

## 両端を固定した弦における振動のシミュレーションプログラムの開発

藤本 茂雄<sup>1)</sup>・三野 弘文<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 千葉大学国際未来教育基幹 <sup>2)</sup> 千葉大学大学院国際学術研究院

Development of simulation program for String vibration fixed at both ends

FUJIMOTO Shigeo, MINO Hirofumi

### 要旨

弦の振動は波動現象としてよく知られたテーマであるが、共振状態と比べて非共振状態が扱われることは少なく、非共振状態の弦の様子を目にする機会は多くない。本研究では、シミュレーションを通じて非共振状態を体験する機会を得るために、両端を固定した弦の1点に周期的な外力を与えた際に生じる振動を取り上げ、その振動に現れる非共振状態と共振状態を観察可能なシミュレーションプログラムを開発した。シミュレーションでは利用者自身で外力の振動数を設定でき、非共振状態から共振状態への移り変わりの様子を観察可能である。加えて外力を与える位置も設定可能であり、位置の変化によって非共振状態から共振状態への移り変わりの様子に変化することを確認した。またLMSを通じた利用も考慮して、作成したシミュレーションプログラムをLMSとして広く利用されているMoodleで実行する方法についても説明する。

### キーワード

弦の振動、強制振動、シミュレーション教材、Moodle

## 1. はじめに

弦の振動は波動現象としてよく知られたテーマである。大学初年次向けの教科書だけでなく、高等学校向けの教科書においても取り上げられているが、その多くは共振状態の説明のみである。一方、弦の振動の理解において、共振状態だけでなく非共振状態にも注目すべきであることが福山ら<sup>[1]</sup>や伊東<sup>[2]</sup>によって指摘されている。福山らや伊東によって、メルデの実験における非共振状態の弦の振動について紹介されているが、共振状態と比べて非共振状態を文献等で目にする機会は少ない。そこで本研究では、シミュレーションを利用して非共振状態を体験する機会を得るためのシミュレーションプログラムを作成する。

また作成したシミュレーションプログラムを利用する環境についても考えたい。

近年、多くの教育機関で学習管理システム（Learning Management System: LMS）が導入されるとともに、授業情報の共有や教材の提供等にLMSの活用が進められてきた。図1の2つのグラフはそれぞれ、大学設置者別で見たLMSの全学導入・運用状況の経年比較、および利用しているLMSの種類である<sup>[3]</sup>。LMS利用の増加に加えて、利用されているLMSとしてMoodleの割合が大きいたことが確認できる。

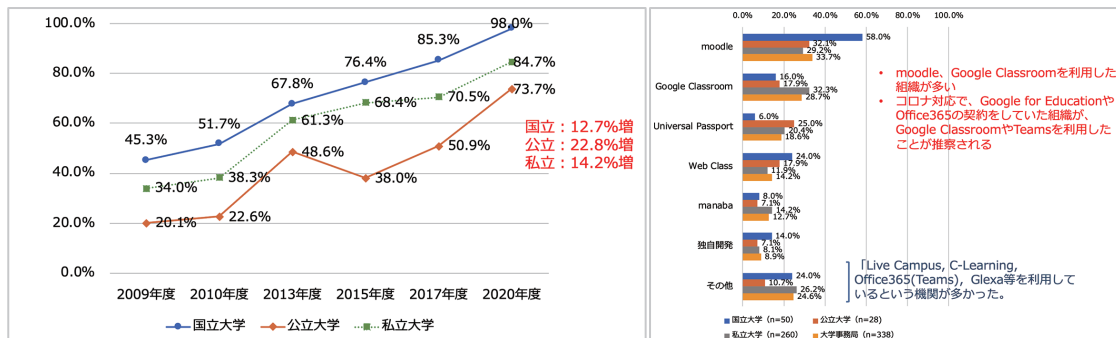


図1 大学設置者別で見たLMSの全学導入・運用状況の経年比較（左図）と利用しているLMSの種類（右図）<sup>[3]</sup>。

本研究では、弦の振動に対する理解を深めるための教材として、両端を固定した弦の振動における共振状態だけでなく、非共振状態から共振状態への移行の様子も観察することのできるシミュレーションプログラムの作成を目的とする。また、Moodleが多くの教育機関で利用されていることより（著者らの所属大学でも利用している）、作成したシミュレーションプログラムのMoodleへの掲載および実行方法についても説明する。

## 2. 理論

### 2.1 両端を固定した弦の強制振動

長さ  $L$  の両端を固定された弦の振動について、強制振動の波動方程式を解き、弦の変位を求める。

まず波動方程式を示す。弦の水平方向に  $x$  軸をとり、時刻  $t$  における位置  $x$  での弦の鉛直方向の変位を  $y(x, t)$  とする。また、波の速さを  $c = \sqrt{S/\rho}$  とする。ここで  $S$  は弦にはたらく張力、 $\rho$  は弦の線密度を表す。加えて、弦の単位長さあたりにはたらく外力を  $F(x, t)$  とすると、 $0 \leq x \leq L$  において弦の強制振動を示す波動方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1)$$

と表される。ここで、 $f(x, t) = F(x, t)/\rho$  である。

式 (1) に加えて2つの条件を設定する。まず境界条件を設定する。いま弦は両端を固定されていると考えているため、その両端での変位を0と設定する:

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0. \quad (2)$$

加えて初期条件を設定する。ここでは以下のように設定する:

$$y(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

式 (3) で与えられる初期条件のもとでは自由振動は存在しないため、求める変位  $y(x, t)$  は強制振動解のみで構成されている。

以下では、フーリエの方法を利用して変位  $y(x, t)$  を求める。

式 (2) の境界条件を満たす固有関数  $\sin(k_n x)$  ( $k_n = n\pi/L$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ ) を用いて、変位  $y(x, t)$  および外力  $f(x, t)$  を

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(k_n x), \quad (4)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(k_n x) \quad (5)$$

と展開する。ここで式 (5) における  $f_n(t)$  は

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin(k_n x) dx \quad (6)$$

で与えられる。さて、式 (4) および式 (5) を式 (1) に代入して整理すると

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) = f_n(t) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7)$$

が得られる。ここで、 $\omega_n = ck_n = nc\pi/L$  ( $n=1, 2, \dots$ ) である。この式を  $a(0) = 0$  および  $\left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$  という条件のもとで解くことで

$$a_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad (8)$$

を得る。したがって、変位  $y(x, t)$  は式 (4)、式 (8) より

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad (9)$$

と求めることができる。

## 2.2 弦の1点に周期的な外力を加えた場合の振動解

ここでは、弦の1点に周期的な外力を加える場合を考える。すなわち

$$f(x, t) = f_0 \sin(\omega t) \delta(x - x_0) \quad (10)$$

とする。ここで  $\delta(x)$  はディラックのデルタ関数である。このとき、式 (6) は

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{L} f_0 \sin(\omega t) \sin(k_n x_0) \quad (11)$$

となり、これを式 (9) に代入することで変位  $y(x, t)$  が求まる。ここで、非共振状態 ( $\omega \neq \omega_n$ ) の場合と共振状態 ( $\omega = \omega_m$ , ここで  $m$  は  $n=1, 2, \dots, m, \dots$  と分類される固有状態の1つとする) に分けて表すと変位  $y(x, t)$  は次のようになる:

非共振状態 ( $\omega \neq \omega_n$ )

$$y(x, t) = \frac{2f_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x_0) \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega_n^2 - \omega^2} - \frac{\omega}{\omega_n} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \sin(k_n x), \quad (12)$$

共振状態 ( $\omega = \omega_m$ )

$$y(x, t) = -\frac{f_0}{\omega_m^2 L} [\omega_m t \cos(\omega_m t) - \sin(\omega_m t)] \sin(k_m x_0) \sin(k_m x) \\ + \frac{2f_0}{L} \sum_{n \neq m} \left[ \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_n^2 - \omega_m^2} - \frac{\omega_m}{\omega_n} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \right] \sin(k_n x_0) \sin(k_n x). \quad (13)$$

式 (13) は  $\omega = \omega_m$  で表される共振状態の変位を表しており、右辺の4つの項のうち1項目は振幅が  $\frac{f_0}{\omega_m L} \sin(k_m x_0) \sin(k_m x) t$  と時刻  $t$  に比例して増大する共振項である。ただし、実際の振動では抵抗がはたらくため振幅の発散は抑えられる。

## 3. シミュレーションプログラム

### 3.1 開発言語と実装

本研究では、シミュレーションプログラムの実行環境をWebブラウザと想定し、開発言語としてJavaScriptを利用した。また作成にあたってはグラフィックスに関するコー

ディングを効率的に進められるようにJavaScriptライブラリのp5.jsを利用した<sup>[4]</sup>。なおp5.jsはJavaをベースとした開発環境であるProcessing<sup>[5]</sup>をJavaScriptで使えるようにライブラリ化したものである。Processingを用いた物理シミュレーション教材の作成方法の詳細については、吉田らの論文<sup>[6]</sup>を参考にされたい。

図2は、作成したシミュレーションの実行画面である。それぞれの機能について説明する。また、表1に機能のまとめを示す。

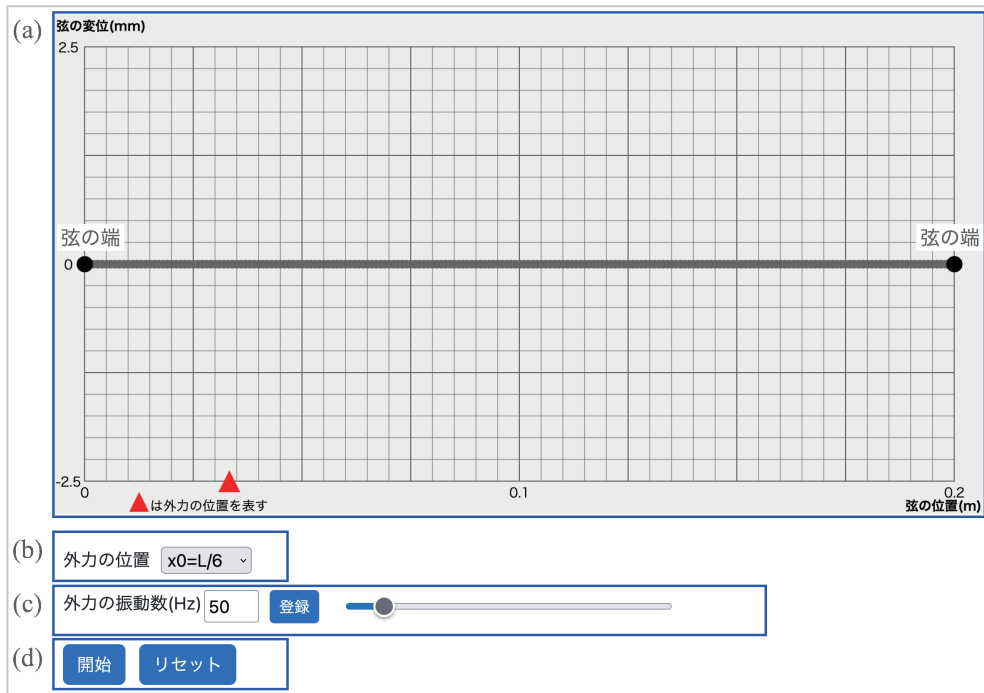


図2 シミュレーションの実行画面。(a) のグラフの横軸は弦の位置、縦軸は変位を表す。また、弦の両端（固定）を黒丸、外力を与える位置  $x_0$  を三角で示している。ここで弦の長さを  $L=0.2$  m とした。

領域 (a) には弦の振動の様子が表示される。領域 (b) では弦に加える外力の位置  $x_0$  を選択できるようにして、力を加える点を変化させたときの様子を確認できるようにした。領域 (c) では外力の振動数を変化させることができ、振動数を調整することで非共振状態と共振状態の双方を確認ができるようにした。振動数を変化させる操作は、スライダーを用いた操作とテキストボックスへの記入の2種類を用意している。領域 (d) では「開始/停止」ボタンによるシミュレーションの実行と停止、「リセット」ボタンによる初期化を行うことができる。

表1 弦の振動シミュレーションプログラムの機能

領域	機能
(a)	弦の振動のシミュレーションの様子を表示
(b)	弦に加える外力の位置を選択
(c)	外力の振動数を設定
(d)	シミュレーションの実行と停止、初期化

### 3.2 Moodleへの掲載と実行

ここでは、多くの教育機関で利用されているLMSのひとつであるMoodle<sup>[7]</sup>にて、作成したシミュレーションプログラムを公開する方法を説明する。動作確認についてはMoodleのバージョン4.1.3を用いて行った。

用意するファイルは、ブラウザでアクセスする際に利用するHTMLファイル（仮名称をindex.htmlとする）、シミュレーションプログラムの書かれたJavaScriptファイル（仮名称をsimulation.jsとする）になる。また、これら以外にもプログラムで利用しているライブラリやCascading Style Sheets(CSS)などがあればそれらも用意する必要がある（ただしContents Delivery Network(CDN)を利用している場合は不要）。

教師ロールを持つユーザでMoodleのコースにアクセスして編集モードを開始する。その後の具体的な操作は次のとおりである。

- (1) 「活動またはリソースを追加する」から「ファイル」を選択する
- (2) 事前を用意した上記ファイル（index.htmlやsimulation.jsなど）をアップロードする
- (3) アップロードしたindex.htmlをクリックすると「メインファイルに設定する」という項目があるので、これを選択する（図3左図）。この操作により、フォルダ内に複数のファイルがある場合はメインファイルに設定したファイルが表示されるようになる
- (4) 「ファイル」の設定を保存する

以上の操作により、シミュレーションをMoodleのコースで実行することができるようになる（図3右図）。図3は、「ファイル」の設定画面とMoodleで表示した画面である。ここではMoodleでの画面であることが分かりやすいように、表示方法として「埋め込み」を選択した。

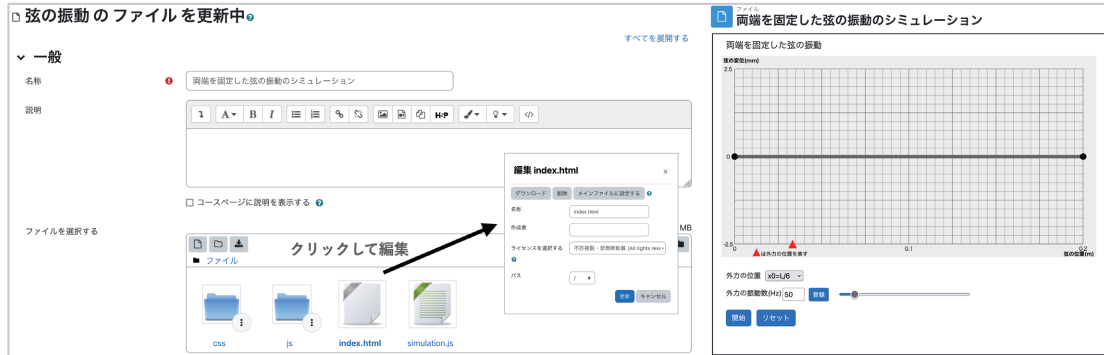


図3 Moodleの「ファイル」の設定画面（左図）とMoodleに「ファイル」として掲載して実行した画面（右図）。

シミュレーションをMoodle内で実行できるようになると、シミュレーションを実行した上でそれを踏まえた小テストに取り組む、または解説にシミュレーションに取り組むなど、Moodleの他の機能との組み合わせた利用も考えられる。

#### 4. シミュレーションの結果と考察

ここでは、シミュレーションにおいて変更可能なパラメータとした外力の振動数の変化による影響と外力を与える位置の変化による影響について確認する。

##### 4.1 外力の振動数の変化による影響

外力の振動数の変化による影響を確認するにあたって、ここでは共振状態の振動数を簡単にするために、弦の長さを  $L=0.2$  m、波の速さを  $c=40$  m/s とした。この場合、基本振動の振動数は  $v_1=c/2L=100$  Hz となる。なお、 $n$  倍振動の振動数は  $v_n=n(c/2L)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  と表される。また  $f_0=10$   $m^2/s^2$  とした。

図4は、外力の振動数を110 Hzから190 Hzまで変化させた場合の時刻  $t=T/4$  と  $t=7T/4$  での弦の振動の様子である ( $T$ は周期)。図4の一連の図は基本振動（振動数100 Hz）と2倍振動（振動数200 Hz）の間の振動に対応しており、基本振動と2倍振動の間の非共振状態に対応する。また、いずれの場合も外力を与える位置は  $x_0=L/6$  に固定している。弦の両端以外にも変位がほぼゼロの点が生じており、この点は外力の振動数の変化に対応して移動する。外力の振動数が2倍振動の振動数に近づくとき、この変位がほぼゼロの点は2倍振動の節の位置に対応する  $L/2$  に近づいており、非共振状態から共振状態への移り変わりの様子を観察することができる。

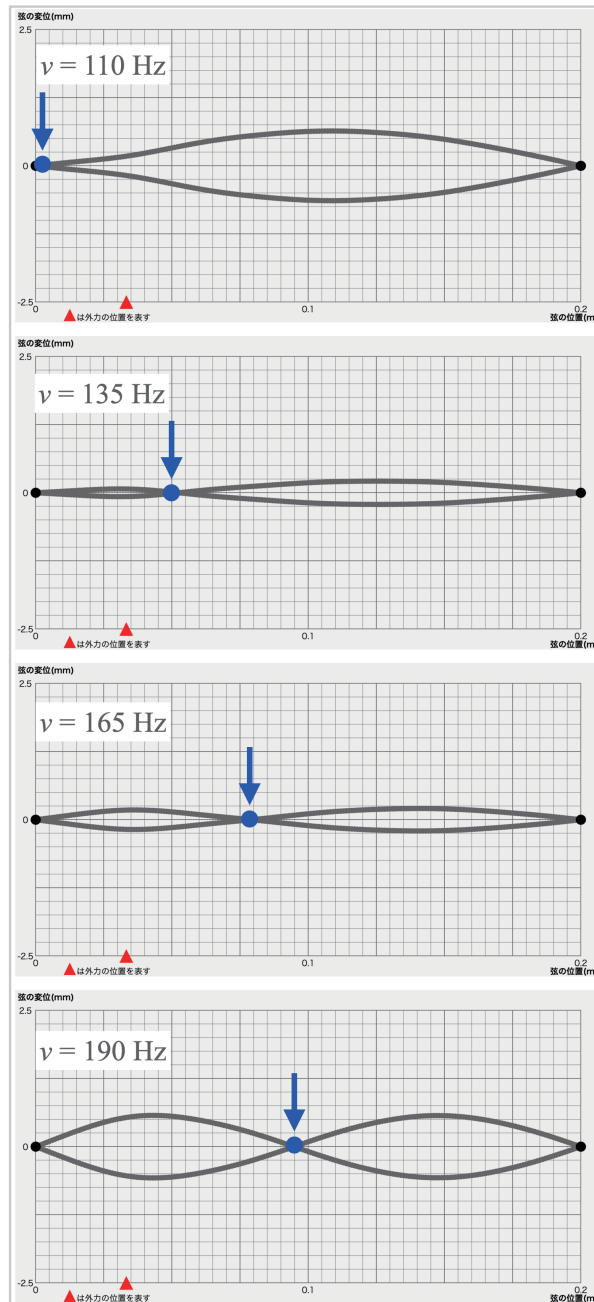


図4 外力の振動数変化に伴う変位がほぼゼロの点 (丸と矢印で示した点) の移動の様子。ここでは  $t=T/4, 7T/4$ での振動の様子を示す ( $T$ は周期)。

#### 4.2 外力の位置の変化による影響

外力の振動数を200 Hz、すなわち2倍振動に対応する振動数に設定して、外力を加える位置を変化させた場合の影響を確認する。図5の左の図では  $x_0=L/2$  に外力を加えた場合である ( $t=5.05T, 5.55T$ )。この場合変位の増大は見られない。これは  $x_0=L/2$  が2倍振動の節に対応しているためである。一方、 $x_0=L/6$  のように外力を与える位置を  $L/2$  からずらすと、2倍振動に対応する変位の増大が見られる (図5の右図)。

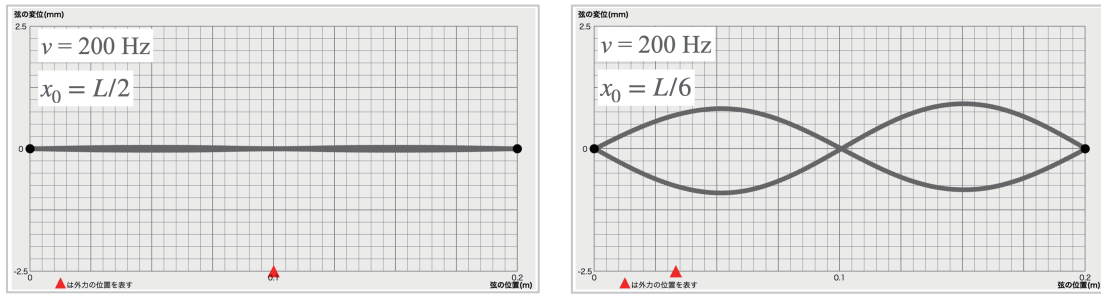


図5 2倍振動における振動節に対応する点に外力を加えても変位の増大は見られない。

4.1節では、非共振状態において変位がほぼゼロの点が外力の振動数の変化とともに移動することを確認したが、図6は外力を加える位置を変更した場合の影響を確認したものである ( $t=T/4, 7T/4$ )。外力を加える位置を弦の中心に対して左右に反転させると、それに合わせて変位がほぼゼロの点も反転する様子を確認できる。

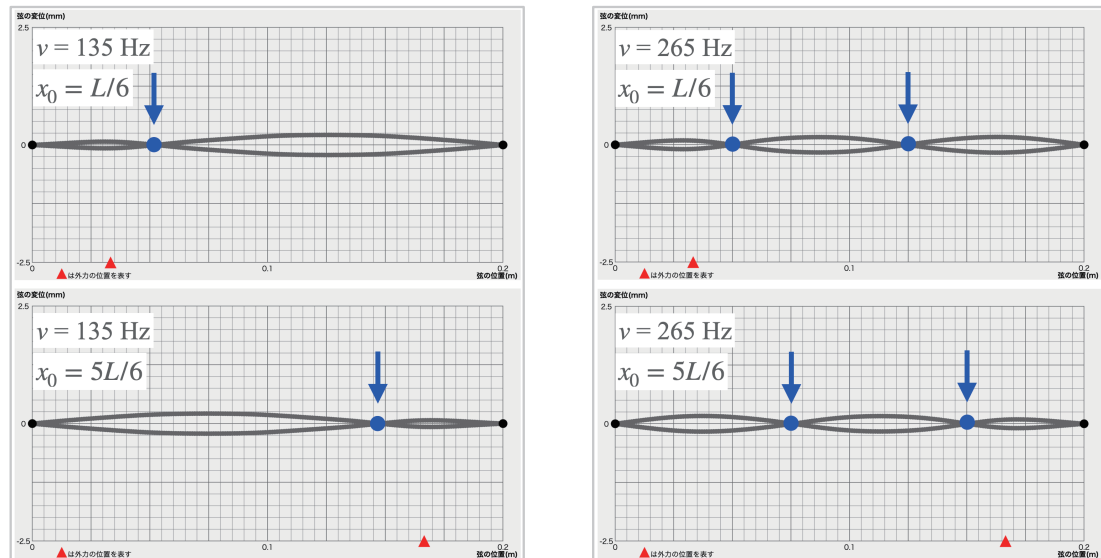


図6 振動数の変化に伴う変位がほぼゼロの点（丸と矢印で示した点）の移動の様子。左図は基本振動と2倍振動の間の非共振状態、右図は2倍振動と3倍振動の間の非共振状態に対応する。

また、図7には外力を与える位置が異なる場合の3倍振動から4倍振動への移り変わりの様子を示す。外力を与える点を  $x_0=L/6$  とした場合は、 $\nu=360$  Hzで弦の左端に変位がほぼゼロとなる領域が見られた後に変位がほぼゼロの点が生じているのに対して、 $x_0=L/3$  に外力を与えた場合は、 $\nu=320$  Hzで  $x_0=L/3$  付近に変位がほぼゼロとなる領域が見られた後に、その領域が左右に分かれるように変位がほぼゼロの点が生じている。また  $\nu=380$  Hzにおいて確認できる4つある変位の増大は、 $x_0=L/6$  に外力を加えた場合は左端が最も小さく、 $x_0=L/3$ に外力を加えた場合は左から2番目が最も小さい。このように、外力を与える位置によって共振状態への移行の様子が異なることを確認できる。

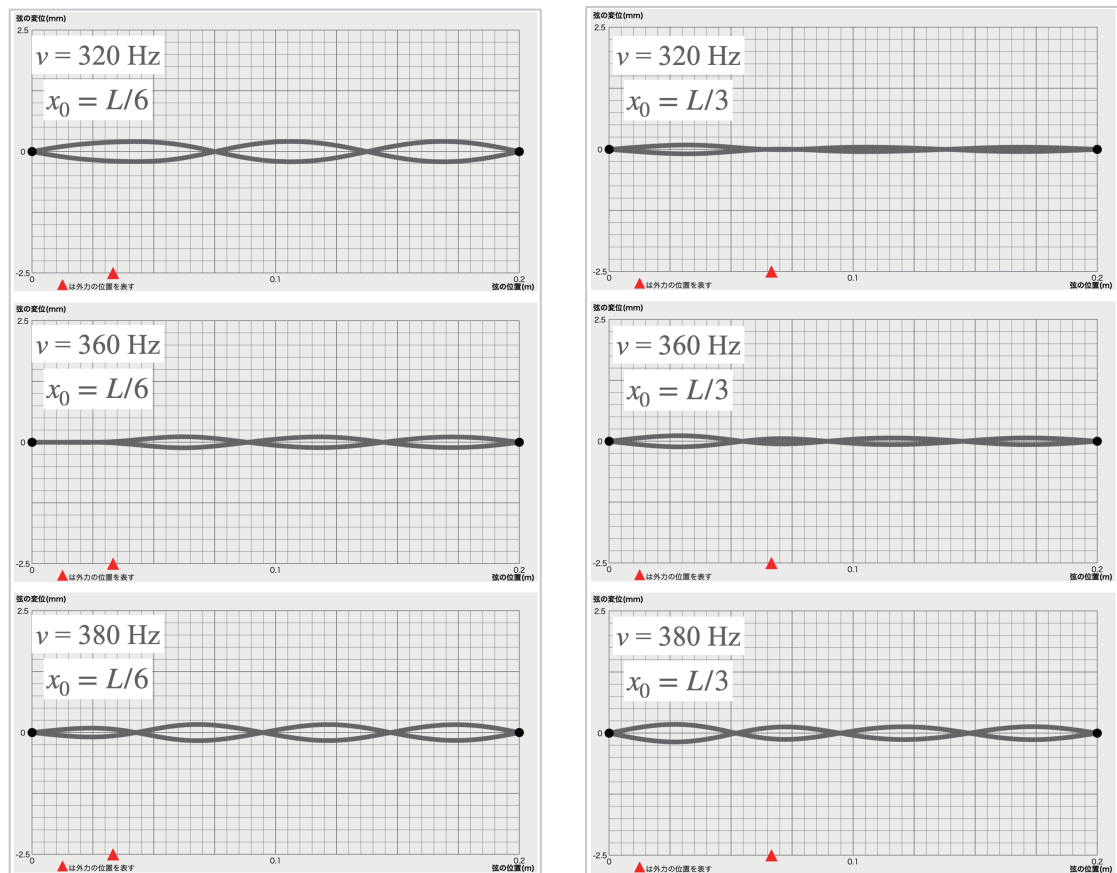


図7 3倍振動から4倍振動への移り変わりの様子。変位がほぼゼロの点となる点に対する外力を与える位置の依存性。

## 5. まとめ

本研究では、グラフィックスやアニメーション等のビジュアルプログラミングにおいて定評のあるJavaScriptライブラリp5.jsを利用して、両端を固定した弦の強制振動に関するシミュレーション教材を作成した。利用者各自で外力の振動数や外力の作用する位置を変化させられるようにすることで、弦の振動におけるこれらの影響を体験できるように設計した。また、福山ら<sup>[1]</sup>や伊東<sup>[2]</sup>によって指摘されていたメルデの実験における非共振状態から共振状態への変化の様子と同様の変化を、両端固定かつ弦の1点に周期的な力を加えた場合の弦の振動においても確認した。加えて、3倍振動から4倍振動への移り変わりにおいて、外力の位置を変化させた場合の変位がほぼゼロとなる点の生じ方が外力の位置に依存することを確認した。

本研究ではシミュレーションについてのみ取り扱ったが、シミュレーションだけでなく実際の実験との比較も必要と思われる。またMoodleでのシミュレーションとMoodleの既存の機能と組み合わせた教材も考えられるが、これらの点については今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] 福山豊、阿部由美子、広瀬美恵子、富山哲之 (1986). 「電磁音叉における弦の共振現象」『物理教育』、第34巻第4号, 237 - 241.
- [2] 伊東正人 (2023). 「メルデの実験における弦の振動解とその観察」『物理教育』, 第71巻第2号, 106 - 109.
- [3] 大学ICT推進協議会 ICT利活用調査部会. 高等教育機関におけるICT利活用の現状と展望～令和2年度調査の結果から～,  
[https://ict.axies.jp/\\_media/sites/11/2022/01/20211217\\_ictsurvey\\_all.pdf](https://ict.axies.jp/_media/sites/11/2022/01/20211217_ictsurvey_all.pdf) (accessed 2023-11-10).
- [4] p5.js, <https://p5js.org/> (accessed 2023-10-31).
- [5] Processing, <https://processing.org/> (accessed 2023-10-31).
- [6] 吉田賢二、三野弘文 (2022). 「Processingを用いた物理シミュレーション教材の制作 - 斜方投射を例にして -」, 『千葉大学国際教養学研究』, 第6巻, 185 - 207.
- [7] moodle.org, <https://moodle.org/> (accessed 2023-10-31).