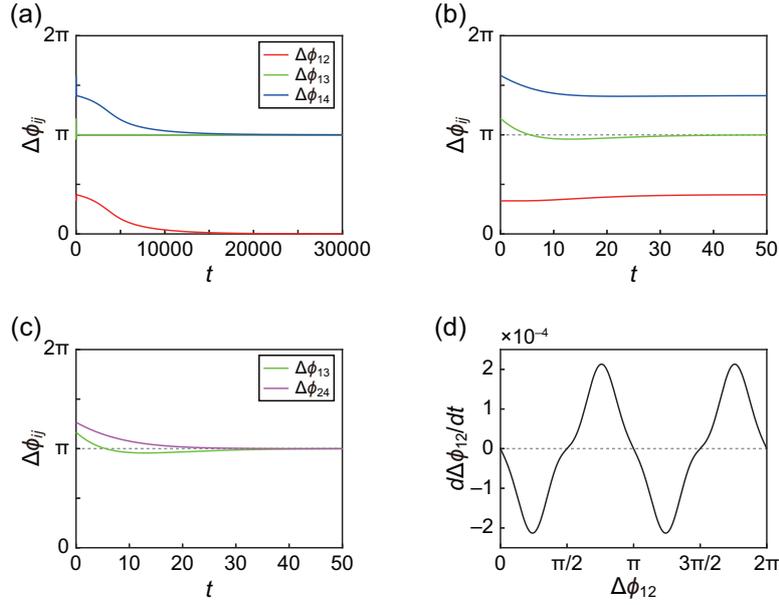


図 6.8 4 結合振動子における位相差  $\Delta\phi_{12}$ ,  $\Delta\phi_{13}$ ,  $\Delta\phi_{14}$  のふるまい [25]。(a) 初期状態  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (\pi/3, 7\pi/6, 8\pi/5)$  からの位相差の時系列。(b) (a) における  $0 \leq t \leq 50$  の拡大図。(c) (b) と同じ時間範囲における  $\Delta\phi_{13}$ ,  $\Delta\phi_{24}$ 。赤、緑、青、マゼンタの線はそれぞれ  $\Delta\phi_{12}$ ,  $\Delta\phi_{13}$ ,  $\Delta\phi_{14}$ ,  $\Delta\phi_{24}$  を表す。(d) 2 組の逆相をもつ 4 結合振動子  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (\Delta\phi_{12}, \pi, \Delta\phi_{12} + \pi)$  についての  $(\Delta\phi_{12}, d\Delta\phi_{12}/dt)$  平面上の位相図。 $\Delta\phi_{12} = 0, \pi$  に対応する 2-2 部分同相モードが安定、 $\Delta\phi_{12} = \pi/2, 3\pi/2$  に対応する 4 相モードが不安定であることを示す。

位相ダイナミクスの解析結果と 6.2.1 項のシミュレーション結果を比較する。非対称な初期条件のシミュレーションから得られた逆相 ( $n = 2$ )、3 相 ( $n = 3$ )、2-2 部分同相 ( $n = 4$ ) モードは安定、対称な初期条件のシミュレーションから得られたその他のモードは不安定であることがわかった。

シミュレーションで得られた異なる同期モード間の周期の違いは、位相縮約理論に基づいて説明することができる。一定周期  $T$  での同期を仮定し、位相方程式 (6.11) を  $t$  に関して  $0 \sim T$  に渡って積分すると

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{j \neq i} \Gamma(\Delta\phi_{ij})}{2\pi}} T_0, \quad (6.21)$$

が得られる。ここで、 $T_0 = 2\pi/\omega$  は相互作用のない単一振動子の固有周期である。 $\sum_{j \neq i} \Gamma(\Delta\phi_{ij})$  が負 (正) ならば、同期中の周期  $T$  は固有周期  $T_0$  よりも長い (短い) ことがわかる。シミュレーションで得られた周期と、式 (6.21) から見積られた周期を表 6.1 に示す。シミュレーション結果は、 $\sum_{j \neq i} \Gamma(\Delta\phi_{ij})$  が負 (正) ならば同期中の周期が固有周期よりも長い (短い) ことを示しており、式 (6.21) による評価と定性的に一致する。シミュレーションで得られた周期と見積られた周期との定量的な違いには、以下の二つの要因が考えられる。一つ目は、表 6.1 に示した、シミュレーションにおける単一振動子の振幅と結合振動子の振幅とのわずかな差である。位相縮約理論では、これらは等しいと仮定される。二つ目は、位相縮約における式 (6.10) から式 (6.11) への平均化近似である。

表 6.1 同期している振動の周期と振幅 [25]。1—6 列目はそれぞれ結合振動子数、同期モード、シミュレーションで得られた周期、シミュレーションで得られた  $T_0$ ,  $\Gamma(\phi)$  を用いて式 (6.21) から見積られた周期、 $\sum_{j \neq i} \Gamma(\Delta\phi_{ij})$  の符号、シミュレーションで得られた振幅を示す。

振動子数	同期モード	シミュレーション で得られた周期	見積られた 周期	$\sum_{j \neq i} \Gamma(\Delta\phi_{ij})$ の符号	シミュレーション で得られた振幅
1	—	13.2	—	—	0.0104
2	逆相	14.4	13.9	negative	0.0112
2	同相	12.5	12.5	positive	0.0096
3	3 相	15.3	14.3	negative	0.0111
3	部分同相	14.1	13.7	negative	0.0102 ( $i = 1, 2$ ), 0.0121 ( $i = 3$ )
3	完全同相	12.1	12.0	positive	0.0089
4	2-2 部分同相 *	14.4	13.9	negative	0.0112
4	3-1 部分同相	13.8	13.2	negative	0.0095 ( $i = 1, 2, 3$ ), 0.0129 ( $i = 4$ )
4	完全同相	11.8	11.4	positive	0.0082

\* 図 6.2(f)–(h) における三つのシミュレーション結果の内、(h) の結果を適用している。

### 6.2.3 線形安定性解析

$n = 2, 3, 4$  に対応する式 (6.15), (6.17), (6.19) における結合振動子間の位相差の固定点に対して線形安定性解析を行う。固定点の安定性を、式 (6.13) の位相結合関数のフーリエ成分  $a_k, b_k$  を用いて記述する。

2 結合振動子について、固定点  $\Delta\phi_{12}^*$  と、固定点からの摂動  $\eta_{12}(t)$  を考え、 $\eta_{12}(t) = \Delta\phi_{12}(t) - \Delta\phi_{12}^*$  として定義する。摂動は近似的に

$$\frac{d\eta_{12}}{dt} = \lambda\eta_{12}, \quad (6.22)$$

に従う。ここで、 $\lambda$  は固定点  $\Delta\phi_{12} = \Delta\phi_{12}^*$  における、式 (6.15) 右辺の  $\Delta\phi_{12}$  に関する微分である。

3 結合振動子について、固定点  $(\Delta\phi_{12}^*, \Delta\phi_{13}^*)$  と、固定点からの摂動  $(\eta_{12}, \eta_{13})$  を考え、 $(\eta_{12}, \eta_{13}) = (\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}) - (\Delta\phi_{12}^*, \Delta\phi_{13}^*)$  として定義する。摂動は近似的に

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta_{12} \\ \eta_{13} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta_{12} \\ \eta_{13} \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

に従う。ここで、 $A$  は固定点  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}) = (\Delta\phi_{12}^*, \Delta\phi_{13}^*)$  における、式 (6.17a), (6.17b) 右辺のヤコビ行列である。

4 結合振動子について、固定点  $(\Delta\phi_{12}^*, \Delta\phi_{13}^*, \Delta\phi_{14}^*)$  と、固定点からの摂動  $(\eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14})$  を考え、 $(\eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}) = (\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) - (\Delta\phi_{12}^*, \Delta\phi_{13}^*, \Delta\phi_{14}^*)$  として定義する。摂動は近似的に

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta_{12} \\ \eta_{13} \\ \eta_{14} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta_{12} \\ \eta_{13} \\ \eta_{14} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

に従う。ここで、 $A$  は固定点  $(\Delta\phi_{12}, \Delta\phi_{13}, \Delta\phi_{14}) = (\Delta\phi_{12}^*, \Delta\phi_{13}^*, \Delta\phi_{14}^*)$  における、式 (6.19a)–(6.19c) 右辺のヤコビ行列である。

固定点の安定性は、摂動の成長率を表すヤコビ行列  $A$  の固有値  $\lambda$  から評価することができる。数値計算結果より、1 次のフーリエ成分  $a_1, b_1$  は、高次 ( $k \geq 2$ ) のフーリエ成分と比べて非常に大きい [図 6.5 参照]。それゆえ、 $a_1, b_1$  が固有値の実部に含まれる場合、安定性に最も寄与する。そこで我々は、 $a_1, b_1$  のみを用いて安定性を議論する。線形安定性解析の結果として、様々な同期モードについて固有値、固定点の種類、 $a_1, b_1$  の数値計算結果から評価した安定性を表 6.2 に示す。 $a_1, b_1$  のみを用いて、部分同相モード ( $n = 3$ ) における  $\alpha = \arctan(-6a_1b_1/(a_1^2 - 9b_1^2))$ 、3-1 部分同相モード ( $n = 4$ ) における  $\beta = \arctan(-4a_1b_1/(a_1^2 - 4b_1^2))$  を得た。線形安定性解析の結果は、1 次のフーリエ正弦係数  $b_1$  が高次の係数  $b_k (k \geq 2)$  に比べて十分に大きいとき、2 結合振動子で逆相モードが安定 (つまり  $b_1$  が負) であれば、3 結合振動子で 3 相モードが安定であることを示唆する。

$n = 4$  の 4 相モードと 2-2 部分同相モードでは、高次のフーリエ成分を無視したことで固有値が 0 になっている。この場合は、安定性を評価するために高次の成分を考慮する必要がある。 $k \leq 6$  のフーリエ成分の数値計算結果を用いて、2-2 部分同相モードが安定、4 相モードが不安定であることがわかった。ここで、高次の成分を含めた固有値は付録 E に示した。線形安定性解析の結果は 6.2.2 項で得られた同期モードの安定性と整合する。

表 6.2 1 次のフーリエ成分  $a_1, b_1$  のみを用いた、結合振動子間の位相差の固定点に対する線形安定性解析 [25]。1—5 列目はそれぞれ結合振動子数、同期モード、固有値入、固定点の種類、 $a_1, b_1$  の数値計算結果から評価した固定点の安定性を示す。

振動子数	同期モード	固有値	固定点の種類	線形安定性
2	逆相	$2b_1$	ノード	安定
2	同相	$-2b_1$	ノード	不安定
3	3相	$3(b_1 \pm ia_1)/2$	スパイラル	安定
3	部分同相	$3b_1, -9b_1(a_1^2 + b_1^2)/(a_1^2 + 9b_1^2)$	サドル	不安定
3	完全同相	$-3b_1$ (2 重解)	ノード	不安定
4	4相	$0^*, 2(b_1 \pm ia_1)$	—	—
4	2-2 部分同相	$0^*$ (2 重解), $4b_1$	—	—
4	3-1 部分同相	$4b_1, -8b_1(a_1^2 + b_1^2)/(a_1^2 + 4b_1^2)$ (2 重解)	サドル	不安定
4	完全同相	$-4b_1$ (3 重解)	ノード	不安定

\*  $a_1, b_1$  は固有値に含まれない。

Okuda は、等しい位相差をもつ対称なクラスター状態の大域結合振動子について、フーリエ成分で固有値を記述し、線形安定性解析を行った [32]。対称なクラスター状態は、各クラスターが等しい数の振動子で構成され、本研究における部分同相モード ( $n = 3$ ) と 3-1 部分同相モード ( $n = 4$ ) 以外の同期モードを含む。我々の研究で得られた対称なクラスター状態についての固有値は、Okuda によって導出された固有値と一致することを確認した。

### 6.3 議論

我々のシミュレーション結果と、これまでの文献で報告された実験結果を比較する。2 結合振動子の実験では、逆相モードが観察されている [10, 17, 19, 22]。また、3 結合振動子の実験では、3 相モードが観察されている [10, 17, 21, 22]。我々のシミュレーションでは、逆相モードと 3 相モードが  $n = 2$ ,  $n = 3$  のそれぞれで観察されたため、実験観察に一致した。4 結合振動子の実験では、強い結合で 4 相モード、弱い結合で 2-2 部分同相モードが観察された [21]。本研究では弱結合を仮定したので、2-2 部分同相モードが現れた  $n = 4$  の我々のシミュレーションは実験観察に一致した。

別の実験では、2-2 部分同相モードに加えて、2-1-1 部分同相モードがより弱い結合で観察された [22]。ここで、2-1-1 部分同相モードは、1 組の同相振動子とその他の異なる位相をもつ 2 個の振動子からなる。このモードは我々のシミュレーションと位相縮約理論に基づいた解析の範囲では現れなかった。本研究では、結合された等しい振動子に対して、共通の圧力を通してのみ相互作用するものとした。一方実験では、内容物の並べ方に依存して近隣の振動子間に流体相互作用もはたらき得る。また、実験における振動子は、実験誤差やノイズの影響を受け厳密には等しくない。これらの要因が、実験でのみ 2-1-1 部分同相モードが現れることに関係すると考えられる。

2 結合振動子における同期中の周期と固有周期との関係について、実験において逆相同期中の周期が固有周期の約 2 倍となったことが報告された [20]。また、常微分方程式を用いたモデルの数値計算から、同相同期中の周期は固有周期より短く、結合振動子数が増えると減少することが報告された [18]。我々のシミュレーション結果と式 (6.21) による評価は、これらの研究結果と定性的に一致した。定量的に比較するためには、同期中の周期が固有周期や結合強度等のパラメータにどのように依存するか調べる必要があり、今後の課題とする。

最後に、実現する同期モードが選択される基準として、水位の変化を検討する。逆相モード ( $n = 2$ )、3 相モード ( $n = 3$ )、2-2 部分同相モードは安定であり、また、異なる位相をもつ振動子間で  $y_{\text{out}}$  の変化が相殺すると予想される。そこで、シミュレーションで得られた  $y_{\text{out}}$  の変化と同期モードの安定性との相関を議論する。 $n$  結合系について、図 6.9(a-1)–(c-1) に  $y_{\text{out}}$  の時系列、(a-2)–(c-2) に  $y_{\text{out}}$  が変化した総距離  $l(t)$  をそれぞれ示す。ここで、 $l(t)$  は

$$l(t) = \int_0^t \frac{|\sum_i Q^{(i)}(t')|}{d_{\text{out}}} dt', \quad (6.25)$$

として定義する。 $l$  の傾きを  $y_{\text{out}}$  の絶対変化率として評価した。2 結合系 ( $n = 2$ ) で  $l$  の傾きは、図 6.9(a-2) に示すように、不安定である同相モードに比べて安定である逆相モードの方がとても小さかった。3 結合系 ( $n = 3$ ) で  $l$  の傾きは、図 6.9(b-2) に示すように、不安定である部分同相、完全同相モードに比べて安定である 3 相モードの方が小さかった。4 結合系 ( $n = 4$ ) で  $l$  の傾きは、図 6.9(c-2) に示すように、不安定である 3-1 部分同相、完全同相モードに比べて安定である 2-2 部分

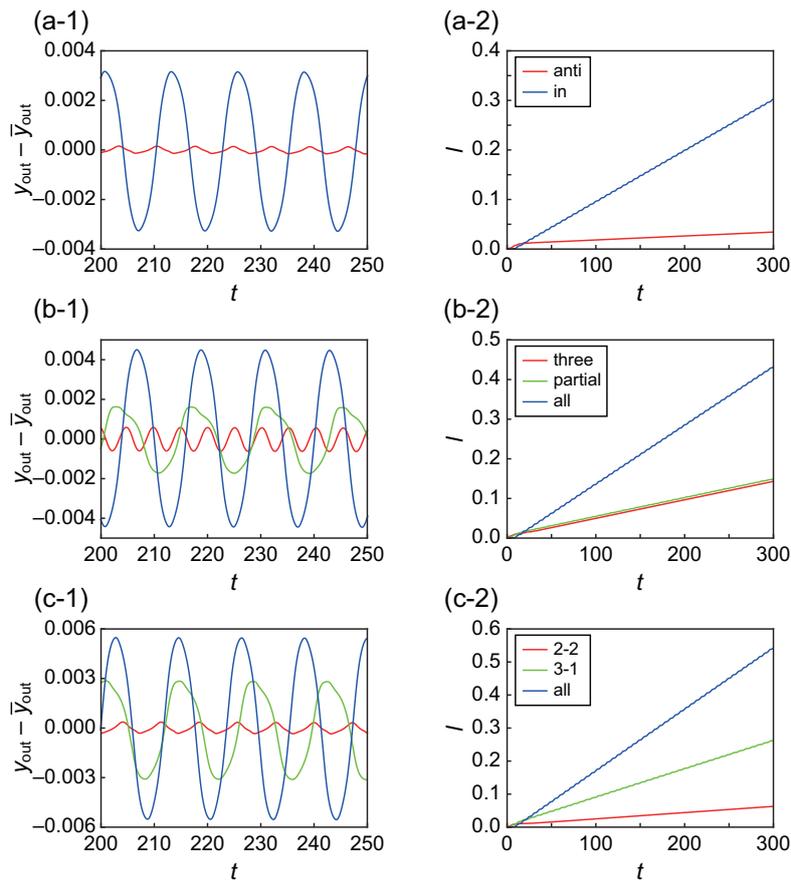


図 6.9 同期モード間における外容器水位  $y_{out}$  の比較 [25]。(a)  $n = 2$ , (b)  $n = 3$ , (c)  $n = 4$ 。(a-1)–(c-1)  $y_{out} - \bar{y}_{out}$  の時系列。ここで、 $\bar{y}_{out}$  は  $y_{out}$  の時間平均である。(a-2)–(c-2) 外容器水位が変化した総距離  $l$  の時系列。2-2 部分同相モードを示す、図 6.2(f)–(h) における三つのシミュレーション結果の内、(h) の結果を適用している。

同相モードの方が小さかった。結果として、すべての  $n$  で、シミュレーションで得られた同期モードの中で、安定な同期モードの  $l$  の傾きが最も小さかった。しかし、 $n = 3$  における部分同相モードと 3 相モードでその差はわずかであった。一方で、両者の振動の振幅は有意に異なった。それゆえ、安定な同期モード選択のための基準量として、 $y_{out}$  のより小さい絶対変化だけでなく、振幅に関する他の基準があるかもしれない。付録 F で他の基準についても検討した。

## 6.4 結論

本章の  $n$  個の等しい振動子の結合系 ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) では、単一系モデルを拡張した結合系シミュレーションモデルを用いて、逆相 ( $n = 2$ )、3 相 ( $n = 3$ )、2-2 部分同相 ( $n = 3$ ) 同期モードを再現した。これらの同期モードはこれまでの研究で報告された実験観察と一致した。また、振動子間で等しい初期条件を設定することで、部分同相、完全同相モードを実現した。単一の密度差振動子のシミュレーションで摂動に対する位相応答を調べ、位相縮約理論に基づいて同期モードの安定性を解析した。逆相 ( $n = 2$ )、3 相 ( $n = 3$ )、2-2 部分同相 ( $n = 3$ ) モードは安定、その他のモードは不安定であ

ることがわかった。位相結合関数のフーリエ成分を用いた線形安定性解析は、これらの安定性をよく再現した。シミュレーション結果より、安定な同期モードは不安定な同期モードと比べて外容器水位の絶対変化が小さいことを数値的に確認した。よって、外容器水位の絶対変化が小さいことは、密度差振動子の結合系における同期モード選択基準の一つであることが示唆された。



## 第7章

# 異なる自然角振動数をもつ密度差振動子の結合系の結合系

本章では、2個の結合系について、一方の流体密度を固定し、他方の流体密度を変えたときの同期モードの変化を観察する。

### 7.1 2個の結合系モデル

図 7.1 のような密度差振動子の2結合系モデルを考える。6章の結合系モデルでは、 $i = 1$  と  $i = 2$  の計算は独立に行った。本章では、 $i = 1$  と  $i = 2$  の両方の振動子を含めた計算領域で計算を行った。計算領域の取り方は異なるが、数値計算方法は6章と同じである。このモデルは、振動子間の外容器流体を隔てる壁を取り除き、流体相互作用を考慮したモデルで数値計算を行った結果 (付録 G 参照) と比較するために採用した。外容器流体の密度を  $\rho_{\text{out}}$ 、内容器流体の密度を  $\rho_{\text{in}}^{(i)}$  とし、 $\rho_{\text{out}} = \rho_{\text{low}}$  (一定),  $\rho_{\text{in}}^{(1)} = \rho_{\text{high}}$  (一定),  $\rho_{\text{in}}^{(2)}$  はパラメータとして  $\rho_{\text{low}} \leq \rho_{\text{in}}^{(2)} \leq \rho_{\text{high}}$  の範囲で変化させた。ここで  $\rho_{\text{low}} = 1$ ,  $\rho_{\text{high}} = 1.2$  とした。

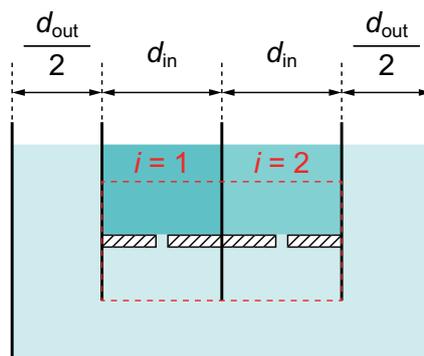


図 7.1 密度差振動子の2結合系モデル。赤の破線で囲った領域は計算領域を示す。斜線部は内容器の底の壁を示す。

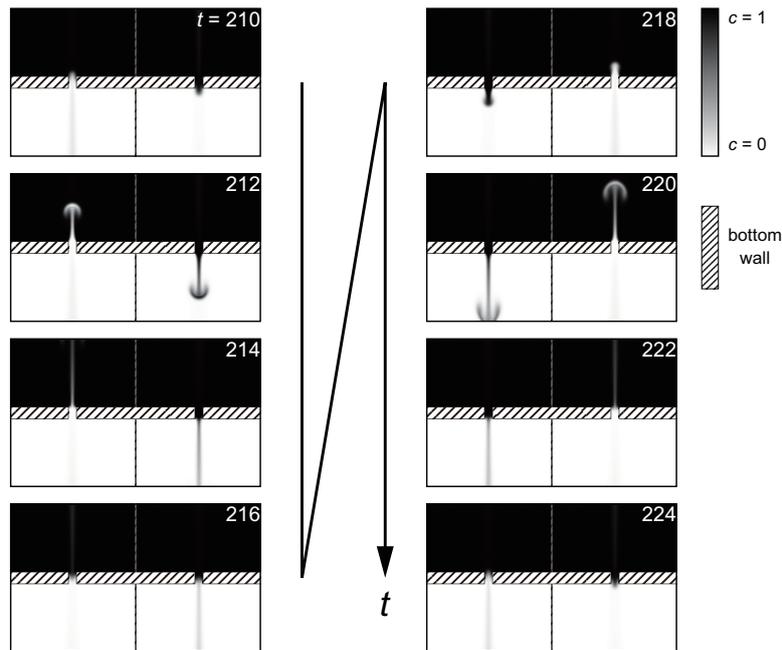


図 7.2  $\rho_{\text{in}}^{(1)} = \rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.2$  の場合の密度場の時系列。

## 7.2 数値計算結果

### 7.2.1 1 : 1 同期

まず、2 個の振動子の流体密度が等しい場合の密度場を調べた。ここで、 $\rho_{\text{in}}^{(1)} = \rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.2$  とした。図 7.2 に密度場の時系列の典型例を示す。 $t = 210$  で、 $i = 1$  では上向きの流れが始まろうとしており、 $i = 2$  では下向きの流れが始まろうとしている。その後、各振動子における流れの向きは  $t = 216$  付近で反転し、 $t = 224$  では再び  $i = 1$  で上向き、 $i = 2$  で下向きの流れがそれぞれ始まろうとしている。図 7.3(a-1) は  $\rho_{\text{in}}^{(1)} = \rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.2$  での内容器水位  $y_{\text{in}}^{(1)}$ ,  $y_{\text{in}}^{(2)}$  の時系列、図 7.3(a-2) は  $y_{\text{in}}^{(1)}$ ,  $y_{\text{in}}^{(2)}$  をそれぞれ横軸と縦軸にとったリサージュ図である。ここで、リサージュ図は 2 個の振動子に対して共通の観測変数を描き、閉軌道の有無や個数から同期状態を検出するものとする。波形から、振動子間で逆向きの流れが生じていることがわかる。また、リサージュ図において軌道がおおよそ  $y_{\text{in}}^{(2)} = -y_{\text{in}}^{(1)}$  を示している。よって、 $\rho_{\text{in}}^{(1)} = \rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.2$  のとき系は逆相で同期し、6 章の結果と一致する。ただし、計算領域の取り方が異なるため、数値的に厳密には一致しない。

図 7.3(b-1) は、 $\rho_{\text{in}}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.16$  のときの内容器水位の時系列である。 $i = 2$  の振幅は  $i = 1$  に比べて小さいが、7.3(b-2) のリサージュ図が 1 個の閉じた軌道を示すことから、1:1 で同期していることがわかる。

図 7.3(c-1) は、 $\rho_{\text{in}}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.12$  のときの内容器水位の時系列である。 $300 < t < 350$  付近で 2 個の振動子は 1:1 で同期しているが、その後  $t \sim 350$  からの振動で  $i = 2$  は  $i = 1$  に対して 1 周期分遅れを生じている。7.3(c-2) のリサージュ図では、幅のある 1 個の閉じた軌道に加えて、その間をショートカットする軌道がいくつか存在する。このように、自然角振動数の差が大きい

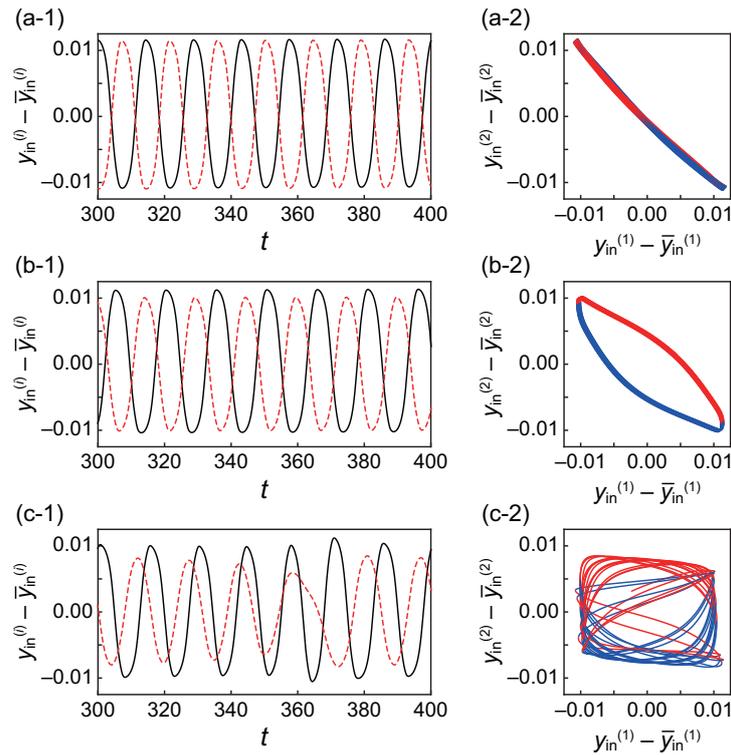


図 7.3 1:1 同期と位相スリップ。(a)  $\rho_{\text{in}}^{(1)} = \rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.2$ , (b)  $\rho_{\text{in}}^{(1)} = 1.2$ ,  $\rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.16$ , (c)  $\rho_{\text{in}}^{(1)} = 1.2$ ,  $\rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.12$ 。(a-1)–(c-1) 内容器水位の時系列。黒の実線は  $y_{\text{in}}^{(1)}$ 、赤の破線は  $y_{\text{in}}^{(2)}$  をそれぞれ示す。(a-2)–(c-2) 内容器水位によるリサージュ図。赤線は  $i = 1$  における上向きの流れ、青線は下向きの流れにそれぞれ対応する。

とき、間欠的に周回遅れが生じるふるまいは位相スリップと呼ばれ、同期が破れている。

ここまで、 $\rho_{\text{in}}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{\text{in}}^{(2)}$  を小さくしていくと 1:1 同期から非同期になることを示した。次に、このときの位相差を確認した。図 7.4(a) に、様々な  $\rho_{\text{in}}^{(2)}$  に対する位相差  $\Delta\phi_{12}$  の時系列を示す。 $\rho_{\text{in}}^{(1)}$  に対して  $\rho_{\text{in}}^{(2)}$  が小さくなるにつれて、位相差は時間に対して一定に収束しているが、その大きさは大きくなる。 $\rho_{\text{in}}^{(2)} = 1.12$  のとき、位相差は時間に対して一定ではなくなり、階段のようにおおよそ一定の領域とおおよそ  $2\pi$  の飛びが繰り返し生じている。このふるまいは位相スリップの特徴を表している。図 7.4(b) は、1:1 で同期する系の位相差をデチューニング  $\omega^{(1)} - \omega^{(2)}$  に対してプロットしたものである。ここで、 $\omega^{(i)}$  は  $i$  番目の振動子の自然角振動数である。デチューニングが 0 のとき位相差は  $\pi$  であり、デチューニングが大きくなるにつれて位相差も大きくなっている。

この同期から非同期への転移は、6 章で扱った弱結合系の位相方程式 (6.11) を用いて議論できる。2 個の振動子が異なる自然角振動数  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$  をもつとき、 $i = 1, 2$  の振動子の位相方程式はそれぞれ

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega^{(1)} + \Gamma(\Delta\phi_{12}), \quad (7.1a)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega^{(2)} + \Gamma(\Delta\phi_{21}), \quad (7.1b)$$

である。式 (7.1b) から式 (7.1a) を引くと、位相差  $\Delta\phi_{12}$  のダイナミクスは

$$\frac{d\Delta\phi_{12}}{dt} = \omega^{(2)} - \omega^{(1)} + \Gamma(-\Delta\phi_{12}) - \Gamma(\Delta\phi_{12}), \quad (7.2)$$

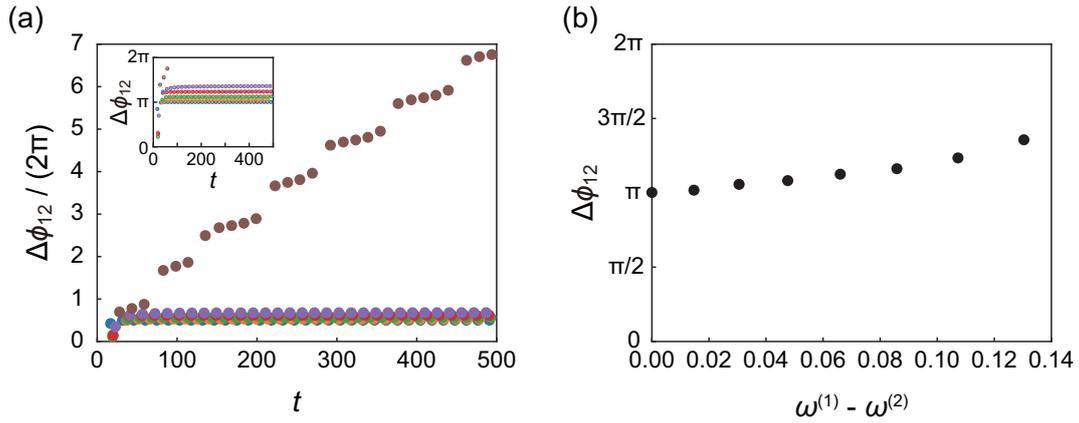


図 7.4 様々な  $\rho_{in}^{(2)}$  に対する位相差  $\Delta\phi_{12}$ 。(a) 位相差  $\Delta\phi_{12}$  の時系列。パラメーターは  $\rho_{in}^{(1)}$  に対して  $\rho_{in}^{(1)} = 1.2, 1.18, 1.16, 1.14, 1.13, 1.12$ 。(b) 位相差  $\Delta\phi_{12}$  のデチューニング  $\omega^{(1)} - \omega^{(2)}$  依存性。

と記述される。つまり、 $d\Delta\phi_{12}/dt = 0$  となる固定点は、 $\omega^{(1)} - \omega^{(2)} = 0$  のとき図 6.6 に一致する。 $\omega^{(1)} - \omega^{(2)} = 0$  が大きくなると、あるところで安定固定点と不安定固定点が消滅し、同期解がなくなる。このふるまいはサドルノード分岐であり、分岐点は  $\Delta\phi_{12} = \pi/2$  の極大値で  $\omega^{(1)} - \omega^{(2)} = \Gamma(-\pi/2) - \Gamma(\pi/2) \approx 0.14$  である。この見積りは  $\rho_{in}^{(1)} = 1.13$  と  $\rho_{in}^{(1)} = 1.12$  の間で分岐が起こることを示唆しており、図 7.4 の結果と整合する。

### 7.2.2 $m : n$ 同期

$\rho_{in}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{in}^{(2)}$  をさらに小さくしていくと、 $i = 1$  が  $m$  回振動する間に  $i = 2$  が  $n$  回振動する、整数比  $m : n$  の同期が観察された。図 7.5(a-1) は、 $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{in}^{(2)} = 1.11$  のときの内容器水位の時系列である。 $i = 1$  が 3 回振動する間に  $i = 2$  が 2 回振動するふるまいが観察された。また、7.5(a-2) のリサージュ図では主要な閉領域が 6 個ある。よって、このとき振動子間で  $3 : 2$  の同期が起きているといえる。

図 7.5(b-1) は、 $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{in}^{(2)} = 1.08$  のときの内容器水位の時系列である。 $y_{in}^{(2)}$  が振動中心  $y_{in}^{(2)} = 0$  を通過する、振幅の大きな振動に着目すると、 $i = 1$  が 3 回振動する間に  $i = 2$  が 1 回振動している。また、7.5(b-2) のリサージュ図では主要な閉領域が 3 個ある。よって、このとき振動子間で  $3 : 1$  の同期が起きているといえる。一方で、 $i = 2$  が  $i = 1$  の周期に引きずられて小さく振動するふるまいもみられた。

$\rho_{in}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{in}^{(2)}$  をさらに小さくしていくと、 $i = 1$  と  $i = 2$  が  $1 : 1$  で振動するふるまいがみられた。図 7.5(c-1) は、 $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{in}^{(2)} = 1.06$  のときの内容器水位の時系列である。 $i = 1$  と  $i = 2$  は  $1 : 1$  で振動しており、 $i = 2$  の振幅は  $i = 1$  と比べて小さい。7.5(c-2) はこのときのリサージュ図であり、1 個の閉軌道を示している。これらのふるまいは、一見  $1 : 1$  で相互同期しているように見える。しかし、第 II 部でみたように、単一系で高密度流体と低密度流体の密度差を小さくしていくと、振動周期は大きくなる。また、分岐点を境にリミットサイクル振動から減衰振動に切り替わる。よって、図 7.5(c) に示した  $\rho_{in}^{(2)} = 1.06$  のとき、 $i = 2$  は単体でリミットサイクル振動

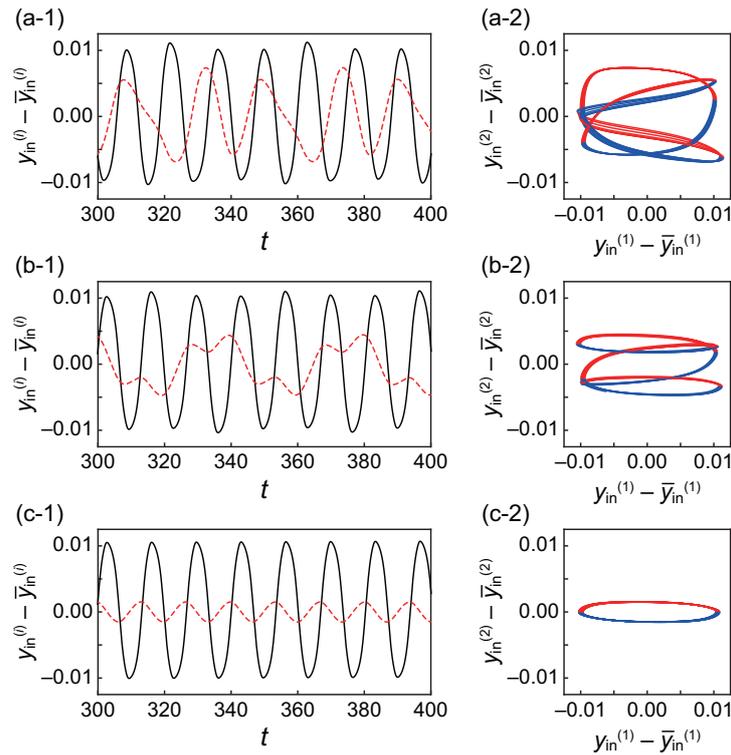


図 7.5  $m : n$  同期と強制同期。(a)  $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$ ,  $\rho_{in}^{(2)} = 1.1$ , (b)  $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$ ,  $\rho_{in}^{(2)} = 1.08$ , (c)  $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$ ,  $\rho_{in}^{(2)} = 1.06$ 。(a-1)–(c-1) 内容器水位の時系列。黒の実線は  $y_{in}^{(1)}$ 、赤の破線は  $y_{in}^{(2)}$  をそれぞれ示す。(a-2)–(c-2) 内容器水位によるリサージュ図。赤線は  $i = 1$  における上向きの流れ、青線は下向きの流れにそれぞれ対応する。

を示さず、 $i = 1$  から受ける外力によって、同じ周期で強制同期していると考えられる。

ここまで、 $\rho_{in}^{(1)} = 1.2$  に対して  $\rho_{in}^{(2)}$  を小さくしていくと  $m : n$  の相互同期から強制同期になることを示した。次に、このときの自然角振動数と、結合系における観測角振動数を比較する。図 7.6 に、一定の  $\omega^{(1)}$  に対して  $\omega^{(2)}$  が変化したときの  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  を示す。ここで、 $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  はそれぞれ、結合下の  $i = 1, i = 2$  における観測角振動数である。

$\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  が重なる  $\omega^{(2)} \sim 0.3$  より大きい領域は、1:1 同期を示している。 $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$  における逆相同期を含む、 $\omega^{(2)} \sim 0.4$  より大きい領域では、観測角振動数  $\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$  が両方の自然角振動数  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$  より小さい。つまり、振動子が結合することで周期が長くなっていることを示す。

### 7.2.3 結合強度依存性

第 1.4 節でみたように、振動子間の自然角振動数が近く、結合強度が大きい程、同期が生じやすいと言える。そこで、図 7.7 に示すように、自然角振動数を変化させるパラメータとして流体密度  $\rho_{in}^{(2)}$ 、結合強度を変化させるパラメータとして外容器幅  $d_{out}$  をそれぞれ用いて、1:1 同期が出現するパラメータ境界を調べた。結果として、外容器幅が小さく、振動子間の密度の差  $\rho_{in}^{(1)} - \rho_{in}^{(2)}$  が小さいほど同期する傾向を示した。

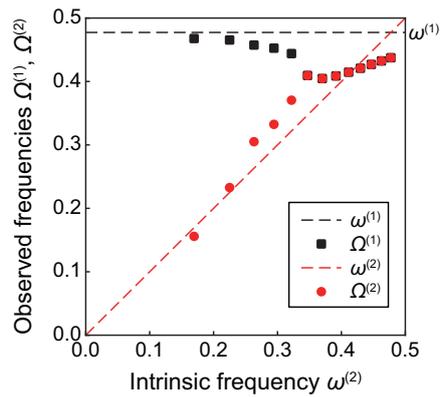


図 7.6 一定の  $\omega^{(1)}$  に対して  $\omega^{(2)}$  が変化したときの観測角振動数  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ 。黒と赤の破線はそれぞれ  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  を示す。黒の四角と赤の丸はそれぞれ  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$  を示す。

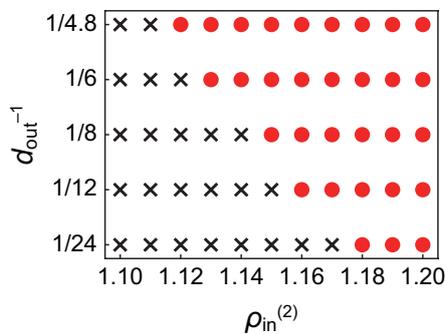


図 7.7 一定の  $\rho_{in}^{(1)}$  に対して  $\rho_{in}^{(2)}$  と  $d_{out}^{-1}$  をパラメータとして変化させたときの 1:1 同期の出現マップ。赤の丸は同期、黒のクロスは非同期を示す。

### 7.3 結論

2 個の密度差振動子を結合した系で、一方の振動子の流体密度を小さくしていき、同期モードの変化を調べた。振動子間の密度差が小さいとき系は 1:1 の同期を示し、特に密度差が 0 のときは逆相同期となった。密度差が大きくなると、系は  $m:n$  同期と同期領域間で位相スリップを示した。さらに密度差が大きくなると、系は再び 1:1 の同期を示したが、相互同期ではなく強制同期であることがわかる。振動子間の密度差と結合強度をパラメータとして、1:1 の同期領域近傍を調べた結果、密度差が小さく、結合強度が大きいほど同期しやすい傾向を示した。

## 第 IV 部

### 結論



## 第8章

# 総括

本研究では、非平衡構造として現れる振動状態がどのような基準から選択されるのかを明らかにするために、流れの振動現象が発生するモデルとして密度差振動子系を採用し、その分岐現象と同期現象について実験および2次元流体シミュレーションを用いた解析を行った。

本研究で新たに得られた結果を以下に示す。

- 密度差振動子の数値計算について、計算領域を流体の内部に取り、水位の時間変化を計算領域の上下境界における圧力の時間変化として反映するモデルで振動現象を再現した。
- 実験と数値計算の両方で、密度差振動子における二流体の密度差を分岐パラメータとして大きくしていくと、振動の振幅は、分岐点で分岐パラメータの  $1/2$  乗スケールで立ち上がった。
- 実験と数値計算の両方で、分岐パラメータを小さくしていくと、振動の周期は、分岐点近傍で急速に大きくなった。
- 数値計算により、分岐点以下の密度差で系は減衰振動し、周期が有限の値をとることを確認した。
- 分岐パラメータを大きくしていくと、超臨界ホップ分岐を介して定常状態 (減衰振動) から振動状態へ切り替わることがわかった。
- 実験と数値計算の両方で、溶質の輸送について、定常状態における拡散と振動状態における対流の比を表す臨界レイリー数から、分岐点におおむね一致する密度差を得た。
- 密度差振動子の結合系について、単一系の数値計算モデルを基に、共通の外容器水位による圧力の相互作用を加え、同期現象を再現した。
- 弱い結合を想定した数値計算で、 $n$  個の等しい振動子の結合系 ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) について、逆相 ( $n = 2$ )、3相 ( $n = 3$ )、2-2 部分同相 ( $n = 3$ ) 同期モードを再現した。
- 振動子間で等しい初期条件を設定した数値計算で、不安定な部分同相モード、完全同相モードを実現した。
- 位相縮約理論に基づいた安定性解析から、逆相 ( $n = 2$ )、3相 ( $n = 3$ )、2-2 部分同相 ( $n = 3$ ) モードは安定、その他のモードは不安定であることを示した。
- 位相結合関数のフーリエ成分を用いた線形安定性解析は上記の安定性をよく再現し、1 次のフーリエ正弦係数  $b_1$  が高次の係数と比べて十分大きいとき、逆相モード ( $n = 2$ ) が安定であれば3相モード ( $n = 3$ ) も安定であることを示した。
- 安定な同期モードは不安定な同期モードと比べて外容器水位の絶対変化が小さいことを数値的

を確認した。

- 自然角振動数の異なる 2 個の振動子の結合系について数値計算を行い、自然角振動数の差を分岐パラメータとして大きくしたときの 1:1 同期から非同期へのサドル・ノード分岐や、相互同期から強制同期への分岐を示した。

これらの結果から、密度差振動子の非平衡構造を決める因子として溶質の輸送効率や水位の最小変化率が重要であることが示唆された。

## 第9章

# 課題と今後の展望

現れる非平衡構造を決定するメカニズムを考えるために、単一の密度差振動子における定常状態と振動状態間の転移、密度差振動子の弱結合系における同期モード選択に着目して研究を行った。定常状態から振動状態への転移は溶質の輸送効率の観点から解釈されたが、二流体の密度差がさらに増加したときに振動状態がどう変化するか、同様に輸送効率から議論できるかを確かめることは重要である。また、弱結合系における同期モードの選択基準の一つとして、外容器水位の最小変化率が提案されたが、結合の強さを変化させた場合も同様の基準を満たすのか確認することも重要である。上記のように、本研究で扱った系を用いて他のパラメータ領域を調べることで、非平衡構造の決定を支配する重要な要素を特定することが今後の課題である。

高密度流体と低密度流体の密度差を分岐パラメータとして小さくしていくと、分岐点に向かって振動の周期が大きくなったが、通常の超臨界ホップ分岐近傍では周期が一定であることが多い。密度差振動子でみられた周期のふるまいは、この系が他の分岐パラメータに対して異なる分岐構造をもつ可能性を示唆する。シミュレーションにより二流体の密度差と流体の粘性係数などのパラメータ空間上の分岐構造を調べることで、振動周期に関する系のふるまいを理解できると考えられる。

密度差振動子の結合系では、共通の外容器流体を介した圧力による相互作用が支配的であり、本研究におけるシミュレーションでは圧力による相互作用のみを考慮した。一方、そのような相互作用が小さいとき、或いは振動子間で流れの距離が近ければ流体相互作用も同期に影響すると考えられる。シミュレーションで、流体相互作用が影響する場合の同期現象を予備的に調べた結果を付録に掲載した。実際に、圧力による相互作用が支配的な場合にみられる逆相同期ではなく同相同期が観察されており、異なるメカニズムで同期モードが選択されていることがわかる。流体系の非平衡構造を決める基準について理解するために、流体相互作用が支配する結合系の解析は有意義であり、今後の課題である。

本研究では、自発的に現れる非平衡構造を決定する基準を検討するため、2次元の流体シミュレーションにより安定・不安定な同期モードを実現した。一方で、安定性解析に用いた位相結合関数は実験的に求めることも可能である。同期している結合系における振動の時系列から、位相結合関数を測定する方法が提案されている [33, 34]。本研究で数値的に得られた位相結合関数の実験による例証があるとのおいしいと考える。



# 謝辞

まず、博士前期・後期課程の5年間、指導教官としてお世話になりました北畑裕之教授に感謝いたします。他学部から編入した私を寛容に受け入れていただき、親身にご指導いただきました。流体の運動や振動現象、数値計算について、北畑教授から多くのことを学び、理解を深めることができました。必要な知識だけでなく、考え方を丁寧に伝えてくださり、とても勉強になりました。論文執筆や書類作成で苦労しているときに、励まし、気遣っていただいたことも感謝しております。また、相談や議論に快く対応していただき、多くの時間を割いていただいたことに心よりお礼申し上げます。

同じく博士課程を通してお世話になりました伊藤弘明助教に感謝いたします。本研究における密度差振動子の実験は伊藤助教を筆頭に行いましたが、実験から論文の執筆まで学ぶことが多くありました。特に、得られた実験結果を図や文章で明確に表現するための様々な工夫が勉強になりました。共著者として論文の作成に携われたことは、とても貴重な経験でした。また、研究手法や文章作成に悩んだときなど、親身に相談にのっていただいたお陰で問題が解決したことが多くありました。心より感謝しております。

博士課程を修了された小谷野由紀さんと岡田理秀さんは、私が後期課程への進学を考えているときや、進学後も研究への取り組み方や研究発表など参考になることが多く、目標となる存在でした。所属研究室の先輩・同期・後輩には、ゼミ等で研究に関する有益な意見をいただき感謝しております。また、過ごしやすい環境で研究できたことを有難く思います。

最後に、これらの研究活動を応援していただいた家族や友人に心より感謝いたします。

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2109 の支援を受けたものです。



## 参考文献

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (Addison-Wesley, Reading, 1994).
- [2] 徳田功著, 同期理論の基礎と応用, (丸善, 2009).
- [3] M. H. Vitaterna, J. S. Takahashi, and F. W. Turek, *Alcohol Res. Health* **25**, 85-93 (2001).
- [4] D. A. Golombek and R. E. Rosenstein, *Physiol. Rev.* **90**, 1063–1102 (2010).
- [5] S. H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* (Hyperion, New York, 2003).
- [6] M. Lappa, *Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability* (Wiley, Chichester, 2009).
- [7] W. Gilpin, M. S. Bull, and M. Prakash, *Nat. Rev. Phys.* **2**, 74 (2020).
- [8] K. Y. Wan, K. C. Leptos, and R. E. Goldstein, *J. R. Soc. Interface* **11**, 20131160 (2014).
- [9] S. Martin, *Geophys. Fluid Dyn.* **1**, 143 (1970).
- [10] K. Yoshikawa, N. Oyama, M. Shoji, and S. Nakata, *Am. J. Phys.* **59**, 137 (1991).
- [11] T. Kano in *Pattern formations & oscillatory phenomena*, edited by S. Kinoshita (Elsevier, Waltham, 2013).
- [12] O. Steinbock, A. Lange, and I. Rehberg, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 798 (1998).
- [13] 今井功著, 流体力学 前編, (裳華房, 1973).
- [14] M. Okamura and K. Yoshikawa, *Phys. Rev. E* **61**, 2445 (2000).
- [15] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound* (Dover, New York, 1945).
- [16] K. Aoki, *Physica D* **147**, 187 (2000).
- [17] T. Kano and S. Kinoshita, *Phys. Rev. E* **80**, 046217 (2009).
- [18] W. F. Kenfack, M. S. Siewe, and T. C. Kofane, *Chaos Solitons Fract.* **82**, 72 (2016).
- [19] S. Nakata, T. Miyata, N. Ojima, and K. Yoshikawa, *Physica D* **115**, 313 (1998).
- [20] K. Miyakawa and K. Yamada, *Physica D* **127**, 177 (1999).
- [21] K. Miyakawa and K. Yamada, *Physica D* **151**, 217 (2001).
- [22] M. Horie, T. Sakurai, and H. Kitahata, *Phys. Rev. E* **93**, 012212 (2016).
- [23] H. Ito, T. Itasaka, N. Takeda, and H. Kitahata, *EPL*, **129**, 18001 (2020).
- [24] N. Takeda, N. Kurata, H. Ito, and H. Kitahata, *Phys. Rev. E* **101**, 042216 (2020).
- [25] N. Takeda, H. Ito, and H. Kitahata, *Phys. Rev. E* in press (arXiv:2210.09762).
- [26] 佐野理著, 連続体の力学, (裳華房, 2000).
- [27] 河村哲也著, 流体解析 I, (朝倉書店, 1996).

- [28] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery 著, 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠訳, *Numerical Recipes in C*, (技術評論社, 1993).
- [29] F. H. Harlow and J. E. Welch, *Phys. Fluids* **8**, 2182 (1965).
- [30] S. McKee, M. F. Tomé, V. G. Ferreira, J. A. Cuminato, A. Castelo, F. S. Sousa, and N. Mangiavacchi, *Comput. Fluids* **37**, 907 (2008).
- [31] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [32] K. Okuda, *Physica D* **63**, 424 (1993).
- [33] I. T. Tokuda, S. Jain, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 064101 (2007).
- [34] T. Onojima, T. Goto, H. Mizuhara, and T. Aoyagi, *PLoS Comput. Biol.* **14**, e1005928 (2018).

## 付録 A

# レイリー数の導出

細孔内部の領域 ( $0 \leq y \leq L$ ) を考える。 $y$  軸は鉛直方向上向きにとる。流れがないとき、密度の時間変化は拡散のみに依存し、 $y$  軸方向では

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad (\text{A.1})$$

よって定常状態のとき

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$y = 0$  で  $\rho = \rho_{\text{low}}$ 、 $y = L$  で  $\rho = \rho_{\text{high}}$  とすると

$$\rho = \rho_{\text{low}} + \frac{y}{L}(\rho_{\text{high}} - \rho_{\text{low}}) \quad (\text{A.4})$$

定常状態拡散におけるフィックの法則より、拡散流束は

$$J = -D \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (\text{A.5})$$

$$= -D \frac{1}{L}(\rho_{\text{high}} - \rho_{\text{low}}) \quad (\text{A.6})$$

$$= -D \frac{\Delta \rho}{L} \quad (\text{A.7})$$

よって拡散による物質の輸送量は、細孔の断面積を  $A$  とすると

$$\Phi_d = |J|A \quad (\text{A.8})$$

$$= AD \frac{\Delta \rho}{L} \quad (\text{A.9})$$

次に、流れが起こり始めるときを考える。粘性力と重力の釣り合いを考えると

$$\mu \nabla^2 v = \Delta \rho g \quad (\text{A.10})$$

$$\mu \frac{v}{A} \sim \Delta \rho g \quad (\text{A.11})$$

$$v \sim \frac{\Delta \rho g A}{\mu} \quad (\text{A.12})$$

ここで、 $v$  は  $y$  軸方向に一様な速度成分である。対流による物質の輸送量は

$$\Phi_c = \Delta\rho v A \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{\Delta\rho^2 g A^2}{\mu} \quad (\text{A.14})$$

$A^2 \sim L$  とし、 $L$  を改めて特徴的な長さとする、拡散と対流による輸送量の比は

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_d} = \frac{\Delta\rho g L^3}{\mu D} = \frac{gL^3 \Delta\rho/\rho}{\nu D} = Ra \quad (\text{A.15})$$

となる。

## 付録 B

# その他の数値計算方法

5.2 章で扱った他のモデルについて、本文と同様の手続きで 2 成分化・離散化を行う。

### B.1 モデル (i)：圧力のポアソン方程式 (5.34) を用いた場合

$u$  と  $v$  については本文と同じであるため、 $p$  についてみていく。式 (5.34) を 2 成分化すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = & -\rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

となる。

離散化すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\
 = & -\rho_{i,j} \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right)^2 \right] \\
 & - 2\rho_{i,j} \frac{(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1})/2 - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})/2}{2\Delta x} \frac{(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})/2 - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})/2}{2\Delta y} \\
 & + \frac{\rho_{i,j}}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) \\
 & + \frac{1}{\rho_{i,j}} \left( \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 & - \frac{\mu}{\rho_{i,j}} \left[ \frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{2\Delta x} \left( \frac{u_{i+2,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2(\Delta x)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - 2(u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{2(\Delta y)^2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{2\Delta y} \left( \frac{v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} - 2(v_{i,j} + v_{i,j+1}) + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{2(\Delta x)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{v_{i,j+2} - v_{i,j+1} - v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2(\Delta y)^2} \right) \right] \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

となる。

ヤコビ法を用いると、 $p_{i,j}$  の  $r$  番目の反復ステップは、

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{r+1} = & \frac{1}{4} (p_{i+1,j}^r + p_{i-1,j}^r + p_{i,j+1}^r + p_{i,j-1}^r) \\
 & + \frac{\rho_{i,j}}{4} [(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j+1} - v_{i,j})^2] \\
 & + \frac{\rho_{i,j}}{32} [(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1}) - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})] [(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})] \\
 & - \frac{\rho_{i,j}\delta}{4\Delta t} [(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (v_{i,j+1} - v_{i,j})] \\
 & - \frac{1}{16\rho_{i,j}} [(\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j})(p_{i+1,j}^r - p_{i-1,j}^r) + (\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1})(p_{i,j+1}^r - p_{i,j-1}^r)] \\
 & + \frac{\mu}{16\delta\rho_{i,j}} [(\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}) \{u_{i+2,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i-1,j} \\
 & + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - 2(u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}\} \\
 & + (\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}) \{v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} - 2(v_{i,j} + v_{i,j+1}) + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1} \\
 & + v_{i,j+2} - v_{i,j+1} - v_{i,j} + v_{i,j-1}\}] \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Delta x = \Delta y = \delta$  とした。

モデル (i) を用いた分岐点近傍のシミュレーション結果を図 B.1 に示す。ここで、5章の図 5.10(a)–(d) で示したモデル (ii) によるシミュレーション結果も合わせて示す。外容器水位の時系列をモデル (i) と (ii) で比較すると、 $t \sim 600$  まではほとんど一致した。高密度流体と低密度流体の密度差が小さい分岐点近傍では、モデル (ii) で無視した密度の空間微分が十分小さいためと考えられる。一方、 $t \sim 600$  以降では、モデル (i) を用いて計算した方の振動の振幅が増大する挙動が観察された。モデル (ii) では計算の終始で系の左右対称性が数値的に維持されたが、モデル (i) ではポアソン方程式中

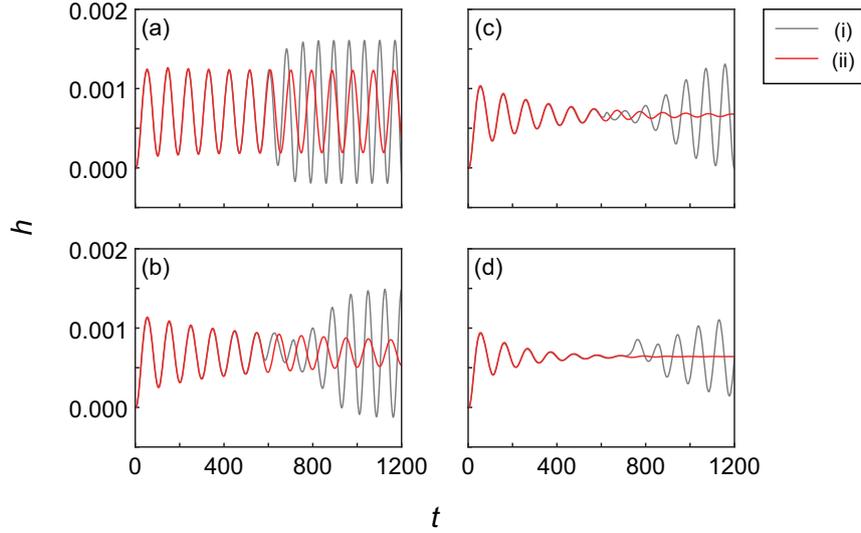


図 B.1 (a)  $\Delta\rho = 0.03$ , (b)  $\Delta\rho = 0.029$ , (c)  $\Delta\rho = 0.028$ , (d)  $\Delta\rho = 0.027$  における  $h(t) = y_{\text{out}}(t) - y_{\text{out}}(0)$  の時系列。(i) 圧力のポアソン方程式として、式 (5.34) を用いた場合。(ii) 式 (5.34) で密度の空間微分を無視した近似。5 章の図 5.10(a)–(d) にそれぞれ対応する。

の密度の空間微分の計算を発端に左右の非対称性が生じた。この非対称性は、数値計算における演算の順序など非対称な手続きから生じうる微小なものであるが、時間発展に伴って増加し、 $t \sim 600$  で顕著に現れたと考えられる。よって、本シミュレーションは左右の非対称性に対して数値的に不安定化する要素を含むかもしれない。

## B.2 モデル (iii) : ブジネスク近似を用いた場合

式 (5.35),(5.36) を 2 成分化すると

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho_0 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\rho_0}{\Delta t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial y} g \quad (\text{B.6})$$

となる。

それぞれ離散化すると、 $u$  について

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{4} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ &= -\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} + \mu \left( \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$v$  について

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}}{\Delta t} + \frac{u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j} + u_{i+1,j}}{4} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= -\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} + \mu \left( \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \\
 & \quad - \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} g
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$p$  について

$$\begin{aligned}
 & \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\
 &= -\rho_0 \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right)^2 \right] \\
 & \quad - 2\rho_0 \frac{(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1})/2 - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})/2}{2\Delta x} \frac{(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})/2 - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})/2}{2\Delta y} \\
 & \quad + \frac{\rho_0}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{2\Delta y} g
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

となる。

ヤコビ法を用いると、 $p_{i,j}$  の  $r$  番目の反復ステップは、

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{r+1} &= \frac{1}{4} (p_{i+1,j}^r + p_{i-1,j}^r + p_{i,j+1}^r + p_{i,j-1}^r) \\
 & \quad + \frac{\rho_0}{4} [(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j+1} - v_{i,j})^2] \\
 & \quad + \frac{\rho_0}{32} [(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1}) - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})][(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})] \\
 & \quad - \frac{\rho_0 \delta}{4\Delta t} [(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (v_{i,j+1} - v_{i,j})] + \frac{\delta}{8} (\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}) g
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

となる。ここで、 $\Delta x = \Delta y = \delta$  とした。同様に  $u_{i,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}$  について整理すると

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j} - \Delta t \left[ \frac{u_{i,j}}{2\delta} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{8\delta} (v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}) (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right] \\
 & \quad + \frac{\Delta t}{\rho_0} \left[ -\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\delta} + \frac{\mu}{\delta^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) \right]
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
 v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j} - \Delta t \left[ \frac{1}{8\delta} (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j} + u_{i+1,j}) (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{v_{i,j}}{2\delta} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right] \\
 & \quad + \frac{\Delta t}{\rho_0} \left[ -\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\delta} + \frac{\mu}{\delta^2} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) \right] \\
 & \quad - \frac{\Delta t}{\rho_0} \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} g
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

となる。





の行で

$$|a_{i,i}| > \sum_j |a_{i,j}| \quad (\text{C.11})$$

が成り立つことである。2次元ポアソン方程式の場合、式 (C.11) の両辺は等しくなるため、行列  $\mathbf{A}$  は厳密には対角優位ではないが、実際に数値計算を行い、ポアソン方程式の解が収束していくことを確認した。行列  $-\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U})$  は反復行列といい、付加項を除いて1組の  $\mathbf{x}$  を次へと写像する。

ヤコビ法はシミュレーションで実際に使用しているので、行列を成分表示する。式 (C.10) のアルゴリズムに基づいて、ベクトル  $\mathbf{u}$  の  $l$  番目の成分  $u_l$  について書き換えると

$$\begin{aligned} u_l^{r+1} &= \frac{1}{a_{ll}} \left( - \sum_{k \neq l} a_{kl} u_k^r + b_l \right) \\ &= \frac{1}{-4} \left[ - \left( u_{l-(J+1)}^r + u_{l-1}^r + u_{l+1}^r + u_{l+(J+1)}^r \right) + \delta^2 \rho_l \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

となる。2次元格子点で書き換えると

$$u_{i,j}^{r+1} = \frac{1}{-4} \left[ - \left( u_{i-1,j}^r + u_{i,j-1}^r + u_{i,j+1}^r + u_{i+1,j}^r \right) + \delta^2 \rho_{i,j} \right] \quad (\text{C.13})$$

となる。

## C.2 ガウス・ザイデル法

ヤコビ法の発展として、ガウス・ザイデル法では式 (C.8) を

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{x}^{r+1} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}^r + \mathbf{b} \quad (\text{C.14})$$

のように変形することで次の反復ステップでの  $\mathbf{x}$  を求める。この方法では、同じ反復ステップの中で  $\mathbf{x}$  の更新値を逐次使っていくため、ヤコビ法よりも早く収束する。一方で、計算の対称性が失われるため、計算結果にも非対称性が反映される。

## C.3 SOR 法

SOR(successive overrelaxation) 法のアルゴリズムを得るために、式 (C.14) を変形していく。式 (C.14) の右辺に  $(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{x}^r$  を足して引くと

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{x}^{r+1} &= (\mathbf{L} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{x}^r - (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^r + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^r &= -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^r - \mathbf{b}) \\ &= -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \boldsymbol{\xi}^r \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

となる。ここで  $\boldsymbol{\xi}^r$  は、 $r$  回目の反復ステップにおける式 (C.8) の残差ベクトルである。ガウス・ザイデル法で求まる1回の反復ステップでの  $\mathbf{x}$  の差を  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^r$  とおく。SOR法では、この  $\tilde{\mathbf{x}}$  に過緩和パラメータ  $\omega$  をかけた値を元の値に足すことで、より早く収束させる方法である。つまり、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{r+1} &= \mathbf{x}^r + \omega \tilde{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^r - \omega (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \boldsymbol{\xi}^r \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

として、適当な  $\omega$  ( $0 < \omega < 2$ ) を見つければよい。



## 付録 D

# 移流拡散方程式の数値安定性

2次元の移流拡散方程式 (5.49) の数値安定性について考える。式 (5.49) について、速度成分を定数とみなし、スタガード格子上で FTCS(Forward Time Centered Space) スキームを用いると

$$\begin{aligned} \frac{c_{j,l}^{n+1} - c_{j,l}^n}{\Delta t} = & -\frac{u}{\Delta x} \left( \frac{c_{j,l}^n + c_{j+1,l}^n}{2} - \frac{c_{j,l}^n + c_{j-1,l}^n}{2} \right) \\ & -\frac{v}{\Delta y} \left( \frac{c_{j,l}^n + c_{j,l+1}^n}{2} - \frac{c_{j,l}^n + c_{j,l-1}^n}{2} \right) \\ & + D \left( \frac{c_{j-1,l}^n - 2c_{j,l}^n + c_{j+1,l}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{c_{j,l-1}^n - 2c_{j,l}^n + c_{j,l+1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

となる。 $\Delta x = \Delta y = \delta$  として  $c_{j,l}^{n+1}$  について整理すると

$$\begin{aligned} c_{j,l}^{n+1} = & \left( 1 - \frac{4D\Delta t}{\delta^2} \right) c_{j,l}^n - \frac{u\Delta t}{2\delta} (c_{j+1,l}^n - c_{j-1,l}^n) - \frac{v\Delta t}{2\delta} (c_{j,l+1}^n - c_{j,l-1}^n) \\ & + \frac{D\Delta t}{\delta^2} (c_{j-1,l}^n + c_{j+1,l}^n + c_{j,l-1}^n + c_{j,l+1}^n) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

式 (D.2) の特解として

$$c_{j,l}^n = \xi^n e^{ik_x j \delta} e^{ik_y l \delta} \quad (\text{D.3})$$

を仮定し、式 (D.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \xi c_{j,l}^n = & \left( 1 - \frac{4D\Delta t}{\delta^2} \right) c_{j,l}^n - \frac{u\Delta t}{2\delta} (e^{ik_x \delta} - e^{-ik_x \delta}) c_{j,l}^n - \frac{v\Delta t}{2\delta} (e^{ik_y \delta} - e^{-ik_y \delta}) c_{j,l}^n \\ & + \frac{D\Delta t}{\delta^2} (e^{-ik_x \delta} + e^{ik_x \delta} + e^{-ik_y \delta} + e^{ik_y \delta}) c_{j,l}^n \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} \therefore \xi = & \left( 1 - \frac{4D\Delta t}{\delta^2} \right) - i \frac{u\Delta t}{\delta} \sin(k_x \delta) - i \frac{v\Delta t}{\delta} \sin(k_y \delta) + \frac{2D\Delta t}{\delta^2} (\cos(k_x \delta) + \cos(k_y \delta)) \\ = & 1 - \frac{4D\Delta t}{\delta^2} \left( \sin^2 \frac{k_x \delta}{2} + \sin^2 \frac{k_y \delta}{2} \right) - i \frac{u\Delta t}{\delta} \sin(k_x \delta) - i \frac{v\Delta t}{\delta} \sin(k_y \delta) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

よって、 $\xi = X + iY$  として実部と虚部に分けると

$$1 - \frac{8D\Delta t}{\delta^2} \leq X \leq 1 \quad (\text{D.6})$$

$$-\frac{\Delta t}{\delta}(u+v) \leq Y \leq \frac{\Delta t}{\delta}(u+v) \quad (\text{D.7})$$

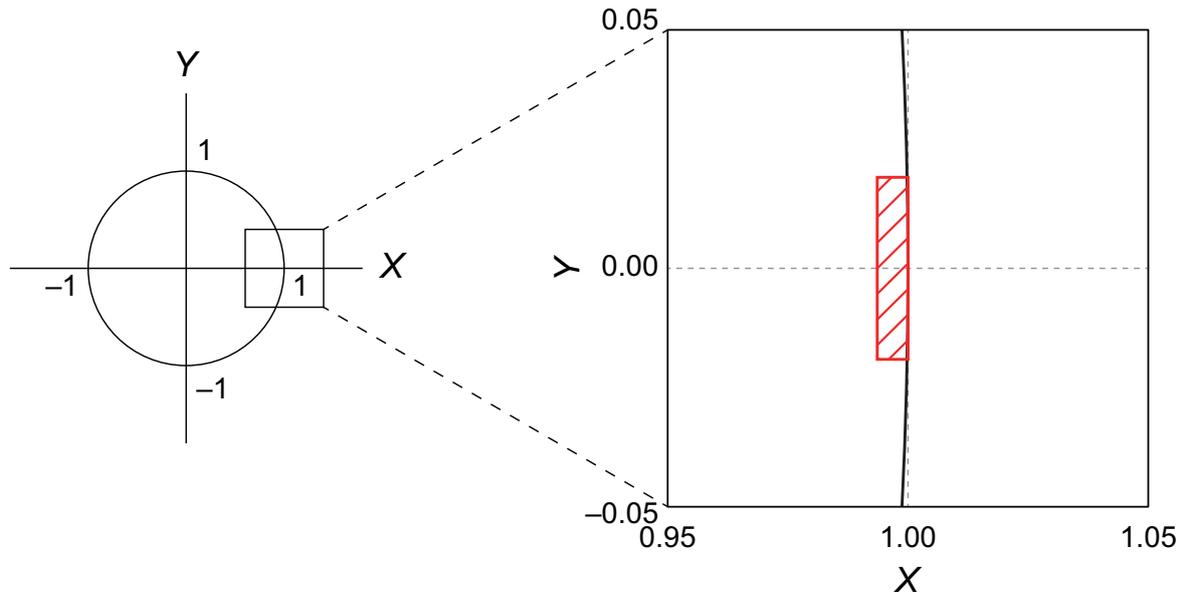


図 D.1 2次元移流拡散方程式 (5.49) の安定性条件。黒線は安定性条件  $|\xi| \leq 1$  を示す円、赤の斜線部は数値計算で取りうる領域をそれぞれ示す。

の範囲を取りうる。解が有限であるためには、増幅率  $\xi$  について  $|\xi| \leq 1$  が成り立てばよい。定数とみなした速度成分を、改めて  $|u|, |v|$  とし、6章の  $n = 1$  のシミュレーションで用いたパラメータと最大速度成分から  $X, Y$  の範囲を見積ると図 D.1 のようになる。 $|\xi| \leq 1$  を示す円の内部に、本研究で用いたパラメータによる  $\xi$  の取りうる範囲がほとんど含まれることがわかる。 $X = 1$  の近傍では不安定になりうるが、その場合も速度の時間発展により安定な領域に戻っていくと考えられる。

## 付録 E

# $\Gamma(\phi)$ のフーリエ成分 $a_k, b_k$ を用いた固有値 $\lambda$

6章では、各同期モードに対応する位相差の固定点について線形安定性解析を行った。固定点からの摂動の成長率に相当する固有値を  $\Gamma(\phi)$  の1次のフーリエ成分を用いて表し、固定点の安定性を評価した。ここでは、全てのフーリエ成分を用いた固有値の計算結果をまとめる。ただし、部分同相モード ( $n=3$ ) と 3-1 部分同相モード ( $n=4$ ) では厳密な固有値が得られなかった。 $a_1$  と  $b_1$  のみを用いた固有値は本文の表 6.2 に示した。

2 結合系について、同相モードに対応する固有値は

$$\lambda = -2 \sum_{k=1}^{\infty} k b_k, \quad (\text{E.1})$$

である。逆相モードに対応する固有値は

$$\lambda = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k b_k. \quad (\text{E.2})$$

である。固定点は安定または不安定なノードである。

3 結合系について、完全同相モードに対応する固有値は

$$\lambda = -3 \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \text{ (2重解)}, \quad (\text{E.3})$$

である。よって、固定点は安定または不安定なスターノードである。3相モードに対応する固有値は

$$\lambda = \frac{3}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_k b_k \pm i \sum_{k=1}^{\infty} B_k a_k \right), \quad (\text{E.4})$$

である。ただし、

$$A_k = \begin{cases} k & (k \neq 3l) \\ -2k & (k = 3l) \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (\text{E.5})$$

$$B_k = \begin{cases} 3k - 2 & (k = 3l - 2) \\ -(3k - 4) & (k = 3l - 1), \\ 0 & (k = 3l) \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots. \quad (\text{E.6})$$

である。よって、固定点は安定または不安定なスパイラルである。

4 結合系について、完全同相モードに対応する固有値は

$$\lambda = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \quad (3 \text{ 重解}), \quad (\text{E.7})$$

である。よって、固定点はスターノードである。4 相モードに対応する固有値は

$$\lambda = 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} C_k b_k \pm i \sum_{k=1}^{\infty} D_k a_k \right), \quad 8 \sum_{k=1}^{\infty} E_k b_k. \quad (\text{E.8})$$

である。ただし、

$$C_k = \begin{cases} k & (k = 2m - 1) \\ 0 & (k = 4m - 2), \quad m = 1, 2, \dots, \\ -2k & (k = 4m) \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

$$D_k = \begin{cases} k & (k = 4m - 3) \\ -k & (k = 4m - 1), \quad m = 1, 2, \dots, \\ 0 & (k = 2m) \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

$$E_k = \begin{cases} 0 & (k = 2m - 1) \\ k/2 & (k = 4m - 2), \quad m = 1, 2, \dots, \\ -k/2 & (k = 4m) \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

である。2-2 部分同相に対応する固有値は

$$\lambda = 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k b_k, \quad -8 \sum_{k=1}^{\infty} F_k b_k \quad (2 \text{ 重解}), \quad (\text{E.12})$$

である。ただし、

$$F_k = \begin{cases} 0 & (k \neq 2m) \\ k/2 & (k = 2m) \end{cases}, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (\text{E.13})$$

である。

すべての固有値の実部が正であれば、その固定点は安定である。上記に示した固有値より、フーリエ正弦係数  $b_k$  の符号から安定性を評価できる。

## 付録 F

# 非平衡構造の選択に関する基準の検討

6章では、非平衡構造の選択に関する基準として外容器の水位の変化率 ( $l$  の傾き) を検討し、 $n = 2, 3, 4$  について、安定な同期モードで最小の変化率を得た。ここでは、他の基準の候補として流体の粘性散逸を与える散逸関数と振動による流体の輸送量を検討する。

密度差振動子は重力下で密度差に起因する位置エネルギーをもち、振動に伴う粘性散逸によって熱に変換される。散逸関数  $\Phi$  は単位体積、単位時間あたりに変換される熱量を与え、

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left( e_{ik} e_{ik} - \frac{4}{3} \Theta^2 \right) \quad (\text{F.1})$$

$$e_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (\text{F.2})$$

$$\Theta = \text{div} \mathbf{v} \quad (\text{F.3})$$

とする [13]。ここで、 $e_{ik}$  は変形速度テンソルの成分である。連続の式より  $\Theta = \text{div} \mathbf{v} = 0$  であるから

$$\Phi = \frac{\mu}{2} e_{ik} e_{ik} \quad (\text{F.4})$$

となる。2次元では、流体の速度を  $\mathbf{v} = (u, v)$  とすると

$$\Phi = \frac{\mu}{2} e_{ik} e_{ik} \quad (\text{F.5})$$

$$= \frac{\mu}{2} (e_{11} e_{11} + e_{12} e_{12} + e_{21} e_{21} + e_{22} e_{22}) \quad (\text{F.6})$$

$$= \mu \left[ e_{12}^2 + \frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{22}^2) \right] \quad (\text{F.7})$$

$$= \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \quad (\text{F.8})$$

となり、スタガード格子を用いて離散化すると

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} = & \mu \left[ \frac{(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})/2 - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})/2}{2\Delta y} + \frac{(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1})/2 - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})/2}{2\Delta x} \right]^2 \\ & + 2\mu \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

となる。計算領域内の散逸関数を

$$\Phi_{\text{total}} = \sum_i \sum_j \Phi_{i,j} \quad (\text{F.10})$$

とする。

振動に伴う流体の輸送量は

$$J = \sum_i \left( \rho_{\text{high}} |Q_-^{(i)}| + \rho_{\text{low}} |Q_+^{(i)}| \right) \quad (\text{F.11})$$

$$Q_-^{(i)} = \begin{cases} Q^{(i)} & (Q^{(i)} < 0) \\ 0 & (Q^{(i)} \geq 0) \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

$$Q_+^{(i)} = \begin{cases} 0 & (Q^{(i)} \leq 0) \\ Q^{(i)} & (Q^{(i)} > 0) \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

として求める。

図 F.1 に、散逸関数  $\Phi_{\text{total}}$  と流体の輸送量  $J$  を時間について積分したものを示す。同期モード間でそれらの傾きを比較し、変化率の大小関係を調べ、安定な同期モードで優位な基準となりうるか確認する。結果として、 $n = 2$  と  $n = 4$  については、安定な同期モードで散逸関数と流体の輸送量の変化率が最大となった。一方、 $n = 3$  では、不安定な部分同相モードで散逸関数と流体の輸送量の変化率が最大となった。つまり、散逸関数の変化率と流体の輸送量の変化率のどちらも、 $n = 2, 3, 4$  のすべてに対しては安定な同期モードが優位になっていない。また、6 章で調べた  $l$  の傾き (図 6.9 参照) は、最大の傾きが最小の傾きの 2 倍以上あり、有意な差がみられたのに対し、今回の基準量についてはそれほど差がみられなかった。

ここで、散逸関数の取り方について妥当性を考える。本研究で用いた計算領域は、系全体ではなく、内容器近傍の一部である。よって、求めた  $\Phi_{\text{total}}$  も系の一部のエネルギー散逸を反映している。もし、エネルギー散逸がほとんど細孔内部で生じるとすれば、 $\Phi_{\text{total}}$  は系のおおよそのエネルギー散逸を反映しているといえる。図 F.1(a-4) は  $n = 1$  のシミュレーションで得られた計算領域全体の散逸関数  $\Phi_{\text{total}}$  と、細孔内部の散逸関数  $\Phi_{\text{hole}}$  をそれぞれ示している。 $\Phi_{\text{total}}$  中の  $\Phi_{\text{hole}}$  の割合は、それぞれの平均値から求めるとおおよそ 1 割程度であり、細孔以外での散逸が 9 割を占めることがわかる。つまり、本研究で計算領域に含まない部分におけるエネルギー散逸を考慮せずに、系全体のエネルギー散逸について議論することは、本研究のアプローチでは難しいといえる。

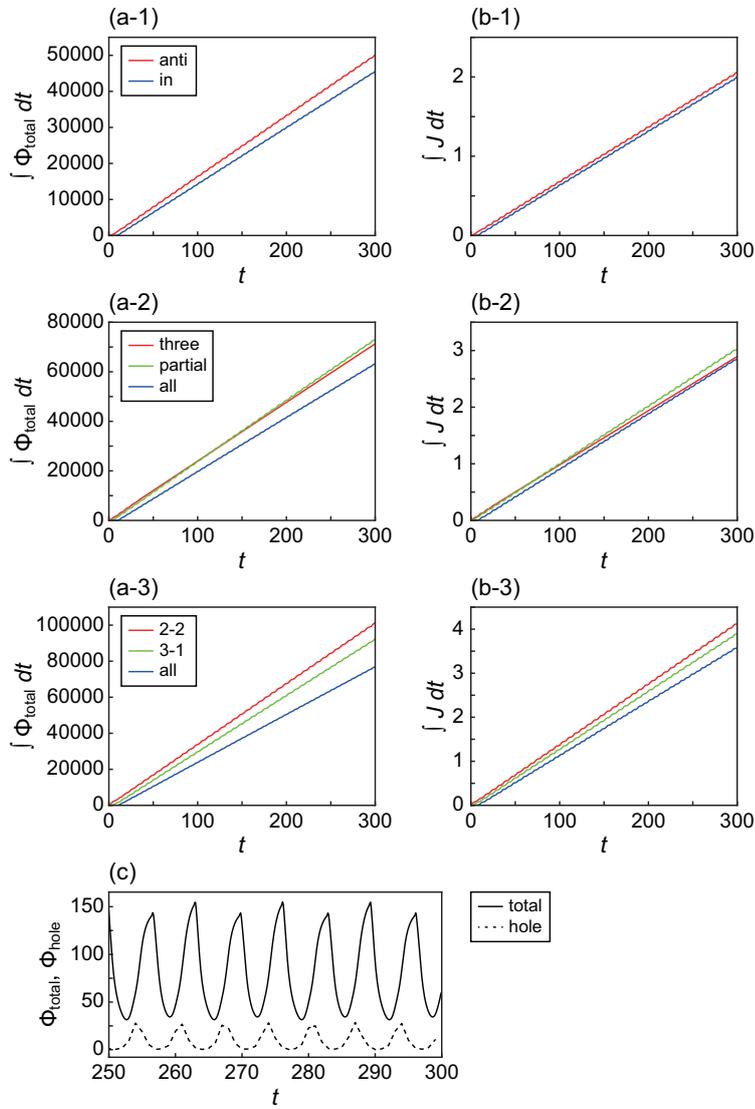


図 F.1 同期モード間での (a) 散逸関数  $\Phi_{\text{total}}$ 、(b) 輸送効率  $J$  の比較。時間で積分したものをプロットした。(a-1),(b-1)  $n = 2$ , (a-2),(b-2)  $n = 3$ , (a-3),(b-3)  $n = 4$ 。(c)  $n = 1$  のとき計算領域全体 (total) と細孔内部 (hole) の散逸関数の時系列。



## 付録 G

# 結合系における流体相互作用の効果

図 G.1 のように、振動子間に壁がない場合の系のふるまいを観察した。 $\Delta t = 0.0004$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.01$  であり、7章の数値計算より時間刻み・空間刻みを粗く取り計算した。また、 $i = 1$  の振動子で孔を振動子の中心から  $+0.1$  の位置に、 $i = 2$  の振動子で  $-0.1$  の位置に設定し、2 個の孔の距離を近くした。内容器幅  $d_{in} = 1$  に対し、外容器幅を十分大きく  $d_{out} = 50$  とした。 $\rho_{in}^{(1)} = \rho_{in}^{(2)} = 1.2$  であり、その他の物理的なパラメータは7章と等しい。

このとき系は、同相同期に収束した。図 G.2(a) は各振動子における内容器水位の時系列、(b) は  $t = 205$ ,  $t = 212$  での密度場である。流体相互作用によって同期が生じるメカニズムを調べるために、各振動子による流れの間にどのような流体の構造が生じているか解析すること、或いは2個の孔の距離をさらに近づけると同期モードはどうなるかを調べることは今後の課題である。

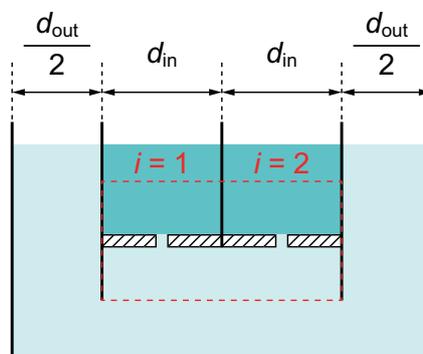


図 G.1 流体相互作用がはたらく密度差振動子の結合系モデル。

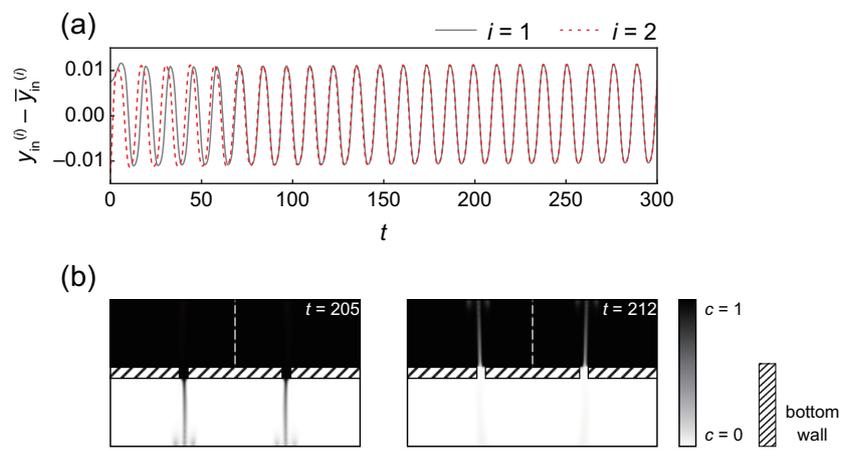


図 G.2 流体相互作用下でみられる同相同期。(a) 内容器の水位。(b) 密度場。